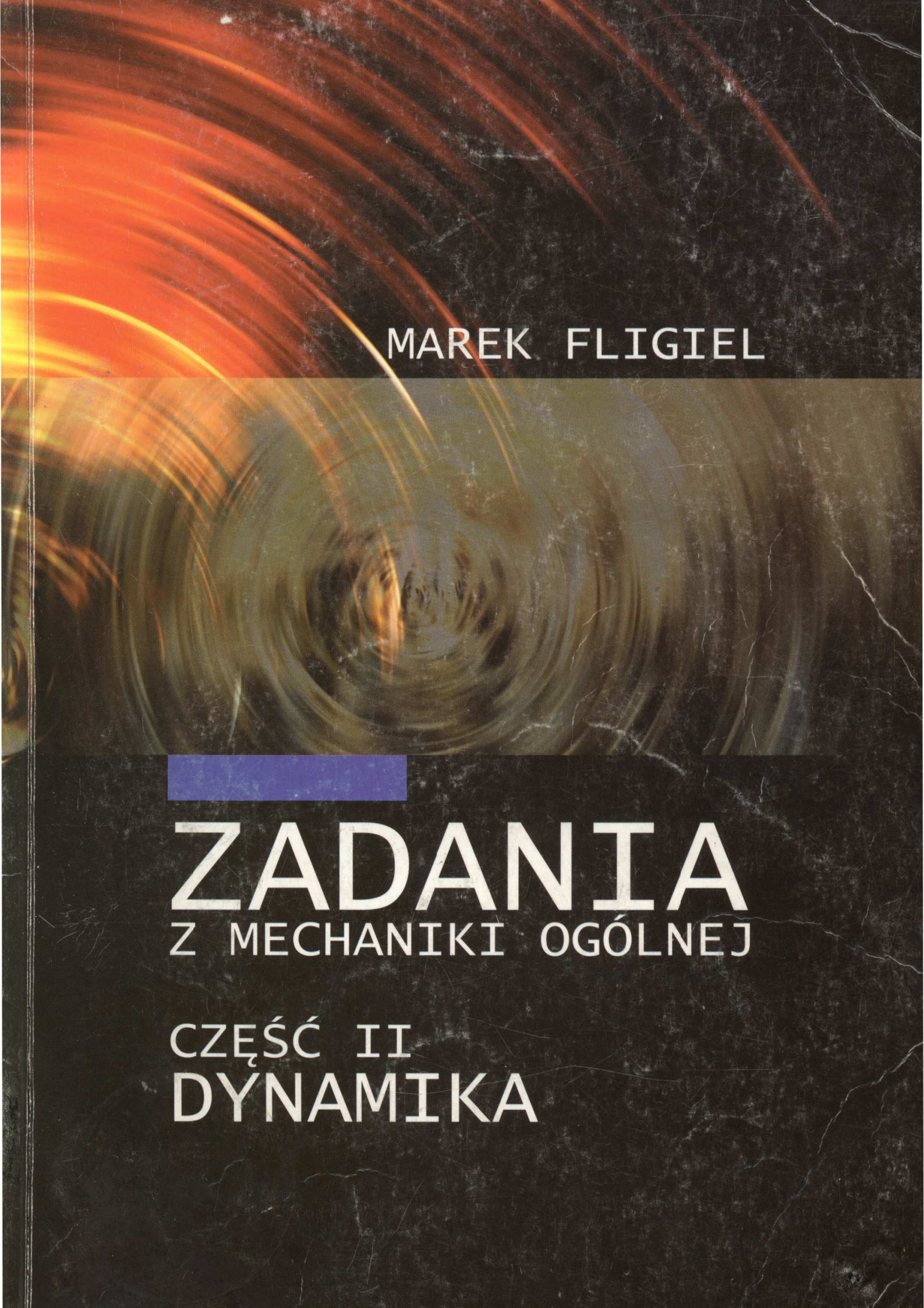


MAREK FLIGIEL

ZADANIA
Z MECHANIKI OGÓLNEJ

CZĘŚĆ II
DYNAMIKA

Zadania z mechaniki ogólnej

MAREK FLIGIEL

Zadania z mechaniki ogólnej

Dynamika

Część II

ISBN 83-7365-038-5

Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej
Jarosław Diakun

Recenzenci
Stanisław Dobrociński
Stefan Szczeciński

Redaktor
Bronisław Słowiński

Projekt okładki
Tadeusz Walczak

© Copyright by Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej
Koszalin 2003

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ
75–620 Koszalin, ul. Racławicka 15–17

Koszalin 2003, wyd. I, ark. wyd. 5,2, format B–5, nakład 500 egz.
Druk: INTRO-DRUK, Koszalin

Spis treści

PRZEDMOWA **7**

I. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO **9**

1. Obliczanie sił w zadanym ruchu punktu (zagadnienie proste dynamiki) 9

2. Równania różniczkowe ruchu punktu (zagadnienie odwrotne dynamiki) 14
   2.1. Ruch punktu swobodnego 14
      pod działaniem siły stałej 14
      pod działaniem siły zależnej od czasu 18
      pod działaniem siły zależnej od prędkości 22
      pod działaniem siły zależnej od położenia 26
   2.2. Ruch punktu nieswobodnego 32

3. Ogólne zasady dynamiki 36
   3.1. Zasada d'Alemberta 36
   3.2. Zasada pędu i krętu 40
   3.3. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy 47
   3.4. Zasada zachowania energii mechanicznej 52
   3.5. Zasada ruchu środka masy 58

II. DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ **63**

1. Masowe momenty bezwładności i dewiacji (zboczenia) brył 63

2. Ruch obrotowy 71
   2.1. Równanie dynamiczne ruchu obrotowego 71
   2.2. Zasada d'Alemberta 78
   2.3. Zasada krętu, zasada zachowania krętu 83
   2.4. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy 91
   2.5. Reakcje dynamiczne łożysk 97

3. Ruch płaski 103
   3.1. Równania dynamiczne ruchu płaskiego 103
   3.2. Zasada pędu i krętu 113
   3.3. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy 118

4. Ruch złożony (względny). Siły dynamiczne. Równania dynamiczne ruchu względnego 126

5. Ruch kulisty. Równania dynamiczne ruchu kulistego 134

LITERATURA **141**

PRZEDMOWA

Treść niniejszego skryptu jest zgodna z programem nauczania na Wydziale Mechanicznym Politechniki Koszalińskiej. Przeznaczony jest dla studentów studiów dziennych, wieczorowych i zaocznych. Przedstawiony w skrypcie zakres mechaniki jest komplementarny z wymaganiami programowymi różnych kierunków na wydziale. Ze względu na zróżnicowany stopień trudności rozwiązywania zadań skrypt może być stosowany do opanowania i utrwalenia niezbędnej wiedzy z mechaniki na innych wydziałach, gdzie wykładana jest mechanika. Wiedza uzyskana przez studentów na wykładach z matematyki w zakresie minimów programowych dla kierunków prowadzonych na wydziałach mechanicznych, jest wystarczająca dla opanowania materiału przedstawionego w skrypcie.

Zaprezentowane podejście do zagadnień dynamicznych z podkreśleniem metod układania i rozwiązywania równań dynamicznych (różniczkowych) ruchu i ich interpretacji fizycznej, a także ogólnych zasad dynamiki punktu i bryły daje studentowi, a także szerszemu kręgowi czytelników możliwość poznania mechaniki i jej stosowania w praktyce inżynierskiej. Skrypt powinien ułatwić rozwiązywanie szczegółowych problemów inżynierskich ze względu na zastosowaną w każdym zadaniu formę i tok rozwiązania. Dla poszczególnych specjalności skrypt może być pierwszym podręcznikiem dającym podstawy do rozwiązywania zagadnień szczegółowych danej specjalności – zagadnień specjalistycznych. Forma postawienia każdego zadania i tok jego rozwiązania polega na przedstawieniu, każdego zadania w postaci mini wykładu w powiązaniu z obrazującym przykład szkicem, a w rozwiązaniu – oprócz toku kolejnych niezbędnych wzorów, zamieszczono wyjaśnienia słowne uzasadniające przyjętą koncepcję uzyskania wyniku. Takie przedstawienie materiału w skrypcie stało się nie tylko zestawem zadań i ich rozwiązań, ale także – skondensowanym wykładem ilustrującym kolejne zadania.

Schemat rozwiązania zadań w poszczególnych rozdziałach i podrozdziałach jest następujący. Na początku rozwiązania przytacza się wszystkie siły, momenty itp., oddziaływujące na punkt materialny lub bryłę. Dalej, w zwartej formie przytacza się „regułę", z której w dalszym toku rozwiązywania zadań korzysta się. Następnie poprzez analizę oddziaływań fizycznych tworzy się niezbędne związki i równania matematyczne w powiązaniu z przytoczoną „regułą", które w dalszej kolejności są rozwiązywane. W każdym podrozdziale oprócz zadań rozwiązanych są przytoczone zadania do samodzielnego rozwiązania przez studenta z odpowiedziami rozwiązań.

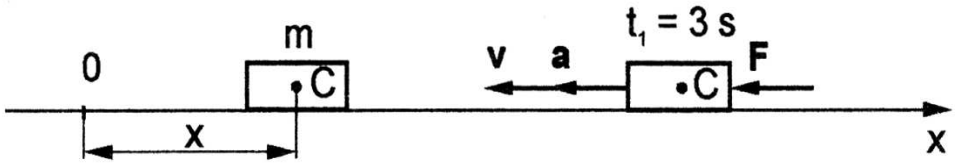
Autor pracy pragnąłby, aby założony cel napisania skryptu, jakim jest podanie w zwartej formie i uporządkowanej od strony sposobu przedstawienia i podstaw teoretycznych oraz metodyki rozwiązywania zadań z mechaniki został osiągnięty, a jego realizacja w postaci wydania książkowego przyczyniła się do szybszego i łatwiejszego poznania przez studentów korzystających ze skryptu niełatwej dziedziny wiedzy, jaką jest mechanika.

I. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

1. Obliczanie sił w zadanym ruchu punktu (zagadnienie proste dynamiki)

Zadanie 1

Ciało (rozpatrujemy jako punkt materialny C) o masie m = 2 kg porusza się po linii prostej (rys. 1). Położenie punktu na prostej określa równanie ruchu $x = -2t^3 - 4t^2 + 6t - 3$, gdzie x w metrach, a czas t w sekundach. Wyznaczyć wielkość siły działającej na punkt jako funkcję czasu oraz wartość, kierunek i zwrot siły w chwili $t_1 = 3$ s.



Rys. 1

Rozwiązanie

Prędkość V i przyspieszenie a punktu materialnego w dowolnej chwili czasu t jest:

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -6t^2 - 8t + 6,$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dV}{dt} = -12t - 8.$$

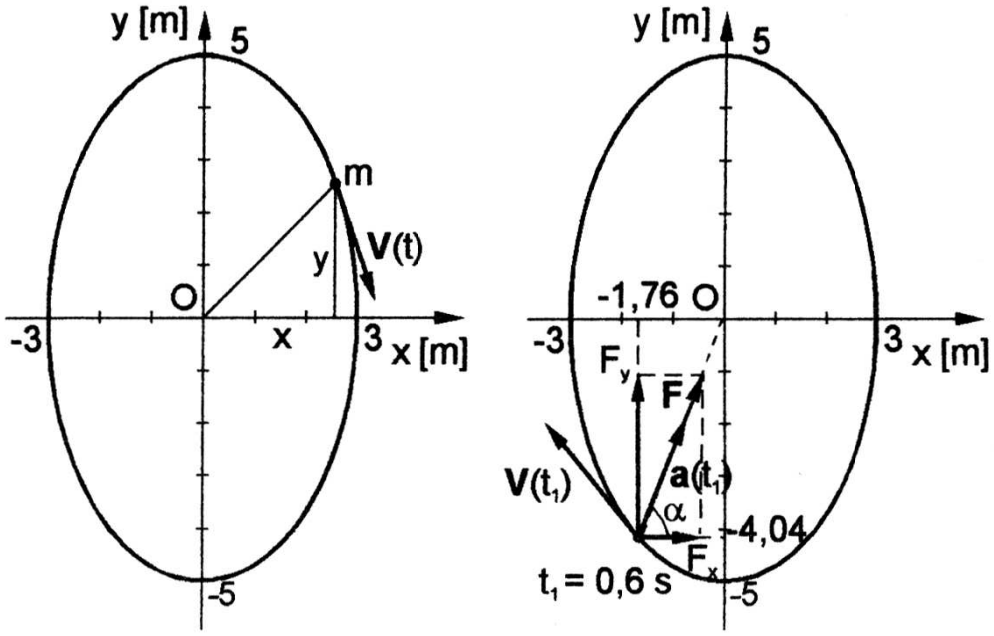
Siła F wywołująca ruch punktu, zgodnie z II–gim prawem Newtona, jest określona zależnością:

$$F = m\ddot{x} = m(-12t - 8).$$

W chwili $t_1 = 3$ s, współrzędna położenia punktu x = –75 m, wartość prędkości V = –72 m/s, przyspieszenia a = –44 m/s^2, siły F = –88 N. Kierunek siły F jest zgodny z kierunkiem osi x, natomiast zwrot jej jest przeciwny do zwrotu tej osi.

Zadanie 2

Punkt materialny o masie m = 0,2 kg porusza się w płaszczyźnie Oxy (rys. 2) zgodnie z równaniami ruchu danymi w postaci parametrycznej: $x = 3\sin 2\pi t$, $y = 5\cos 2\pi t$, x, y w metrach, a czas t w sekundach. Wyznaczyć siłę wywołującą ruch punktu w funkcji czasu oraz dla $t_1 = 0{,}6$ s jej wartość.



Rys. 2

Rozwiązanie

Ruch punktu odbywa się po torze eliptycznym (rys. 2) o równaniu:

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1,$$

i dla chwili $t_1 = 0{,}6$ s współrzędne położenia punktu są równe:

$$x = 3\sin 2\pi t_1 = 3\sin(2\pi\cdot 0{,}6) = -1{,}76\ \text{m},$$
$$y = 5\cos 2\pi t_1 = 5\cos(2\pi\cdot 0{,}6) = -4.04\ \text{m}.$$

Składowe prędkości i przyspieszenia punktu materialnego w dowolnej chwili czasu t określimy różniczkując równania ruchu:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 6\pi\cos 2\pi t, \qquad V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -10\pi\sin 2\pi t,$$
$$a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = -12\pi^2\sin 2\pi t, \qquad a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = -20\pi^2\cos 2\pi t.$$

Dla $t_1 = 0{,}6$ s wartości prędkości i przyspieszenia punktu materialnego wynoszą: $V_x = -15{,}2$ m/s, $V_y = 18{,}5$ m/s, $a_x = 69{,}6$ m/s^2, $a_y = 159{,}7$ m/s^2, stąd prędkość i przyspieszenie punktu:

$$V(t_1) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-15{,}2)^2 + 18{,}5^2} = 23{,}9 \text{ m/s},$$

$$a(t_1) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{69{,}6^2 + 159{,}7^2} = 174{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Wartości składowych siły **F** dla $t = t_1$ wywołującej ruch punktu są równe:

$$F_x = m\ddot{x} = 0{,}2 \cdot 69{,}6 = 13{,}9 \text{ N}, \qquad F_y = m\ddot{y} = 0{,}2 \cdot 159{,}7 = 31{,}9 \text{ N},$$

skąd wartość siły F:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{13{,}9^2 + 31{,}9^2} = 34{,}8 \text{ N}.$$

Kierunek wektora siły **F** jest nachylony do osi x pod kątem α, który określimy z zależności (patrz rysunek 2):

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{13{,}9}{34{,}8} = 0{,}4, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 66{,}4^\circ = 66^\circ 27'.$$

Zadanie 3

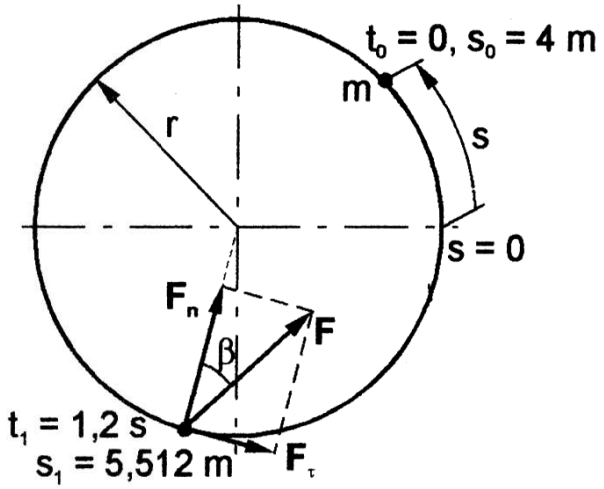
Punkt materialny o masie $m = 0{,}5$ kg porusza się po okręgu (rys. 3) o promieniu $r = 0{,}3$ m. Współrzędna łukowa położenia punktu na torze określona jest zależnością $s = 4 + 0{,}3(t^2 + 3t)$ m. Wyznaczyć wartość siły działającej na punkt w funkcji czasu i chwili $t_1 = 1{,}2$ s.

Rozwiązanie

Na punkt działa siła **F**, której składowe, styczna F_τ i normalna F_n, są odpowiednio równe:

$$F_\tau = m a_\tau, \qquad F_n = m a_n,$$

gdzie: a_τ, a_n, odpowiednio, przyspieszenie styczne i normalne punktu materialnego.



Rys. 3

Przyspieszenia te dla dowolnej chwili czasu są równe:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{dV}{dt} = 0,6\ \mathrm{m/s^2}, \qquad a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{\dot{s}^2}{r}.$$

Położenie punktu materialnego (rys. 3) na torze jest określone współrzędną łukową s, odmierzaną wzdłuż toru i dla chwili $t_1 = 1,2$ s współrzędna ta wynosi $s_1 = 5,152$ m (patrz równanie ruchu punktu). Prędkość punktu w dowolnej chwili czasu $V = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = 0,6t + 0,9$ i dla $t_1 = 1,2$ s wynosi V= 1,62 m/s, skąd a_n= 8,75 m/s^2.

Wartości składowych siły F wywołującej ruch punktu są równe:

$$F_\tau = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3\ \mathrm{N}, \qquad F_n = 0,5 \cdot 8,75 = 4,4\ \mathrm{N},$$

a wartość siły F:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{0,3^2 + 4,4^2} \approx 4,41\ \mathrm{N}.$$

Wektor siły **F** jest nachylony do promienia r pod kątem β, który określimy w następujący sposób:

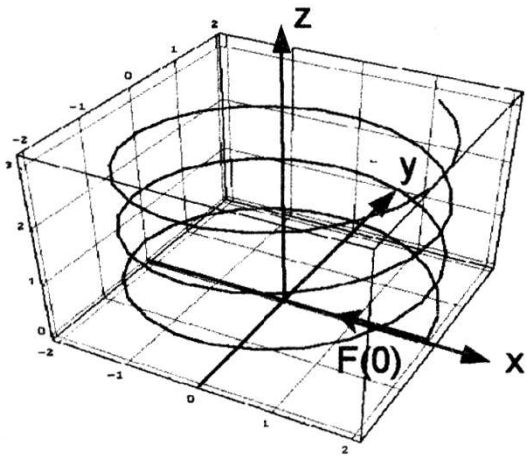
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{0,3}{4,4} = 0,068, \quad \text{skąd} \quad \beta = 3^\circ 54'.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Ciało o masie $m = 0{,}25$ kg porusza się po okręgu o promieniu $r = 0{,}4$ m, zgodnie z równaniem $s = 1 + 4\sin 2\pi t$ m. Wyznaczyć wartość siły działającej na ciało w funkcji czasu i jej wartość w chwili $t_1 = 0{,}65$ s.

Odpowiedź: $F_\tau = -4\pi^2 \sin^2 2\pi t$, $F_\tau(t_1) = -25{,}8$ N, $F_n = 160\pi^2 \cos^2 2\pi t$,
$F_n(t_1) = 545{,}6$ N, $F = 4\pi^2\sqrt{1600\cos^4 2\pi t + \sin^4 2\pi t}$, $F(t_1) = 546{,}2$ N,
$\mathrm{tg}\beta = 0{,}047$, $\beta = 2^\circ 42'$

Zadanie 2. Ruch punktu materialnego o masie m odbywa się zgodnie z parametrycznymi równaniami ruchu: x = b cosωt, y = b sinωt, z = ct. Wyznaczyć siłę działająca na punkt, a w chwili rozpoczęcia ruchu jej wartość. Tor punktu i położenie siły na torze dla b = 2 m, c = 0,5 m/s, $\omega = \pi$ s^{-1}, m = 2 kg i t = (0, π) przedstawiono na rysunku poniżej.



Odpowiedź: $F = m\,b\,\omega^2$, $F(0) = F_x(0) = -m\,b\,\pi^2$

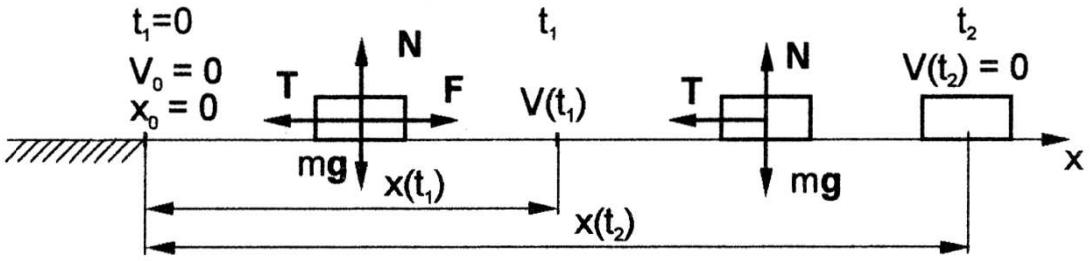
2. Równania różniczkowe ruchu punktu (zagadnienie odwrotne dynamiki)

2.1. Ruch punktu swobodnego

Ruch punktu pod działaniem siły stałej

Zadanie 4

Na ciało o masie m, znajdujące się na płaszczyźnie poziomej, działa przez t_1 sekund pozioma siła **F** = const. Znaleźć drogę przebytą przez ciało do momentu zatrzymania się, jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego o płaszczyznę równy jest μ. W chwili początkowej ciało znajduje się w spoczynku.



Rys. 4

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania podzielimy na dwie części. W pierwszej części rozpatrzymy okres ruchu od chwili t = 0 do t_1, to jest gdy na ciało działa tylko pozioma siła **F** i siła tarcia **T** (rys. 4). W drugiej części, rozpatrzymy okres ruchu gdy na ciało działa tylko pozioma siła tarcia **T**.

W pierwszym okresie ruchu na ciało działa siła **F** zgodna z kierunkiem ruchu i siła tarcia **T** skierowana przeciwnie.

Ułóżmy równanie dynamiczne (różniczkowe) ruchu na podstawie II–go prawa Newtona. Siła **F** jest skierowana zgodnie z osią x, a siła tarcia $T = N\mu = mg\mu$ jest skierowana przeciwnie do osi x, stąd równanie dynamiczne ruchu przyjmie postać:

$$m\,a = F - T \qquad \text{lub} \qquad m\ddot{x} = m\frac{dV}{dt} = F - mg\mu\,. \tag{1}$$

Rozdzielając zmienne:

$$dV = \frac{(F - mg\mu)}{m} dt,$$

i całkując lewą i prawą stronę powyższej zależności, otrzymamy równanie prędkości:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t - g\mu t + C_1. \tag{2}$$

Ponieważ dla $t_0 = 0$, $V_0 = 0$, stąd z równania (2) otrzymamy $C_1 = 0$.
Prędkość ciała w chwili t_1 będzie równa:

$$V_1 = V(t_1) = \frac{F}{m} t_1 - g\mu t_1.$$

Drogę przebytą w czasie t_1, gdy na ciało działa siła F i T, otrzymamy rozdzielając zmienne, a następnie całkując równanie (2):

$$x = \frac{F}{2m} t^2 - \frac{g\mu}{2} t^2 + C_1 t + C_2, \tag{3}$$

gdzie: $C_1 = 0$. C_2 znajdziemy z warunku początkowego, który mówi, że dla $t = 0$, $x = 0$, skąd $C_2 = 0$.
Droga przebyta przez ciało w przedziale czasu $(0, t_1)$, będzie więc równa:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{F}{2m} t_1^2 - \frac{g\mu}{2} t_1^2.$$

W drugim okresie ruchu na ciało działa tylko siła tarcia **T**. Równanie dynamiczne ruchu ciała ma wtedy postać:

$$m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\mu, \tag{4}$$

skąd po scałkowaniu równania (4) otrzymamy:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -g\mu t + D_1 \qquad \text{i} \qquad x(t) = -\frac{g\mu}{2} t^2 + D_1 t + D_2. \tag{5}$$

Stałe D_1 i D_2 obliczymy z warunków początkowych (są to końcowe warunki kinematyczne dla pierwszego okresu ruchu), które dla chwili $t = t_1$ są następujące:

$$V_1 = V(t_1) = \frac{F}{m}t_1 - g t_1 \mu \quad \text{i} \quad x_1 = x(t_1) = \frac{F}{2m}t_1^2 - \frac{g\mu}{2}t_1^2.$$

Wstawiając powyższe warunki w równania (5) otrzymamy:

$$D_1 = \frac{F t_1}{m}, \qquad D_2 = -\frac{F t_1^2}{2m}. \tag{6}$$

Skąd równanie prędkości i drogi przyjmie postać:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -g\mu t + \frac{F t_1}{m}, \tag{7}$$

$$x = x(t) = -\frac{g\mu}{2}t^2 + \frac{F t_1}{m}t - \frac{F t_1^2}{2m}. \tag{8}$$

Ciało zatrzyma się po czasie t_2, gdy prędkość jego jest równa zeru, a zależność (7):

$$0 = -g\mu t_2 + \frac{F}{m}t_1,$$

skąd:

$$t_2 = \frac{F t_1}{mg\mu}. \tag{9}$$

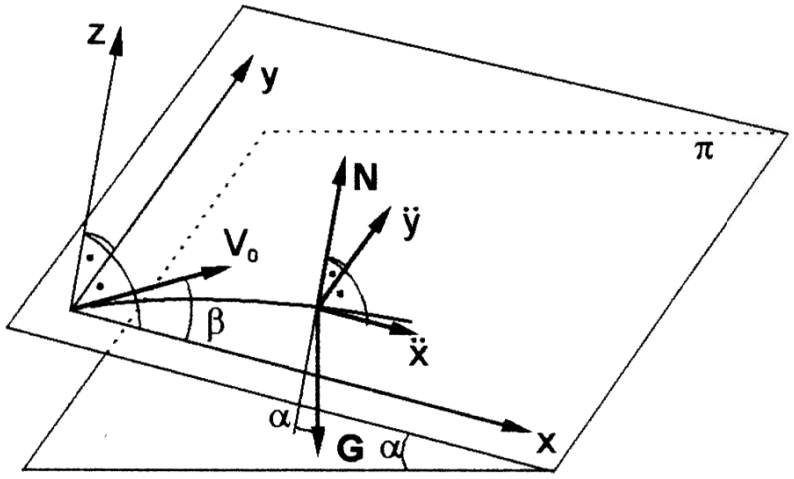
Drogę x, którą przebędzie ciało do momentu zatrzymania, obliczymy wstawiając (9) w zależność (8):

$$x(t_2) = -\frac{g\mu}{2}\left(\frac{F t_1}{mg\mu}\right)^2 + \frac{F t_1}{m}\frac{F t_1}{mg\mu} - \frac{F t_1^2}{2m},$$

czyli: $$x(t_2) = \frac{F}{2m}\left(\frac{F}{mg\mu} - 1\right)t_1^2.$$

Zadanie 5

Ciało zsuwa się po gładkiej równi pochyłej π nachylonej pod kątem α do poziomu. W chwili początkowej nadano ciału prędkość V_0 skierowaną pod kątem β w stosunku do linii nachylenia równi (rys. 5). Określić równania ruchu ciała w płaszczyźnie nachylenia równi.



Rys. 5

Rozwiązanie

Ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie π równi pochyłej, dlatego przyjmujemy układ współrzędnych Oxy leżący w tej płaszczyźnie.
W dowolnej chwili t na ciało działają dwie siły: siła ciężkości **G** skierowana pionowo w dół (jak na rysunku 5) i reakcja normalna **N** płaszczyzny π skierowana równolegle do osi z, tj. prostopadle do płaszczyzny π.
Równanie dynamiczne ruchu w zapisie wektorowym ma postać:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} \ . \tag{1}$$

Rzutując wektory równania (1) na osie układu współrzędnych, otrzymamy dwa skalarowe równania różniczkowe ruchu (ruch wzdłuż osi z nie odbywa się):

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha \ , \qquad m\ddot{y} = 0 \ , \tag{2}$$

skąd po podzieleniu przez m:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha \ , \qquad \ddot{y} = 0 \ . \tag{3}$$

Całkując równania (3) dostaniemy:

$$\dot{x} = g\sin\alpha t + C_1, \qquad \dot{y} = D_1, \tag{4}$$

$$x = \frac{g\sin\alpha t^2}{2} + C_1 t + C_2, \qquad y = D_1 t + D_2. \tag{5}$$

Warunki początkowe są następujące, dla t = 0:

$$x = x_0 = 0, \qquad y = y_0 = 0;$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = V_0\cos\beta, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = V_0\sin\beta. \tag{6}$$

Wstawiając warunki początkowe do równań (4) i (5), obliczamy stałe całkowania, które są równe:

$$C_1 = V_0\cos\beta, \quad D_1 = V_0\sin\beta, \quad C_2 = 0, \quad D_2 = 0,$$

skąd, równania ruchu:

$$x = V_0 t\cos\beta + \frac{gt^2}{2}\sin\alpha, \tag{7}$$

$$y = V_0 t\sin\beta. \tag{8}$$

Rugując czas t z równań ruchu (7) i (8), poprzez wyznaczenie czasu t z równania (8) i podstawienie go w równanie (7), otrzymamy równanie paraboli, która jest torem ciała (punktu materialnego):

$$x = y\,\mathrm{ctg}\beta + y^2\frac{g\sin\alpha}{2V_0^2\sin^2\beta}.$$

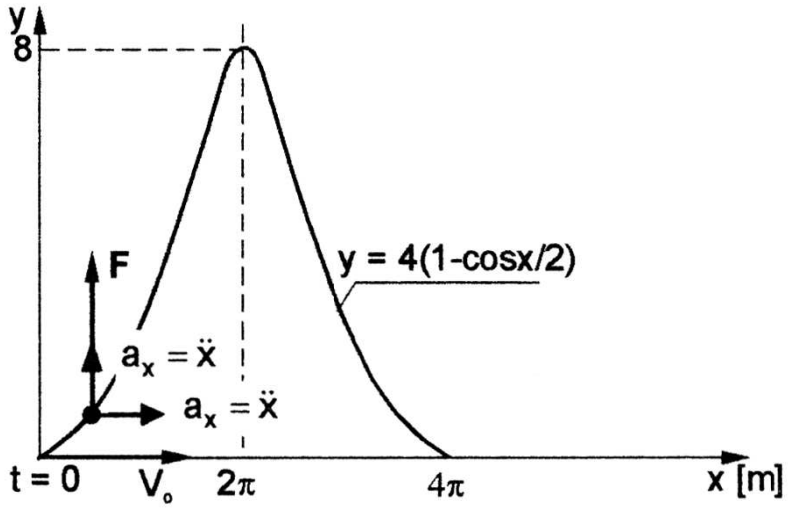
Ruch punktu pod działaniem siły zależnej od czasu

Zadanie 6

Na punkt materialny o masie m = 2 g działa pozioma siła F = 0,2 cos5t N, która jest stale równoległa do osi y (rys. 6). Określić ruch punktu w płaszczyźnie poziomej, jeżeli w chwili początkowej prędkość punktu V_o = 10 m/s jest prostopadła do siły F.

Rozwiązanie

Siły działające na punkt materialny to: siła **F** działająca w płaszczyźnie poziomej i równoległa do osi y oraz siła ciężkości **G** = m **g** prostopadła do tej płaszczyzny. W równaniach różniczkowych ruchu siły **G** nie bierzemy pod uwagę, gdyż jest ona prostopadła do płaszczyzny, w której odbywa się ruch. Ruch punktu wzdłuż osi z nie odbywa się, przyspieszenie równe jest zero.



Rys. 6

W takim przypadku równania różniczkowe ruchu przyjmą postać:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0{,}2\cos 5t,$$

skąd, po podstawieniu m = 0,002 kg, otrzymamy:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 100\cos 5t. \tag{1}$$

Całkując dwa razy równania (1) dostaniemy:

$$\dot{x} = C_1, \qquad \dot{y} = 20\sin 5t + D_1, \tag{2}$$

$$x = C_1 t + C_2, \qquad y = -4\cos 5t + D_1 t + D_2. \tag{3}$$

Warunki początkowe są następujące, dla t =0:

$$x = x_0 = 0, \quad y = y_0 = 0, \quad \dot{x} = V_0 = 10 \text{ m/s}, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = 0. \tag{4}$$

Podstawiając warunki początkowe w równania (2) i (3), dostaniemy:

$$C_1 = 10 \text{ m/s}, \qquad D_1 = 0, \qquad C_2 = 0, \qquad D_2 = 4 \text{ m}, \tag{5}$$

skąd po podstawieniu stałych całkowania w (3), otrzymamy równania ruchu punktu:

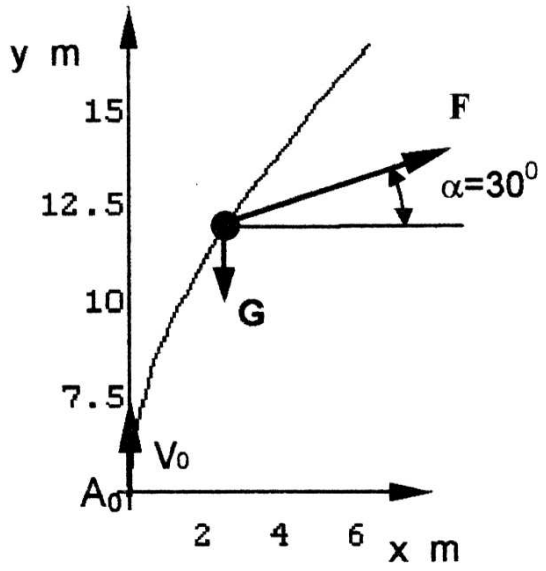
$$x = 10\,t \text{ m}, \qquad y = 4\,(1 - \cos 5t) \text{ m}, \tag{6}$$

a dalej, po wyrugowaniu czasu t dostaniemy równanie toru:

$$y = 4\,(1 - \cos\frac{x}{2}). \tag{7}$$

Zadanie 7

Na punkt materialny o masie m = 2 kg, poruszający się w płaszczyźnie pionowej, działa siła F = 10 t+7 N, której kierunek tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^0$ (rys. 7). Określić prędkość i położenie punktu po upływie czasu $t_1 = 2$ s, jeżeli w chwili początkowej punkt poruszał się pionowo do góry z prędkością V_0 = 10 m/s i znajdował się w punkcie A_0 o współrzędnych (0, 5) m.



Rys. 7

Rozwiązanie

Na punkt działają dwie siły: siła ciężkości **G** i siła **F** zależna od czasu. Równania różniczkowe ruchu punktu materialnego mają następującą postać:

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha, \qquad m\ddot{y} = F\sin\alpha - G, \tag{1}$$

lub po wstawieniu danych i przekształceniu:

$$\ddot{x} = \frac{\sqrt{3}}{4}(10\,t + 7), \qquad \ddot{y} = \frac{1}{4}(10\,t + 7 - 4\,g). \tag{2}$$

Całkując dwukrotnie równania (2) otrzymamy:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{4}(5\,t^2 + 7\,t) + C_1, \qquad \dot{y} = \frac{1}{4}(5\,t^2 + 7\,t - 4\,g\,t) + D_1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2\right) + C_1\,t + C_2, \\ y &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 2\,g\,t^2\right) + D_1\,t + D_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Warunki początkowe są następujące, dla t = 0 mamy:

$$x = x_0 = 0, \qquad y = y_0 = 5\ \text{m}, \tag{5}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \qquad \dot{y} = V_0 = 10\ \text{m/s}. \tag{6}$$

Wstawiając warunki początkowe w równania (3) i (4), dostaniemy:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \qquad D_1 = 10\ \text{m/s}, \quad D_2 = 5\ \text{m}. \tag{7}$$

Po uwzględnieniu stałych całkowania, równania (3) i (4) przyjmą postać:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{4}(5\,t^2 + 7\,t)\ \text{m/s}, \qquad \dot{y} = \frac{1}{4}(5\,t^2 + 7\,t - 4\,g\,t) + 10\ \text{m/s}, \tag{8}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2\right)\ \text{m}, \quad y = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 2\,g\,t\right) + 10\,t + 5\ \text{m}. \tag{9}$$

Po upływie czasu $t = t_1 = 2$ s, rzuty prędkości punktu na osie x i y będą równe:

$$\dot{x}(t_1) = V_x = \frac{\sqrt{3}}{4}(5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2) = 14{,}8\ \text{m/s}, \tag{10}$$

$$\dot{y}(t_1) = V_y = \frac{1}{4}(5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 4 \cdot 9{,}81 \cdot 2) + 10 = -1{,}1\ \text{m/s}, \tag{11}$$

a moduł prędkości:

$$V(t_1) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 14{,}9 \text{ m/s}.$$

Po upływie czasu $t = t_1 = 2$ s współrzędne położenia punktu są równe:

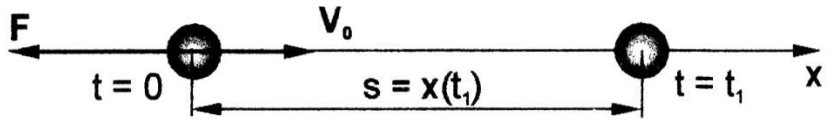
$$x = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5}{3}\cdot 2^3 + \frac{7}{2}\cdot 2^2\right) = 11{,}8 \text{ m},$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\cdot 2^3 + \frac{7}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot 9{,}81\cdot 2)\right) + 10\cdot 2 + 5 = 22{,}02 \text{ m}.$$

Ruch punktu pod działaniem siły zależnej od prędkości

Zadanie 8

Punkt materialny o masie m posiadający prędkość początkową V_0, porusza się ruchem prostoliniowym (rys. 8). Na punkt działa siła $F = k\sqrt[3]{V}$ (k – stała) przeciwnie skierowana do prędkości V_0. Znaleźć czas t_1, po którym zatrzyma się punkt oraz drogę.



Rys. 8

Rozwiązanie

Ruch punktu opisany jest równaniem różniczkowym ruchu:

$$m\ddot{x} = -k\sqrt[3]{V}. \tag{1}$$

W równaniu występuje znak minus, ponieważ siła F ma zwrot przeciwny do osi x.

Punkt porusza się po prostej x, to przyspieszenie $\ddot{x} = dV/dt$ i równanie różniczkowe przyjmie postać:

$$m\frac{dV}{dt} = -k\sqrt[3]{V}. \tag{2}$$

Całkując równanie (2), przez rozdzielenie zmiennych, otrzymamy:

$$\frac{3}{2} m V^{\frac{2}{3}} = -k t + C_1 . \tag{3}$$

Ponieważ, dla t = 0, V = V_0, to:

$$C_1 = \frac{3}{2} m V_0^{\frac{2}{3}} .$$

Podstawiając C_1 w równanie (3) otrzymamy:

$$\frac{3}{2} m V^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} m V_0^{\frac{2}{3}} - k t . \tag{4}$$

lub po przekształceniu:

$$V^{\frac{2}{3}} = V_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2 k t}{3 m} . \tag{5}$$

Dla czasu t_1, prędkość punktu V = 0, skąd po wstawieniu t_1 i V = 0 do równania (5), dostaniemy:

$$t_1 = \frac{3 m}{2 k} V_0^{\frac{2}{3}} . \tag{6}$$

Znajdźmy równanie ruchu punktu. W tym celu przekształcimy (5) do postaci:

$$\frac{dx}{dt} = V = \left(V_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2 k t}{3 m} \right)^{\frac{3}{2}} , \tag{7}$$

skąd po scałkowaniu otrzymamy:

$$x = -\frac{3 m}{5 k} \left(V_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2 k t}{3 m} \right)^{\frac{5}{2}} + C_2 . \tag{8}$$

Wstawiając warunki początkowe, dla t = 0, x = 0, w równanie (8) otrzymamy:

$$C_2 = \frac{3\,m}{5\,k} V_0^{\frac{5}{3}}, \tag{9}$$

skąd równanie ruchu:

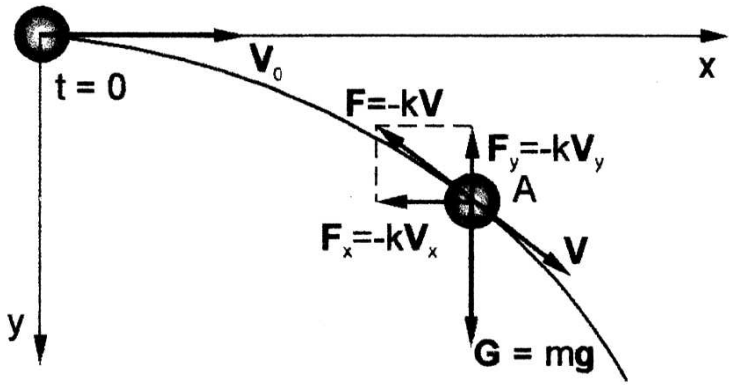
$$x = \frac{3\,m}{5\,k} V_0^{\frac{5}{3}} - \frac{3\,m}{5\,k}\left(V_0^{\frac{2}{3}} - \frac{2\,k\,t}{3\,m}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{10}$$

Powyższe równanie określa położenie punktu na osi x w dowolnej chwili czasu t.
Wstawiając $t = t_1$ otrzymamy drogę przebytą przez punkt do chwili zatrzymania się, która jest równa:

$$s = |x(t_1)| = \frac{3\,m}{5\,k} V_0^{\frac{5}{3}}.$$

Zadanie 9

Punktowi materialnemu o masie m (rys. 9) znajdującemu się w polu sił ciężkości, nadano prędkość początkową V_0 skierowaną poziomo. Określić równania ruchu punktu materialnego, jeżeli działa na niego siła oporu $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{V}$ (k – stała).



Rys. 9

Rozwiązanie

Na punkt materialny działają dwie siły: siła ciężkości $\mathbf{G} = m\,\mathbf{g}$ i siła oporu $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{V}$.

Równanie dynamiczne ruchu punktu w zapisie wektorowym ma postać:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F}. \tag{1}$$

Rzutując wektory z równania (1) na osie układu współrzędnych otrzymamy:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= G_x + F_x = 0 - k\,V_x = -k\,\dot{x} \\ m\,\ddot{y} &= G_y + F_y = G - k\,V_y = G - k\,\dot{y}\,' \end{aligned} \tag{2}$$

lub:

$$m\frac{dV_x}{dt} = -k\,V_x, \qquad m\frac{dV_y}{dt} = m\,g - k\,V_y. \tag{3}$$

Jeżeli w równaniach (3) rozdzielimy zmienne, to:

$$m\frac{dV_x}{V_x} = -k\,dt, \qquad \frac{m\,dV_y}{m\,g - k\,V_y} = dt, \tag{4}$$

i po scałkowaniu dostaniemy:

$$m\ln V_x = -k\,t + C_1, \qquad -\frac{m}{k}\ln(m\,g - k\,V_y) = t + D_1. \tag{5}$$

Warunki początkowe są następujące, dla t = 0:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \dot{x} = V_x = V_0, \qquad \dot{y} = V_y = 0. \tag{6}$$

Po wstawieniu warunków (6) w równania (5), otrzymamy:

$$C_1 = m\ln V_0, \qquad D_1 = -\frac{m}{k}\ln m\,g. \tag{7}$$

Równania (5), po podstawieniu stałych całkowania C_1 i D_1, przyjmą postać:

$$m\ln V_x = -k\,t + m\ln V_0, \qquad -\frac{m}{k}\ln(m\,g - k\,V_y) = t - \frac{m}{k}\ln mg, \tag{8}$$

lub:

$$\ln\frac{V_x}{V_0}=-\frac{k\,t}{m}, \qquad \ln\frac{m\,g-k\,V_y}{m\,g}=-\frac{k\,t}{m}. \tag{9}$$

Zamieniając logarytm funkcją wykładniczą dostaniemy:

$$V_x=V_0\,e^{-\frac{kt}{m}}, \qquad V_y=\frac{m\,g}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right). \tag{10}$$

Ponownie całkując, z równań (10) otrzymamy:

$$x=-\frac{V_0\,m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}+C_2, \qquad y=\frac{m\,g}{k}t+\frac{m^2\,g}{k^2}e^{-\frac{kt}{m}}+D_2. \tag{11}$$

Podstawiając warunki początkowe (6) w zależności (11) wyznaczymy stałe C_2 i D_2, które są równe:

$$C_2=\frac{V_0\,m}{k}, \qquad D_2=-\frac{m^2\,g}{k^2}. \tag{12}$$

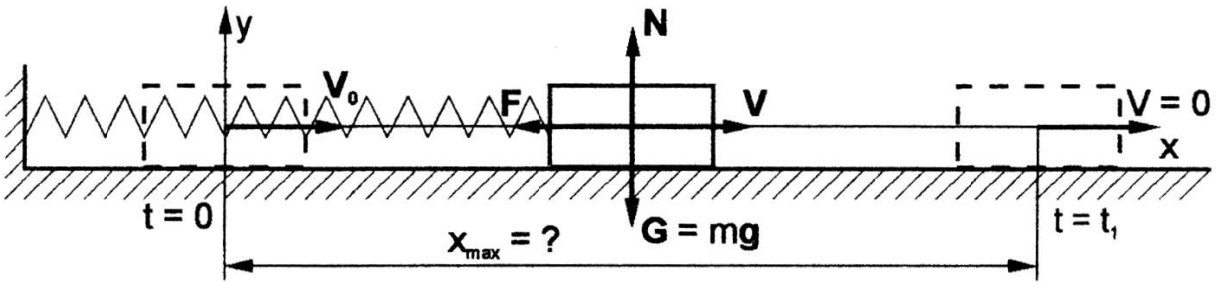
Stąd równania ruchu punktu materialnego w postaci parametrycznej:

$$x=\frac{V_0\,m}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right), \qquad y=\frac{m\,g}{k}\left[t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right].$$

Ruch punktu pod działaniem siły zależnej od położenia

Zadanie 10

Ciało o masie m przyczepiono do prawego końca sprężyny, która w chwili początkowej jest nie odkształcona. Ciało otrzymało w chwili początkowej prędkość V_0 skierowaną zgodnie z osią x. Zakładając, że oś x pokrywa się z osią sprężyny i jest pozioma oraz zaniedbując tarcie, znaleźć maksymalne przemieszczenie ciężaru w prawo. Siła oddziaływania sprężyny na ciało opisana jest zależnością $F=\alpha x+\beta x^3$ (rys. 10), α, β – stałe.



Rys. 10

Rozwiązanie

Równanie różniczkowe ruchu ciała ma postać:

$$m\ddot{x} = -F, \tag{1}$$

lub

$$m\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3. \tag{2}$$

Aby rozwiązać równanie różniczkowe (2) zamienimy zmienne, po których będziemy całkować. W tym celu w równanie (2) podstawimy $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\frac{dV}{dx}$. Otrzymamy wówczas:

$$mV\frac{dV}{dx} = -\alpha x - \beta x^3, \tag{3}$$

skąd po rozdzieleniu zmiennych dostaniemy:

$$mV\,dV = \left(-\alpha x - \beta x^3\right)dx. \tag{4}$$

Całkując lewą i prawą stronę równania (4) (całkujemy po zmiennej V i x, a nie po czasie t), otrzymamy:

$$m\frac{V^2}{2} = -\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{4}x^4 + C. \tag{5}$$

W chwili początkowej t = 0, współrzędna położenia ciała x = 0, a prędkość początkowa $V = V_0$, skąd po wstawieniu do równania (5) tych warunków wyznaczymy stałą całkowania:

$$C = \frac{m V_0^2}{2}. \tag{6}$$

Po przekształceniach równanie (5) przyjmie postać:

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{\beta}{4}x^4=\frac{m}{2}\left(V_0^2-V^2\right). \tag{7}$$

Dalej możemy powtórnie całkować przez rozdzielenie zmiennych i wówczas otrzymamy równanie ruchu masy m. Jednak dla wyznaczenia x_{max} postąpimy inaczej. W chwili, gdy ciało uzyska maksymalne przemieszczenie x_{max}, jego prędkość będzie równa zero (V_k= 0), stąd z równania (7) otrzymamy:

$$\frac{\alpha}{2}x_{max}^2+\frac{\beta}{4}x_{max}^4=\frac{m}{2}V_0^2. \tag{8}$$

Po rozwiązaniu powyższego równania dwukwadratowego względem x_{max} i po odrzuceniu ujemnego pierwiastka otrzymamy:

$$x_{max}=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\,m\,V_0^2}{\beta}}}\,. \tag{9}$$

Zadanie 11

Na punkt materialny A o masie m (rys. 11) działają dwie siły $\mathbf{F}_1 = m\,k^2\,\mathbf{AO}_1$, $\mathbf{F}_2 = m\,k^2\,\mathbf{AO}_2$ (k – stała). Znaleźć równanie ruchu punktu oraz równanie toru, jeżeli w chwili początkowej prędkość punktu równa jest V_0 i skierowana jest równolegle do osi x, a $A_0O = O_1O = O_2O = a$ (A_0 – położenie początkowe). Siłę ciężkości pominąć.

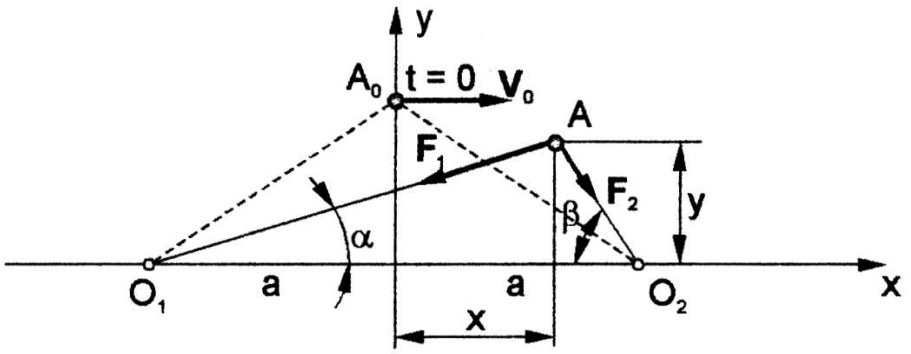
Rozwiązanie

Na podstawie rysunku 11, możemy wyznaczyć długości AO_1 i AO_2:

$$AO_1=\sqrt{(a+x)^2+y^2}\,, \qquad AO_2=\sqrt{(a-x)^2+y^2}\,,$$

Wówczas wartości sił F_1 i F_2 są odpowiednio równe:

$$F_1=m\,k^2\sqrt{(a+x)^2+y^2} \quad \text{i} \quad F_2=m\,k^2\sqrt{(a-x)^2+y^2}\,. \tag{1}$$



Rys. 11

Równania różniczkowe ruchu punktu mają postać:

$$m\ddot{x} = F_{2x} + F_{1x}, \qquad m\ddot{y} = F_{2y} + F_{1y}, \tag{2}$$

gdzie: F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y} – odpowiednio, rzuty wektorów sił $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ na osie x i y. Rzuty te są równe:

$$F_{1x} = -F_1 \cos\alpha = -m k^2 (a+x), \qquad F_{1y} = -F_1 \sin\alpha = -m k^2 y,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\beta = m k^2 (a-x), \qquad F_{2y} = -F_2 \sin\beta = -m k^2 y.$$

Po wstawieniu powyższych zależności w równania (2) otrzymamy:

$$m\ddot{x} = m k^2 (a-x) - m k^2 (a+x), \qquad m\ddot{y} = -m k^2 y - m k^2 y, \tag{3}$$

lub po podzieleniu przez m i uporządkowaniu:

$$\ddot{x} + 2k^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + 2k^2 y = 0, \tag{4}$$

Oznaczmy $\omega^2 = 2k^2$, wówczas dostaniemy równania:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = 0. \tag{5}$$

Rozwiązania równań (5) będziemy poszukiwali w postaci:

$$x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t, \qquad y = D_1 \sin\omega t + D_2 \cos\omega t. \tag{6}$$

Z warunków początkowych, które są następujące: dla $t = 0$, $x = 0$ i $\dot{x} = V_0$ oraz $y = a$ i $\dot{y} = 0$, a także równań (6) znajdziemy:

$$C_1 = \frac{V_0}{\omega}, \qquad C_2 = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = a. \tag{7}$$

Po wstawieniu (7) do (6) otrzymamy następujące równania ruchu:

$$x = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t, \qquad y = a \cos \omega t,$$

a po podstawieniu $\omega^2 = 2\,k^2$:

$$x = \frac{V_0}{\sqrt{2}\,k} \sin\left(\sqrt{2}\,k\,t\right), \qquad y = a \cos\left(\sqrt{2}\,k\,t\right). \tag{8}$$

Rugując z równań (8) czas, otrzymamy równanie toru, który jest elipsą o równaniu:

$$\frac{2\,k^2\,x^2}{V_0^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Pocisk (punkt materialny) wystrzelono ze wzgórza o wysokości H = 150 m z prędkością początkową V_0= 700 m/s, pod kątem $\alpha = 30^O$ do poziomu. Wyznaczyć zależność prędkości od czasu, równania ruchu pocisku, równanie toru, zasięg i wysokość rzutu. Oporu powietrza nie uwzględniać.

Odpowiedź: $V(t) = \sqrt{V_0^2 + g\,t^2 - 2\,g\,V_0\,t \sin 30^o}$, $x = V_0\,t \cos 30^o$,

$y = -\frac{g\,t^2}{2} + V_0\,t \sin 30^o + H$, $y = -\frac{g\,x^2}{2\,V_0^2 \cos^2 30^o} + x\,\mathrm{tg}30^o + H$,

Z=43,515 km (zasięg), Y=18,881 km (wysokość rzutu)

Zadanie 2. Ciało o masie m = 2 kg porusza się pod działaniem niezależnych od siebie zmiennych sił $F_x = F_0 \cos 2\pi t$ N i $F_y = F_0\,(1 - 2\,t)$ N, F_0= 0,8 N. W chwili początkowej ciało było w stanie spoczynku i jego położenie pokrywało się z początkiem kładu współrzędnych. Wyznaczyć równania ruchu punktu oraz chwile czasu, w których następuje zmiana znaku prędkości.

Zmiana znaku może wystąpić gdy prędkości $\dot{x} = 0$ i $\dot{y} = 0$.

Odpowiedź: $x = -0{,}15\,\pi^{-2}\cos 2\pi t$, $y = 0{,}1\,(3\,t^2 - 2\,t^3)$, $\dot{x} = 0$ dla $t = \pi/2 + n\,\pi\,s$, n=1,2,3.., $\dot{y} = 0$ dla $t = 1\,s$

Zadanie 3. Punkt materialny (pojazd) porusza się z niewielką prędkością pod wpływem siły $F = 2\,kN$, a jego opory ruchu określone są równaniem $R = 10^{-3}\,m\,(2{,}5 + 0{,}5\,V)$ N, gdzie masa m w kg, prędkość V w m/s. Obliczyć, po jakim czasie t_1 i w jakiej odległości s_1 na poziomym odcinku drogi, pojazd osiągnie prędkość 14,4 km/h. Masa całkowita pojazdu wynosi 20000 kg.

Odpowiedź: $t = 2000 \ln\left(\frac{195}{195 - V}\right)$, $t_1(14{,}4) = 41{,}4$ s,

$s = 39\,10^4 \ln\left(\frac{195}{195 - V}\right) - 2000\,V$, $s_1(14{,}4) = 83{,}19$ m

Zadanie 4. Na ciało o masie m wyrzucone pionowo do góry, działa siła oporu powietrza $R = m\,g\,k^2\,V^2$ (m – masa, k – stała, V – prędkość ciała). Wyznaczyć na jaką wysokość h wzniesie się ciało i w jakim czasie osiągnie tę wysokość, jeżeli wyrzucono zostało ono z prędkością początkową V_0.

Odpowiedź: $t = \frac{\operatorname{arc\,tg}(k\,V_0)}{g\,k}$, $h = \frac{\ln(1 + V_0^2\,k^2)}{2\,g\,k^2}$

Zadanie 5. Z wysokości $h_0 = 10$ km nad biegunem północnym, wyrzucono pionowo w górę punkt materialny o masie m z prędkością początkową $V_0 = 720$ km/h. Uwzględniając prawo grawitacji, które mówi, że siła przyciągania jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości poruszającego się punktu od środka Ziemi i skierowana do jej środka, wyznaczyć na jaką wysokość h wzniesie się ciało nad powierzchnię kuli Ziemskiej. Oporu powietrza nie uwzględniać. Średni promień Ziemi wynosi $R = 6367$ km, masa ziemi $M = 5{,}97\,10^{24}$ kg, stała grawitacji $k = 66{,}73\,10^{-12}$ $m^3/kg{\cdot}s^2$.

Odpowiedź: $h = \frac{2\,M\,k\,(R + h_0)}{(R + h_0)\,(V^2 - V_0^2) + 2\,M\,k} - R$, h = 12 km, dla każdej masy

Zadanie 6. Na punkt materialny o masie m działa siła przyciągania $F = k\,m/x^4$, która jest skierowana do punktu O (k – stała, x – odległość od stałego punktu O). W chwili początkowej prędkość punktu była równa zero, a odległość masy m od punktu O wynosiła h_0.

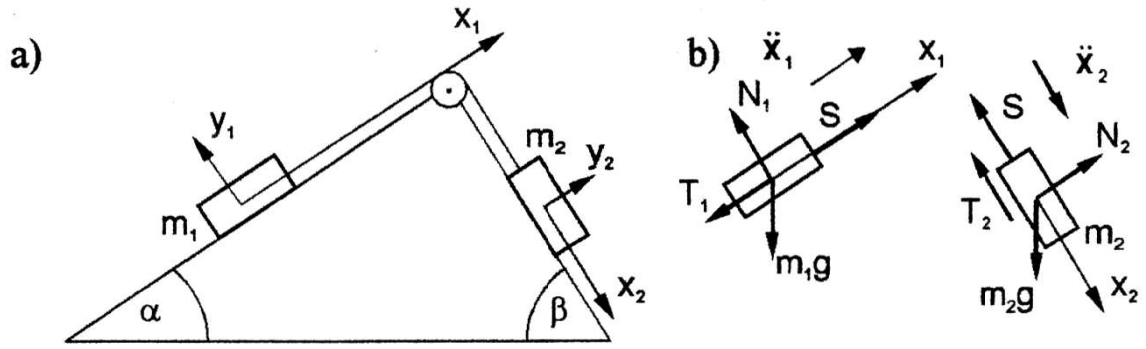
Wyznaczyć prędkość punktu, gdy odległość masy m od punktu O zmniejszy się dwa razy.

Odpowiedź: $V = \dfrac{3{,}74\sqrt{k}}{1{,}73\, h_0 \sqrt{h_0}}$

2.2. Ruch punktu nieswobodnego

Zadanie 12

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2, połączone nieważką linką rozpoczynają ruch po równi pochyłej o kątach α i β z prędkością początkową V_0 (rys. 12a). Współczynnik tarcia kinetycznego między poszczególnymi masami i powierzchnią równi wynosi μ. Po jakim czasie t_1 ich prędkości zwiększą się dwukrotnie i w jakiej odległości $x_1(t_1)$ od położenia początkowego masy m_1?



Rys. 12

Rozwiązanie

Przyjęto $m_2 > m_1$ i $(m_2 - m_1)$ na tyle duże, aby pokonać tarcie spoczynkowe. Na punkty o masach m_1 i m_2 działają siły ciężkości $m_1 g$ i $m_2 g$, siły reakcji równi, tarcia T_1 i T_2, normalne N_1 i N_2, oraz siły napięcia w lince S (rys. 12b). Układamy równania dynamiczne ruchu, dla każdej masy, przyjmując osie x_1 i x_2 jak na rysunku:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g \sin\alpha + S - T_1, \qquad T_1 = \mu N_1 = m_1 \mu g \cos\alpha, \qquad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin\beta - S - T_2, \qquad T_2 = \mu N_2 = m_1 \mu g \cos\beta. \qquad (2)$$

Podstawiając T_1 i T_2 do równań (1) i (2), oraz S z równania (2) do (1), po uporządkowaniu otrzymanego równania dostaniemy:

$$\ddot{x}_1 = \frac{g}{m_1 + m_2}[(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha) - \mu (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)]. \quad (3)$$

Całkując dwa razy oraz wyznaczając stałe całkowania, które są równe $C_1 = V_0$, $C_2 = 0$, otrzymamy następujące wzory na określenie prędkości i przemieszczenia mas:

$$\dot{x}_1 = \frac{g\,t}{m_1 + m_2}[(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha) - \mu (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)] + V_0 \quad (4)$$

$$x_1 = \frac{g\,t^2}{2(m_1 + m_2)}[(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha) - \mu (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)] + V_0\,t \quad (5)$$

Podstawiając w (4) $\dot{x}_1 = 2\,V_0$, wyliczymy czas t_1, po jakim prędkości mas zwiększą się dwukrotnie:

$$t_1 = \frac{(m_1 + m_2)\,V_0}{g[(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha) - \mu (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)]}. \quad (6)$$

Odległość $x_1(t_1)$ od położenia początkowego masy m_1 wyznaczymy podstawiając (6) w (5):

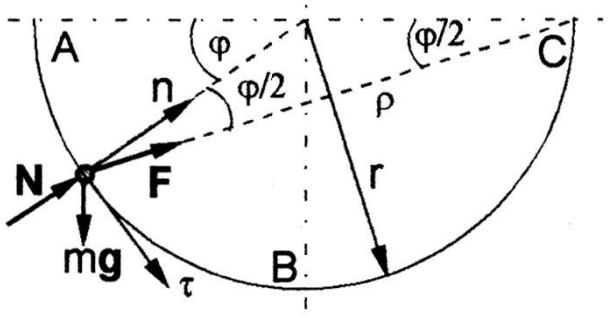
$$x_1(t_1) = \frac{3\,V_0^2\,(m_1 + m_2)}{2\,g[(m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha) - \mu (m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta)]}.$$

Zadanie 13

Punkt materialny o masie m porusza się po okręgu ABC o promieniu r, który leży w płaszczyźnie pionowej (rys. 13). Na punkt działa przyciągająca do punktu C siła $F = k\rho$ (k – stała) proporcjonalna do odległości od tego punktu. Prędkość początkowa w punkcie A wynosi $V_0 = 0$. Wyznaczyć reakcję toru w funkcji kąta φ.

Rozwiązanie

Na punkt materialny o masie m działają siła ciężkości m **g**, normalna **N** i siła przyciągająca **F** (rys. 13). Równania dynamiczne ruchu ułożymy we współrzędnych naturalnych na torze τn.



Rys. 13

Równanie dynamiczne ruchu na kierunku stycznym τ do toru ma postać:

$$m\,a_\tau = m\,g\cos\varphi + F\sin\frac{\varphi}{2} \tag{1}$$

Siła F jest proporcjonalna do odległości od punktu C i określa ją zależność:

$$F = k\,\rho = 2\,k\,r\cos\frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Wstawiając (2) w (1) dostaniemy:

$$m\,a_\tau = m\,g\cos\varphi + k\,r\sin\varphi\,. \tag{3}$$

W miejsce a_τ w (3) podstawimy $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi}\omega = \frac{dV}{d\varphi}\frac{V}{r}$, skąd:

$$V\,dV = \frac{r}{m}(m\,g\cos\varphi + k\,r\sin\varphi)\,d\varphi\,. \tag{4}$$

Po scałkowaniu powyższego równania otrzymamy:

$$\frac{V^2}{2} = r\,g\sin\varphi - \frac{k\,r^2}{m}\cos\varphi + C\,. \tag{5}$$

Z warunków początkowych dla t = 0, V_0= 0, φ = 0, określimy stałą całkowania: $C = \frac{k\,r^2}{m}$. Po podstawieniu stałej całkowania C do wzoru (5) i przekształceniu otrzymamy wzór na prędkość punktu:

$$V = \sqrt{2\,r\,[g \sin\varphi - \frac{k\,r}{m}(\cos\varphi - 1)]}\,. \qquad (6)$$

Równanie dynamiczne ruchu na kierunku normalnym **n** do toru ma postać:

$$m\,a_n = N - m\,g \sin\varphi + F \cos\frac{\varphi}{2} = N - m\,g \sin\varphi + 2\,k\,r \cos^2\frac{\varphi}{2},$$

skąd z uwzględnieniem zależności (6) wyznaczymy siłę normalną N:

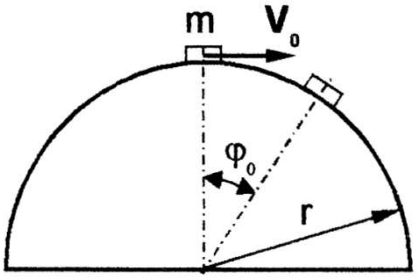
$$N = \frac{m\,V^2}{r} + m\,g \sin\varphi - 2\,k\,r \cos^2\frac{\varphi}{2} = 3\,m\,g \sin\varphi - 3\,k\,r\,(\cos\varphi - \frac{2}{3}).$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznaczyć równanie parametryczne ruchu punktu materialnego w funkcji prędkości, jeżeli porusza się on do góry po chropowatej równi pochyłej o współczynniku tarcia kinetycznego μ i kącie nachylenia α. Opór ruchu jest proporcjonalny do masy m i kwadratu prędkości, $R=k\,m\,V^2$. Warunki początkowe dla $t = 0$ wynoszą $x = 0$, $V = V_0$.

Odpowiedź: $x(V) = \frac{1}{2\,k} \ln \frac{k\,V_0^2 + g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{k\,V^2 + g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

Zadanie 2. Wyznaczyć kąt φ_0 określający punkt oderwania się masy m od gładkiej powierzchni walcowej o promieniu r (reakcja normalna równi w tym punkcie równa jest zero), jeżeli puszczono ją z wierzchołka tej powierzchni z prędkością początkową V_0. Na punkt działa siła ciężkości m g pionowo w dół.



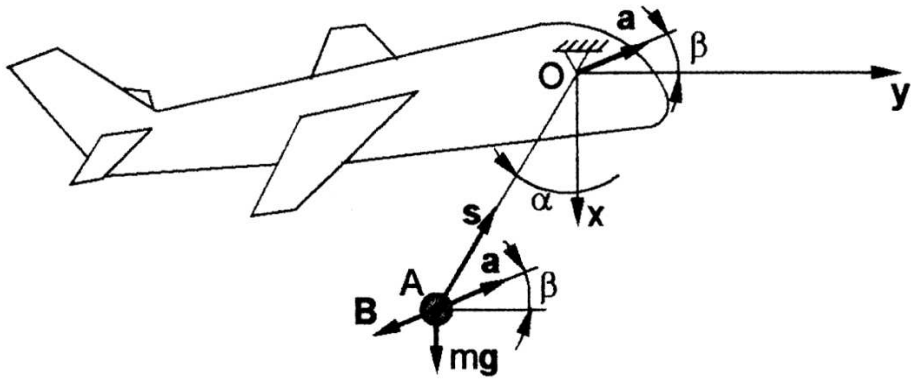
Odpowiedź: $\varphi_0 = \arccos[\frac{1}{3}(2 + \frac{V_0^2}{g\,r})]$

3. Ogólne zasady dynamiki

3.1. Zasada d'Alemberta

Zadanie 14

Samolot w czasie startu porusza się ruchem postępowym prostoliniowym ze stałym przyspieszeniem **a**, tworzącym z poziomem kąt β. Znaleźć wartość przyspieszenia **a** samolotu, jeżeli wiadomo, że nić OA wahadła matematycznego znajdującego się w samolocie odchyla się od pionu o kąt α. Znaleźć również napięcie nici (rys. 14). Masa wahadła równa jest m.



Rys. 14

Rozwiązanie

Na masę m wahadła (punkt A) działa siła ciężkości **G** = m **g**, reakcja nici **S** (siła napięcia nici) oraz siła bezwładności **B** = m **a**, posiadająca kierunek przyspieszenia **a**, lecz przeciwny zwrot.

Z zasady d'Alemberta, która mówi, że w czasie ruchu punktu materialnego siły rzeczywiste działające na punkt równoważą się w każdej chwili z siłami bezwładności tego punktu, wynika równanie wektorowe:

$$\mathbf{B}+\mathbf{G}+\mathbf{S}=\mathrm{m}\,\mathbf{a}+\mathrm{m}\,\mathbf{g}+\mathbf{S}=0, \tag{1}$$

którego równania rzutów na osie układu współrzędnych x i y są:

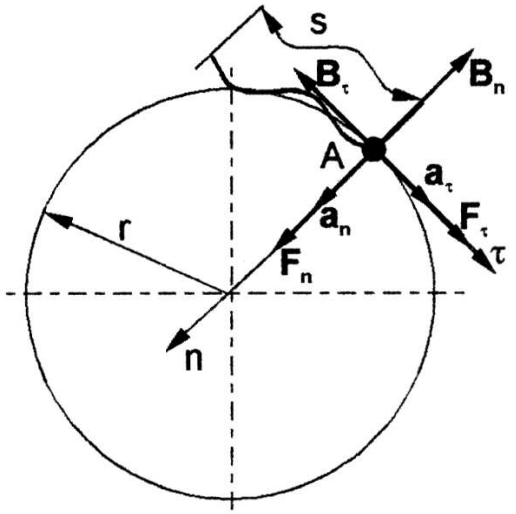
$$S\sin\alpha-\mathrm{m}\,a\cos\beta=0, \qquad \mathrm{m}\,g+\mathrm{m}\,a\sin\beta-S\cos\alpha=0. \tag{2}$$

Z równań (2) wyznaczymy przyspieszenie a i siłę napięcia nici S:

$$a=\frac{g\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}, \qquad S=\frac{\mathrm{m}\,g\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Zadanie 15

Ruch punktu materialnego o masie m od pewnej chwili odbywa się po okręgu o promieniu r zgodnie z równaniem $s = b + 2r\ln t$, gdzie b – stała (rys. 15). Określić siłę F wywołującą ruch jako funkcję czasu t.



Rys. 15

Rozwiązanie

Na punkt materialny działa siła **F**, której rzuty na osie ruchomego τ i n układu współrzędnych, poruszającego się wraz z punktem A, są równe F_τ i F_n oraz siła bezwładności **B** o składowej stycznej B_τ i normalnej B_n.
Z zasady d'Alemberta otrzymamy:

$$F_\tau - B_\tau = 0, \qquad F_n - B_n = 0. \tag{1}$$

Ponieważ ruch opisany jest w naturalnym układzie współrzędnych to:

$$B_\tau = m\,a_\tau = m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{d^2(b+2r\ln t)}{dt} = -\frac{2mr}{t^2},$$

$$B_n = m\,a_n = m\frac{V^2}{r} = \frac{m\dot{s}^2}{r} = \frac{4mr}{t^2}. \tag{2}$$

Podstawiając wzory (2) w równania (1), wynikające z zasady d'Alemberta, dostaniemy:

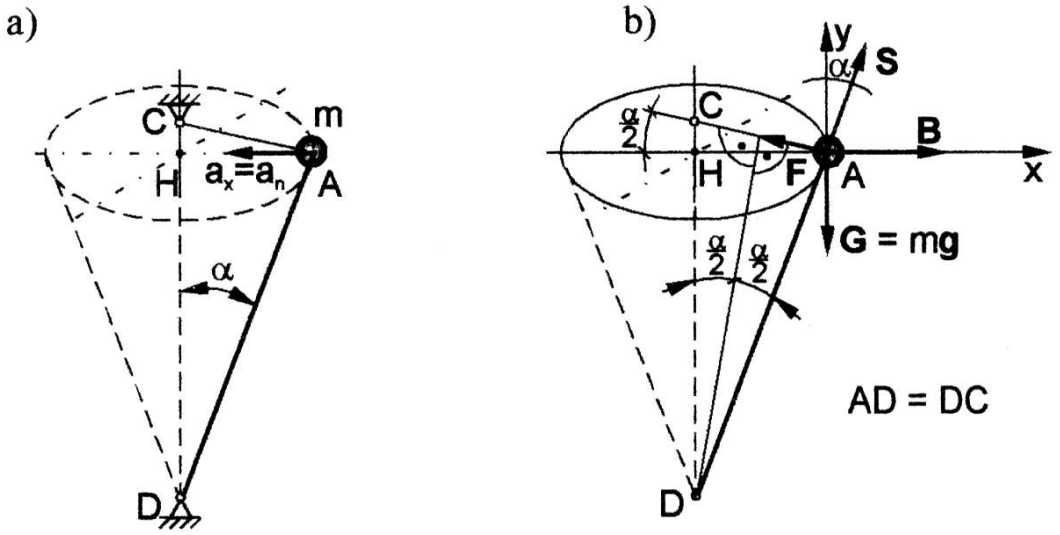
$$F_\tau = -\frac{2mr}{t^2}, \qquad F_n = \frac{4mr}{t^2}. \tag{3}$$

Szukana całkowita wartość siły F będzie:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \frac{2\,m\,r\sqrt{5}}{t^2}.$$

Zadanie 16

Kulka o masie m znajduje się na końcu nieważkiego pręta AD, przegubowo zamocowanego w punkcie D. Kulkę podtrzymuje sprężysta nić AC o współczynniku sztywności k, której drugi koniec umocowany jest w punkcie C. Kulka wraz z nicią i prętem obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. Znaleźć zależność między kątem α a prędkością kątową ω obrotu kulki z prętem AD. Obliczyć siłę S występującą w pręcie AD. Przyjąć AD = CD = L. Masę pręta pominąć. Dla α = 0 nitka nie jest napięta (rys. 16).



Rys. 16

Rozwiązanie

Na kulkę działają następujące siły: siła ciężkości **G**, siła sprężystości nici **F**, siła występująca w pręcie **S** (oddziaływania pręta na kulkę) oraz odśrodkowa siła bezwładności **B** = m **a** . Trójkąt ADC jest trójkątem równoramiennym.

Zgodnie z zasadą d'Alemberta, dla punktu A napiszemy wektorowe równanie równowagi sił:

$$\mathbf{G} + \mathbf{B} + \mathbf{F} + \mathbf{S} = 0, \qquad (1)$$

którego równania rzutów na osie układu współrzędnych x i y są:

$$m\,a_x - F\cos\frac{\alpha}{2} + S\sin\alpha = 0, \qquad -m\,g + m\,a_y + F\sin\frac{\alpha}{2} + S\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Z rysunku 16a i b wynika, że $a_x = a_n$, $a_y = 0$ (ruch wzdłuż osi y nie odbywa się).
Siła sprężystości nici jest równa:

$$F = k \cdot AC = 2\,k\,L\sin\frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

i skierowana wzdłuż AC.
Ponieważ kulka A obraca się ze stała prędkością kątową ω wokół punktu H to:

$$a_x = a_n = \omega^2\,AH = \omega^2\,L\sin\alpha. \quad (4)$$

Wstawiając $a_y = 0$ oraz (3) i (4) w (2), otrzymamy układ równań:

$$m\,\omega^2\,L\sin\alpha - 2\,k\,L\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + S\sin\alpha = 0, \quad (5)$$

$$-m\,g + 2\,k\,L\sin^2\frac{\alpha}{2} + S\cos\alpha = 0. \quad (6)$$

Podstawiając w równanie (5), $2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2) = \sin\alpha$ i dzieląc je przez $\sin\alpha$ ($\sin\alpha \neq 0$), otrzymamy wzór na poszukiwaną siłę S występującą w pręcie:

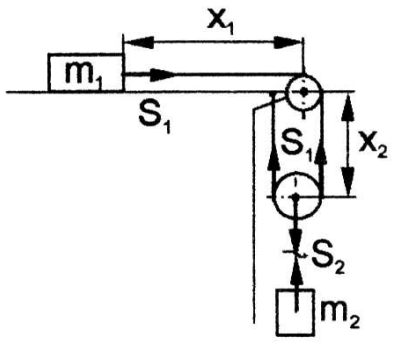
$$S = L\,(k - m\,\omega^2). \quad (7)$$

Po wstawieniu do (6), wzoru (7) oraz $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ oraz po odpowiednich przekształceniach wyznaczymy szukaną prędkość kątową, która jest równa:

$$\omega = \sqrt{\frac{k\,L - m\,g}{m\,L\cos\alpha}}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadania 1. Dwie masy m_1= 100 kg, m_2= 300 kg zaczynają ruch z położenia spoczynkowego i poruszają się dalej jak na rysunku poniżej. Wyznaczyć przyspieszenia a_1 i a_2 mas oraz siły napięcia w linkach. Tarcia oraz ciężaru linki i bloczków nie uwzględniać. Przyjąć $x_1 = 2\,x_2$, oraz wynikającą z tego zależność $\ddot{x}_1 = 2\,\ddot{x}_2$.



Odpowiedź: $a_1 = \ddot{x}_1 = 8{,}4\ \text{m/s}^2$,

$a_2 = \ddot{x}_2 = 4{,}2\ \text{m/s}^2$,

S_1= 840 N, S_2= 1680 N

Zadanie 2. Wyznaczyć przyspieszenie styczne, normalne i prędkość masy m wahadła matematycznego. Wahadło wykonuje ruch w płaszczyźnie pionowej, długość nieważkiej linki wynosi 2 m, a kąt wychylenia 30°.

Odpowiedź: a_τ= 4,9 m/s^2, a_n= 16,03 m/s^2, V = 5,66 m/s

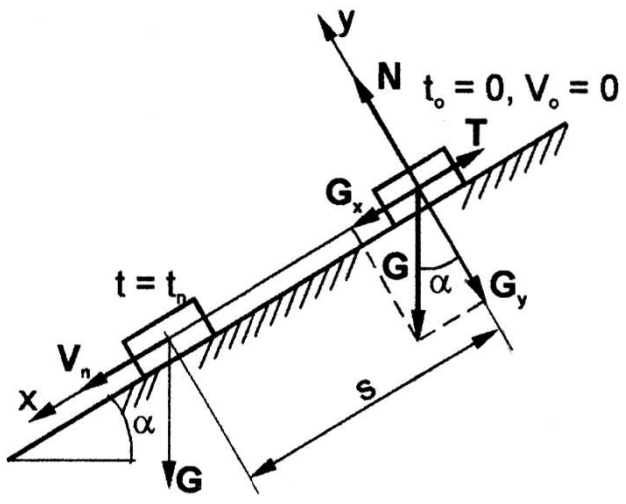
Zadanie 3. Przy jakiej prędkości samochodu, na zakręcie o promieniu r = 150 m, reakcja jezdni na samochód będzie prostopadła do podłoża. Kąt pochylenia jezdni wynosi α = 18°. Czy prędkość zależy od masy poruszającego się samochodu?

Odpowiedź: V = 78,7 km/h

2.2. Zasada pędu i krętu

Zadanie 17

Po równi pochyłej tworzącej z poziomem kąt $\alpha = 30^0$ zsuwa się ciało, którego prędkość początkowa równa była zero (rys. 17). Obliczyć czas, w ciągu którego ciało przebędzie drogę s = 100 m, jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego μ = 0,15.



Rys. 17

Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania zastosujemy twierdzenie o przyroście pędu, które mówi, że przyrost geometryczny pędu punktu materialnego w pewnym przedziale czasu (t_n, t_0) równa się impulsowi sił (popędowi sił) działających w tym przedziale czasu na ten punkt. Powyższą zasadę możemy zapisać w postaci wektorowej:

$$m\,\mathbf{V}_{t_n} - m\,\mathbf{V}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_n} \mathbf{F}\,dt, \tag{1}$$

lub w postaci analitycznej (ruch jest prostoliniowy wzdłuż osi x):

$$m\,V_{t_n} - m\,V_{t_0} = \int_{t_0}^{t_n} F\,dt. \tag{2}$$

Pęd w chwili początkowej jest równy:

$$p_x = m\,V_{t_0} = 0, \tag{3}$$

ponieważ dla $t_0 = 0$, $V_{t_o} = 0$.

Impuls siły $F = G_x - T$ (rys. 17), działający na ciało w przedziale czasu $t_n - t_0 = t$:

$$S_x = \int_{t_0}^{t_n} F\,dt = (G_x - T)\,t = (G\sin\varphi - G\,\mu\cos\varphi)\,t = m\,g\,(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)\,t, \tag{4}$$

gdyż rzut wektora siły G na oś x oraz siła T mająca kierunek tejże osi, są niezmienne w czasie.
Podstawiając pęd w chwili początkowej i końcowej, oraz impuls siły do zależności (2), otrzymamy:

$$m V_{t_n} = m g (\sin\varphi - \mu \cos\varphi) t , \tag{5}$$

skąd po uwzględnieniu $V_{t_n} = \dot{x}$ dostaniemy:

$$\dot{x} = g (\sin\varphi - \mu \cos\varphi) t . \tag{6}$$

Całkując powyższe równanie otrzymamy drogę, która jest równa:

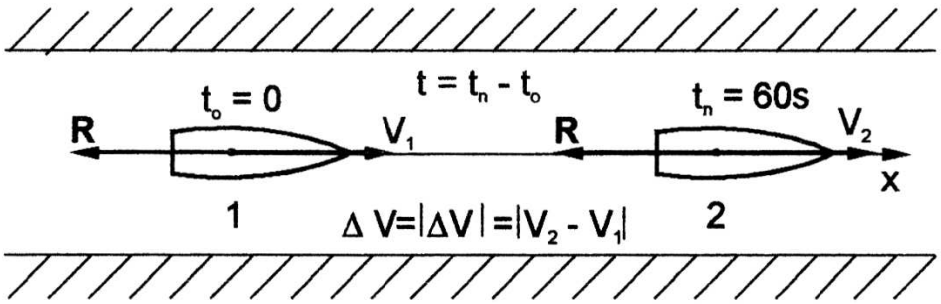
$$x = (\sin\varphi - \mu \cos\varphi)\frac{g t^2}{2} + C . \tag{7}$$

Uwzględniając warunki początkowe (dla t = 0, x = 0) wyznaczymy stałą C = 0 i dalej czas, w ciągu którego ciało przebędzie drogę x = s = 100 m:

$$t = \frac{2 \cdot s}{g (\sin\varphi - \mu \cos\varphi) t} = \frac{2 \cdot 100}{9{,}81 (\sin 30^0 - 0{,}15 \cos 30^0)} = 55 \text{ s}.$$

Zadanie 18

Prędkość statku o wyporności m = 25000 t w ciągu t = 60 s po wyłączeniu napędu zmniejszyła się o ΔV = 3 m/s. Znaleźć średnią siłę oporu wody R. Przyjąć, że statek porusza się ruchem prostoliniowym.



Rys. 18

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o przyroście pędu:

$$mV_{t_n} - mV_{t_0} = \int_{t_0}^{t_n} \mathbf{R}dt . \tag{1}$$

Ponieważ statek porusza się ruchem prostoliniowym (wzdłuż osi x) i siła oporu **R** jest stała, to możemy napisać:

$$m(V_2 - V_1) = \int_{t_0}^{t_n} R\, dt , \tag{2}$$

gdzie: $V_2 - V_1 = \Delta V$, a $\int_{t_0}^{t_n} R\, dt = R(t_n - t_0) = R\, t$, skąd:

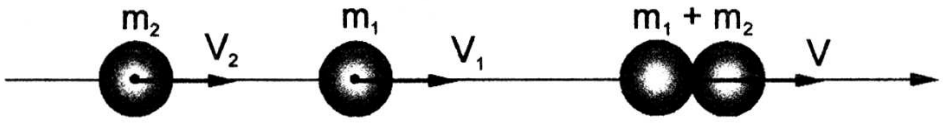
$$R = \frac{m\,\Delta V}{t}. \tag{3}$$

$\Delta V = V_2 - V_1 = -3$ m/s, ponieważ nastąpiło zmniejszenie prędkości.
Po wstawieniu danych otrzymamy:

$R = -1250$ kN.

Zadanie 19

Dwa ciała o masach m_1 i m_2 poruszają się wzdłuż jednej prostej, pierwsze z prędkością $V_1 = 3$ m/s, a drugie z $V_2 = 8$ m/s (rys. 19). W pewnej chwili ciała zderzyły się i zaczęły poruszać się razem z prędkością $V = 6$ m/s. Obliczyć stosunek mas tych ciał.



Rys. 19

Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania zastosujemy zasadę zachowania pędu, która mówi, że jeżeli na układ punktów materialnych działa samozrównoważony układ sił, to pęd jest wartością stałą. Z powyższego wynika, że suma pędów dwóch ciał przed zderzeniem jest równa pędowi tych ciał po zderzeniu, co zapiszemy w postaci:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V = \text{const}.$$

Przekształcając powyższą zależność dostaniemy:

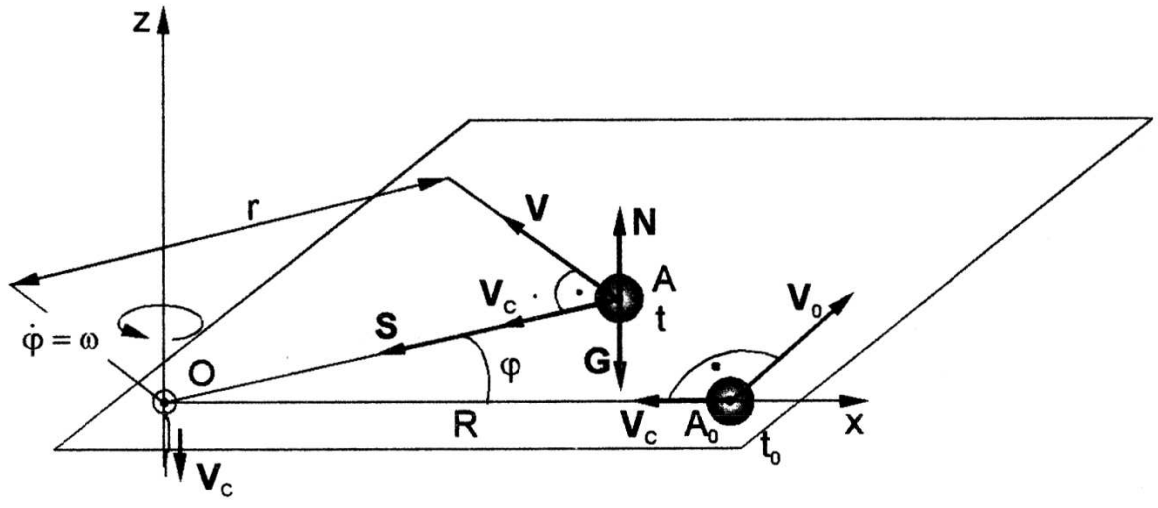
$$m_1 (V_1 - V) = m_2 (V - V_2), \quad \text{skąd} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{V - V_2}{V_1 - V},$$

podstawiając dane otrzymamy:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{6-3}{8-6} = \frac{3}{2}.$$

Zadanie 20

Kulka o masie m znajduje się na gładkiej poziomej płaszczyźnie (rys. 20). Do końca nieważkiej i nierozciągliwej nici przywiązana jest kulka. Nić przechodzi przez otwór O. Kulka wciągana jest do otworu za pomocą nici z stałą prędkością V_C. W chwili początkowej, gdy kulka znajduje się w odległości $OA_0 = R$ od otworu O, nadano jej dodatkową prędkość V_0 prostopadle skierowaną do nici OA_0. Określić dalszy ruch kulki.



Rys. 20

Rozwiązanie

Położenie kulki A na płaszczyźnie określimy we współrzędnych biegunowych (r, φ). Na kulkę działają trzy siły: siła ciężkości **G**, reakcja płaszczyzny **N** i reakcja nici **S**. Moment każdej z tych sił względem osi z równy jest zeru, w związku z tym suma momentów tych sił:

$$\sum M_{iz} = 0.$$

Z teorii krętu wiadomo, że:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_{iz} = 0,$$

co oznacza, że $K_z = \text{const}$.

Powyższy zapis wyraża nam zasadę zachowania krętu, która mówi, że moment względem dowolnego bieguna wypadkowej sił działających na punkt materialny jest równy zeru, gdy kręt punktu materialnego wyznaczony względem tegoż bieguna jest stały.

Znajdźmy zależność promienia r w funkcji czasu t. Ponieważ nić jest wciągana z prędkością $V_C = \text{const}$, to $r = R - V_C t$.

Dla znalezienia kąta φ w funkcji czasu t wykorzystamy, wyżej przedstawioną, zasadę zachowania krętu ($K_z = \text{const}$).

Kręt kulki, inaczej moment pędu, względem osi z w chwili t = 0 jest równy:

$$K_z = m V_0 R,$$

a w dowolnej chwili t:

$$K_z = m V r = m V (R - V_C t).$$

Prędkość kulki jest równa:

$$V = r \dot{\varphi} = (R - V_C t) \dot{\varphi}, \qquad (1)$$

gdzie: $\dot{\varphi}$ – jest prędkością kątową kulki.

Ponieważ $K_z = \text{const}$ dla dowolnej chwili czasu, to:

$$m V_0 R = m V (R - V_C t), \qquad (2)$$

a po wstawieniu wzoru (1) w (2) i przekształceniach dostaniemy:

$$\dot{\varphi} = \frac{R V_0}{(R - V_C t)^2}.$$

Całkując powyższe wyrażenie otrzymamy:

$$\varphi = \frac{R\, V_0}{(R - V_C\, t)\, V_C} + C\,. \tag{3}$$

Stałą całkowania C określimy z warunków początkowych, z których wynika, że dla $t = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, skąd:

$$C = -\frac{V_0}{V_C}.$$

Po podstawieniu stałej całkowania C w (3) i odpowiednich przekształceniach, otrzymamy zależność zmiany kąta φ w czasie t:

$$\varphi = \frac{V_0\, t}{R - V_C\, t}.$$

Druga współrzędna jest równa: $r = R - V_C\, t$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Samochód o masie m = 1500 kg jedzie w dół z prędkością V_1= 72 km/h po drodze nachylonej pod kątem $\alpha = 5^\circ$ do poziomu. W pewnym momencie zaczyna hamować siłą F = 4500 N. Wyznaczyć czas potrzebny do zatrzymania samochodu.

Odpowiedź: t = 9,32 s

Zadanie 2. Piłka tenisowa o masie m = 0,1 kg w chwili uderzenia miała prędkość V_1= 25 m/s. W pewnej chwili została uderzona tak, że zaczęła się poruszać z prędkością V_2= 36 m/s w przeciwną stronę pod kątem $\alpha = 40^\circ$ do poprzedniego kierunku ruchu. Czas trwania uderzenia wynosił t = 0,015 s. Wyznaczyć siłę F uderzenia i jej kierunek φ względem początkowego kierunku ruchu piłki (kąt pod jakim należało uderzyć piłkę).

Odpowiedź: F = 358,7 N, $\varphi = 25^\circ\, 30'$

Zadanie 3. Punkt materialny porusza się pod działaniem siły centralnej. Wyznaczyć prędkość V_2 punktu znajdującego się w miejscu toru najbardziej oddalonym od środka, jeżeli prędkość punktu w miejscu najbliższym środka wynosi V_1= 72 m/s.

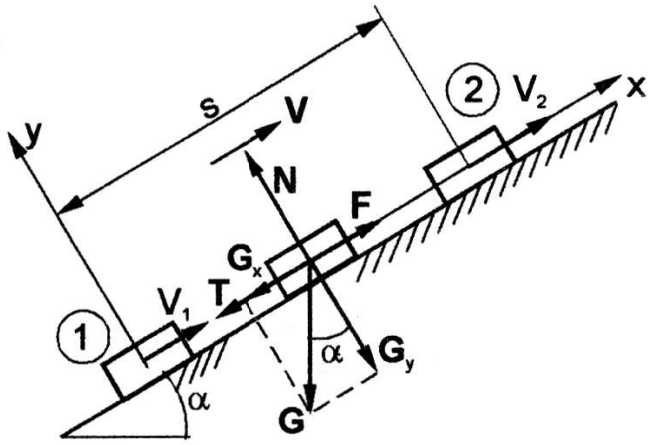
Promień r_2 w położeniu drugim był 8 razy większy od promienia r_1 w położeniu początkowym punktu.

Odpowiedź: V_2= 9 m/s

3.3. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy

Zadanie. 21

Jaką prędkość osiągnie ciało o masie 3 kg (ciało traktujemy jako punkt materialny) po przebyciu drogi s = 3 m liczonej wzdłuż tworzącej równi, jeżeli porusza się ono pod działaniem siły F = 50 N. Równia nachylona jest pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do poziomu. Prędkość początkowa ciała V_1 = 10 m/s, współczynnik tarcia kinetycznego $\mu = 0{,}2$.



Rys. 21

Rozwiązanie

Do wyznaczenia prędkości V_2 (rys. 21) wykorzystamy zasadę równoważności energii kinetycznej i pracy (twierdzenie o energii kinetycznej), z której wynika, że przyrost energii kinetycznej punktu materialnego w skończonym przedziale czasu równy jest sumie prac, które wykonały w tym czasie wszystkie siły działające na ten punkt. Z powyższego wynika:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L, \tag{1}$$

gdzie: E_{k_1}, E_{k_2} – energia kinetyczna ciała w położeniu 1 i 2, L – praca wykonana przez wszystkie siły działające na punkt przy przejściu ciała z położenia 1 do 2.

Energia kinetyczna, odpowiednio w położeniu 1 i 2 wynosi:

$$E_{k_1} = \frac{m V_1^2}{2} \qquad E_{k_2} = \frac{m V_2^2}{2}, \tag{2}$$

gdzie: V_2 jest poszukiwaną prędkością.
Określimy pracę poszczególnych sił. Na ciało działają następujące siły: siła ciężkości **G** = mg, siła zewnętrzna czynna **F**, siła tarcia T = μ N, siła normalna N. Praca całkowita tych sił:

$$L = L_G + L_P + L_T + L_N, \tag{3}$$

gdzie: L_G, L_P, L_T, L_N – odpowiednio, praca siły ciężkości, siły zewnętrznej, tarcia i normalnej.
Pracę poszczególnych sił określimy:

$$L_G = -m\,g\,h, \qquad h = s\sin\alpha, \tag{4}$$

$$L_P = F\,s, \tag{5}$$

$$L_T = -T\,s = -\mu\,N\,s, \qquad N = m\,g\cos\alpha, \tag{6}$$

$$L_N = 0.$$

Praca L_G, L_T jest ujemna, ponieważ siły są przeciwnie skierowane do ruchu. Praca siły normalnej N jest równa zeru, gdyż jest ona prostopadła do przemieszczenia s ($L_N = N\,s\cos\varphi$, $\varphi = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$).
Podstawiając (2) i (4) – (6) do (1), otrzymamy:

$$\frac{m V_2^2}{2} - \frac{m V_1^2}{2} = -m\,g\,s\sin\alpha + F\,s - m\,g\,s\,\mu\cos\alpha,$$

skąd po przekształceniach dostaniemy:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2\frac{F\,s}{m} - 2\,g\,s\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)},$$

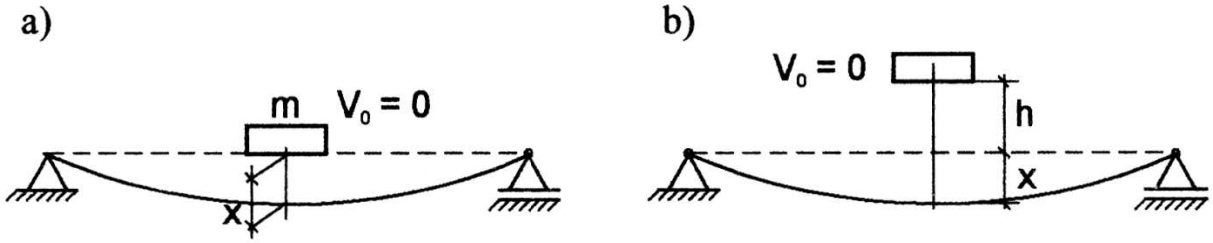
$$V_2 = \sqrt{10^2 + 2\frac{50\cdot 3}{3} - 2\cdot 9{,}81\cdot 3\,(\sin 60^\circ - 0{,}2\cos 60^\circ)} = 15{,}6\ \text{m/s}.$$

Zadanie. 22

Belka dwustronnie podparta ugina się o $\Delta = 3$ mm pod wpływem ciężaru ciała o masie m przyłożonego w połowie jej długości. Obliczyć największe ugięcie belki w połowie jej długości, jeżeli belka obciążana jest w następujący sposób:

a) na belkę położono ciało w połowie jej długości i puszczono je bez prędkości początkowej;

b) ciało spada bez prędkości początkowej z wysokości h = 0,15 m na środek nie ugiętej belki?



Rys. 22

Rozwiązanie

Belkę będziemy traktować jak sprężynę o współczynniku sprężystości $k = \frac{G}{\Delta} = \frac{m\,g}{\Delta} = \frac{m\,g}{0{,}003}\,\frac{N}{m}$. Na belkę, po zetknięciu się ciała z belką, działają dwie siły, siła ciężkości $G = m\,g$ i siła sprężystości belki $S = k\,x$.

Z zasady równoważności energii kinetycznej i pracy wynika:

$$E_{K_2} - E_{K_1} = L. \tag{1}$$

W przypadku a) i b) prędkość ciała na początku ruchu i na końcu jest równa zeru, stąd energie kinetyczne ciała w położeniu początkowym i końcowym również równe są zero. Z powyższego wynika, że suma prac siły ciężkości i siły sprężystości jest równa zeru.

Praca siły ciężkości i siły sprężystości w przypadku (a), odpowiednio jest równa:

$$L_G = m\,g\,x, \qquad L_S = -\frac{1}{2}k\,x^2 \quad \text{(patrz rys. 22a)}, \tag{2}$$

gdzie: x jest ugięciem belki w położeniu końcowy.

Podstawiając wzór na współczynnik sprężystości k i wzory na prace (2) w (1) otrzymamy:

$$L_G + L_S = m\,g\,x + \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{m\,g}{0{,}003}\,x^2\right) = 0,$$

skąd: x = 6 mm.
W przypadku (b), odpowiednio, mamy:

$$L_G = m\,g\,(h+x), \qquad L_S = -\frac{1}{2}k\,x^2 \quad \text{(patrz rys. 22b).} \tag{3}$$

Podstawiając k i prace (3) w (1) otrzymamy:

$$L_G + L_S = m\,g\,(h+x) + \left(-\frac{1}{2}k\,x^2\right) = 0,$$

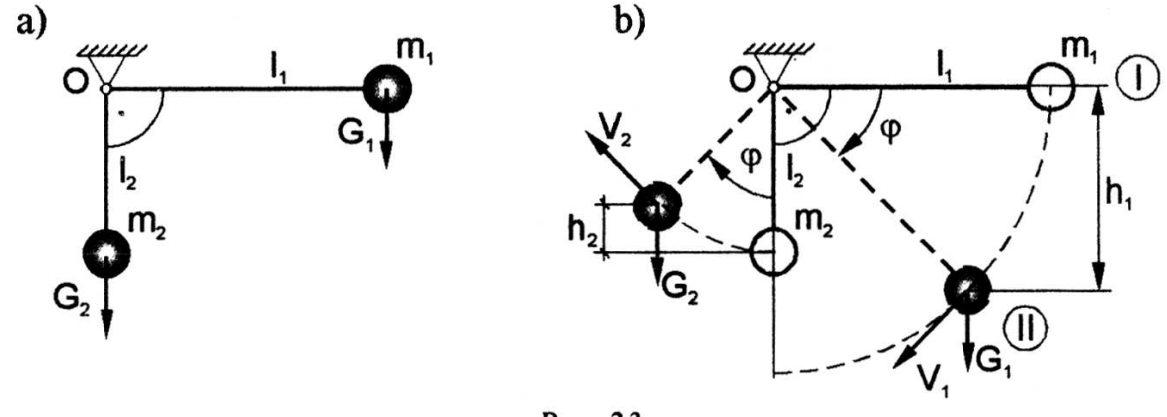
skąd po przekształceniach dostaniemy równanie kwadratowe:

$$x^2 - 0{,}006\,x - 0{,}006\,h = 0,$$

rozwiązaniem, którego jest poszukiwane maksymalne przemieszczenie x = 3,3 cm.

Zadanie. 23

Na końcach dwóch nieważkich prętów o długościach l_1 i l_2 połączonych pod kątem prostym jak na rysunku 23a, umocowano dwie masy m_1 i m_2. Pręty mogą obracać się w płaszczyźnie pionowej dokoła poziomej osi O przechodzącej przez ich końce. Wyznaczyć prędkość kątową prętów oraz prędkości liniowe mas jako funkcje kąta obrotu φ, jeżeli pręty zostały puszczone bez prędkości początkowej i pręt 1 zajmował położenie poziome, a pręt 2 pionowe.



Rys. 23

Rozwiązanie

Z twierdzenia o energii kinetycznej wynika:

$$E_{K_{II}} - E_{K_I} = L. \tag{1}$$

Energia kinetyczna odpowiednio w położeniu I–szym i dowolnym II–gim wynosi:

$$E_{k_I} = 0, \qquad E_{k_{II}} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}, \tag{2}$$

gdzie: V_1, V_2 prędkości mas w drugim położeniu prętów (rys. 23b).
Na pręty działają następujące siły czynne: siły ciężkości mas $\mathbf{G_1} = m_1 \mathbf{g}$, $\mathbf{G_2} = m_2 \mathbf{g}$ i siły reakcji w punkcie O. Pracę wykonują siły ciężkości, natomiast praca sił reakcji jest równa zero. Tak, więc praca sił będzie równa:

$$L = m_1 g h_1 - m_2 g h_2,$$

a po uwzględnieniu $h_1 = l_1 \sin\varphi$ i $h_2 = l_2 - l_2 \cos\varphi = l_2 (1 - \cos\varphi)$, otrzymamy:

$$L = m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi). \tag{3}$$

Podstawiając (2) i (3) w (1) dostaniemy:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi).$$

Prędkości kątowe prętów są takie same, więc $V_1 = \omega l_1$ i $V_2 = \omega l_2$, stąd:

$$\frac{m_1 \omega^2 l_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 l_2^2}{2} = m_1 g l_1 \sin\varphi - m_2 g l_2 (1 - \cos\varphi). \tag{4}$$

Przekształcając (4), otrzymamy poszukiwaną prędkość kątową w funkcji kąta obrotu φ:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 g [m_1 l_1 \sin\varphi - m_2 l_2 (1 - \cos\varphi)]}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

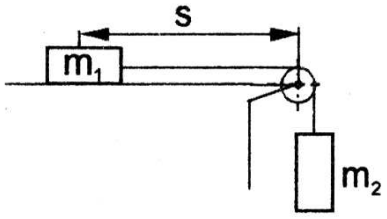
Prędkości mas, odpowiednio będą równe:

$$V_1 = l_1 \sqrt{\frac{2\,g\,[m_1\,l_1 \sin\varphi - m_2\,l_2\,(1-\cos\varphi)]}{m_1\,l_1^2 + m_2\,l_2^2}},$$

$$V_2 = l_2 \sqrt{\frac{2\,g\,[m_1\,l_1 \sin\varphi - m_2\,l_2\,(1-\cos\varphi)]}{m_1\,l_1^2 + m_2\,l_2^2}}.$$

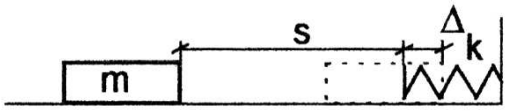
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Dwa ciała o masach m_1= 150 kg i m_2= 250 kg poruszają się jak na rysunku. Współczynnik tarcia kinetycznego masy m_1 o poziomą powierzchnię równy jest μ = 0,2. Określić prędkość V, z jaką będą poruszać się ciała, jeżeli przemieszczą się na odległość s = 2 m.



Odpowiedź: V = 4,64 m/s

Zadanie 2. Ciało o masie m = 60 kg porusza się po poziomej chropowatej powierzchni. W chwili początkowej ruchu ciało znajduje się w odległości s = 0,6 m od nie napiętej sprężyny o współczynniku sztywności k = 22,4 kN/m i ma prędkość V_1=2,5 m/s jak na rysunku. W wyniku uderzenia ciała sprężyna ugięła się o Δ = 0,1 m. Wyznaczyć współczynnik tarcia kinetycznego μ oraz prędkość V_3 ciała w chwili, gdy powróci do położenia początkowego ruchu.



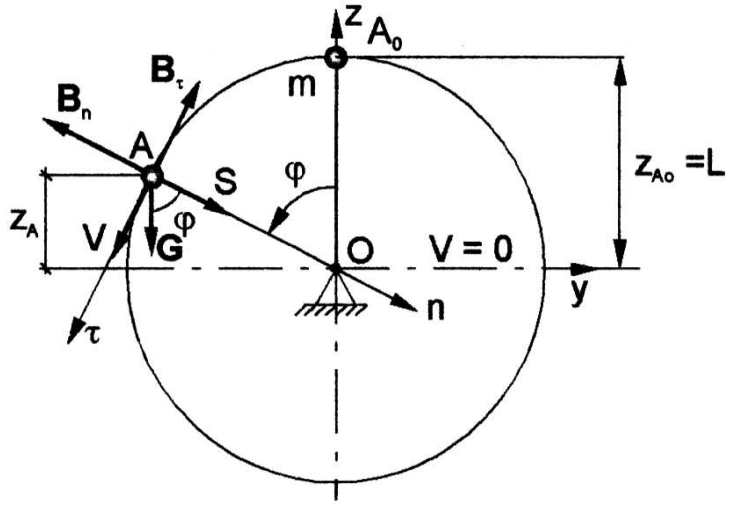
Odpowiedź: μ = 0,2, V_3= 1,103m/s.

3.4. Zasada zachowania energii mechanicznej

Zadanie 24

Na końcu nieważkiego pręta o długości L umieszczono kulkę o masie m. Drugi koniec pręta umocowano na poziomej osi przechodzącej przez punkt O. W chwili początkowej pręt znajduje się w położeniu równowagi chwiejnej

(punkt A_0) i zostaje z niej wytrącony z nieskończenie małą prędkością. Wyznaczyć siłę w pręcie jako funkcję kąta obrotu φ (rys. 24).



Rys. 24

Rozwiązanie

Na kulkę działają cztery siły: siła ciężkości **G**, siła bezwładności $\mathbf{B_n}$ i $\mathbf{B_t}$ oraz siła reakcji pręta **S**. Z zasady d'Alemberta mamy:

$$-B_n + S + G\cos\varphi = 0,$$

skąd poszukiwana siła w pręcie:

$$S = B_n - G\cos\varphi = m\,a_n - m\,g\cos\varphi = m\,\frac{V^2}{L} - m\,g\cos\varphi\,. \qquad (1)$$

We wzorze (1) nieznaną wielkością jest prędkość V. Wyznaczymy ją z zasady zachowania energii mechanicznej, która mówi, że podczas ruchu w potencjalnym polu sił energia mechaniczna (kinetyczna i potencjalna) punktu materialnego zachowuje stałą wartość (siła ciężkości jest siłą potencjalną). Jako poziom odniesienia dla energii potencjalnej E_p przyjmiemy płaszczyznę poziomą xOy (oś x jest prostopadła do rysunku), o potencjale równym zero. W związku z powyższym dostaniemy:

$$E_{kA_0} + E_{pA_0} = E_{kA} + E_{pA},$$

gdzie: $E_{kA_0} = 0$, gdyż prędkość $V_o = 0$ – energia kinetyczna w punkcie A_0;

$E_{pA_0} = m\,g\,z_{A_0} = m\,g\,L$ – energia potencjalna w punkcie A_0; $E_{kA} = \frac{m\,V^2}{2}$ – energia kinetyczna w dowolnym punkcie A; $E_{pA} = m\,g\,z_A = m\,g\,L\cos\varphi$ – energia potencjalna w dowolnym punkcie A, skąd:

$$0 + m\,g\,L = \frac{m\,V^2}{2} + m\,g\,L\cos\varphi\,. \tag{2}$$

Z przekształcenia (2) otrzymamy:

$$m\,V^2 = 2\,m\,g\,L\,(1-\cos\varphi)\,. \tag{3}$$

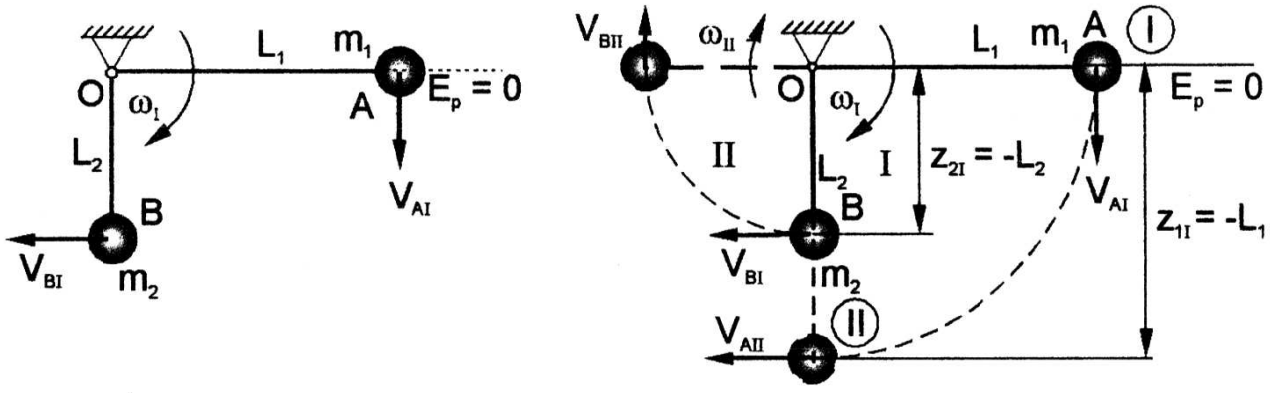
Po podstawieniu (3) do równania (1) otrzymamy szukaną siłę w pręcie:

$$S = \frac{2\,m\,g\,L\,(1-\cos\varphi)}{L} - m\,g\cos\varphi = m\,g\,(2-3\cos\varphi).$$

Zadanie 25

Na końcach dwóch nieważkich prętów OA=L_1 i OB=L_2 ($L_1 > L_2$) połączonych ze sobą pod kątem prostym (rys. 25a), umieszczono kulki o masach m_1 i m_2 ($m_1 > m_2$). Znaleźć prędkość kątową i liniową punktu B w chwili, gdy przechodzi on przez położenie poziome. W chwili początkowej pręt OB zajmował położenie pionowe, a prędkość kątowa prętów była równa ω_I.

a) b)



Rys. 25

Rozwiązanie

Układ znajduje się w polu sił ciężkości, czyli w polu potencjalnym, w związku z tym, aby wyznaczyć prędkość możemy skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej.

Z zasady zachowania energii mechanicznej otrzymamy równanie:

$$E_{k_I} + E_{p_I} = E_{k_{II}} + E_{p_{II}} = \text{const}, \tag{1}$$

gdzie: $E_{k_I}, E_{k_{II}}, E_{p_I}, E_{p_{II}}$,odpowiednio, energia kinetyczna i potencjalna pręta OA i OB w położeniu I i II (rys. 25b).

W położeniu I energia kinetyczna i potencjalna pręta OA i OB jest równa:

$$E_{k_I} = \frac{m_1 V_{AI}^2}{2} + \frac{m_2 V_{BI}^2}{2} = \frac{m_1 \omega_I^2 L_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_I^2 L_2^2}{2},$$

$$E_{p_I} = m_1 g z_{1I} + m_2 g z_{2I} = -m_2 g L_2, \tag{2}$$

gdzie: $z_{1I} = 0$, $z_{2I} = -L_2$ (minus dlatego, że przyjęto na poziomej linii przechodzącej przez punkt O potencjał równy zero).

W położeniu II energia kinetyczna i potencjalna pręta OA i OB jest równa:

$$E_{k_{II}} = \frac{m_1 V_{AII}^2}{2} + \frac{m_2 V_{BII}^2}{2} = \frac{m_1 \omega_{II}^2 L_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_{II}^2 L_2^2}{2},$$

$$E_{p_{II}} = m_1 g z_{1II} + m_2 g z_{2II} = -m_1 g L_1, \tag{3}$$

gdzie: $z_{1II} = -L_1$, $z_{2II} = 0$.

Podstawiając energie kinetyczne i potencjalne (2) i (3) w równanie (1) otrzymamy:

$$\frac{m_1 \omega_I^2 L_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_I^2 L_2^2}{2} - m_2 g L_2 = \frac{m_1 \omega_{II}^2 L_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_{II}^2 L_2^2}{2} - m_1 g L_1,$$

skąd prędkość kątowa:

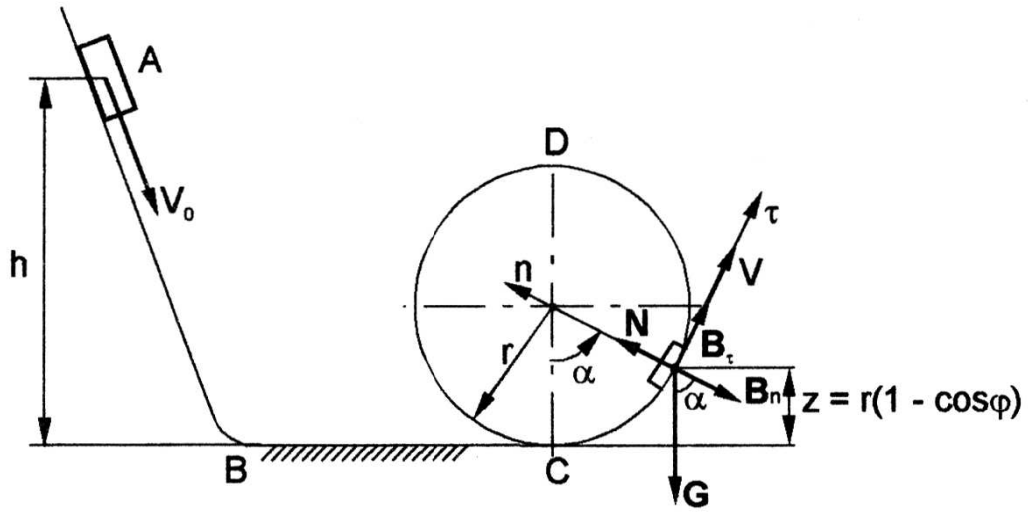
$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{\omega_I^2 (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) - 2 g (m_1 L_1 - m_2 L_2)}{m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2}},$$

i liniowa:

$$V_{BII} = \omega_{II} L_2 = L_2 \sqrt{\frac{\omega_I^2 (m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2) - 2 g (m_1 L_1 - m_2 L_2)}{m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2}}.$$

Zadanie 26

Gładki tor ABCD tworzy w punkcie C pętlę o promieniu r (rys. 26). Obliczyć minimalną wysokości h z jakiej musi rozpocząć się ruch ciała z prędkością V_0, aby nie oderwało się ono od toru. Znaleźć siłę oddziaływania toru na ciało w funkcji kąta obrotu φ.



Rys. 26

Rozwiązanie

Z zasady d'Alemberta wynika równanie sumy rzutów sił na oś normalną n:

$$-B_n + N - G\cos\varphi = 0, \tag{1}$$

gdzie: $B_n = m V^2/r$ – siła bezwładności ciała, N – siła reakcji toru,
G cosφ – rzut siły ciężkości na kierunek n.
Po wstawieniu wielkości sił i przekształceniu, równanie (1) przyjmie postać:

$$N = G\cos\varphi + \frac{m V^2}{r} = m g \cos\varphi + \frac{m V^2}{r}. \tag{2}$$

Z zasady zachowania energii mechanicznej dostaniemy:

$$\frac{m V_0^2}{2} + m g h = \frac{m V^2}{2} + m g (r - r\cos\varphi). \tag{3}$$

Podstawiając $m V^2$ z równania (2) do (3) wyznaczymy reakcję N oddziaływania toru na ciało w funkcji kąta obrotu φ:

$$N = \frac{m V_0^2 + m g [2h - r(2 - 3\cos\varphi)]}{r}.$$

Reakcja N osiąga minimum dla $\varphi = \pi$. Oddziaływanie toru jest więc minimalne w górnym punkcie D pętli i wynosi:

$$N_{min} = \frac{m V_0^2 + m g (2h - 5r)}{r}.$$

Aby kamień nie oderwał się od toru musi być spełniony warunek $N \geq 0$. Przekształcając powyższe równanie otrzymamy:

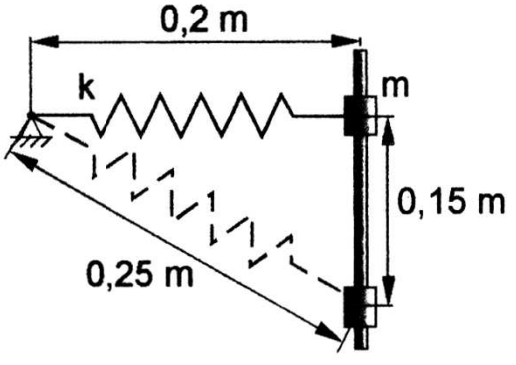
$$h \geq \frac{5gr - V_o^2}{2g},$$

a minimalna wysokość $h_{min} = \frac{5}{2} r - \frac{V_o^2}{2g}$.

Jeżeli przyjmiemy $V_0 = 0$, co oznacza, że punkt puszczono bez prędkości początkowej minimalna wysokość będzie $h_{min} = \frac{5}{2} r$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Do nienapiętej poziomej sprężyny o współczynniku sztywności k = 525 N/m przymocowano masę m = 10 kg jak na rysunku. Masę puszczono bez prędkości początkowej. Wyznaczyć prędkość masy gdy przemieści się ona pionowo w dół po pręcie o 0,15 m.



Odpowiedź: $V_2 = 0{,}83$ m/s

Zadanie 2. Na końcu nieodkształconej sprężystej liny o współczynniku sztywności k i wytrzymałości R na rozerwanie, zawieszono ciężar o masie m i puszczono bez prędkości początkowej. Wyznaczyć minimalną wartość masy m_{min} i prędkość V_2, przy której lina zerwie się.

Odpowiedź: $m_{min} = \frac{R}{2g}$, $V = \sqrt{\frac{R(2mg - R)}{km}}$

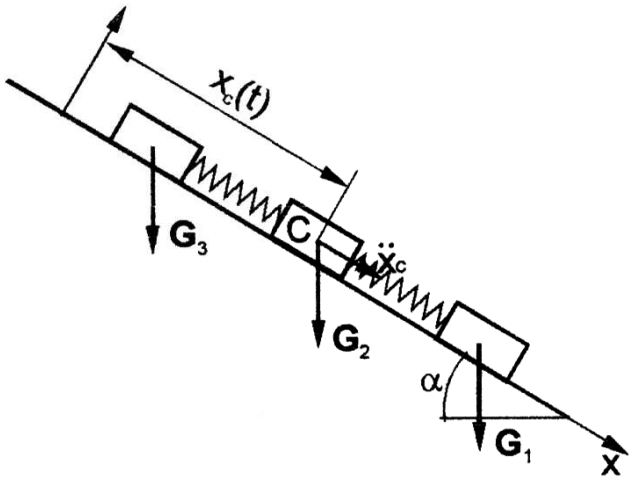
Zadanie 3. Przez nieważki krążek o promieniu r przerzucono nieważką linkę na końcach której przymocowane są masy m_1 i m_2. W chwili początkowej masa $m_1 > m_2$ znajdowała się na wysokości h nad poziomą płaszczyzną π. Wyznaczyć prędkość V_{II}, przyspieszenie a_{II} i czas t, gdy masa m_1 opadnie na poziomą płaszczyznę π.

Odpowiedź: $V_{II} = \sqrt{\frac{2gh(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}$, $a_{II} = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, $t = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}}$

3.5. Zasada ruchu środka masy

Zadanie 27

Trzy ciała o jednakowych masach, połączone jednakowymi sprężynami o stałej sprężystości k, staczają się po gładkim torze bez tarcia, nachylonym pod kątem α do poziomu. Znaleźć przyspieszenie z jakim będzie poruszał się środek mas. Opisać rodzaj ruchu.



Rys. 27

Rozwiązanie

Środek mas układu jednakowych ciał znajduje się w punkcie C i położony jest w środku drugiego ciała. Masa całego układu równa jest $m_c = m+m+m$.
Z zasady ruchu środka masy wynika, że środek masy, każdego układu punktów materialnych porusza się tak, jakby była w nim skupiona cała masa układu i jakby do tego punktu przyłożone były wszystkie siły zewnętrzne.
Suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych czynnych działających na układ jest:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3,$$

skąd rzut sił na kierunek osi x:

$$F_x = m\,g\sin\alpha + m\,g\sin\alpha + m\,g\sin\alpha = 3\,m\,g\sin\alpha$$

Równanie dynamiczne ruchu środka mas ma więc postać:

$$F_x = m_c\,\ddot{x}_c = 3\,m\,g\sin\alpha, \qquad \text{skąd} \qquad \ddot{x}_c = g\sin\alpha.$$

Środek mas porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym wzdłuż osi x z przyspieszeniem $g\sin\alpha$. Na podstawie ruchu środka mas nie można nic powiedzieć o ewentualnym ruchu ciał między sobą.

Zadanie 28

Człowiek o masie m_1 =70 kg stoi na dziobie łódki o masie m_2=600 kg i długości l= 4 m. Określić odległość na jaką przemieści się łódka, jeżeli człowiek przejdzie na koniec łodzi. Opór wody pominąć.

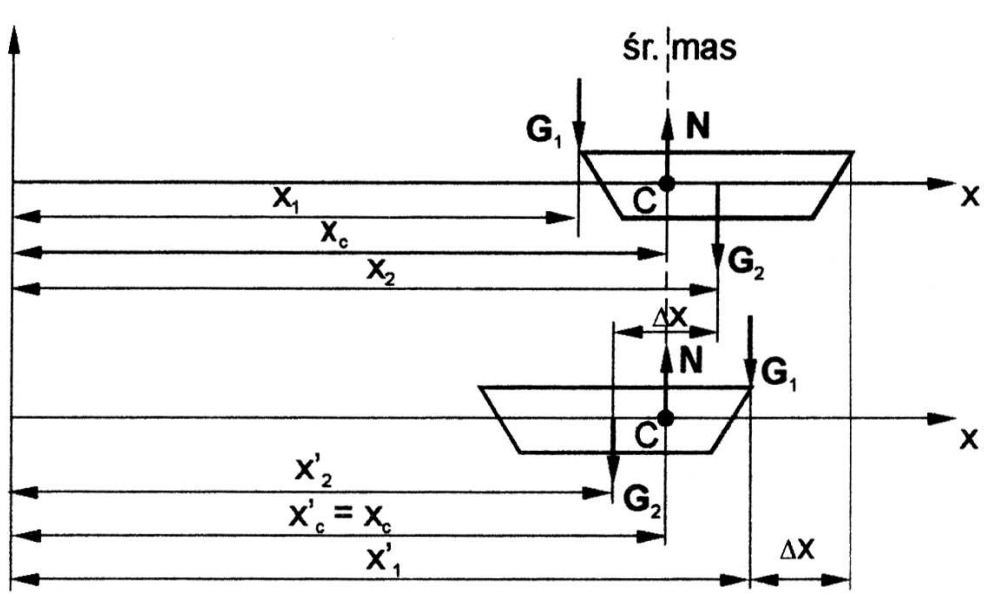
Rozwiązanie

Układ człowiek–łódka (rys. 28) znajduje się w stanie spoczynku w wyniku działania trzech równoważących się sił zewnętrznych: ciężaru człowieka $\mathbf{G_1} = m_1\mathbf{g}$, ciężaru łódki $\mathbf{G_2} = m_2\mathbf{g}$ i reakcji wyporu wody $\mathbf{N} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g}$. Linia działania reakcji **N** przechodzi przez środek ciężkości C układu człowiek–łódka.
Środek ciężkości C, układu dwóch ciał (łódki i człowieka stojącego na dziobie) określimy ze znanego wzoru z statyki:

$$x_c = \frac{G_1\,x_1 + G_2\,x_2}{G_1 + G_2},$$

podstawiając $G_1 = m_1 g$ i $G_2 = m_2 g$ dostaniemy:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{1}$$



Rys. 28

Podobnie określimy środek ciężkości C gdy człowiek przejdzie na drugi koniec łódki:

$$x'_c = \frac{G_1 x'_1 + G_2 x'_2}{G_1 + G_2},$$

lub:

$$x'_c = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Zgodnie z zasadą zachowania środka masy, środek masy C nie zmienia swego położenia, ponieważ suma geometryczna sił zewnętrznych (siła ciężkości człowieka, łodzi i wyporu) działających na dany układ punktów materialnych równa jest zeru, mamy więc $x_c = x'_c$. Przyrównując (1) i (2), otrzymamy:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2},$$

gdzie: $x_1' = x_1 + l - \Delta x$, a $x_2' = x_2 - \Delta x$.

Podstawiając x_1' i x_2' w powyższe równanie otrzymamy:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 (x_1 + l - \Delta x) + m_2 (x_2 - \Delta x),$$

skąd:

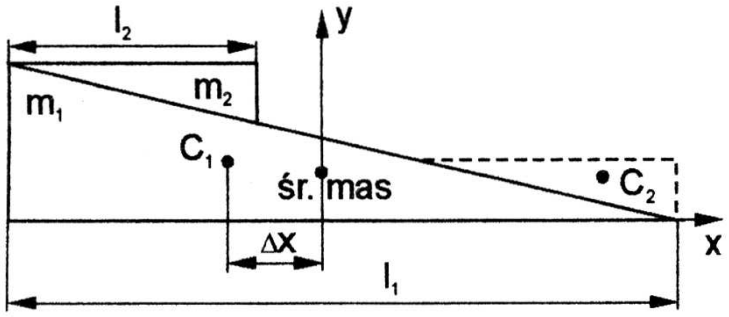
$$\Delta x = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych dostaniemy:

$$\Delta x = \frac{70 \cdot 4}{70 + 600} = 0{,}42 \text{ m}.$$

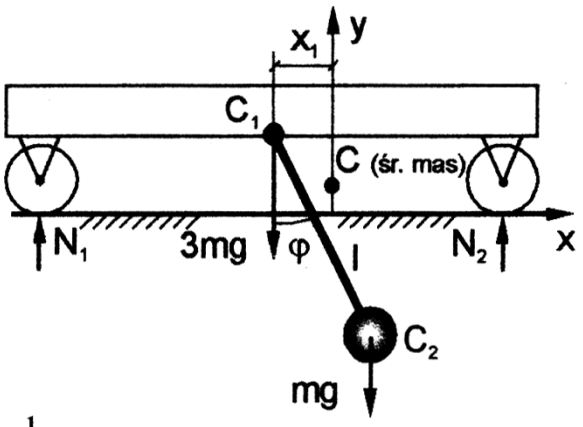
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznaczyć odległość Δx na jaką przesunie się klin 1 o długości l_1 pokazany na poniższym rysunku, jeżeli klin 2 o długości l_2 przemieści się względem klina 1 w prawo na jego koniec. Masa klina 1 jest większa od klina 2 i wynosi $m_1 = 3\ m_2$. Opory ruchu pomiędzy klinami i klinem 1 a poziomą płaszczyzną pominąć.



Odpowiedź: $\Delta x = -\frac{l_1 - l_2}{4}$

Zadanie 2. Do wózka o masie $m_1 = 3$ m przyczepiono nieważki pręt o długości l (rysunek poniżej). Na końcu pręta zamocowano kulkę o masie $m_2 = m$. Pręt wykonuje ruch zgodnie z równaniem $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Wyznaczyć równanie ruchu wózka $x_1 = x(t)$ oraz siłę nacisku wózka na poziomą płaszczyznę, jeżeli w chwili początkowej wózek znajdował się w stanie spoczynku.



Odpowiedź: $x_1 = \frac{l}{4}\sin\varphi$, $N = N_1 + N_2 = m\,l\,(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + 4\,m\,g$.

Siła nacisku zależy od prędkości kątowej $\dot{\varphi}$ i przyspieszenia kątowego $\ddot{\varphi}$.

II. DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

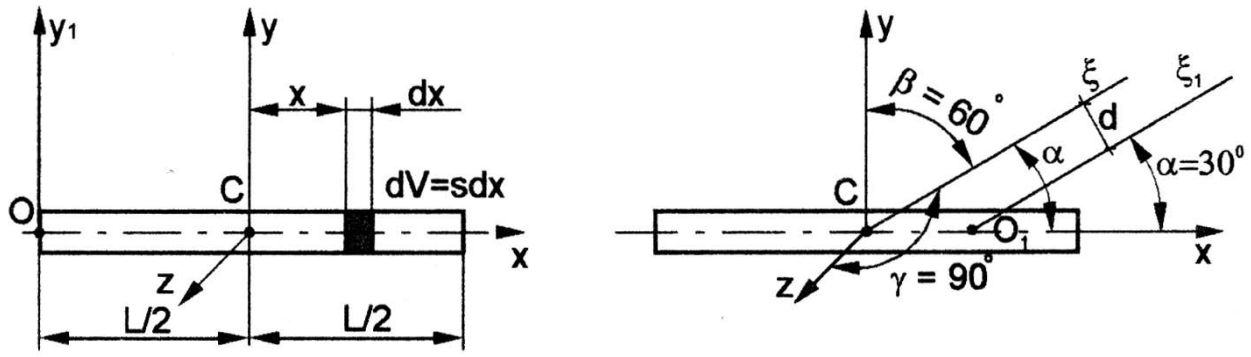
1. Masowe momenty bezwładności i dewiacji (zboczenia) brył

Zadanie 1

Znaleźć moment bezwładności i promień bezwładności jednorodnego cienkiego pręta o długości L i masie m, względem (rys. 1):

a) osi Oy_1, przechodzącej przez koniec pręta i prostopadłej do jego osi x,

b) osi ξ_1, przechodzącej przez punkt O_1 ($CO_1 = L/4$) i tworzącej z osią pręta kąt 30°.



Rys. 1

Rozwiązanie

Znajdźmy moment bezwładności względem osi y, która jest osią centralną (osie x, y, z przechodzą przez środek masy C, dlatego nazywamy je centralnymi). Przyjmijmy, długość pręta L, pole przekroju poprzecznego s, masę właściwą ρ. Objętość pręta jest równa $V = L\,s$, stąd mamy $m = \rho\,V = \rho\,L s$. Elementarna masa pręta $dm = \rho dV = \rho s dx$ (patrz rys. 1). Moment bezwładności względem osi y (centralnej) na podstawie teorii momentów bezwładności jest równy:

$$J_y = \int_m x^2\,dm = \int_{-L/2}^{L/2} \rho s x^2\,dx = \rho s \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\rho L^3 s}{12} = \frac{m L^2}{12}.$$

Promień bezwładności wyznaczymy z przekształcenia zależności $J_y = m i_y^2$, stąd:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} = \frac{L}{2\sqrt{3}}.$$

Wyznaczymy teraz moment bezwładności względem osi Oy_1. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Steinera, które mówi, że moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy bryły równy jest sumie momentów bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy i iloczynowi masy bryły przez kwadrat odległości między tymi osiami, skąd:

$$J_{y_1} = J_y + m a^2,$$

gdzie: J_y jest momentem bezwładności względem osi centralnej y, a= L/2 jest odległością między osiami y_1 i y.
Po podstawieniu J_y i a do powyższego wzoru, otrzymamy:

$$J_{y_1} = \frac{m L^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{m L^2}{3} \qquad \text{i} \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_{y_1}}{m}} = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

Aby wyznaczyć moment względem osi ξ_1, w pierwszej kolejności wyznaczymy moment względem osi ξ, a następnie skorzystamy z twierdzenia Steinera.
Moment bezwładności względem osi ξ określimy na podstawie wzoru:

$$J_\xi = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

gdzie: J_x, J_y, J_z – momenty bezwładności względem osi x, y i z; J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} momenty dewiacji względem osi układu współrzędnych xyz.
Ponieważ osie x, y, z, przyjęto jak na rysunku 1, to są one głównymi osiami bezwładności i dlatego momenty J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} względem nich są równe zero. Moment bezwładności względem osi x przyjmiemy $J_x = 0$, gdyż wymiary pręta wzdłuż osi y i z są znacznie mniejsze od długości L. Uwzględniając, że $J_y = J_z$ oraz $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$, mamy:

$$J_\xi = J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma = \frac{m L^2}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{m L^2}{48}.$$

Odległość między osiami ξ i ξ_1 jest równa: $d = \frac{L}{4}\sin 30^0 = \frac{L}{8}$.

Uwzględniając twierdzenie Steinera, moment bezwładności względem osi ξ_1 będzie równy:

$$J_{\xi_1} = J_\xi + m\,d^2 = \frac{m\,L^2}{48} + m\left(\frac{L}{8}\right)^2 = \frac{7}{192}\,m\,L^2$$

Zadanie 2

Znaleźć moment bezwładności jednorodnego prostopadłościanu o wymiarach a, b, c (rys. 2):

a) względem jego głównych centralnych osi bezwładności,

b) względem osi y_1, pokrywającej się z jedną z jego krawędzi,

c) względem osi ξ, pokrywającej się z przekątną prostopadłościanu.

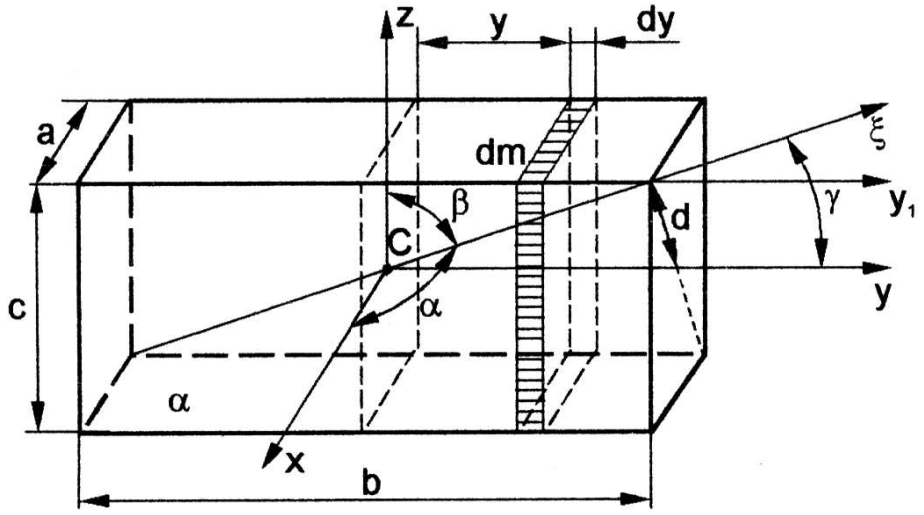
Rozwiązanie

Głównymi centralnymi osiami bezwładności są trzy osie symetrii x, y, z, które przechodzą przez środek masy C i względem nich momenty dewiacji J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} są równe zero.

Z teorii momentów bezwładności wiadomo, że momenty bezwładności względem osi x, y, z są równe sumie momentów bezwładności względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, których linia przecięcia tworzy tę oś, stąd mamy:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{zCx} + J_{xCy}, \\ J_y &= J_{xCy} + J_{yCz}, \\ J_z &= J_{yCz} + J_{zCx}, \end{aligned} \qquad (1)$$

gdzie: J_{xCy}, J_{yCz}, J_{zCx} – odpowiednio, momenty bezwładności względem płaszczyzn xCy, yCz, zCx.



Rys. 1

Moment bezwładności względem płaszczyzny zCx jest równy:

$$J_{zCx} = \int_m y^2 \, dm,$$

gdzie: $dm = \rho a c dy$, ρ – masa właściwa, stąd:

$$J_{zCx} = \int_{-b/2}^{b/2} \rho a c y^2 \, dy = \frac{\rho a c b^3}{12}.$$

Ponieważ, masa $m = \rho a b c$, to: $J_{zCx} = \frac{m b^2}{12}$. W podobny sposób otrzymamy momenty względem płaszczyzny xCy i yCz, $J_{xCy} = \frac{m c^2}{12}$, $J_{yCz} = \frac{m a^2}{12}$.

Wówczas, momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności są równe:

$$J_x = \frac{m b^2}{12} + \frac{m c^2}{12} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2),$$

$$J_y = \frac{m c^2}{12} + \frac{m a^2}{12} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2),$$

$$J_z = \frac{m a^2}{12} + \frac{m b^2}{12} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2). \qquad (2)$$

Moment bezwładności względem osi y_1 (krawędzi) określimy z twierdzenia Steinera:

$$J_{y_1} = J_y + m d^2,$$

gdzie: $d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2)$, stąd:

$$J_{y_1} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2) + \frac{m}{4}(a^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + c^2).$$

Moment bezwładności względem osi ξ (przekątnej) wyznaczymy z wzoru:

$$J_\xi = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma, \qquad J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0 \tag{3}$$

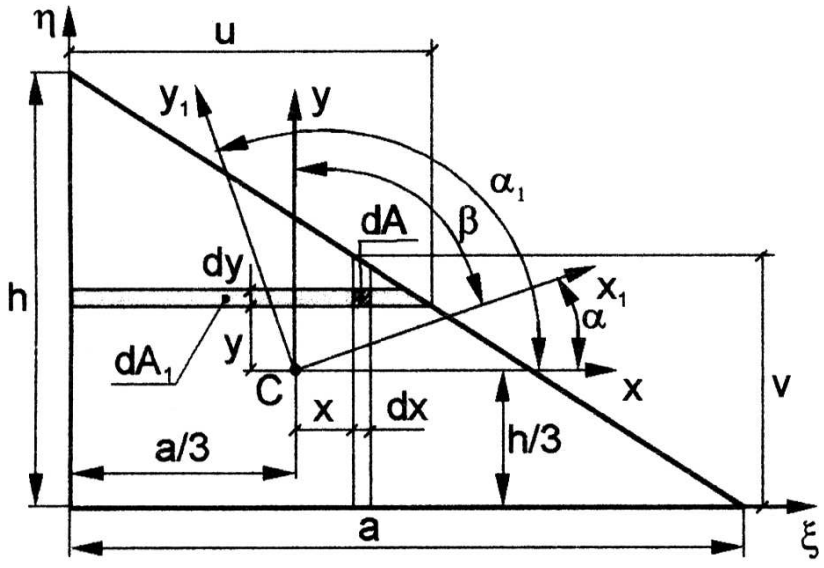
gdzie: $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Po podstawieniu (2) w (3), otrzymamy:

$$J_\xi = \frac{m}{12}\,\frac{a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{m(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{6(a^2+b^2+c^2)}.$$

Zadanie 3.

Wyznaczyć masowe momenty bezwładności J_x i J_y względem osi x i y przecinających się w środku masy oraz moment dewiacji J_{xy}, cienkiej trójkątnej płyty o masie m, podstawie a, wysokości h (rys. 3). Określić momenty bezwładności względem osi ξ, η, a także głównych centralnych osi bezwładności x_1, y_1.



Rys. 3

Rozwiązanie

Momenty bezwładności względem centralnych osi x i y wyznaczymy z wzorów:

$$J_x = \int_m y^2\,dm = \frac{m}{A}\int_A y^2\,dA_1 = \frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3} y^2\,u\,dy = \frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3} y^2\,\frac{a}{h}(\frac{2}{3}h - y)dy =$$

$$\frac{2m}{h^2}\int_{-h/3}^{2h/3}(\frac{2}{3}h\,y^2 - y^3)dy = \frac{2m}{h^2}(\frac{2}{9}h\,y^3 - \frac{y^4}{4})\Big|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{m\,h^2}{18},$$

gdzie: $dm = \frac{m}{A}dA_1 = \frac{m}{A}u\,dy$ – jest elementarną masą trójkąta, A, dA_1 – jest polem i elementarnym polem powierzchni trójkąta, $u = \frac{a}{h}(\frac{2}{3}h - y)$ – wyznaczono (patrz rys. 3) z zależności wynikającej z twierdzenia Talesa, $\frac{a}{h} = \frac{u}{\frac{2}{3}h - y}$.

W taki sam sposób wyznaczymy moment bezwładności J_y względem osi y, który jest równy:

$$J_y = \int_m x^2\,dm = \frac{m}{A}\int_{A_2} x^2\,dA_2 = \frac{2m}{a\,h}\int_{-a/3}^{2a/3} x^2\,v\,dx = \frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3} y^2\,\frac{h}{a}(\frac{2}{3}a - x)\,dx =$$

$$\frac{2m}{a^2}\int_{-a/3}^{2a/3}(\frac{2}{3}a\,x^2 - x^3)dx = \frac{2m}{a^2}(\frac{2}{9}a\,x^3 - \frac{x^4}{4})\Big|_{-a/3}^{2a/3} = \frac{m\,a^2}{18}.$$

Moment dewiacji wyznaczymy z zależności:

$$J_{xy} = \int_m x\,y\,dm = \frac{m}{A}\int_A x\,y\,dA = \frac{m}{A}\int_{-h/3}^{2h/3}(\int_{-a/3}^{u-a/3} x\,dx)\,y\,dy = \frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3}\frac{(u - a/3)^2 - (-a/3)^2}{2}y\,dy =$$

$$\frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3}\frac{[\frac{a}{h}(\frac{2}{3}h - y) - a/3]^2 - (-a/3)^2}{2}y\,dy = \frac{2m}{ah}\int_{-h/3}^{2h/3}(\frac{a^2\,y^2}{2h^2} - \frac{a^2\,y}{3h})\,y\,dy =$$

$$\frac{2m}{ah}(\frac{a^2\,y^4}{8h^2} - \frac{a^2\,y^3}{9h})\Big|_{-h/3}^{2h/3} = -\frac{m\,a\,h}{36},$$

gdzie: $dA = dx\,dy$ – jest elementarnym polem powierzchni trójkąta. W powyższych wzorach x zmienia się od $-a/3$ do $u - a/3$.

Z równania wyprowadzonego na wykładach wyznaczymy kąt α, określający położenie głównych centralnych osi bezwładności w układzie współrzędnych xy:

$$tg2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{-\frac{mah}{36}}{\frac{ma^2}{18} - \frac{mh^2}{18}} = -\frac{ah}{2(a^2 - h^2)}.$$

Na rysunku 3 pokazano główne centralne osie bezwładności x_1 i y_1, dla przypadku, gdy $h^2 > a^2$. Główne centralne momenty bezwładności względem tych osi określimy z zależności:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta - 2J_{xy}\cos\alpha\,\cos(90^0 - \alpha),$$

$$J_{x_1} = \frac{mh^2}{18}\cos^2\alpha + \frac{ma^2}{18}\cos^2(90^0 - \alpha) + 2\frac{mah}{36}\cos\alpha\,\cos(90^0 - \alpha),$$

$$J_{x_1} = \left[\frac{h}{3}\sqrt{\frac{m}{2}}\cos\alpha + \frac{a}{3}\sqrt{\frac{m}{2}}\cos(90^0 - \alpha)\right],$$

$$J_{y_1} = J_x \cos^2\alpha_1 + J_y \cos^2\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha_1\,\cos\alpha,$$

$$J_{y_1} = \frac{mh^2}{18}\cos^2(90^0 + \alpha) + \frac{ma^2}{18}\cos^2\alpha + 2\frac{mah}{36}\cos\alpha\,\cos(90^0 + \alpha),$$

$$J_{y_1} = \left[\frac{h}{3}\sqrt{\frac{m}{2}}\cos(90^0 + \alpha) + \frac{a}{3}\sqrt{\frac{m}{2}}\cos\alpha)\right]^2,$$

gdzie: kąt β określający kierunek osi x_1 względem osi y (patrz rys. 3) jest równy $\beta = 90^0 - \alpha$, natomiast kąt α_1 określający kierunek osi y_1 względem osi x jest równy $\alpha_1 = 90^0 + \alpha$.

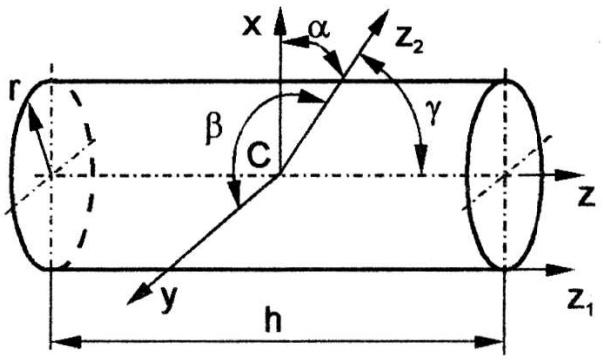
Do wyznaczenia momentów bezwładności względem osi ξ i η skorzystamy z twierdzenia Steinera, stąd:

$$J_\xi = J_x + m\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{mh^2}{18} + m\frac{h^2}{9} = \frac{mh^2}{6},$$

$$J_\eta = J_y + m\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{ma^2}{18} + m\frac{a^2}{9} = \frac{ma^2}{6}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnego walca o promieniu r = 0,1 m, wysokości h = 0,8 m i masie m = 40 kg względem głównych centralnych osi bezwładności x,y,z, i względem osi z_1 oraz osi z_2 nachylonej pod kątem $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 60^0$.

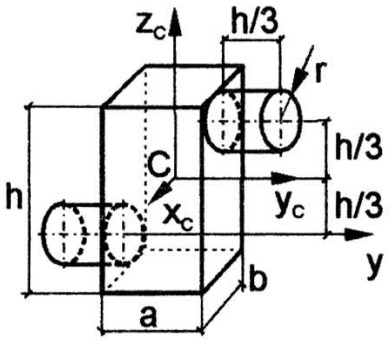


Odpowiedź: $J_x = J_y = 2{,}23\ \text{kgm}^2$,

$J_z = 0{,}2\ \text{kgm}^2$, $J_{z_1} = 0{,}6\ \text{kgm}^2$,

$J_{z_2} = 1{,}7225\ \text{kgm}^2$

Zadanie 2. Dla elementu konstrukcyjnego przedstawionego na rysunku, wyznaczyć moment bezwładności względem osi y. Element o wymiarach a = 20 cm, b = 20 cm, h = 60 cm, r = b/2 = 10 cm, wykonany jest ze stali o gęstości $\rho = 7{,}86\ \text{g/cm}^3$.



Odpowiedź: $m_{walca} = \pi r^2 h\rho/3$, $m_{prost.} = m_p = a\,b\,h\,\rho$

$$J_y = m_w\, r^2 + \frac{m_p\, b^2}{12} + \frac{h^2(7\, m_p + 16\, m_w)}{36},$$

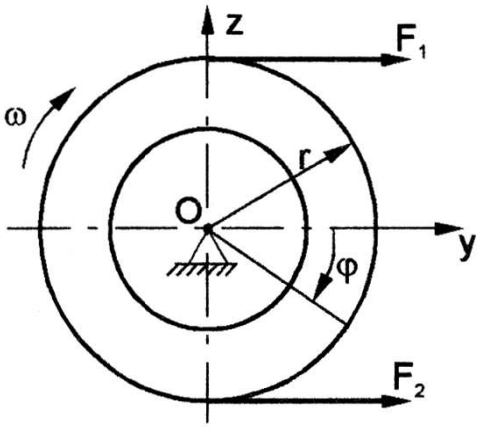
$J_y = 22{,}23\ \text{kgm}^2$

2. Ruch obrotowy

2.1. Równanie dynamiczne ruchu obrotowego

Zadanie 4

Siły naciągu pasa napędzającego koło pasowe są równe 20 i 40 N (rys. 4). Masa koła pasowego jest równa 80 kg, jego promień 0,3 m, a promień bezwładności względem osi obrotu 0,25 m. Znaleźć równanie ruchu obrotowego, jeżeli w chwili początkowej kąt obrotu koła i jego prędkość kątowa są równe zeru.



Rys. 4

Rozwiązanie

Równanie dynamiczne ruchu obrotowego, wokół nieruchomej osi obrotu x jest następujące:

$$J_x \ddot{\varphi} = \sum_{i=0}^{n} M_{ix},$$

gdzie: J_x – moment bezwładności względem osi obrotu x (prostopadła do rysunku), $\ddot{\varphi}$ – druga pochodna po czasie t z funkcji kąta obrotu koła φ (przyspieszenie kątowe), M_{ix} – moment sił zewnętrznych względem osi x działających na koło pasowe.

Kierunek obrotu momentów sił względem osi x zgodny z kierunkiem obrotu ciała przyjmujemy jako dodatni. W związku z tym suma momentów sił względem osi x jest równa:

$$\sum M_{ix} = F_1 r - F_2 r = 40 \cdot 0{,}3 - 20 \cdot 0{,}3 = 6 \text{ Nm}.$$

Moment bezwładności określimy z zależności $J_x = m i_x^2$, gdzie i_x= 0,25 m jest promieniem bezwładności koła, stąd wartość jego jest równa $J_x = 80 \cdot 0{,}25^2 = 5\ \mathrm{kgm}^2$.

Podstawiając obliczone wartości J_x i $\sum M_{ix}$ do pierwszego równania dostaniemy:

$$5\,\ddot{\varphi} = 6, \qquad \ddot{\varphi} = 1{,}2\ ,$$

skąd, po scałkowaniu otrzymamy następujące zależność na prędkość kątową i kąt obrotu koła:

$$\dot{\varphi} = 1{,}2\,t + C_1, \qquad \varphi = 1{,}2\,\frac{t^2}{2} + C_1\,t + C_2\,.$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków początkowych. Dla t = 0, prędkość kątowa $\dot{\varphi}_0 = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ i początkowy kąt obrotu φ_0 = 0 rad, skąd po podstawieniu warunków początkowych w powyższe dwa równania, otrzymamy $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$. Wówczas równanie ruchu obrotowego przyjmie postać:

$$\varphi = 0{,}6\,t^2\,.$$

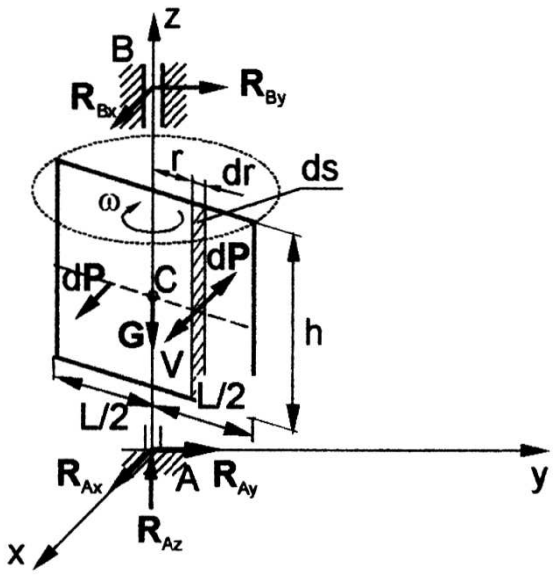
Zadanie 5

Jednorodna prostokątna płyta o masie m, długości L i wysokości h obraca się wokół pionowej osi z, która jest osią symetrii płyty (rys. 5). W czasie obrotu na płytę działa siła oporu powietrza. Siła ta przyłożona jest do każdego nieskończenie małego elementu powierzchni płyty, skierowana prostopadle do niej i proporcjonalna do kwadratu prędkości nieskończenie małego elementu, współczynnik proporcjonalności równy jest k. Znaleźć czas Δt, w ciągu którego prędkość kątowa płyty zmniejszy się z ω_1 do ω_2.

Rozwiązanie

Moment bezwładności płyty:

$$J_z = \int_m r^2\,\mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} r^2\,h\rho\,\mathrm{d}r = \frac{r^3}{3}h\rho\Big|_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{h\rho L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}\,,$$



Rys. 5

gdzie: $dm = h\rho\,dr$ – elementarna masa, ρ – masa przypadająca na jednostkę powierzchni płyty.
Na płytę działają następujące siły: siła ciężkości **G**, siła reakcji $\mathbf{R}_A$ opory A i $\mathbf{R}_B$ opory B oraz siła oporu **P**.
Elementarna siła oporu powietrza przyłożona do nieskończenie małego elementu powierzchni płyty $ds = h\,dr$ jest równa:

$$dP = k\,V^2\,ds = k\,h\,\omega^2\,r^2\,dr\,,$$

gdzie: $V = \omega r$ – prędkość nieskończenie małego elementu płyty ds, ω – prędkość kątowa płyty.
Moment siły oporu powietrza względem osi z skierowany jest przeciwnie do kierunku obrotu płyty i jest równy:

$$dM_z = -r\,dP = -k\,h\,\omega^2\,r^3\,dr\,.$$

Całkując powyższe wyrażenie z uwzględnieniem, że elementarna siła oporu dP działa z jednej i drugiej strony płyty otrzymamy:

$$M_z = -2\int_0^{L/2} k\,h\,\omega^2\,r^3\,dr = -\frac{L^4}{32}k\,h\,\omega^2\,.$$

Korzystając z równania dynamicznego ruchu obrotowego:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=0}^{n} M_{iz},$$

oraz podstawiając: $J_z = \frac{m l^2}{12}$, $\sum_{i=0}^{n} M_{iz} = M_z = -\frac{1}{32} k h \omega^2 l^4$, otrzymamy:

$$\frac{m l^2}{12} \ddot{\varphi} = -\frac{1}{32} k h \omega^2 l^4,$$

skąd:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3 k h \omega^2 l^2}{8 m}.$$

Rozdzielając zmienne i całkując w przedziale zmiany prędkości kątowej ω_1 do ω_2 i, od 0 do Δt otrzymamy:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{3 k h l^2}{8 m} \int_0^{\Delta t} dt,$$

skąd:

$$-\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right) = -\frac{3 k h l^2 \Delta t}{8 m}.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie dostaniemy szukany czas:

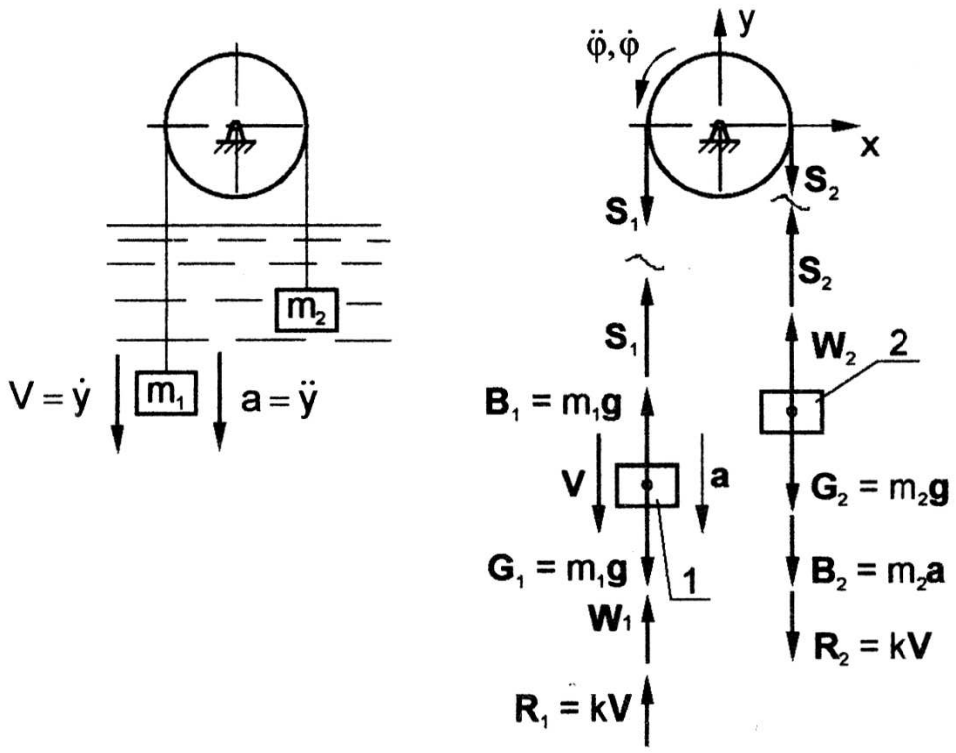
$$\Delta t = \frac{8 m}{3 k h l^2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2}.$$

Zadanie 6

Blok używany do prac podwodnych jest walcem jednorodnym o masie m i promieniu r (rys. 6). Przez blok przerzucona jest nieważka lina, na końcach której zawieszone są ciężarki o masach m_1 i m_2 ($m_1 > m_2$). Gęstość masy ciężarków wynosi ρ_c, a wody ρ_w. W czasie ruchu ciężarków, ze względu na małe prędkości przemieszczania, woda stawia opór proporcjonalny do prędkości ciężarków (współczynnik proporcjonalności jest jednakowy dla obu ciężarków i wynosi k). Wyznaczyć równanie różniczkowe ruchu.

Rozwiązanie

Zakładamy, że ruch ciężarków wraz z blokiem odbywa się z prędkością $V = \dot{y}$ i przyspieszeniem $a = \ddot{y}$, tak ja na rys. 6, gdyż masa m_1 ciężarka 1 jest większa od masy m_2 ciężarka 2. Uwalniając od więzów ciężarki m_1 i m_2 w miejsce nich przykładamy wektory sił: napięcia liny $\mathbf{S_1}$ i $\mathbf{S_2}$, ciężkości $\mathbf{G_1}$ i $\mathbf{G_2}$, wyporu wody $\mathbf{W_1}$ i $\mathbf{W_2}$, oporu wody $\mathbf{R_1}$ i $\mathbf{R_2}$ ($R_1 = R_2 = k\,V$) oraz bezwładności $\mathbf{B_1}$ i $\mathbf{B_2}$ ($B_1 = m_1 a$, $B_2 = m_2 a$).



Rys. 6

Dla bloku równanie dynamiczne ruchu będzie następujące (oś z jest prostopadła do rysunku):

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_{iz} = S_1 r - S_2 r . \tag{1}$$

Z zasady d'Alemberta dla ciężarków 1 i 2, otrzymamy równania:

$$S_1 + B_1 - G_1 + W_1 + R_1 = S_1 + m_1 a - m_1 g + W_1 + k V = 0 ,$$

$$S_2 + W_2 - G_2 - B_2 - R_2 = S_2 + W_2 - m_2 g - m_2 a - k V = 0 , \tag{2}$$

gdzie: W_1, W_2 – siły wyporu, równe ciężarowi wypartej przez ciężarki wody (prawo Archimedesa).

Siły wyporu są równe:

$$W_1 = \frac{m_1}{\rho_c}\rho_w\, g,\quad W_2 = \frac{m_2}{\rho_c}\rho_w\, g,$$

gdzie: $\frac{m_1}{\rho_c}$, $\frac{m_2}{\rho_c}$ – objętości ciężarków 1 i 2.

Wstawiając wartości sił W_1 i W_2 oraz moment bezwładności $J_z = \frac{mr^2}{2}$ i $\ddot{\varphi} = \frac{a}{r}$ w równania (1) i (2), a także eliminując z równań (1) i (2), S_1 i S_2 otrzymamy:

$$a = \ddot{y} = \frac{g(m_1 - m_2)\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_c}\right) - 2kV}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Podstawiając w (3), $V = \dot{y}, C = g(m_1 - m_2)\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_c}\right)$, $D = \frac{m}{2} + m_1 + m_2$, dostaniemy szukane równanie różniczkowe (dynamiczne) ruchu bloku:

$$\ddot{y} = \frac{C - 2k\dot{y}}{D},$$

lub po przekształceniu:

$$\ddot{y} + \frac{2k}{D}\dot{y} = \frac{C}{D}. \tag{4}$$

Równanie dynamiczne ruchu bloku (4) jest równaniem różniczkowym niejednorodnym o stałych współczynnikach. Rozwiązanie równania (4) jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i szczególnej równania niejednorodnego. Rozwiązaniem równania jest funkcja, którą podajemy bez wyprowadzania:

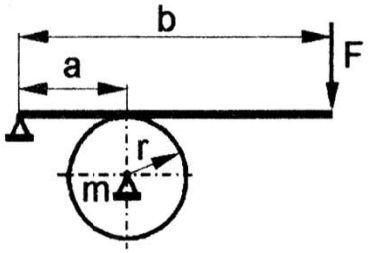
$$y = \frac{C}{2k}\left[t + \frac{D}{2k}\left(e^{-\frac{2k}{D}t} - 1\right)\right].$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Na poziomy walec o promieniu r i masie m_1 nawinięto nić, do końca której podwieszono pionowo masę m_2. Na walec działa stały moment sił M. Wyznaczyć po jakim czasie t_1 prędkość masy m_2 będzie dwa razy większa od prędkości początkowej V_0.

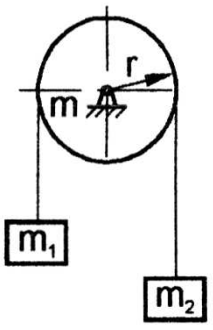
Odpowiedź: $t_1 = \dfrac{rV_0(m_1+2m_2)}{2(M-m_2gr)}$

Zadanie 2. Wyznaczyć siłę F z jaką należy naciskać na dzwignię o długości b, aby wałek o masie m i promieniu r, obracający się z prędkością kątową ω_0, został zahamowany w czasie t_h. Określić ile obrotów τ wykona wałek do chwili zatrzymania się. Wałek znajduje się w odległości a od podpory dźwigni. Współczynnik tarcia kinetycznego między wałkiem i dźwignią hamulca wynosi μ.



Odpowiedź: $t_h = \dfrac{m\omega_0 ar}{2Fb\mu}$, $\tau = \dfrac{m\omega_0^2 ar}{8\pi Fb\mu}$

Zadanie 3. Na wałek o masie m i promieniu r nawinięto nieważkie linki, na końcach których zamocowano masy m_1 i m_2 ($m_2 > m_1$). Znaleźć zależność prędkości kątowej i kąta obrotu wałka w funkcji czasu t, jeżeli w chwili początkowej wałek był w stanie spoczynku.

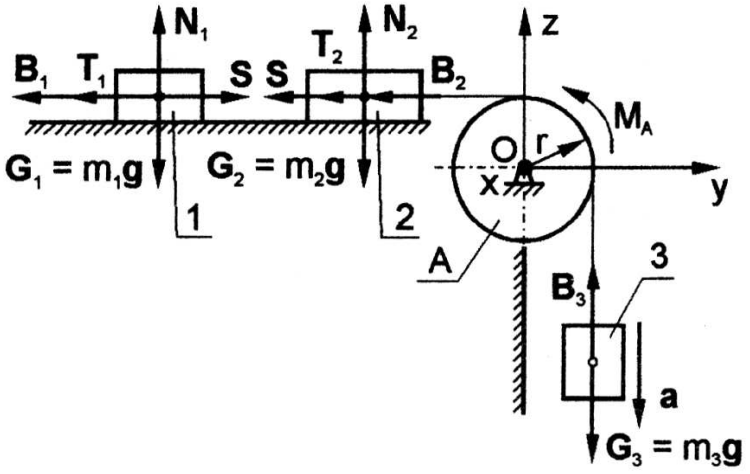


Odpowiedź: $\omega = \dfrac{2(m_2-m_1)gt}{(2m_1+2m_2+m)r}$, $\varphi = \dfrac{(m_2-m_1)gt^2}{(2m_1+2m_2+m)r}$

2.2. Zasada d'Alemberta

Zadanie 7

Trzy ciała o masach m_1, m_2, m_3 połączone są lekką nierozciągliwa nicią przechodzącą przez walec jednorodny A o masie m_4 i promieniu r (rys. 7). Dwa ciała leżą na płaszczyźnie poziomej, a trzecie jest zaczepione pionowo. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy ciałami 1, 2 i poziomą płaszczyzną równy jest μ. Znaleźć przyspieszenie i siłę napięcia nici łączącej ciała 1 i 2.



Rys. 7

Rozwiązanie

Na układ działają następujące siły: $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{G_3}$ – siły ciężkości ciał; $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ – siły normalne i tarcia ciała 1 i 2; $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ – siły bezwładności ciężarów; $\mathbf{S}$ – siły napięcia nici pomiędzy ciałami 1 i 2; $\mathbf{M_A}$ – moment sił bezwładności walca A względem osi obrotu.

Zakładamy, że układ porusza się z przyspieszeniem **a**, wówczas siły bezwładności i moment sił bezwładności walca są równe:

$$B_1 = m_1 a, \quad B_2 = m_2 a, \quad B_3 = m_3 a, \quad M_A = J_x \varepsilon \tag{1}$$

gdzie: $J_x = \frac{m_4 r^2}{2}$ jest momentem bezwładności względem osi x, która jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i przechodzi przez środek O krążka, $\varepsilon = a/r$ jest przyspieszeniem kątowym krążka.

Z równań rzutów wektorów sił działających na ciała 1 i 2 dostaniemy:

$$N_1 = m_1 g, \quad N_2 = m_2 g, \quad \text{skąd} \quad T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g, \quad T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g.$$

Z zasady d'Alemberta, która mówi, że w czasie ruchu obrotowego momenty wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych), w każdej chwili równoważą się z momentem sił bezwładności układu, otrzymamy równanie momentów wszystkich sił względem punktu O. Dostaniemy wówczas zależność:

$$B_1 r + T_1 r + T_2 r + B_2 r + M_A + B_3 r - G_3 r = 0. \tag{2}$$

W równaniu momentów sił (2) napięcia S nici nie uwzględniamy, ponieważ siły S wzajemnie się kompensują.
Podstawiając do równania (2) wartości sił bezwładności i momentu sił bezwładności (1) otrzymamy:

$$m_1 a r + \mu m_1 g r + \mu m_2 g r + m_2 a r + \frac{m_4 r^2}{2}\frac{a}{r} + m_3 a r - m_3 g r = 0,$$

skąd:

$$a = \frac{2g[m_3 - \mu(m_1 + m_2)]}{2(m_1 + m_2 + m_3) + m_4}. \tag{3}$$

Aby wyznaczyć siłę napięcia liny S, ułożymy dla pierwszego ciała równanie rzutów sił na oś y:

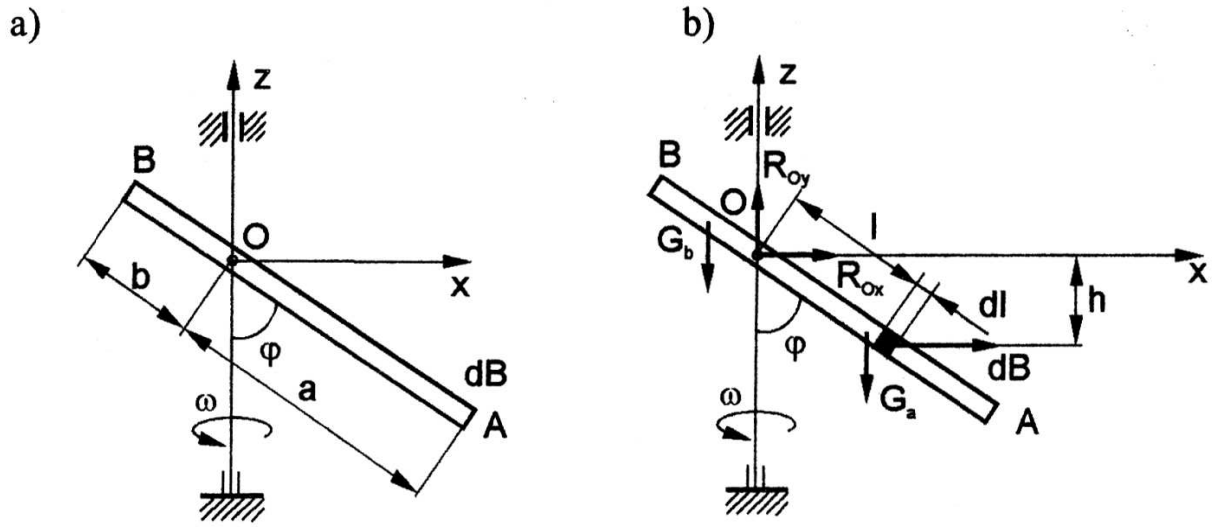
$$-B_1 - T_1 + S = 0, \tag{4}$$

skąd po podstawieniu wartości B_1 i T_1 do (4), otrzymamy szukaną wartość S:

$$S = \frac{2m_1 g[m_3 - \mu(m_1 + m_2)]}{2(m_1 + m_2 + m_3) + m_4} + \mu m_1 g.$$

Zadanie 8

Jednorodny pręt AB może swobodnie obracać się dokoła pewnego punktu O tylko w płaszczyźnie pionowej (rys. 8a). Prędkość kątowa pręta AB jest stała i równa ω. Znaleźć reakcje w punkcie O oraz kąt φ o jaki odchyli się pręt od osi pionowej, jeżeli OA = a, OB = b i a>b.



Rys. 8

Rozwiązanie

Na element pręta o długości dl i elementarnej masie dm działa elementarna siła bezwładności $dB = a_n\, dm = \omega^2 \rho l \sin\varphi \cdot dl$, gdzie ρ jest masą przypadającą na jednostkę długości pręta.

Z warunku rzutów na osie x i y (rys. 8b) dostaniemy:

$$\begin{aligned} R_{0x} + \int_B dB &= 0 \\ R_{0y} - G_b - G_a &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $G_a = \rho a g$ jest ciężarem części pręta OA, $G_b = \rho b g$ jest ciężarem części pręta OB.

Z równań (1) dla ω = const, ρ = const i φ = const, otrzymamy:

$$R_{0x} = -\int_{-b}^{a} dB = -\omega^2 \rho \sin\varphi \int_{-b}^{a} l\, dl = \frac{\omega^2 \rho \sin\varphi\,(b^2 - a^2)}{2},$$

$$R_{0y} = G_a + G_b = \rho g (a + b). \tag{2}$$

Z równania momentów sił działających na pręt wyznaczymy kąt o jaki odchyli się pręt od osi pionowej.

Elementarny moment siły dB względem punktu O jest równy:

$$dM = h \cdot dB = l \cos\varphi \cdot dB = \omega^2 \rho l^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot dl.$$

Równanie momentów względem punktu O jest następujące:

$$G_b \frac{b}{2}\sin\varphi - G_a \frac{a}{2}\sin\varphi + \int_{-b}^{a} dM = 0. \tag{3}$$

Po podstawieniu G_a, G_b i dM do (3) dostaniemy:

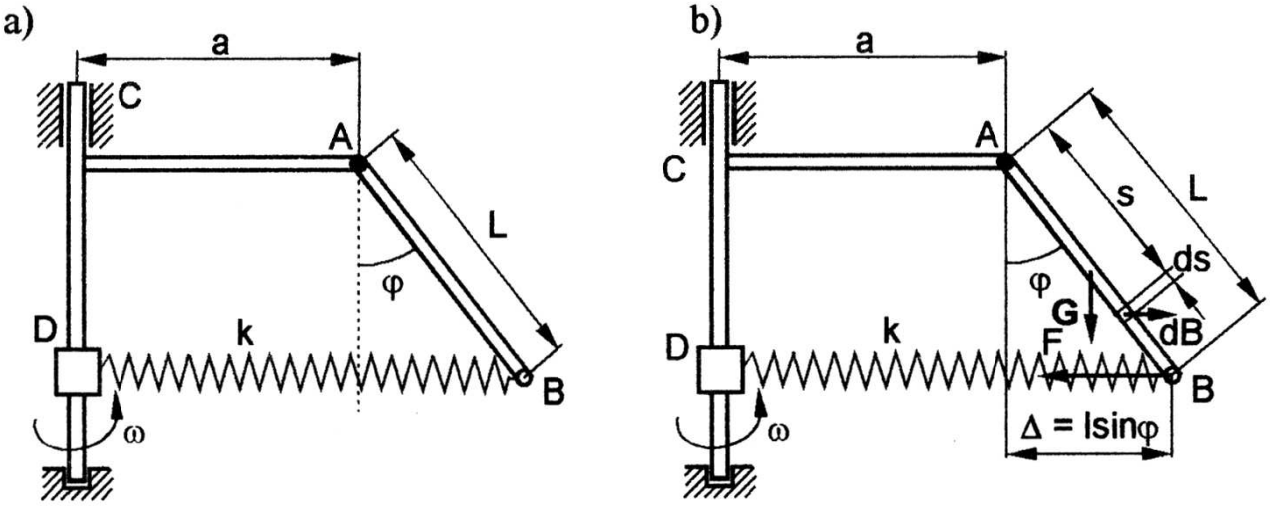
$$\frac{\rho g b^2}{2}\sin\varphi - \frac{\rho g a^2}{2}\sin\varphi + \omega^2 \rho \sin\varphi \cos\varphi \int_{-b}^{a} l^2\, dl = 0. \tag{4}$$

Całkując równanie (4) otrzymamy:

$$\cos\varphi = \frac{3g(a^2 - b^2)}{2\omega^2(a^3 + b^3)}.$$

Zadanie 9

Jednorodny pręt AB o długości L i masie m połączony jest przegubowo w punkcie A z poziomym prętem AC o długości a (rys. 9a). Pręt AC, którego masę można zaniedbać, połączony jest na sztywno z pionowym prętem CD, który obraca się ze stałą prędkością kątową ω. Koniec B pręta AB połączony jest z prętem CD za pomocą sprężyny o długości w stanie nie naciągniętym a i współczynniku sztywności k. Sprężyna dzięki suwakowi D pozostaje zawsze równoległa do AC. Jaka powinna być wartość k, by pręt AB odchylił się od pionu o kat φ.



Rys. 9

Rozwiązanie

Na pręt działają trzy siły (rys. 9b): siła ciężkości **G** = m **g**, siła oddziaływania sprężyny $F = k\Delta = k L \sin\varphi$, siła bezwładności, której elementarna wartość $dB = a_n\, dm = \omega^2 r \rho\, ds = \frac{m}{L}\omega^2 (a + s\cdot\sin\varphi)\, ds$. Masa przypadająca na jednostkę długości pręta jest równa $\rho = \frac{m}{L}$, a $r = a + s\sin\varphi$. Moment tych sił względem punktu A jest równy:

$$-G\frac{L}{2}\sin\varphi - FL\cos\varphi + \int_B s\cdot\cos\varphi\, dB .$$

Po podstawieniu wartości sił dostaniemy:

$$-mg\frac{L}{2}\sin\varphi - kL^2\sin\varphi\cos\varphi + \int_0^L \frac{m}{L}\omega^2\cos\varphi\,(a + s\cdot\sin\varphi)s\, ds = 0 ,$$

skąd po uporządkowaniu:

$$-mg\frac{L}{2}\sin\varphi - kL^2\sin\varphi\cos\varphi + \int_0^L \frac{m}{L}\omega^2 a\cos\varphi\, s\, ds + \int_0^L \frac{m}{L}\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\, s^2\, ds = 0 .$$

Całkując składniki powyższego wyrażenia otrzymamy:

$$-mg\frac{L}{2}\sin\varphi - kL^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{mL}{2}\omega^2 a\cos\varphi + \frac{mL^2}{3}\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = 0 ,$$

a po przekształceniach:

$$-mg\frac{L}{2}\sin\varphi - kL^2\sin\varphi\cos\varphi + m\omega^2 L\cos\varphi\,(\frac{a}{2} + \frac{L}{3}\sin\varphi) = 0 ,$$

skąd szukany współczynnik sztywności:

$$k = \frac{m\omega^2\cos\varphi(3a + 2L\sin\varphi) - 3mg\sin\varphi}{3l\sin 2\varphi} .$$

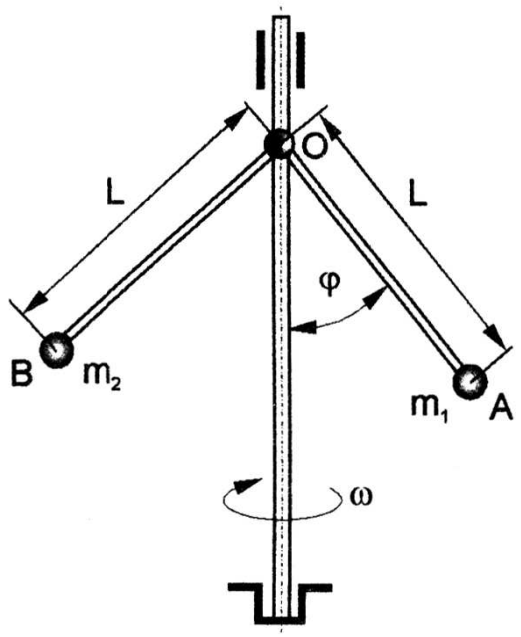
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Kabina windy ważąca 9810 N podwieszona na linie stalowej nabiera prędkości V = 120 m/min, na drodze s = 20 m.
Obliczyć siłę w linie, gdy kabina:

a) unosi się,
b) jest w spoczynku,
c) opada w dół.

Odpowiedź: a) 9910 N, b) 9810 N, c) 9710 N.

Zadanie 2. Na końcach regulatora składającego się z dwóch nieważkich prętów połączonych pod kątem prostym, zamocowano dwie masy m_1 i m_2 ($m_1 > m_2$). Ramiona regulatora mogą się obracać wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt O. Wyznaczyć prędkość kątową ω w ruchu ustalonym, jeżeli dla tej prędkości kąt odchylenia ramienia OB wynosi φ i OA = OB = L.

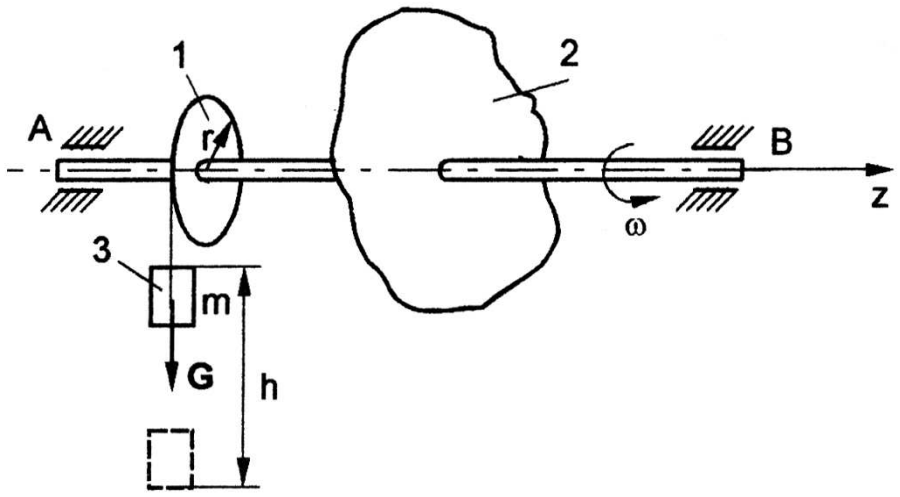


Odpowiedź: $\omega^2 = \dfrac{2g(m_1 \sin\varphi - m_2 \cos\varphi}{L(m_1 - m_2)\sin 2\varphi}$

2.3. Zasada krętu, zasada zachowania krętu

Zadanie 10

Aby określić moment bezwładności ciała 2 zamocowano je na wale AB (rys. 10), na którym osadzony jest krążek 1 o promieniu r. Na krążek nawinięta jest nić z przywiązanym do niej ciężarem 3 o masie m. Wyznaczyć moment bezwładności ciała J_2, jeżeli ciężar puszczony z wysokości h, bez prędkości początkowej przebywa drogę h w czasie t. Moment bezwładności wału z krążkiem równy jest J_o. Środek ciężkości ciała znajduje się na osi obrotu.



Rys. 10

Rozwiązanie

Z teorii krętu wiadomo, że pochodna wektora krętu po czasie równa jest sumie wektorów momentów sił zewnętrznych działających na dane ciało, stąd:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} . \tag{1}$$

Kręt (moment pędu) całego układu względem osi z jest równy:

$$K_z = K_{1z} + K_{2z} + K_{3z}, \tag{2}$$

gdzie: K_{1z} – jest krętem wału i krążka 1, K_{2z} – jest krętem ciała 2, K_{3z} – jest krętem ciężaru 3.
Kręty te są równe:

$$K_{1z} = J_z\,\omega, \quad K_{2z} = J_o\,\omega, \quad K_{3z} = m\,V\,r . \tag{3}$$

W wzorze (3), J_z jest szukanym momentem bezwładności, $V = \omega r$ jest prędkością ciężaru 3. Wstawiając (3) w (2) otrzymamy:

$$K_z = J_z\,\omega + J_o\,\omega + m\,V\,r = J_z\frac{V}{r} + J_o\frac{V}{r} + m\,r^2\frac{V}{r} = (J_z + J_o + m\,r^2)\frac{V}{r}. \tag{4}$$

Moment sił zewnętrznych względem osi z równy jest momentowi siły ciężkości $G = mg$:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = M_z = G r = m g r . \tag{5}$$

W zależności (4) wielkością zależną od czasu jest tylko prędkość, stąd pochodna krętu po czasie jest równa:

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d\left[(J_z + J_0 + m r^2)\frac{V}{r}\right]}{dt} = (J_z + J_0 + m r^2)\frac{a}{r} = \text{const} . \tag{6}$$

W powyższym wzorze a jest przyspieszeniem ciała 3. Uwzględniając wzór (1) oraz (5) i (6) dostaniemy:

$$(J_z + J_0 + m r^2)\frac{a}{r} = m g r .$$

Skąd po dwukrotnym scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych (dla $t = 0$, $h_0 = 0$, $V_0 = 0$), otrzymamy:

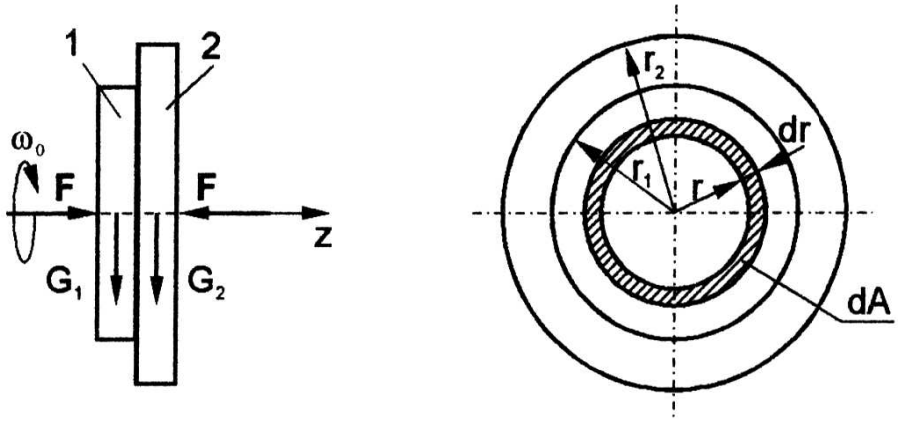
$$h = \frac{m g r^2 t^2}{2(J_z + J_0 + m r^2)},$$

skąd:

$$J_z = \frac{m g r^2 t^2}{2h} - J_0 - m r^2 .$$

Zadanie 11

Jednorodna tarcza kołowa o masie m_1 i promieniu r_1 wiruje dokoła poziomej osi z prędkością kątową ω_0 (rys. 11). W pewnej chwili do tarczy dociśnięto siłą F drugą tarczę o poziomej osi obrotu, promieniu r_2, masie m_2 i początkowej prędkości równej zeru. Współczynnik tarcia między płaszczyznami styku tarcz równy jest μ. Wyznaczyć wspólną prędkość kątową ω obu tarcz oraz czas t, po upływie którego obie tarcze zaczną wirować z prędkością kątową ω. Pozostałe opory ruchu pominąć.



Rys. 11

Rozwiązanie

Na układ składający się z dwu tarcz działają siły ciężkości $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ oraz siły docisku **F**. Siły ciężkości i siły docisku są siłami zewnętrznymi. Moment tych sił względem osi obrotu tarcz przed i po połączeniu jest równy zeru, w związku z tym zgodnie z zasadą zachowania krętu, kręt układu przed i po połączeniu tarcz jest taki sam, tj., $K_1 = K_2$.

Uwzględniając momenty bezwładności tarcz, $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$ oraz $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, otrzymamy:

$$K_1 = J_1 \omega_o = \frac{m_1 r_1^2}{2}\omega_o, \quad K_2 = (J_1 + J_2)\omega = \left(\frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}\right)\omega.$$

Przyrównując do siebie powyższe kręty, otrzymamy wspólną prędkość kątową tarcz:

$$\frac{m_1 r_1^2}{2}\omega_o = \left(\frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}\right)\omega,$$

skąd, szukana prędkość kątowa:

$$\omega = \frac{m_1 r_1^2 \omega_o}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}.$$

Do wyznaczenia czasu potrzebnego do osiągnięcia wspólnej prędkości kątowej ω obu tarcz skorzystamy z równania dynamicznego ruchu obrotowego.

Rozpatrując każdą tarczę oddzielnie w dowolnym momencie czasu po ich dociśnięciu do siebie, otrzymamy następujące równania ruchu:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -M_z, \qquad J_2 \ddot{\varphi}_2 = M_z. \tag{1}$$

Minus oznacza, że moment sił tarcia M_z tarczy pierwszej jest przeciwnie skierowany do kierunku obrotów tej tarczy (zatrzymuje tarczę). Wartości momentów sił tarcia oddziaływujących na jedną i drugą tarczę są sobie równe. Wyznaczmy moment sił tarcia działających na każdą z tarcz, jest on określony w następujący sposób (rys. 11):

$$M_z = \int_T r\,dT.$$

Elementarna siła $dT = \frac{\mu N}{\pi r_1^2} dA$, gdzie siła normalna $N = F$, πr_1^2 jest polem trących się powierzchni, $dA = 2\pi r \cdot dr$ jest elementarnym polem trących się powierzchni.
Moment sił tarcia działający na całą tarczę jest wówczas równy:

$$M_z = \int_0^{r_1} \frac{\mu F}{\pi r_1^2} 2\pi r^2\,dr = \frac{2}{3}\mu r_1 F. \tag{2}$$

Podstawiając moment (2) do równań (1) otrzymamy:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -\frac{2}{3}\mu r_1 F, \qquad J_2 \ddot{\varphi}_2 = \frac{2}{3}\mu r_1 F. \tag{3}$$

Całkując po czasie równania (3) dostaniemy:

$$J_1 \dot{\varphi}_1 = J_1 \omega_1 = -\frac{2}{3}\mu r_1 F t + C, \qquad J_2 \dot{\varphi}_2 = J_2 \omega_2 = \frac{2}{3}\mu r_1 F t + D, \tag{4}$$

skąd:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = -\frac{2\mu r_1 F t}{3J_1} + \frac{C}{J_1}, \qquad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{2\mu r_1 F t}{3J_2} + \frac{D}{J_2}. \tag{5}$$

Stałe całkowania C i D wyznaczymy z warunków początkowych. Dla t = 0 s, prędkość kątowa tarczy pierwszej $\omega_1 = \omega_o$, a tarczy drugiej $\omega_2 = 0$, skąd po wstawieniu warunków początkowych do równań (4) otrzymamy: $C = J_1\omega_o$, $D = 0$.

Wspólna prędkość kątowa obu tarcz $\omega_1 = \omega_2$ ustali się po czasie t. Wstawiając stałe całkowania do równań (5) i przyrównując je stronami otrzymamy:

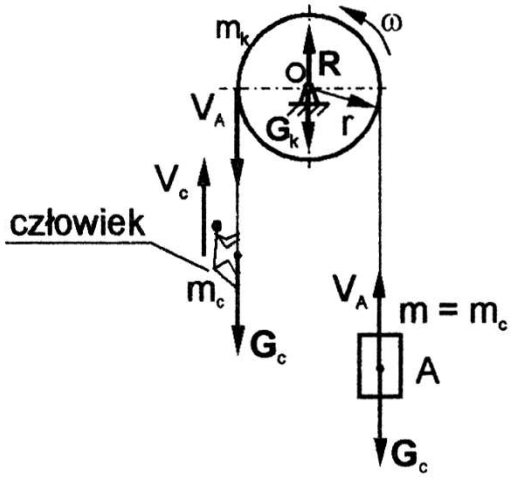
$$-\frac{2\mu r_1 F t}{3J_1} + \omega_o = \frac{2\mu r_1 F t}{3J_2},$$

skąd po wstawieniu momentów bezwładności J_1 i J_2 wyznaczymy czas niezbędny do ustalenia się takiej samej prędkości kątowej obu tarcz:

$$t = \frac{3m_1 m_2 r_1 r_2^2 \omega_o}{4\mu F(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}.$$

Zadanie 12

Przez zamocowany krążek o promieniu r i masie m_k (rys. 12) przerzucono nieważką i nierozciągliwą linę. Po linie z lewej strony krążka zaczyna się wspinać człowiek o masie m_c z prędkością V_c względem liny. Jaka jest prędkość kątowa ω krążka i prędkość V_A ciała A, jeżeli w chwili początkowej układ był nieruchomy. Ciało A posiada taką samą masę jak człowiek.



Rys. 12

Rozwiązanie

Z zasady krętu mamy:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x,$$

gdzie: oś x jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i przechodzi przez punkt O.

Na układ działają następujące siły: siła ciężkości $G_c = mg$ człowieka i ciała A, siła ciężkości krążka G_k i reakcja osi krążka R.

Moment sił zewnętrznych względem osi x przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do powierzchni rysunku jest równy:

$$M_x = G_c\, r - G_c\, r = 0.$$

Z zasady zachowania krętu wynika, że jeżeli $M_x = 0$ to $K_x = \text{const}$. W chwili początkowej kręt $K_x = 0$, gdyż krążek nie wykonuje żadnego ruchu. Ponieważ $K_x = \text{const}$ i w chwili początkowej $K_x = 0$, to w dowolnej chwili czasu $K_x = 0$.

Kręt całego układu jest równy:

$$K_x = K_{1x} + K_{2x} + K_{3x},$$

gdzie: K_{1x} – jest krętem ciała A, K_{2x} – jest krętem człowieka, K_{3x} – jest krętem krążka.

Kręty te są określone w następujący sposób:

$$K_{1x} = m_c\, V_A\, r = m_c\, \omega\, r^2,$$

$$K_{2x} = m_c\, V_b\, r = m_c\, (V_A - V_c)\, r = m_c\, (\omega\, r^2 - V_c\, r),$$

$$K_{3x} = J_x\, \omega = \frac{m\, r^2}{2}\, \omega,$$

gdzie: $V_b = (V_A - V_c)$ jest prędkością bezwzględną człowieka, $V_A = \omega\, r$ jest prędkością z jaką porusza się lina wraz z ciężarem A, V_c jest prędkością człowieka względem liny, $J_x = \frac{m\, r^2}{2}$ jest momentem bezwładności krążka.

Kręt całego układu wówczas będzie równy:

$$K_x = m_c \omega r^2 + m_c(\omega r^2 - V_c r) + \frac{m r^2}{2}\omega = 0,$$

skąd po uporządkowaniu dostaniemy wzór na prędkość kątową:

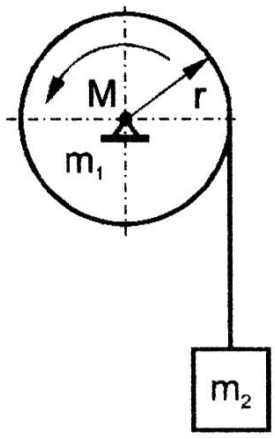
$$\omega = \frac{2 m_c V_c}{r(4 m_c + m)},$$

i prędkość ciała A:

$$V_A = \omega r = \frac{2 m_c V_c}{4 m_c + m}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

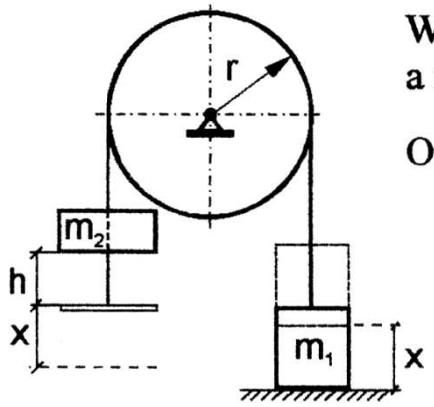
Zadanie 1. Na walec o promieniu r i masie m_1 nawinięta jest nić, do końca której podwieszono masę m_2. Na walec działa znany moment M. Oblicz przyśpieszenie a podnoszonej masy m_2.



Wskazówka: zastosować zasadę krętu, uwzględniając, że kręt układu jest sumą krętu masy walca m_1 i masy m_2.

Odpowiedź: $a = \frac{2(M - m_2 g r)}{(m_1 + 2 m_2) r}$

Zadanie 2. Do stojącego na podłodze prostopadłościanu o masie m_1 został przyczepiony sznur, przerzucony przez krążek stały. Do drugiego końca sznura została przymocowana szalka, na którą z wysokości h spada ciało o masie $m_2 < m_1$. Oblicz na jaką wysokość x zostanie poderwany prostopadłościan. Masy krążka i szalki w obliczeniach pominąć. Przyjąć, że po uderzeniu ciało o masie m_2 nie odrywa się od szalki i sznur jest stale napięty.



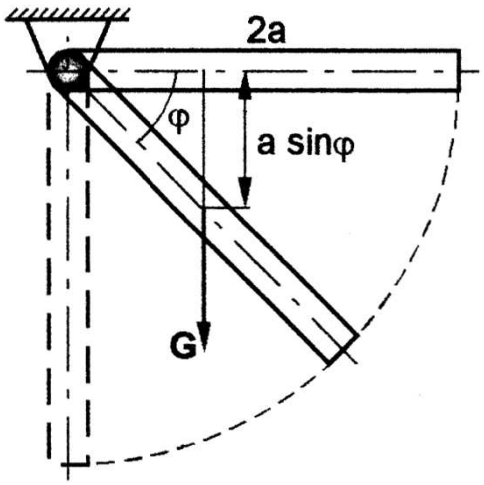
Wskazówka: zastosować zasadę zachowania krętu, a następnie zasadę zachowania energii mechanicznej.

Odpowiedź: $x = \dfrac{m_2^2\, h}{m_1^2 - m_2^2}$.

2.4. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy

Zadanie 13

Pręt o długości 2a i masie m może obracać się w płaszczyźnie pionowej dokoła osi poziomej O przechodzącej przez koniec pręta i prostopadłej do niego (rys. 13). Wyznaczyć prędkość kątową pręta jako funkcję jego kąta obrotu, jeżeli pręt został puszczony bez prędkości początkowej z położenia poziomego.



Rys. 13

Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania wykorzystamy zasadę równoważności energii kinetycznej i pracy (twierdzenie o energii kinetycznej), która mówi, że przyrost energii kinetycznej punktu materialnego, w skończonym przedziale czasu, równy jest sumie prac, które wykonały w tym czasie wszystkie siły czynne działające na ten punkt. Z powyższego wynika:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L, \tag{1}$$

gdzie: E_{k_2}, E_{k_1} – energia kinetyczna w chwili czasu t_2 i t_1, L – praca wykonana w tym czasie przez siły działające na punkt.
Energia kinetyczna pręta na początku ruchu jest równa $E_{k_1} = 0$, a w dowolnej chwili czasu jest określona:

$$E_{k_2} = \frac{J_0 \omega^2}{2},$$

gdzie masowy moment bezwładności względem osi O:

$$J_0 = \frac{m(2a)^2}{3} = \frac{4ma^2}{3},$$

skąd:

$$E_{k_2} = \frac{2ma^2\omega^2}{3}. \qquad (2)$$

Na pręt działają dwie siły: reakcja przegubu oraz siła ciężkości **G** = m **g**. Praca reakcji przegubu jest równa zeru, natomiast praca wykonana przez siłę ciężkości:

$$L = mga \sin\varphi, \qquad (3)$$

skąd po wstawieniu energii i pracy do równania (1), otrzymamy:

$$\frac{2ma^2\omega^2}{3} = mga\sin\varphi \qquad \text{i} \qquad \omega^2 = \frac{3g}{2a}\sin\varphi.$$

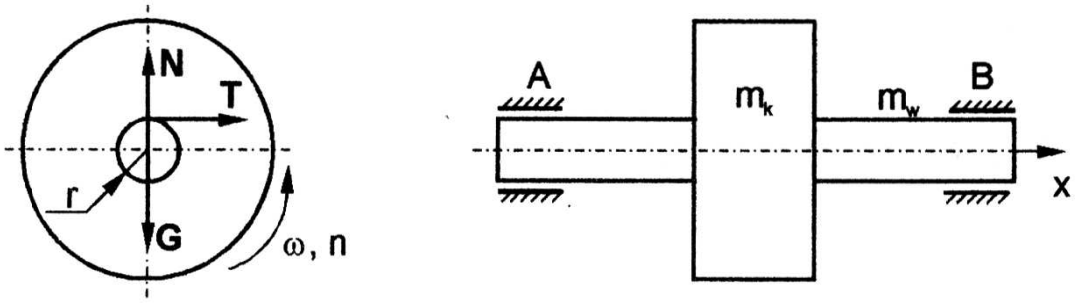
Gdy pręt zajmie położenie pionowe ($\varphi = 90^0$), prędkość kątowa będzie równa:

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a}.$$

Zadanie 14

Na wał o masie m_w = 8 ton i średnicy r = 20 cm nasadzono koło zamachowe o masie m_k = 25 ton i promieniu bezwładności względem osi obrotu i_x = 0,6 m (rys. 14). Na skutek tarcia w łożyskach, prędkość kątowa wału

z kołem zamachowym zmniejsza się. Współczynnik tarcia kinetycznego w łożyskach $\mu = 0{,}05$, a wał wraz z kołem zamachowym w chwili początkowej wykonuje $n = 120$ obr/min. Ile obrotów wykona wał z kołem zamachowym do chwili zatrzymania się?



Rys. 14

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o energii kinetycznej:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L,$$

gdzie: E_{k_2}, E_{k_1} – energia kinetyczna na końcu i na początku ruchu, L – praca wykonana przez wszystkie siły zewnętrzne w przedziale czasu zmiany energii E_{k_2} do E_{k_1}.

W rozpatrywanym przypadku $E_{k_2} = 0$, natomiast:

$$E_{k_1} = \frac{J_x \omega^2}{2},$$

gdzie: prędkość kątowa: $\omega = \pi n/30$, a moment bezwładności wału oraz koła zamachowego jest równy:

$$J_x = J_{xw} + J_{xk} = \frac{m_w r^2}{2} + m_k i_x^2.$$

Do wału przyłożone są następujące siły: siła ciężkości wału i koła zamachowego $G = (m_w + m_k)\, g$, siła normalna N i siła tarcia T. Z rysunku 14 wynika, że $N = G$. Moment względem osi obrotu wału posiada tylko siła tarcia T i jest on równy:

$$M_x = Tr = \mu N r = \mu G r = \mu(m_w + m_k) r g .$$

Pracę siły tarcia (zawsze ujemna) określimy:

$$L = -M_x \varphi = -\mu(m_w + m_k) r g \varphi ,$$

gdzie: φ – kąt obrotu wału i koła zamachowego.
Podstawiając wyznaczone wielkości do pierwszego równania dostaniemy:

$$-\frac{\left(\frac{m_w r^2}{2} + m_k i_x^2\right)\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2}{2} = -\mu(m_w + m_k) r g \varphi ,$$

skąd:

$$\varphi = \frac{\left(\frac{m_w r^2}{2} + m_k i_x^2\right)\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2}{2\mu(m_w + m_k) r g} .$$

Podstawiając dane otrzymamy:

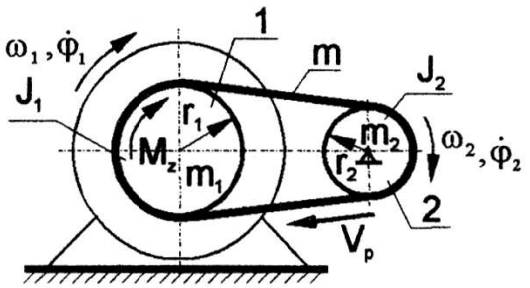
$$\varphi = 22{,}63\pi^2 \text{ rad} = 12796{,}96^\circ ,$$

lub ilość obrotów:

$$i = \frac{22{,}63\pi^2}{2\pi} = 35{,}55 \text{ obr.}$$

Zadanie 15

Silnik elektryczny napędza wał 2 za pomocą przekładni pasowej (rys. 15). Do wirnika silnika elektrycznego przyłożony jest moment obrotowy M_z. Momenty bezwładności wirnika silnika elektrycznego oraz wału napędzanego wraz z nasadzonymi nań kołami pasowymi, względem ich osi obrotu, wynoszą odpowiednio J_1 i J_2. Promień koła pasowego na wirniku silnika elektrycznego równy jest r_1, na wale napędzanym r_2. Masa pasa równa jest m. Pomijając tarcie w łożyskach obliczyć przyspieszenie kątowe wirnika silnika elektrycznego.



Rys. 15

Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania wykorzystamy twierdzenie o energii kinetycznej. Całkowita energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej: E_{k_1} – wirnika silnika elektrycznego z kołem pasowym 1, E_{k_2} – wału napędzanego z kołem pasowym 2, E_{k_p} – pasa.

Energia kinetyczna pasa (prędkość pasa V_p) jest równa:

$$E_{k_p} = \frac{m V_p^2}{2} = \frac{m \omega_1^2 r_1^2}{2} = \frac{m \dot{\varphi}_1^2 r_1^2}{2},$$

a energia kinetyczna wirnika silnika elektrycznego z kołem pasowym 1 i wału napędzanego z kołem pasowym 2:

$$E_{k_1} = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}, \qquad E_{k_2} = \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}.$$

Oznaczmy stosunek prędkości kątowych koła 2 do 1, $k = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_1}$ (jest to przełożenie przekładni). Wówczas $\dot{\varphi}_2 = k \dot{\varphi}_1$ i całkowita energia potencjalna będzie równa:

$$E_k = E_{k_p} + E_{k_1} + E_{k_2} = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 k^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m r_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} = \frac{1}{2}(J_1 + k^2 J_2 + m r_1^2)\dot{\varphi}_1^2,$$

gdzie: $J_{zr} = J_1 + k^2 J_2 + m r_1^2$ nazwiemy zredukowanym momentem bezwładności do osi O_1 silnika elektrycznego.

Pracę wykonuje tylko moment obrotowy M_z i jest ona równa:

$$L = M_z \varphi_1,$$

gdzie: φ_1 – kąt obrotu wirnika silnika elektrycznego z kołem pasowym 1.
Z twierdzenia o równoważności energii kinetycznej i pracy dostaniemy:

$$E_k - E_{k_0} = L, \qquad \frac{1}{2} J_{zr} \dot{\varphi}_1^2 - E_{k_0} = M_z \varphi_1,$$

gdzie: energia kinetyczna na początku ruchu $E_{k_0} = 0$.
Różniczkując powyższe równanie otrzymamy:

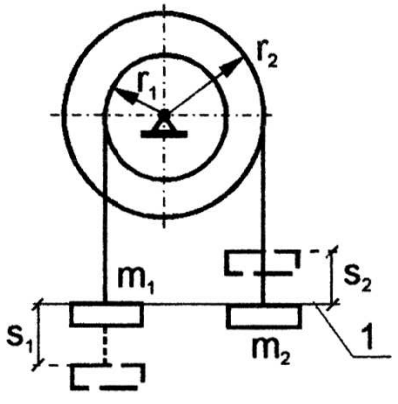
$$\frac{1}{2} J_{zr} 2\dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_1 = M_z \dot{\varphi}_1,$$

skąd po podzieleniu przez $\dot{\varphi}_1$ i uporządkowaniu dostaniemy szukane przyspieszenie kątowe:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_z}{J_{zr}} = \frac{M_z}{J_1 + k^2 J_2 + m r_1^2}.$$

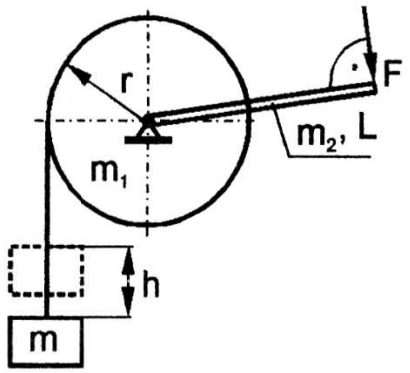
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Dwa walce osadzone na wspólnej osi, posiadają znany moment bezwładności J_z względem osi obrotu z, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Na walce o promieniach r_1 i r_2 nawinięte są liny obciążone na końcach masami m_1 i m_2. W chwili początkowej masy są na wspólnym poziomie (prosta 1) i znajdują się w spoczynku. Po pewnym czasie masa m_1 obniżyła się o s_1, a m_2 podniosła o s_2. Wyznaczyć prędkość kątową walców.



Odpowiedź: $\omega = \sqrt{\dfrac{2 z_1 g (m_1 - m_2 \cdot r_2 / r_1)}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J_z}}$

Zadanie 2. Masa m = 10 kg podnoszona jest za pomocą kołowrotu. Na końcu korby kołowrotu działa stała siła nacisku F = 80 N prostopadła do korby. Masa koła wynosi m_1= 20 kg, promień r = 0,15 m, a masa korby m_2= 5 kg i długość L = 0,3 m. Obliczyć jaką prędkość będzie miał punkt przyłożenia siły F, jeżeli masa m została uniesiona na wysokość h = 1,8 m.



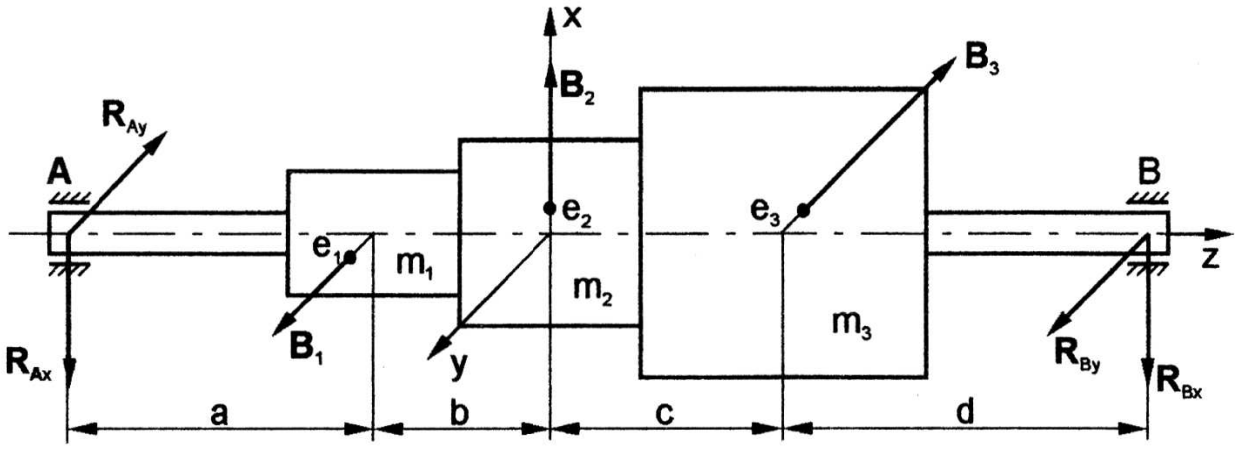
Odpowiedź: $V = L\sqrt{\dfrac{12FLh}{3r^3(2m+m_1)+2m_2L^2r}}$,

$V = 9{,}3\ m/s$

2.5. Reakcje dynamiczne łożysk

Zadanie 16

Na wał nasadzono trzy koła o masach m_1 = 200 kg, m_2 = 250 kg i m_3 = 300 kg. Dwa z nich osadzono na wale mimośrodowo (rys. 16) w ten sposób, że ich środki mas są przesunięte o e_1 = 1 mm i e_2 = 1 mm, a płaszczyzny przeprowadzone przez oś wirnika i każdy ze środków mas tworzą kąt prosty. Środek masy trzeciego koła jest przesunięty o wartość e_3 = 0,5 mm od osi obrotu i leży w płaszczyźnie środka masy pierwszego koła. Wyznaczyć reakcje działające na łożyska wału, jeżeli obroty wału są stałe i wynoszą n = 2700 obr/min, a odległości pomiędzy środkami mas i łożyskami odpowiednio są równe: a = 0,3 m, b= 0,4 m, c = 0,25 m i d = 0,5 m. Masę wału pominąć.



Rys. 16

Rozwiązanie

Na wał działają odśrodkowe siły bezwładności:

$$B_1 = m_1 \omega^2 e_1, \quad B_2 = m_2 \omega^2 e_2, \quad B_3 = m_3 \omega^2 e_3,$$

gdzie: $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

Zgodnie z zasadą d'Alemberta ułożymy cztery równania: dwa sumy rzutów sił na osie x i y, oraz dwa równania momentów względem osi x i y (siły wzdłuż osi z i momenty względem tej osi są równe zero):

$$\sum P_{ix} = -R_{Ax} + B_2 - R_{Bx} = 0,$$

$$\sum P_{iy} = -R_{Ay} + B_1 - B_3 + R_{By} = 0,$$

$$\sum M_{ix} = -R_{Ay}(a+b) + B_1 b + B_3 c - R_{By}(c+d) = 0,$$

$$\sum M_{iy} = R_{Ax}(a+b) - R_{Bx}(c+d) = 0,$$

skąd po przekształceniach otrzymamy:

$$R_{Ax} = \frac{B_2 (c+d)}{a+b+c+d}, \qquad R_{By} = \frac{B_2 (a+b)}{a+b+c+d},$$

$$R_{Ay} = \frac{B_3 d - B_1 (b+c+d)}{a+b+c+d}, \qquad R_{Bx} = \frac{B_1 a - B_3 (a+b+c)}{a+b+c+d}.$$

Podstawiając wzory na siły bezwładności dostaniemy:

$$R_{Ax} = \frac{\pi^2 n^2 \left[m_3 e_3 d - m_1 e_1 (b+c+d)\right]}{30^2 (a+b+c+d)},$$

$$R_{Bx} = \frac{\pi^2 n^2 \left[m_1 e_1 a - m_3 e_3 (a+b+c+d)\right]}{30^2 (a+b+c+d)},$$

$$R_{Ay} = \frac{m_2 \pi^2 n^2 e_2 (c+d)}{30^2 (a+b+c+d)}, \qquad R_{By} = \frac{m_2 \pi^2 n^2 e_2 (a+b)}{30^2 (a+b+c+d)},$$

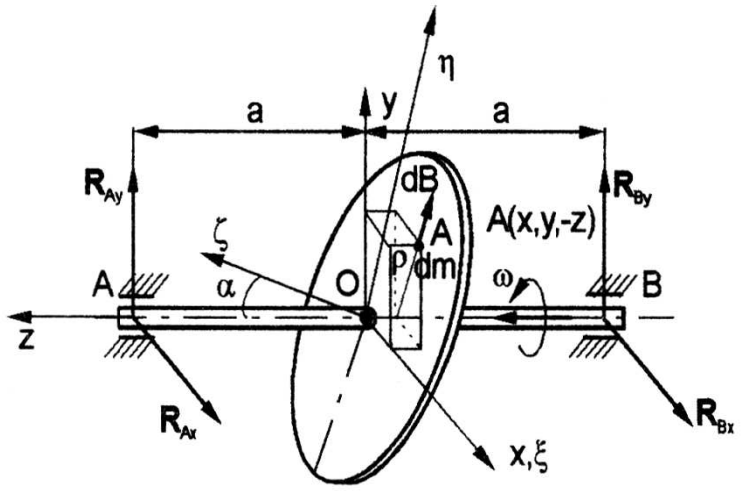
skąd po wstawieniu danych otrzymamy:

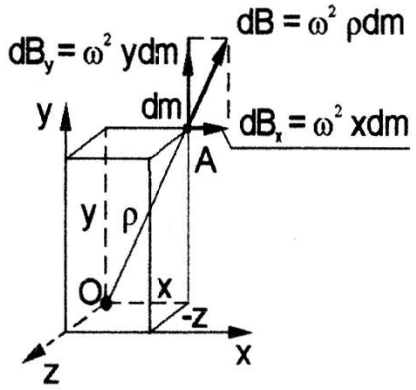
$R_{Ax} = -8545{,}7$ N, $R_{Bx} = -4548{,}5$ N,

$R_{Ay} = 10337{,}5$ N, $R_{By} = 9648{,}4$ N.

Zadanie 17

Koło zamachowe o masie m = 18 kg i promieniu r = 0,15 m jest osadzone w środku poziomego wału. W wyniku błędów montażowych koło tworzy z osią obrotu kąt $\alpha = 1^\circ$. Koło obraca się ze stałą prędkością kątową ω (n = 3000 obr/min). Odległość między łożyskami wynosi a = 0,5 m. Wyznaczyć reakcje dynamiczne łożysk.





Rys. 17

Rozwiązanie

Przyjmijmy, stały układ współrzędnych xyz i obracający się razem z kołem układ współrzędnych $\xi\eta\zeta$, tak jak na rys. 17.

Na wirnik działają następujące siły: siła reakcji łożyska A, $\mathbf{R_A}$ (R_{Ax}, R_{Ay}), siła reakcji łożyska B, $\mathbf{R_B}$ (R_{Bx}, R_{By}), oraz siła bezwładności koła zamachowego **B.** Elementarna siła bezwładności koła zamachowego (siła odśrodkowa) $dB = \omega^2 \rho\, dm$, której składowe wzdłuż osi x i y są równe: $dB_x = \omega^2 x\, dm$, $dB_y = \omega^2 y\, dm$.

Ponieważ koło zamachowe obraca się ze stałą prędkością kątową ω i środek masy koła leży na osi obrotu, to równania równowagi, napisane zgodnie z zasadą d'Alemberta, opisujące rzuty sił reakcji i bezwładności oraz równania momentów tychże sił względem osi x i y są następujące:

$$\sum P_{ix} = R_{Ax} + R_{Bx} + \omega^2 \int_m x\, dm = 0, \qquad (1)$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} + R_{By} + \omega^2 \int_m y\,dm = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_{ix} = -R_{Ay}\,a + R_{By}\,a + \omega^2 \int_m (-z)\,y\,dm = -R_{Ay}\,a + R_{By}\,a - \omega^2 \int_m y\,z\,dm = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{iy} = R_{Ax}\,a - R_{Bx}\,a - \omega^2 \int_m (-z)\,x\,dm = R_{Ax}\,a - R_{Bx}\,a + \omega^2 \int_m x\,z\,dm = 0. \tag{4}$$

W równaniach (1) i (2) występują momenty statyczne względem płaszczyzn yOz i xOz opisane całkami $S_{yOz} = \int_m x\,dm$ i $S_{xOz} = \int_m y\,dm$, których wartości są równe zero, gdyż środek masy leży na osi obrotu z.
W równaniach (3) i (4) występują całki: $J_{yz} = \int_m y\,z\,dm$ i $J_{xz} = \int_m x\,z\,dm$, które są momentami dewiacji, odpowiednio względem osi yz i xz.
Mając na uwadze powyższe, z równań (1) – (4) otrzymamy:

$$R_{Ax} + R_{Bx} = 0, \tag{5}$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 0, \tag{6}$$

$$-R_{Ay}\,a + R_{By}\,a - \omega^2 J_{yz} = 0, \tag{7}$$

$$R_{Ax}\,a - R_{Bx}\,a + \omega^2 J_{xz} = 0. \tag{8}$$

Wyznaczając siły reakcji z (5) – (8) i podstawiając wzór na prędkość kątową $\omega = \frac{\pi n}{30}$, reakcje będą równe:

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = -\omega^2 \frac{J_{xz}}{2a} = -\frac{\pi^2 n^2 J_{xz}}{1800\,a}, \tag{9}$$

$$R_{By} = -R_{Ay} = \omega^2 \frac{J_{yz}}{2a} = \frac{\pi^2 n^2 J_{yz}}{1800a}. \tag{10}$$

Z (9) i (10) wynika, że $R_{Ax} = -R_{Bx}$ i $R_{Ay} = -R_{By}$, tj., siły reakcji łożysk tworzą pary sił.
W zależnościach (9) i (10) występują nieznane momenty dewiacji J_{xz} i J_{yz}. Aby wyznaczyć momenty dewiacji zauważmy, że osie ruchomego układu współrzędnych $\xi\eta\zeta$ są głównymi osiami bezwładności osadzonego koła

zamachowego ($J_{\xi\eta} = J_{\xi\varsigma} = J_{\varsigma\eta} = 0$). Dlatego moment dewiacji J_{xz}= 0, gdyż oś Ox pokrywa się z główną osią Oξ, stąd na podstawie (9), $R_{Ax} = R_{Bx} = 0$.
Moment dewiacji J_{yz} wyznaczymy z zależności wynikającej z geometrii mas:

$$J_{yz} = \frac{1}{2}\left(J_{\varsigma} - J_{\eta}\right)\sin 2\alpha - J_{\varsigma\eta}\cos 2\alpha,$$

gdzie: $J_{\varsigma\eta}$= 0, gdyż osie układu współrzędnych ξηζ, tak założyliśmy, są głównymi osiami bezwładności; $J_{\varsigma} = \frac{m r^2}{2}$, $J_{\eta} = \frac{m r^2}{4}$, są momentami bezwładności względem osi ζ i η; stąd:

$$J_{yz} = \frac{m r^2}{8}\sin 2\alpha .$$

Podstawiając J_{yz} w (10) dostaniemy:

$$R_{By} = -R_{Ay} = \frac{\pi^2 n^2 m r^2}{14400 a}\sin 2\alpha = \frac{\pi^2 \cdot 3000^2 \cdot 18 \cdot 0{,}15^2}{14400 \cdot 0{,}5}\sin 1^0 = 174{,}37\ \mathrm{N}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

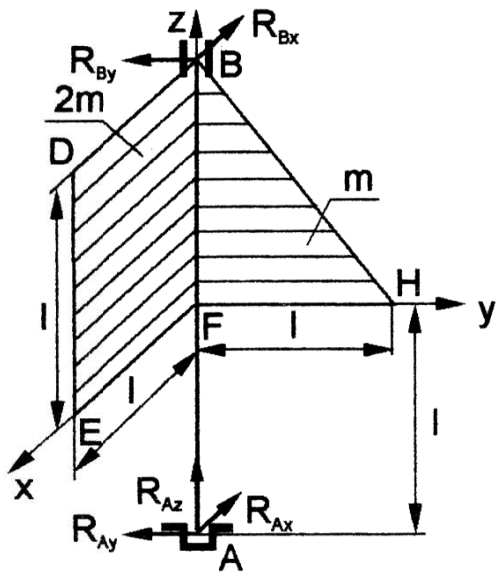
Zadanie 1. Dwuwymiarowa płyta kwadratowa BDEF o boku l = 0,5 m i masie 2m = 5 kg jest przytwierdzona do wału AB. Płyta ta leży w płaszczyźnie xz. W płaszczyźnie prostopadłej yz znajduje się druga trójkątna płyta BFH o masie m, również zamocowana sztywno do wału AB. Obliczyć reakcje dynamiczne w łożyskach A i B przy stałej prędkości kątowej układu płyt ω = 30 s^{-1}.

Odpowiedź: $x_C = \frac{1}{3}l,\ y_C = \frac{1}{9}l,\ z_C = \frac{4}{9}l,$

x_C= 0,1 m, y_C= 0,1 m, z_C= 0,13 m

$$R_{Ax} = \frac{5 m l \omega^2}{8},\ R_{Ay} = \frac{3 m l \omega^2}{8},\ R_{Az} = 3 m g,$$

$$R_{Bx} = \frac{5 m l \omega^2}{24},\ R_{By} = \frac{3 m l \omega^2}{24},$$

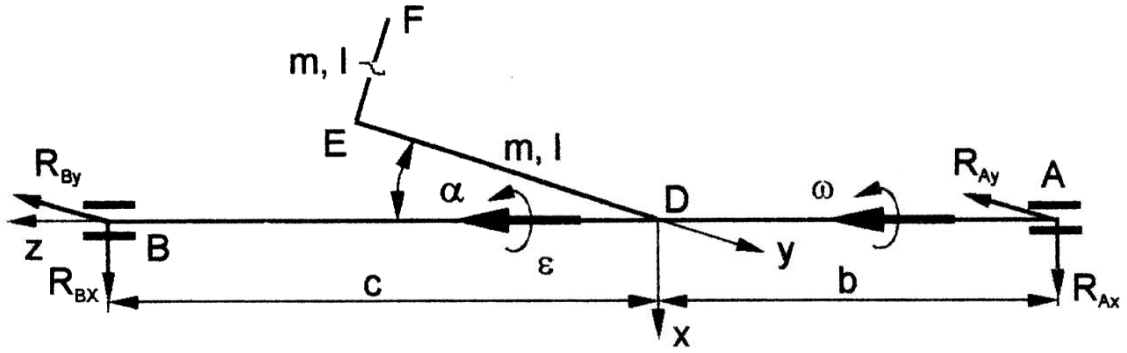


R_{Ax}= 703,12 N, R_{Ay}= 1171,87 N,

R_{Az}= 73,57 N

R_{Bx}= 234,37 N, R_{By}= 390,62 N

Zadanie 2. Dwa pręty DE i EF o masie m = 2 kg, i długości l =0,4 m każdy, połączone ze sobą pod kątem prostym, zostały zamocowane na wale AB (rysunek poniżej). Wał obraca się z prędkością kątową $\omega = 30\ s^{-1}$ i przyśpieszeniem kątowym $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Kąt α pochylenia pręta DE równy jest 30°. Punkt D znajduje się w odległości b = 0,3 m i c = 0,7 m od podpór. Siłę ciężkości w równaniach pominąć. Wyznaczyć reakcje dynamiczne w łożyskach A i B.



Odpowiedź: Współrzędne środka masy C: $x_C = \frac{l}{4}(3\sin\alpha + \cos\alpha) = 0{,}24$ m,

y_C= 0, z_C= 0

Momenty dewiacji: $J_{xz} = \frac{m\,l^2}{2}\sin 2\alpha = 0{,}138\ \mathrm{kgm}^2$, $J_{yz} = 0$

Reakcje dynamiczne:

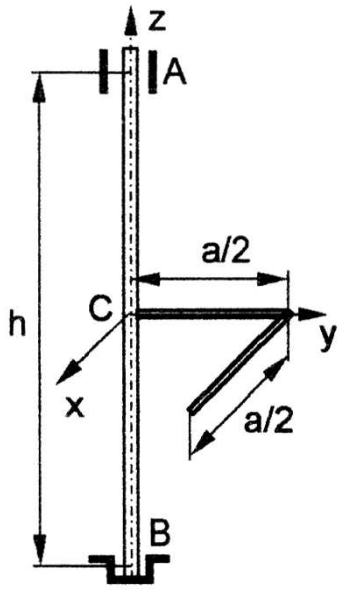
$$R_{Ax} = \frac{m\,l\,\omega^2}{2\,(b+c)}[b\,(3\sin\alpha + \cos\alpha) + l\sin 2\alpha],\quad R_{Ax} = 380{,}24\ \mathrm{N}$$

$$R_{Ay} = \frac{m\,l\,\varepsilon}{2\,(b+c)}[c\,(3\sin\alpha + \cos\alpha) + l\sin 2\alpha],\quad R_{Ay} = 1{,}6\ \mathrm{N},$$

$$R_{Bx} = \frac{m\,l\,\omega^2}{2\,(b+c)}[c\,(3\sin\alpha+\cos\alpha)-l\sin 2\alpha], \quad R_{Bx} = 471{,}53\,\text{N},$$

$$R_{By} = \frac{m\,l\,\varepsilon}{2\,(b+c)}[b\,(3\sin\alpha+\cos\alpha)-l\sin 2\alpha], \quad R_{By} = 0{,}29\,\text{N}$$

Zadanie 3. Jednorodny cienki pręt obraca się ze stałą prędkością kątową ω. Długość pręta wynosi a, masa równa jest m. Pręt zamocowany jest w połowie wysokości h pionowego nieważkiego wałka AB i leży w płaszczyźnie xy. Wyznaczyć reakcje dynamiczne w łożyskach A i B.



Odpowiedź: $R_{Ax} = -\frac{m\,a}{16\,h}(2\,g+h\,\omega^2)$,

$$R_{Ay} = \frac{3\,m\,a}{16\,h}(2\,g+h\,\omega^2), \quad R_{Bx} = -\frac{ma}{16h}(2g-h\omega^2),$$

$$R_{By} = \frac{3\,m\,a}{16\,h}(2\,g-h\,\omega^2), \quad R_{Bz} = m\,g$$

3. Ruch płaski

3.1. Równania dynamiczne ruchu płaskiego

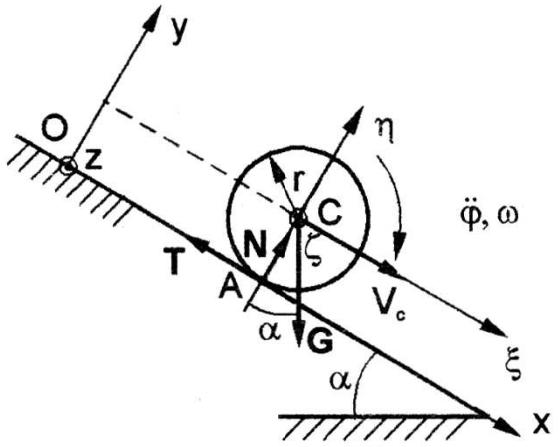
Zadanie 18

Jednorodny walec o masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie pochylenia α (rys. 18). Współczynnik tarcia statycznego pomiędzy równią a walcem równy jest μ. Znaleźć przyspieszenie środka masy walca oraz kąt pochylenia równi, przy którym wystąpi poślizg walca.

Rozwiązanie

Ruch walca odbywa się pod działaniem trzech sił: siły ciężkości **G**, siły normalnej **N** oraz siły tarcia **T**. Osie układu współrzędnych skierujemy tak, jak na rys. 18.

Oś z nieruchomego układu współrzędnych przechodzi przez punkt O, zaś oś ζ układu współrzędnych porusza się razem z walcem i przechodzi przez środek walca C. Obie osie są prostopadłe do płaszczyzny rysunku (niewidoczne na rysunku) i zwroty ich są skierowane na nas.



Rys. 18

Równania dynamiczne (różniczkowe) ruchu mają następująca postać:

$$m\,\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = G\sin\alpha - T\,, \tag{1}$$

$$m\,\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = N - G\cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$J_\varsigma\,\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_{i\varsigma} = -T\,r\,. \tag{3}$$

Równania dynamiczne (1) i (2) są równaniami różniczkowymi ruchu środka masy C walca w ruchu postępowym. Równanie dynamiczne (3) jest równaniem różniczkowym ruchu obrotowego walca względem środka masy C. Znak minus przy T r wynika z zwrotu wektora momentu T r (reguła prawej dłoni), który jest przeciwny do zwrotu osi ζ.
Ponieważ, $y_c = r = \text{const}$, to $\ddot{y}_c = 0$ i z równania (2), otrzymamy:

$$N - G\cos\alpha = 0\,, \qquad N = G\cos\alpha = m\,g\cos\alpha\,. \tag{4}$$

Dwa równania różniczkowe ruchu (1) i (3) zawierają trzy niewiadome: $\ddot{x}_c$, T, $\ddot{\varphi}$. Aby określić te trzy niewiadome należy ułożyć jeszcze jedno

równanie. Walec toczy się bez poślizgu, więc chwilowym środkiem obrotu jest punkt A, skąd:

$$\dot{x}_c = V_c = \omega r .$$

Ponieważ walec obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (zwrot wektora prędkości kątowej ω, określony regułą śruby prawoskrętnej jest przeciwny niż zwrot osi z), to $\dot{\varphi} = -\omega$, skąd pochodna $\dot{x}_c$ po czasie jest równa:

$$\ddot{x}_c = -\ddot{\varphi} r , \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_c}{r} .$$

Podstawiając $\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_c}{r}$ oraz wzór na moment bezwładności walca $J_ç = \frac{m r^2}{2}$ w równanie (3) dostaniemy:

$$\frac{m r^2}{2}\left(-\frac{\ddot{x}_c}{r}\right) = -T r , \qquad \text{lub} \qquad \frac{m \ddot{x}_c}{2} = T .$$

Równanie (1) wraz z powyższym równaniem tworzy układ równań:

$$m \ddot{x}_c = G \sin\alpha - T ,$$

$$\frac{m \ddot{x}_c}{2} = T ,$$

skąd:

$$\frac{3 m \ddot{x}_c}{2} = G \sin\alpha ,$$

a po przekształceniu:

$$\ddot{x}_c = \frac{2 G}{3 m}\sin\alpha = \frac{2 m g}{3 m}\sin\alpha = \frac{2}{3} g \sin\alpha ,$$

$$T = m \frac{\ddot{x}_c}{2} = \frac{1}{3} m g \sin\alpha . \qquad (5)$$

Dla określenia kąta pochylenia równi, przy którym wystąpi poślizg walca wykorzystamy znaną zależność ze statyki, określającą warunek nie występowania poślizgu walca:

$$T \le T_{max} = \mu N .$$

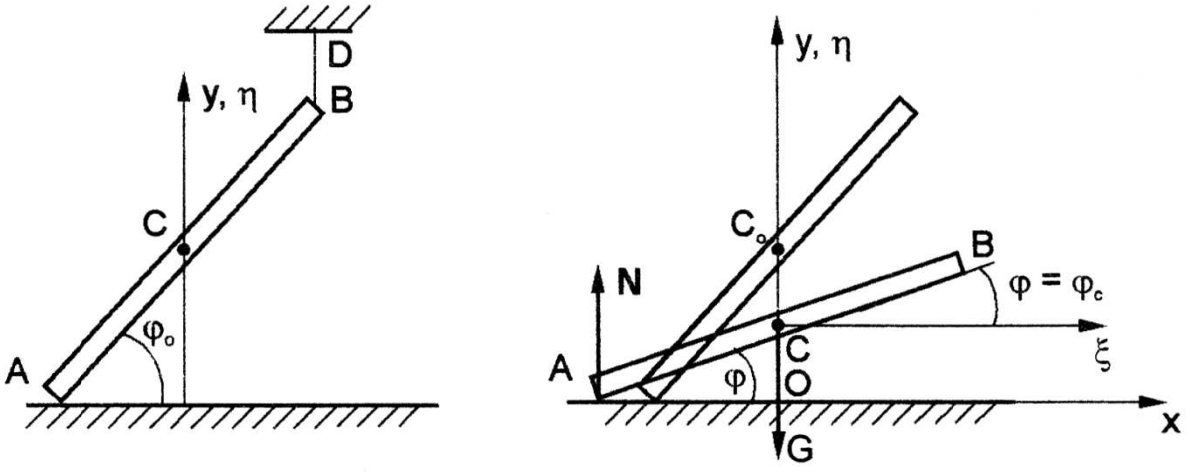
Podstawiając wyznaczone wielkości N i T określone wzorami (4) i (5), dostaniemy:

$$\frac{1}{3} m g \sin\alpha \le \mu m g \cos\alpha \qquad (6)$$

skąd: $tg\alpha = 3\mu$. Dla $\alpha \le \text{arc tg } 3\mu$ – nie wystąpi poślizg, a dla $\alpha \rangle \text{arc tg } 3\mu$ – wystąpi poślizg walca.

Zadanie 19

Jednorodny cienki pręt AB o długości L i masie m umocowany jest końcem B (rys. 19) do pionowej nici BD, a końcem A opiera się o gładką poziomą płaszczyznę, tworząc z nią kąt $\varphi_o = 45^o$. W pewnej chwili nić BD zostaje przerwana i pręt rozpoczyna ruch. Znaleźć reakcje płaszczyzny w punkcie A w chwili początkowej ruchu.



Rys. 19

Rozwiązanie

Oswobodzony od nici pręt będzie poruszał się pod działaniem dwóch sił zewnętrznych: siły ciężkości **G** i reakcji płaszczyzny **N**. Ponieważ siły **G** i **N** są pionowe i pręt w chwili początkowej nie był w ruchu to środek ciężkości C

będzie poruszał się po linii pionowej, wzdłuż osi Oy. Osie układów współrzędnych przyjęto tak, jak w poprzednim zadaniu.
Równania dynamiczne (różniczkowe) ruchu płaskiego w płaszczyźnie xOy są następujące:

$$m\,\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0, \tag{1}$$

$$m\,\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = N - G, \tag{2}$$

$$J_\varsigma\,\ddot{\varphi}_c = \sum_{i=1}^{n} M_{i\varsigma} = -N\frac{L}{2}\cos\varphi_c. \tag{3}$$

Równanie (1) potwierdza, że środek masy C porusza się pionowo (wzdłuż osi x nie działają siły i prędkość początkowa była równa zero). W równaniach (2) i (3) mamy trzy niewiadome $\ddot{y}_c$, $\ddot{\varphi}_c$, N. Aby je określić musimy ułożyć dodatkowe równanie, które będzie wyrażało ograniczenie nałożone na pręt przez więzy – poziomą płaszczyznę.
Ponieważ koniec pręta A porusza się po płaszczyźnie poziomej, to:

$$y_c = \frac{L}{2}\sin\varphi_c,$$

skąd pochodne:

$$\dot{y}_c = \frac{L}{2}\dot{\varphi}_c\cos\varphi_c,$$

$$\ddot{y}_c = \frac{L}{2}\left(\ddot{\varphi}_c\cos\varphi_c - \dot{\varphi}_c^2\sin\varphi_c\right).$$

Podstawmy w równanie (2) przyspieszenie $\ddot{y}_c$, a w równanie (3) moment bezwładności pręta $J_\varsigma = \frac{m\,L^2}{12}$ względem osi ζ przechodzącej przez środek masy C, wówczas otrzymamy:

$$m\frac{L}{2}\left(\ddot{\varphi}_c\cos\varphi_c - \dot{\varphi}_c^2\sin\varphi_c\right) = N - G, \tag{4}$$

$$\frac{m L^2}{12}\ddot{\varphi}_c = -N\frac{L}{2}\cos\varphi_c \qquad \text{lub} \qquad \frac{m L}{6}\ddot{\varphi}_c = -N\cos\varphi_c . \tag{5}$$

Aby wyrugować z powyższych równań $\ddot{\varphi}_c$ i określić N, pomnożymy równanie (5) przez $(-3\cos\varphi_c)$ i dodamy je do równania (4). Wówczas:

$$-\frac{m L}{2}\dot{\varphi}_c^2 \sin\varphi_c = N - G + 3N\cos^2\varphi_c ,$$

skąd:

$$N = \frac{G - \frac{m L}{2}\dot{\varphi}_c^2 \sin\varphi_c}{1+3\cos^2\varphi_c} = \frac{m(2g - L\dot{\varphi}_c^2 \sin\varphi_c)}{2(1+3\cos^2\varphi_c)} .$$

W chwili początkowej t = 0, $\varphi_c = \varphi_o = 45^o$ oraz $\omega_o = \dot{\varphi}_o = 0$, stąd reakcja podłoża:

$$N_o = \frac{2mg}{2+6\cos^2 45^o} = \frac{2}{5}mg .$$

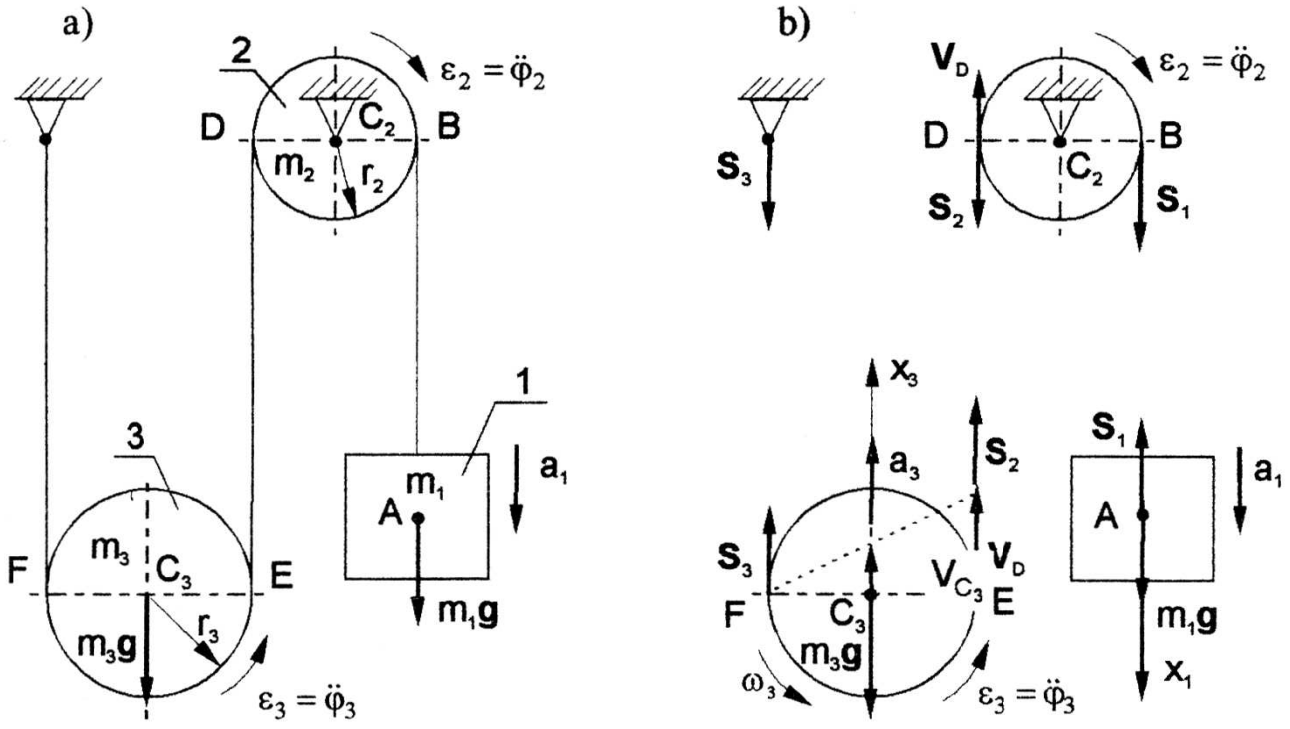
Zadanie 20

Na końcu nierozciągliwej i nieważkiej liny zawieszono ciało 1 o masie m_1 (rys. 20). Linę przerzucono przez krążek stały 2 o promieniu r_2 i masie m_2 oraz krążek ruchomy 3 o promieniu r_3 i masie m_3. Drugi koniec liny unieruchomiono, jak na rysunku. Wyznaczyć przyspieszenie a_1, z którym opada w dół ciało zawieszone na końcu liny. Krążki przyjąć jako cienkie jednorodne tarcze kołowe. Siły tarcia w krążkach pominąć. Między liną a krążkami nie ma poślizgów.

Rozwiązanie

Poruszający się układ składa się z ciała 1 o masie m_1, poruszającego się ruchem postępowym, z krążka 2 poruszającego się ruchem obrotowym oraz krążka 3 poruszającego się ruchem płaskim. Na rysunku 20b oddzielono myślowo od siebie ciała zastępując linkę odpowiednimi siłami reakcji.
Równania dynamiczne (różniczkowe) ruchu poszczególnych ciał są następujące;
– ciała 1 o masie m_1, opadającego ruchem postępowym:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 a = m_1 g - S_1 , \tag{1}$$



Rys. 20

Rozwiązanie

Poruszający się układ składa się z ciała 1 o masie m_1, poruszającego się ruchem postępowym, z krążka 2 poruszającego się ruchem obrotowym oraz krążka 3 poruszającego się ruchem płaskim. Na rysunku 20b oddzielono myślowo od siebie ciała zastępując linkę odpowiednimi siłami reakcji.

Równania dynamiczne (różniczkowe) ruchu poszczególnych ciał są następujące;

– ciała 1 o masie m_1, opadającego ruchem postępowym:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 a = m_1 g - S_1, \tag{1}$$

– krążka stałego 2 o masie m_2 i momencie bezwładności względem stałej osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy C_2 $J_{C_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, poruszającego się ruchem obrotowym:

$$J_{C_2} \ddot{\varphi}_2 = J_{C_2} \varepsilon_2 = S_1 r_2 - S_2 r_2, \tag{2}$$

– krążka ruchomego 3 o masie m_3 i momencie bezwładności względem ruchomej osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku przechodzącej przez środek masy C_3 $J_{C_3} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$, poruszającego się ruchem płaskim;

$$m_3 \ddot{x}_3 = m_3 a_3 = S_2 + S_3 - m_3 g, \tag{3}$$

$$J_{C_3} \ddot{\varphi}_3 = J_{C_3} \varepsilon_2 = S_2 r_3 - S_3 r_3. \tag{4}$$

W powyższych czterech równaniach występuje siedem niewiadomych a_1, a_3, ε_2, ε_3, S_1, S_2 i S_3. Brakujące trzy równania znajdziemy ze związków kinematycznych.
Pomiędzy przyspieszeniem ciała 1 i przyspieszeniem kątowym krążka 2 zachodzi następująca zależność:

$$a_1 = \varepsilon_2 r_2, \qquad \text{skąd} \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}. \tag{5}$$

Prędkości punktów D i E krążków 2 i 3 są sobie równe $V_D = V_E$. Prędkość punktu D w ruchu obrotowym krążka 2 jest równa $V_D = \omega_2 r_2$. Prędkość punktu E w ruchu płaskim krążka 3 jest równa $V_E = V_{C_3} + \omega_3 r_3$, tj., sumie wektorowej prędkości V_{C3} z jaką się porusza środek masy C_3 i prędkości $\omega_3 r_3$ punktu E w ruchu obrotowym krążka 3 względem tegoż środka masy C_3, stąd:

$$\omega_2 r_2 = V_{C_3} + \omega_3 r_3. \tag{6}$$

Chwilowym środkiem obrotu krążka 3 jest punkt F. Z kinematyki wiadomo, że prędkość tego punktu jest równa zeru, stąd podobnie jak wyżej mamy:

$$V_{C_3} - \omega_3 r_3 = 0. \tag{7}$$

Aby otrzymać brakujące trzy równania, różniczkujemy zależności (5), (6) i (7) względem czasu t, i biorąc pod uwagę, że:

$$\frac{dV_3}{dt} = a_3, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2 \qquad \text{i} \qquad \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3,$$

dostaniemy:

$$\varepsilon_2 r_2 = a_3 + \varepsilon_3 r_3, \qquad a_3 - \varepsilon_3 r_3 = 0. \tag{8}$$

Skąd po uwzględnieniu zależność (5) znajdujemy:

$$a_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_2 r_2 = \frac{1}{2}a_1, \tag{9}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_1}{2r_3}. \tag{10}$$

Po podstawieniu zależności (5), (9) i (10) do równań (1) – (4) otrzymamy:

$$m_1 a_1 = m_1 g - S_1, \tag{11}$$

$$\frac{m_2 a_1}{2} = S_1 - S_2, \tag{12}$$

$$\frac{m_3 a_1}{2} = S_2 + S_3 - m_3 g, \tag{13}$$

$$\frac{m_3 a_1}{4} = S_2 - S_3. \tag{14}$$

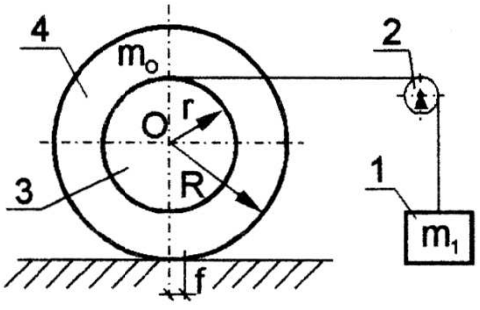
Z powyższych równań znajdujemy szukane przyspieszenie ciała 1:

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{g(8m_1 - 4m_3)}{8m_1 + 4m_2 + 3m_2}. \tag{15}$$

Całkując po czasie zależność (15) możemy obliczyć w dowolnej chwili czasu prędkość i współrzędną położenia masy m_1.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

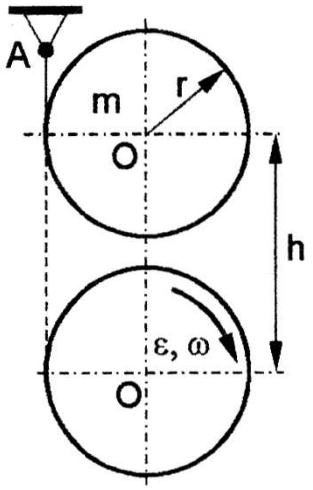
Zadanie 1. Ciało 1 o masie $m_1 = 2m$ opada zawieszone na nieważkiej i nierozciągliwej lince przewieszonej przez bloczek 2 i nawiniętej na walec 3 o promieniu r. Na walcu osadzone jest koło 4 o promieniu R, toczące się bez poślizgu po poziomym torze. Współczynnik tarcia tocznego wynosi f. Wspólna masa walca 3 i koła 4 równa jest $m_O = 5m$, a promień bezwładności względem poziomej osi O – i_O m. Wyznaczyć przyśpieszenie kątowe ε i liniowe a_O środka masy walca 3 wraz z kołem 4 oraz liniowe a_1 ciała 1, a także napięcie w lince S.



Odpowiedź: $\varepsilon = \frac{g f}{r R - i_O^2}$, $a_O = \varepsilon R$,

$a_1 = \varepsilon (R + r)$, $S = 2m\left[g - \frac{g f (R + r)}{r R - i_O^2}\right]$

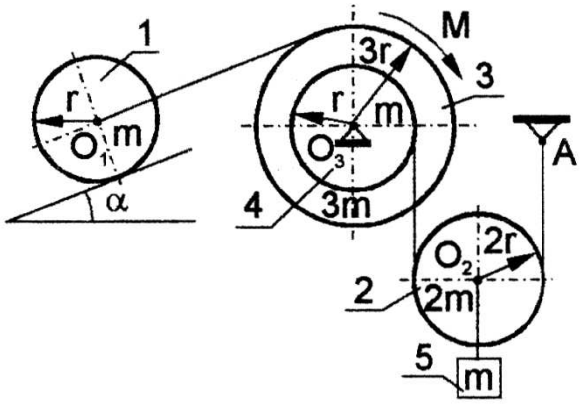
Zadanie 2. Na walec o masie m i promieniu r, nawinięto linkę, której koniec przymocowano do punktu A. Walec zaczyna opadać bez prędkości początkowej, odwijając się z linki. Obliczyć przyspieszenie kątowe ε, liniowe a_O punktu O, prędkość V_O osi walca w chwili, gdy oś obniżyła się o wysokość h. Ponadto wyznaczyć wartości siły w lince. W chwili początkowej część linki nie nawinięta na walec miała kierunek pionowy.



Odpowiedź: $\varepsilon = \frac{2g}{3r}$, $a_O = \frac{2}{3}g$,

$V_O = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$, $S = \frac{1}{3}mg$

Zadanie 3. Koło 1 o masie m toczy się bez poślizgu po chropowatej równi pochyłej o kącie pochylenia α i współczynniku tarcia statycznego μ, promień koła równy jest r, a współczynnik tarcia tocznego wynosi f. Do koła 3 przyłożony jest stały moment M. Do środka koła 2 przymocowane jest ciało 5 o masie m. Napisać równania dynamiczne ruchu i zależności kinematyczne między przyspieszeniami liniowymi i kątowymi. Określić przyspieszenie kątowe koła 1, 2 i 3.



Odpowiedź: $\varepsilon_1 = \frac{2g\cos\alpha}{r^2}(\mu - f)$,

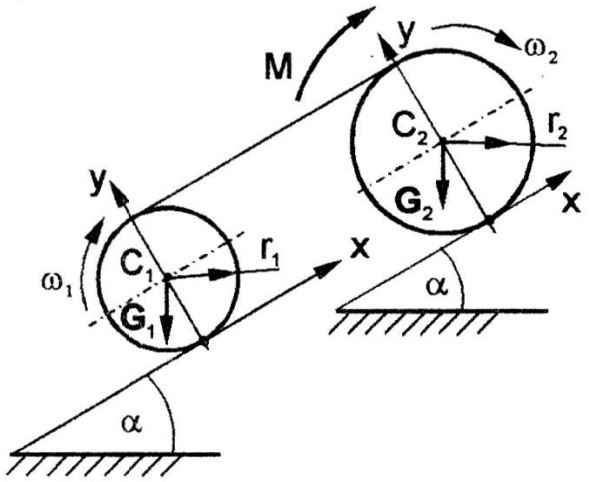
$\varepsilon_2 = \frac{2g\cos\alpha}{3r^2}(\mu - f)$,

$\varepsilon_3 = \frac{g\cos\alpha}{6r^2}(\mu - f)$

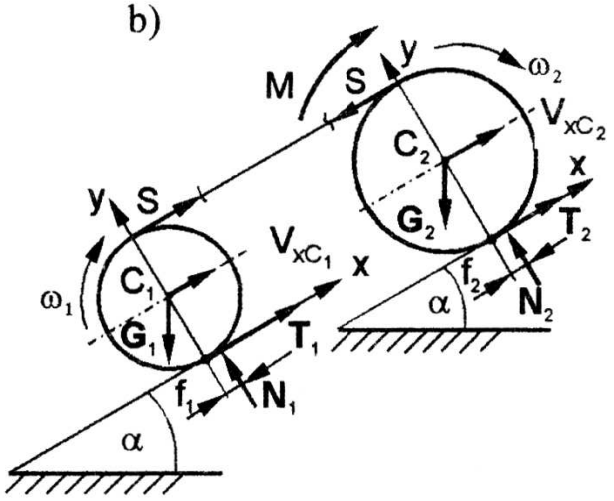
3.2. Zasada pędu i krętu

Zadanie 21. Dwa walce o masach m_1, m_2 i promieniach r_1, r_2 toczą się w górę równi pochyłej o kącie pochylenia α (rys. 21a). Do walca 2 przyłożony jest stały moment sił M. Współczynnik tarcia ślizgowego pomiędzy równiami i walcami równy jest μ, a tarcia tocznego f_1 i f_2. Napisać równania dynamiczne ruchu każdego walca. Walce toczą się bez poślizgu.

a)



b)



Rys. 21

Rozwiązanie

Do ułożenia dynamicznych równań ruchu wykorzystamy zasadę pędu i krętu:

$$\frac{d\mathbf{p}_C}{dt} = \sum \mathbf{F}_{iC}, \qquad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \sum \mathbf{M}_{iC}, \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{p}_C$, $\mathbf{K}_C$ – wektor pędu i krętu walca, względem środka masy C, $\mathbf{F}_{iC}$, $\mathbf{M}_{iC}$ – wektory siły i momentu siły względem środka masy C walca.

W pierwszej kolejności, dla każdego walca (rys. 21b), zapiszemy rzuty wektorów pędu $\mathbf{p}_C$ na osie x i y oraz wektor krętu $\mathbf{K}_C$, jako kręt względem osi z prostopadłej do rysunku:

$$m_1 V_{xC_1} = p_{1x}, \qquad m_1 V_{yC_1} = p_{1y}, \qquad K_{1z} = -J_{1z}\,\omega_1, \tag{2}$$

$$m_2 V_{xC_2} = p_{2x}, \qquad m_2 V_{yC_2} = p_{2y}, \qquad K_{2z} = -J_{2z}\,\omega_2. \tag{3}$$

Znak minus w K_{1z} i K_{2z} oznacza, że prędkości kątowe (obrót walca) są przeciwnie skierowane do obrotu wskazówek zegara (wektory $\mathbf{K}_{1z}$ i $\mathbf{K}_{2z}$ mają zwroty przeciwne do zwrotu osi z – reguła prawej dłoni).
Pochodne po czasie z (2) i (3) są równe:
– dla pierwszego walca :

$$\frac{dp_{1x}}{dt} = m_1 \frac{dV_{xC_1}}{dt} = m_1 \ddot{x}_{C_1}, \qquad \frac{dp_{1y}}{dt} = m_1 \frac{dV_{yC_1}}{dt} = m_1 \ddot{y}_{C_1},$$

$$\frac{dK_{1z}}{dt} = -J_{1z} \frac{d\omega_1}{dt} = -J_{1z} \ddot{\varphi}_1, \tag{4}$$

– dla drugiego walca:

$$\frac{dp_{2x}}{dt} = m_2 \frac{dV_{xC_2}}{dt} = m_2 \ddot{x}_{C_2}, \qquad \frac{dp_{2y}}{dt} = m_2 \frac{dV_{yC_2}}{dt} = m_2 \ddot{y}_{C_2},$$

$$\frac{dK_{2z}}{dt} = -J_{2z} \frac{d\omega_2}{dt} = -J_{2z} \ddot{\varphi}_2 . \tag{5}$$

W (4) i (5), $\ddot{x}_{C_1}$,..., $\ddot{y}_{C_2}$ – przyspieszenia liniowe środków mas C_1 i C_2 wzdłuż odpowiednich osi, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$ – przyspieszenia kątowe walców, J_{z1}, J_{z2} – momenty bezwładności względem osi z przechodzącej przez środek masy walca. Przyspieszenia $\ddot{y}_{C_1}, \ddot{y}_{C_2}$ są równe zero, ponieważ ruch wzdłuż osi y się nie odbywa.
Dwa równania wektorowe (1) dla każdego walca, zapiszemy jako trzy równania skalarowe. Uwzględniając w równaniach skalarowych pochodne (4) i (5), $\ddot{y}_{C_1} = \ddot{y}_{C_2} = 0$ oraz siły i momenty sił dostaniemy:
– dla pierwszego walca :

$$m_1 \ddot{x}_{C_1} = -m_1 g \sin\alpha + S + T_1,$$

$$0 = N_1 - G_1 \cos\alpha,$$

$$-J_{1z} \ddot{\varphi}_1 = N_1 f_1 + T_1 r_1 - S r_1, \tag{6}$$

– dla drugiego walca:

$$m_2 \ddot{x}_{C_2} = -m_2 g \sin\alpha - S + T_2,$$

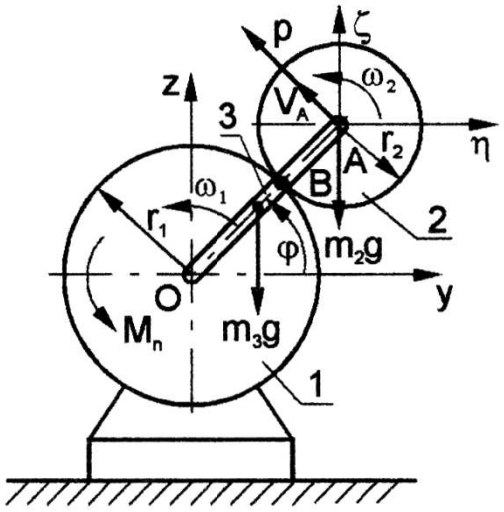
$$0 = N_2 - G_2 \cos\alpha,$$

$$-J_{2z}\,\ddot{\varphi}_2 = N_2 f_2 + T_2 r_2 + S r_2 . \qquad (7)$$

Aby znaleźć równania ruchu z układu równań dynamicznych (6) i (7), musimy napisać związki kinematyczne pomiędzy przyspieszeniami liniowymi i kątowymi oraz odpowiednio przekształcić równania i scałkować. Czynności te pozostawia się czytelnikowi do samodzielnego wykonania.

Zadanie 22

W mechanizmie przedstawionym na rysunku 22 korba 3 o masie m_3 obraca się z prędkością kątową ω wokół nieruchomej osi x, przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Korba wprawia w ruch koło 2 o masie m_2 i promieniu r_2, które toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole 1 o promieniu r_1. Określić kręt mechanizmu względem osi x . Wyznaczyć jak powinien zmieniać się moment napędowy M_n, aby korba poruszała się ruchem obrotowym jednostajnym.



Rys. 22

Rozwiązanie

Kręt (moment pędu) całego mechanizmu względem osi x przechodzącej przez środek O i prostopadłej do rysunku 22, jest sumą krętów koła 2 i korby 3 liczonych względem osi x:

$$K_x = K_{2x} + K_{3x} . \qquad (1)$$

Obrót korby przeciwny do ruchu wskazówek zegara przyjmiemy za dodatni. Kręt koła 2 zgodnie z teorią krętu równy jest:

$$K_{2x} = p \cdot OA + K_{\xi},$$

gdzie: $p = m_2 V_A$ jest pędem koła 2, $K_{\xi} = J_{\xi}\, \omega_2$ jest krętem koła 2 względem ruchomej osi ξ prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt A.

Prędkość środka masy A koła 2, $V_A = OA \cdot \omega_1 = (r_1 + r_2)\, \omega_1$, a moment bezwładności tegoż koła $J_{\xi} = \dfrac{m_2\, r_2^2}{2}$.

Wówczas kręt będzie równy:

$$K_{2x} = m_2\, (r_1 + r_2)^2 \omega_1 + \frac{m_2\, r_2^2}{2} \omega_2 .$$

Prędkość kątową koła 2 określimy w następujący sposób (punkt B jest chwilowym środkiem obrotu):

$$\omega_2 = \frac{V_A}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \omega_1 ,$$

skąd:

$$K_{2x} = m_2\, (r_1 + r_2)^2\, \omega_1 + \frac{m_2\, r_2^2}{2} \omega_2 = m_2\, \omega_1\, (r_1 + r_2) \left(r_1 + \frac{3}{2} r_2 \right). \qquad (2)$$

Kręt korby 3 względem osi x jest równy:

$$K_{3x} = J_x\, \omega_1, \qquad (3)$$

gdzie: $J_x = \dfrac{m_3\, (r_1 + r_2)^2}{3}$ jest momentem bezwładności względem osi x.

Sumując kręty K_{2x} i K_{3x} z uwzględnieniem powyższego momentu bezwładności, otrzymamy kręt całego mechanizmu, który jest równy:

$$K_x = (r_1 + r_2)\, \omega_1 \left[m_2 \left(r_1 + \frac{3}{2} r_2 \right) + m_3 \frac{(r_1 + r_2)}{3} \right].$$

Z teorii krętu wiadomo, że $\frac{dK_x}{dt} = \sum M_{ix}$, stąd:

$$\frac{dK_x}{dt} = (r_1 + r_2)\,\dot{\omega}_1\left[m_2\left(r_1 + \frac{3}{2}r_2\right) + m_3\,\frac{(r_1 + r_2)}{3}\right] = \sum M_{ix}\,. \qquad (4)$$

Ponieważ, prędkość kątowa ω_1 ma być stała, to przyspieszenie kątowe w zależności (4) musi równać się zeru, czyli $\varepsilon = \dot{\omega}_1 = 0$. Oznacza to, że suma momentów sił czynnych względem osi x musi być równa zeru, tj., $M_x = \frac{dK_x}{dt} = \sum M_{ix} = 0$, co z kolei wyraża nam zasadę zachowania krętu.

Moment M_x jest sumą momentów wywołanych siłami ciężkości $G_2 = m_2\,g$ i $G_3 = m_3\,g$ oraz momentu napędowego M_n:

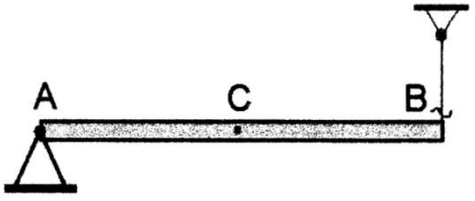
$$M_x = M_n - m_2\,g\,(r_1 + r_2)\cos\varphi - m_3\,g\,\frac{(r_1 + r_2)}{2}\cos\varphi = 0\,. \qquad (5)$$

Podstawiając w (5), znany z kinematyki ruchu obrotowego bryły wzór $\varphi = \omega_1\,t$ na kąt obrotu w ruchu jednostajnym, otrzymamy po przekształceniu, zależność na szukany moment napędowy:

$$M_n = (r_1 + r_2)\left(m_2 + \frac{1}{2}m_3\right) g\cos\omega_1 t\,.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Jednorodny pręt o masie m, długości 2l, podparty z jednej strony w punkcie A, a z drugiej zawieszony na lince w pewnej chwili został nagle odcięty od linki. Znaleźć reakcję podpory A na pręt w chwili uwolnienia pręta od więzów.



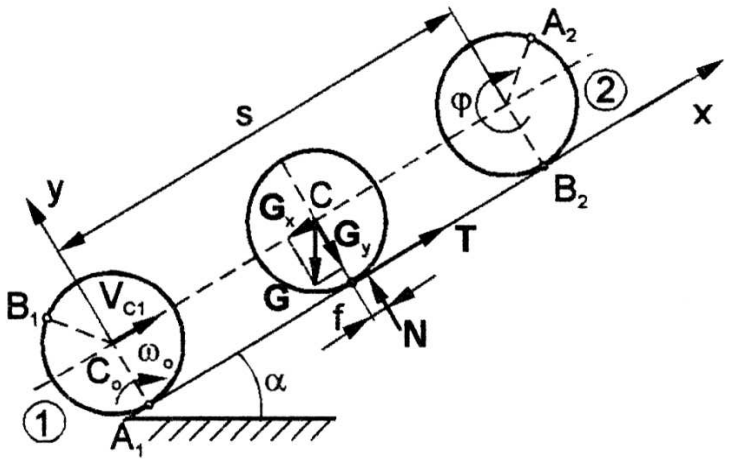
Odpowiedź: $R_A = \frac{m\,g}{4}$

Zadanie 2. Rozwiązać **„Zadania do samodzielnego rozwiązania. Zadanie 1 i 2"** z tematu **„3.1. Równania dynamiczne ruchu płaskiego"**, stosując zasadę pędu i krętu do ułożenia równań dynamicznych ruchu.

3.3. Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy

Zadanie 23

Walec o promieniu r = 0,25 m toczy się w górę równi z prędkością początkową środka masy V_{C_1} =1,4 m/s (rys. 23). Kąt nachylenia równi $\alpha = 30^o$, współczynnik tarcia tocznego f = 0,5 cm. Określić drogę jaką pokona środek masy walca do chwili zatrzymania się. Walec toczy się bez poślizgu.



Rys. 23

Rozwiązanie

Z zasady równoważności energii kinetycznej i pracy (twierdzenie o energii kinetycznej) mamy:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L,$$

W chwili zatrzymania się walca prędkość równa jest zero i $E_{k_2} = 0$, stąd:

$$-E_{k_1} = L. \tag{1}$$

Początkowa wartość energii kinetycznej jest równa:

$$E_{k_1} = \frac{m V_{C1}^2}{2} + \frac{J_C \omega_1^2}{2}. \tag{2}$$

Prędkość kątowa w chwili początkowej i moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek masy C walca, określimy w następujący sposób:

$$\omega_{C_1} = \frac{V_{C_1}}{r}, \qquad J_C = \frac{m r^2}{2}. \tag{3}$$

Podstawiając wzory (3) do wzoru (2) otrzymamy:

$$E_{k_1} = \frac{m V_{C_1}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m r^2}{2}\frac{V_{C_1}^2}{r^2} = \frac{3 m V_{C_1}^2}{4}.$$

Określimy teraz pracę jaką wykonują siły działające na walec od początku ruchu do chwili zatrzymania się. Na walec działają następujące zewnętrzne siły: ciężar walca **G**, reakcja normalna płaszczyzny równi **N** i siła tarcia **T**. Pracę wykonuje siła $\mathbf{G_x}$ i para sił $\mathbf{G_y}$ **N**. Siła tarcia **T** pracy nie wykonuje, ponieważ prędkość chwilowego środka obrotu (punkt kontaktu walca z równią), do którego ona jest przyłożona jest równa zeru.
Praca siły $\mathbf{G_x}$ jest równa:

$$L_{G_x} = -G_x s = -G s \cdot \sin\alpha = -m g s \cdot \sin\alpha .$$

Praca pary sił $\mathbf{G_y}$ i **N** jest ujemna, gdyż kierunek działania pary sił jest przeciwny do kierunku obrotu walca:

$$L_{op} = -M \varphi ,$$

gdzie:

$$M = N f = G_y f = G f \cos\alpha = m g f \cos\alpha .$$

Przy przemieszczaniu się walca z położenia 1 w położenie 2 punkt A_1 przechodzi w położenie A_2, a punkt B_1 w położenie B_2 i jednocześnie walec obraca się o kąt φ.
Kąt φ w takim przypadku jest równy:

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$

Praca pary sił wówczas będzie:.

$$L_{op} = -G\,f\,\frac{s}{r}\cos\alpha = -m\,g\,f\,\frac{s}{r}\cos\alpha\,.$$

Całkowita praca sił zewnętrznych:

$$L = L_{G_x} + L_{op} = -m\,g\,s\sin\alpha - m\,g\,f\,\frac{s}{r}\cos\alpha\,.$$

Podstawiając E_{k_1} i L do równania (1) dostaniemy:

$$-\frac{3\,m\,V_{C_1}^2}{4} = -m\,g\,s\sin\alpha - m\,g\,f\,\frac{s}{r}\cos\alpha\,,$$

skąd wyznaczymy drogę jaką przejdzie środek masy walca do chwili zatrzymania się:

$$s = \frac{3\,V_{C_1}^2}{4\,g\,(\sin\alpha + \frac{f}{r}\cos\alpha)},$$

$$s = \frac{3\cdot 1{,}4^2}{4\cdot 9{,}81\,(0{,}5 + \frac{0{,}5}{25}\,0{,}866)} = 0{,}29\text{m}\,.$$

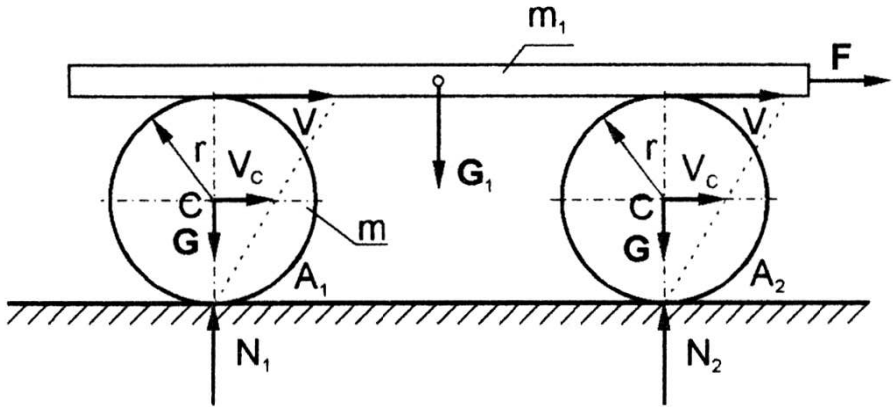
Zadanie 24

Deska o masie m_1 leży na dwóch walcach o masie m każdy (rys. 24). Walce toczą się po poziomej płaszczyźnie. Do niej przyłożona jest siła F o stałej wartości. W chwili początkowej prędkość deski była równa V_1. Znaleźć przyspieszenie deski, pomijając siły oporu.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o energii kinetycznej:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L\,.$$



Rys. 24

Praca sił wzajemnego oddziaływania deski i dwóch walców jest równa zeru, gdyż siły te są równe co do wartości i przeciwnie skierowane i przyłożone są do punktów, których przemieszczenia są sobie równe. Energia kinetyczna każdego walca w dowolnej chwili czasu, zgodnie z wzorem wyprowadzonym w poprzednim zadaniu, wynosi:

$$E_{kw} = \frac{3\,m\,V_C^2}{4}.$$

Energia kinetyczna deski jest równa:

$$E_{kd} = \frac{m_1\,V^2}{2},$$

gdzie: $V = 2V_C$.
Energia kinetyczna całego układu:

$$E_{k_2} = 2\,E_{kw} + E_{kd} = 2\,\frac{3\,m\,V_C^2}{4} + \frac{m_1\,V^2}{2},$$

lub po przekształceniach:

$$E_{k_2} = \frac{V^2\,(3\,m + 4\,m_1)}{8}.$$

Analogicznie wyznaczamy energię w chwili początkowej. Jest ona równa:

$$E_{k_1} = \frac{V_1^2\,(3\,m + 4\,m_1)}{8}.$$

Praca sił ciężkości $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}$ oraz sił reakcji $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$ jest równa zeru, ponieważ siły są prostopadłe do kierunku ruchu. Wówczas praca wykonywana jest tylko przez siłę F i jest równa:

$$L = F\,s\,.$$

Przyrównując zgodnie z pierwszym równaniem energię i pracę dostaniemy:

$$\frac{V^2\,(3\,m + 4\,m_1)}{8} - \frac{V_1^2\,(3\,m + 4\,m_1)}{8} = F\,s\,,$$

$$(3\,m + 4\,m_1)(V^2 - V_1^2) = 8\,F\,s\,.$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie, policzymy pochodną po czasie (V_1 = const) z powyższego równania, która jest równa:

$$2V \cdot \frac{dV}{dt}(3\,m + 4\,m_1) = 8\,P\,\frac{ds}{dt},$$

gdzie: $\frac{dV}{dt} = a$ jest przyspieszeniem deski, a $\frac{ds}{dt} = V$ prędkością deski. Stąd otrzymamy równanie:

$$2\,V\,a\,(3\,m + 4\,m_1) = 8\,P\,V\,,$$

lub po przekształceniu:

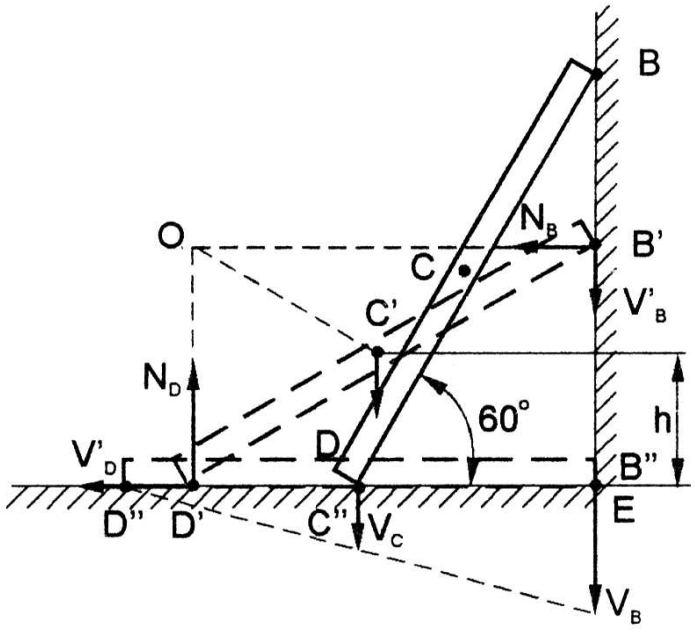
$$a = \frac{4\,P}{3\,m + 4\,m_1}.$$

Zadanie 25

Jednorodny pręt BD o długości s = 0,8 m opiera się o gładką ścianę i podłoże (rys. 25). W chwili początkowej pręt tworzy kąt BDE = 60^0 z poziomem. Znaleźć prędkość końca pręta B gdy uderzy on o podłoże.

Rozwiązanie

Chwilowy środek obrotu O pręta znajduje się na przecięciu dwóch linii prostopadłych do kierunku prędkości punktów B' i D'. W chwili uderzenia



Rys.25

pręta o podłoże chwilowy środek obrotu znajduje się w punkcie D''. Aby określić prędkość punktu B pręta w tym momencie, wykorzystamy twierdzenie o energii kinetycznej:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = L,$$

gdzie: $E_{k_1} = 0$, ponieważ w chwili początkowej pręt jest nieruchomy. Energia kinetyczna pręta w chwili jego uderzenia o podłoże jest równa:

$$E_k = \frac{m V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

Znajdźmy zależność między prędkością kątową ω i prędkością V_B oraz między prędkością środka masy V_C i V_B. Z rysunku widać (twierdzenie Talesa), że:

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{D''C''}{D''B''} = \frac{1}{2},$$

skąd:

$$V_C = \frac{1}{2} V_B, \qquad \omega = \frac{V_B}{D''B''} = \frac{V_B}{s}.$$

Moment bezwładności pręta względem środka masy C jest równy:

$$J_C = \frac{m\,s^2}{12}.$$

Praca sił $\mathbf{N_B}$ i $\mathbf{N_D}$ jest równa zeru, gdyż każda z tych sił jest prostopadła do toru, po którym porusza się ich punkt przyłożenia.
Pracę wykonuje siła ciężkości i praca ta jest równa:

$$L = G\,h = m\,g\,\frac{s}{2}\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,m\,g\,s.$$

Podstawiając energię kinetyczną i pracę do pierwszego równania otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{V_B}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m\,s^2}{12}\left(\frac{V_B}{s}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,m\,g\,s,$$

skąd po przekształceniach otrzymamy:

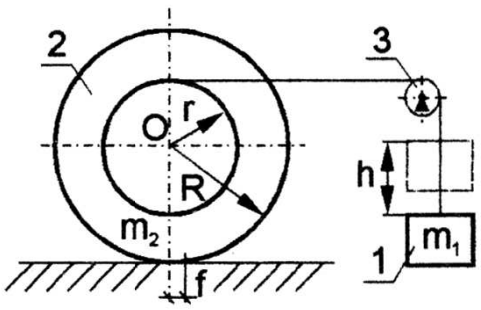
$$\frac{m\,V_B^2}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,m\,g\,s.$$

Prędkość końca B pręta będzie więc równa:

$$V_B = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\,g\,s} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 9{,}81\cdot 0{,}8} = 4{,}51\frac{m}{s}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Ciało o masie m_1 zawieszono na nieważkiej lince przewieszonej przez nieważki krążek 3. Drugi koniec linki nawinięto na koło 2 o promieniu r (patrz rysunek). Masa koła 2 wynosi m_2, duży promień R, a promień bezwładności i_O. Koło toczy się bez poślizgu po poziomym torze. Współczynnik tarcia tocznego równy jest f. Wyznaczyć prędkość kątową ω koła, prędkość liniową środka O koła oraz ciała o masie m_1, gdy masa m_1 przemieści się o h. W chwili początkowej układ pozostawał w stanie spoczynku.

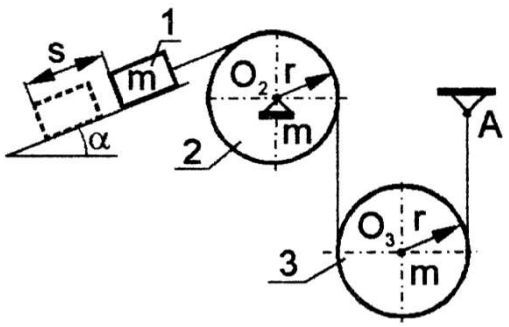


Odpowiedź:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,g\,(m_1\,h - m_2\,f)}{m_1\,(r+R)^2 + m_2\,(i_O^2 + R^2)}},$$

$$V_O = \omega\,(r+R),\quad V_1 = \omega\,(2\,r+R)$$

Zadanie 2. Układ złożony z trzech ciał porusza się jak na rysunku poniżej. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie ciała 1 o masie m, leżącego na równi pochyłej o kącie pochylenia α, gdy przemieści się ono . Pomiędzy równią i ciałem 1 występuje tarcie, którego współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ. Masy płaskich krążków równe są m, a ich promienie r. Ruch układu zaczyna się bez prędkości początkowej.

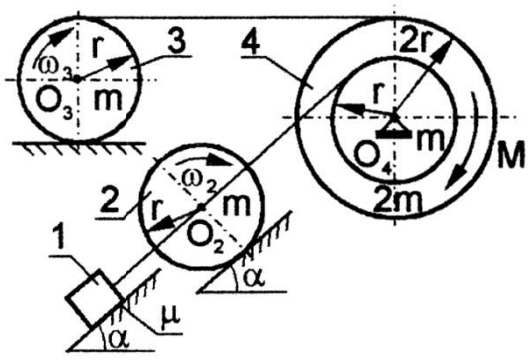


Odpowiedź:

$$V = 2\sqrt{\frac{2\,g\,s\,[2\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - 1]}{15}},$$

$$a = \frac{8}{15}\,g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \frac{1}{2})$$

Zadanie. 3. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie kątowe koła 4 w chwili gdy obróci się ono o kąt równy φ_4, jeżeli układ składający się z 4 ciał porusza się jak na rysunku poniżej. Masy ciał 1, 2, 3 równe są m. Promienie kół 2 i 3 równe są r, a w kole 4 promień mniejszego koła r i jego masa m, promień większego koła 2r i odpowiednio jego masa 2m. Moment bezładności koła 4 jest sumą momentu bezwładności mniejszego i większego koła. Do koła 4 przyłożony jest stały moment sił M obracający koło. Uwzględnić siły tarcia ślizgowego między równią a ciałem 1.



Odpowiedź:

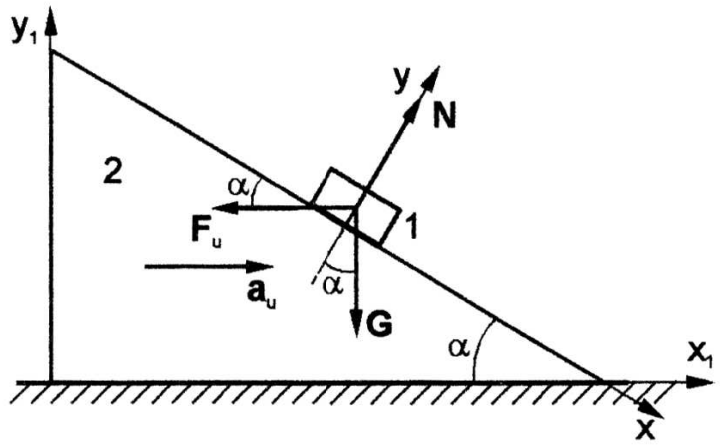
$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4\,\varphi_4\,[M - m\,g\,r\,(2\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]}{17\,m\,r^2}},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{2\,[M - m\,g\,r\,(2\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]}{17\,m\,r^2}$$

4. Ruch złożony (względny). Siły dynamiczne. Równania dynamiczne ruchu względnego

Zadanie 26

Ciało o masie 2 kg zostało położone na gładkiej równi pochyłej, której jedna płaszczyzna swobodnie styka się z płaszczyzną poziomą (rys. 26). Jakie poziome przyspieszenie powinna mieć równia, aby ciało nie poruszało się względem niej. Jaki jest nacisk ciała na równię, jeżeli przyjmiemy $\alpha=30^0$.



Rys. 26

Rozwiązanie

Ruchem bezwzględnym jest ruch ciała 1 względem stałego układu współrzędnych x_1y_1, ruchem unoszenia ruch równi 2 względem stałego układu współrzędnych x_1y_1, a ruchem względnym ruch ciała 1 względem równi 2 (układu współrzędnych xy na stałe związanego z równią).

Przyłóżmy do ciała działające siły: siłę ciężkości **G**, siłę reakcji równi **N** oraz siłę bezwładności unoszenia $\mathbf{F_u}$, której zwrot jest przeciwny do zwrotu przyspieszenia unoszenia $\mathbf{a_u}$. Siła bezwładności unoszenia jest równa:

$$F_u = m\, a_u ,$$

Z zasady d'Alemberta mamy:

$$\mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F_u} = 0 . \qquad (1)$$

Rzutując składowe równania (1) na osie x i y dostaniemy:

$$G \sin\alpha - F_u \cos\alpha = 0 ,$$

$$N - G\cos\alpha - F_u \sin\alpha = 0 . \qquad (2)$$

Z pierwszego równania (2) otrzymamy:

$$m\,g\,\sin\alpha - m\,a_u\cos\alpha = 0 ,$$

skąd:

$$a_u = g\,\mathrm{tg}\alpha = g\,\mathrm{tg}30^\circ = 5{,}66\ \mathrm{m/s^2}.$$

Siła bezwładności unoszenia:

$$F_u = m\,a_u = m\,g\,\mathrm{tg}\alpha = m\,g\,\mathrm{tg}30^\circ = 11{,}32\ \mathrm{N}.$$

Z drugiego równania (2) znajdziemy:

$$N = G\cos\alpha + F_u \sin\alpha = m\,g\cos\alpha + m\,g\,\mathrm{tg}\alpha\sin\alpha = \frac{m\,g}{\cos\alpha},$$

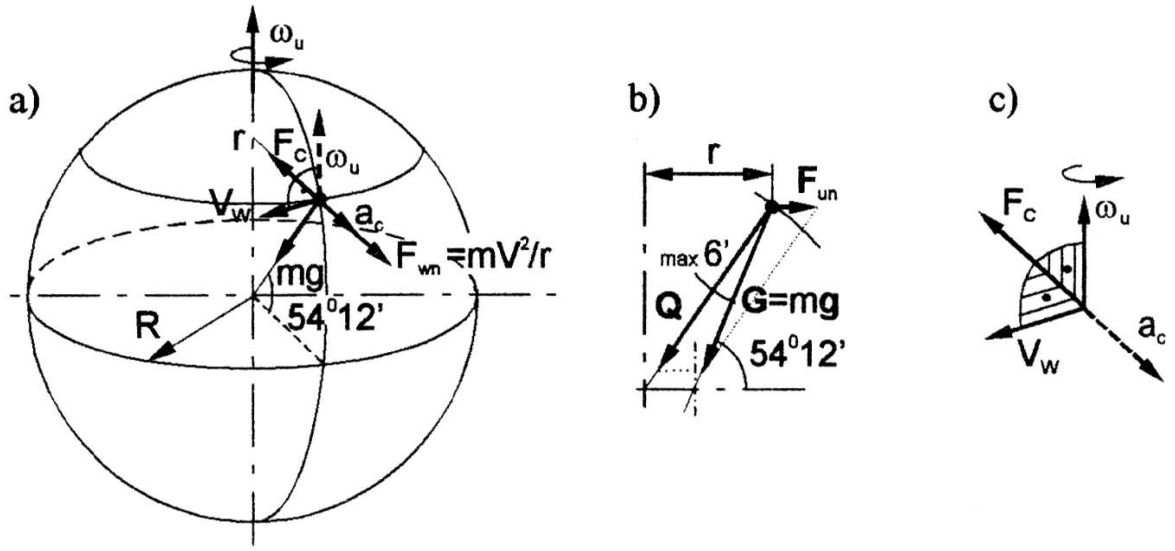
$$N = 22{,}65\ \mathrm{N}.$$

Zadanie. 27

W Koszalinie ze wschodu na zachód jedzie motocyklista o masie m = 75 kg z prędkością V = 20 m/s. Koszalin położony jest na 16° 11′ długości wschodniej i 54°12′ szerokości północnej. Średni promień kuli ziemskiej wynosi R = 6367 km. Jak zmienił się ciężar motocyklisty w wyniku ruchu? Czy zmieni się jego ciężar przy jeździe z północy na południe?

Rozwiązanie

W czasie ruchu motocyklisty (rys. 27a, b) działa na niego siła ciężkości (ciężar) $\mathbf{G} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{un} = m\,\mathbf{g}$ ($\mathbf{Q}$ – siła wynikająca z prawa powszechnego ciążenia, grawitacji; $\mathbf{F}_{un}$–odśrodkowa siła bezwładności unoszenia, wynikająca z obrotu z prędkością kątową ω kuli ziemskiej), odśrodkowa siła bezwładności ruchu względnego $\mathbf{F}_{wn}$ (wynika z ruchu motocyklisty ze stałą prędkością V względem kuli ziemskiej po torze kołowym o promieniu r), siła Coriolisa $\mathbf{F}_C$ i siły oporu, które bezpośrednio nie wpływają na zmianę ciężaru motocyklisty. Siła bezwładności unoszenia styczna do toru jazdy motocyklisty jest równa zeru, gdyż prędkość obrotowa kuli ziemskiej jest stała.



Rys. 27

Również styczna siła bezwładności ruchu względnego motocyklisty równa jest zeru, ponieważ motocyklista porusza się ze stałą prędkością V. Maksymalny kąt między siłami **Q** i **G** wynosi 6', dlatego w obliczeniach inżynierskich nie uwzględnia się siły bezwładności unoszenia $\mathbf{F}_{un}$, ponieważ jej wpływ na ciężar ciała jest bardzo mały. W obliczeniach technicznych przyjmuje się, że ciężar ciała równy jest sile grawitacji (**G** = **Q**). Na biegunach kuli ziemskiej ciężar ciała równy jest sile grawitacji, a na równiku mniejszy jest o 0,34% od siły ciężkości na biegunach (na równiku zwrot siły $\mathbf{F}_{un}$ jest przeciwnie skierowany do siły grawitacji **Q**).

Wyznaczmy wartości poszczególnych sił. Siła bezwładności ruchu względnego normalna, zgodnie z rysunkiem 27a, wynosi:

$$F_{wn} = m\frac{V^2}{r}, \qquad r = R\cos(54°12') = 3724{,}4\ \text{km}, \tag{1}$$

skąd: $F_{wn} = 0{,}008\ \text{N}$.

Siła bezwładności ruchu unoszenia normalna, zgodnie z rysunkiem 27b wynosi:

$$F_{un} = m\,\omega_u^2\,r,$$

gdzie: $\omega_u = \omega_z$ jest prędkością kątową Ziemi (unoszenia) i wynosi:

$$\omega_u = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} = 0{,}00007\ \text{s}^{-1}.$$

Po podstawieniu danych otrzymamy:

$$F_{un} = 75 \cdot 0{,}00007^2 \cdot 6367000 \cdot \cos(54^0 12') = 1{,}368\,\text{N}.$$

Siłę Coriolisa wyznaczymy zgodnie z teorią ruchu złożonego z zależności wektorowej (patrz rysunek 27a i 27c):

$$\mathbf{F}_C = -2\,m\,(\boldsymbol{\omega}_u \times \mathbf{V}_w), \tag{2}$$

gdzie minus oznacza, że siła ta ma zwrot przeciwny do przyspieszenia Coriolisa a_C.
Wartość siły Coriolisa jest równa:

$$F_C = -2\,m\,\omega_u\,V_w \sin(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w), \qquad \angle(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w) = 90^\circ, \qquad \sin(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w) = 1,$$

$$F_C = -2\,m\,\omega_u\,V_w. \tag{3}$$

Podstawiając dane dostaniemy:

$$F_C = -2 \cdot 75 \cdot 0{,}00007 \cdot 20 = 0{,}21\,\text{N}.$$

Jak można zauważyć oddziaływanie sił bezwładności unoszenia i ruchu względnego oraz Coriolisa jest bardzo małe.
Aby jednak wyznaczyć wartość zmiany ciężaru motocyklisty, zrzutujemy siłę Coriolisa i siłę bezwładności ruchu względnego na kierunek działania siły ciężkości **G**, otrzymamy wówczas:

$$G' = m\,g + F_c \cos(54^\circ 12') - F_{wn} \cos(54^\circ 12'),$$

skąd:

$$G' = 75 \cdot 9{,}81 + 0{,}21 \cdot \cos(54^\circ 12') - 0{,}008 \cdot \cos(54^\circ 12') = 735{,}868\,\text{N}$$

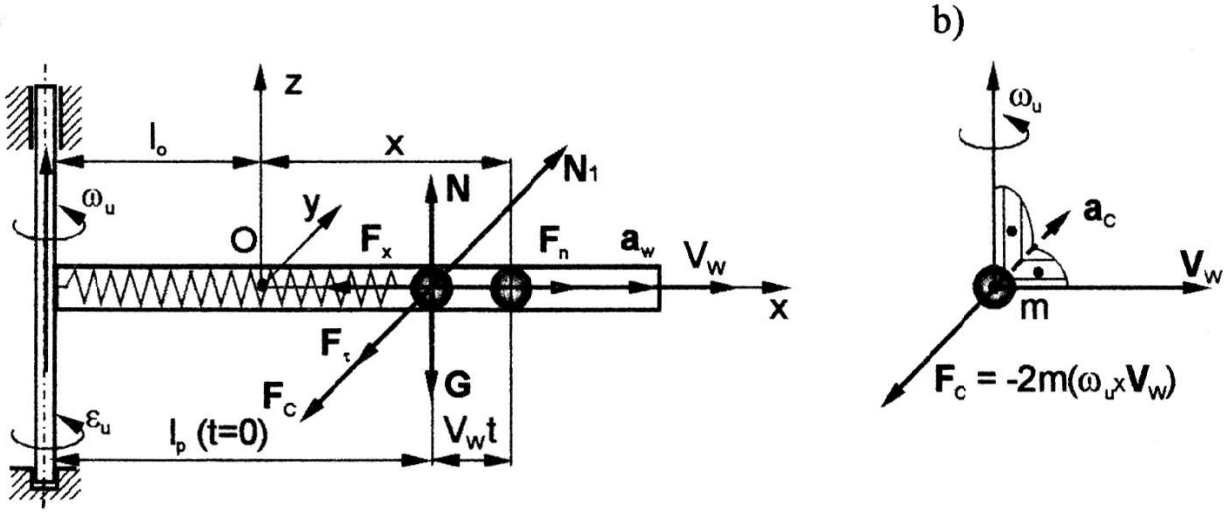
Ciężar statyczny motocyklisty równy jest G = m g = 735,75 N, stąd różnica pomiędzy ciężarem w czasie ruchu a statycznym ciężarem motocyklisty wynosi $\Delta G = G' - G = 735{,}868 - 735{,}75 = 0{,}118\,\text{N}$. Różnica ta jest bardzo mała i w większości przypadków w obliczeniach jej nie uwzględnia się.
W drugim przypadku ruchu, ciężar motocyklisty również się zmieni, jednak na zmianę ciężaru nie będzie miała wpływu siła Coriolisa, gdyż będzie ona styczna do równoleżnika, t.j, prostopadła do kierunku siły ciężkości **G**. Sprawdzenie powyższego zostawia się Czytelnikowi.

Zadanie 28

Wewnątrz prostoliniowej gładkiej rurki obracającej się w poziomej płaszczyźnie wokół pionowej osi, znajduje się kulka o masie m = 0,2 kg (rys. 28). Do kulki przymocowana jest sprężyna, której początek pokrywa się z początkiem rurki. Sztywność sprężyny k = 4000 N/cm, a długość nie napiętej sprężyny l_0 = 3 cm. Znaleźć prędkość kątową ω_u rurki w funkcji czasu, jeżeli kulka porusza się wewnątrz rurki ze stałą względną prędkością V_w = 1 cm/s. W chwili początkowej kulka znajduje się w odległości l_p = 5 cm od początku rurki. Znaleźć również siłę nacisku kulki na boczną ściankę rurki w chwili t = 1s.

Rozwiązanie

Układ współrzędnych xyz związany na stałe z rurką przyjmiemy tak, jak na rysunku 28. Początek układu współrzędnych O nie zmienia swego położenia w stosunku do rurki i jest punktem, w którym sprężyna jest nie napięta. Ruchem względnym kulki (ruch kulki względem rurki) jest ruch wzdłuż osi x.
Na kulkę działają następujące siły: **G** – ciężar kulki; $\mathbf{F_x}$ – siła sprężystości sprężyny; **N** – składowa pionowa reakcji rurki; $\mathbf{N_1}$ – składowa pozioma reakcji rurki, która wzięta z przeciwnym zwrotem daje siłę nacisku kulki na boczną ściankę rurki; $\mathbf{F_n} = m\,\mathbf{a_n}$ – składowa normalna siły bezwładności unoszenia (siła odśrodkowa); $\mathbf{F_\tau} = m\,\mathbf{a_\tau}$ – składowa styczna siły bezwładności unoszenia; $\mathbf{F_C} = -2m\,(\boldsymbol{\omega_u} \times \mathbf{V_w})$ – siła bezwładności Coriolisa, (rys. 28b), $a_w = \ddot{x}$ – przyspieszenie względne kulki, $\boldsymbol{\omega_u}$ – wektor przyspieszenia kątowego unoszenia).



Rys. 28

Wektorowe równanie dynamiczne ruchu względnego kulki jest:

$$m\,\mathbf{a_w} = \mathbf{G}+\mathbf{F_X}+\mathbf{N}+\mathbf{N_1}+\mathbf{F_n}+\mathbf{F_s}+\mathbf{F_c}, \qquad (1)$$

Zrzutujemy wektory przyspieszenia i sił z równania (1) na oś x i y. Wówczas otrzymamy:

$$m\,\ddot{x} = -F_x + F_n, \qquad m\,\ddot{y} = N_1 - F_\tau - F_c. \tag{2}$$

W kierunku osi y przyspieszenie względne $\ddot{y} = 0$ (kulka w kierunku poprzecznym do osi rurki nie wykonuje ruchu).
Siły w równaniach (2) są określone w następujący sposób:

$$F_x = k\,x, \qquad F_n = m\,a_n = m\,\omega_u^2\,(x + l_0),$$
$$F_\tau = m\,\varepsilon_u\,(x + l_0): \tag{3}$$

gdzie: ε_u– przyspieszenie kątowe unoszenia kulki w ruchu obrotowym.
Siła Coriolisa jest siłą bezwładności i ma zwrot przeciwny do wektora przyspieszenia Coriolisa $\mathbf{a}_c = 2\,\boldsymbol{\omega}_u \times \mathbf{V}_w$ (rys. 28b). Wartość siły Coriolisa jest równa:

$$F_c = 2\,m\,\omega_u V_w \sin(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w), \quad \angle(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w) = 90^\circ, \quad \sin(\boldsymbol{\omega}_u, \mathbf{V}_w) = 1,$$

$$F_c = 2\,m\,\omega_u V_w. \tag{4}$$

Podstawiając (3) i (4) w (2) dostaniemy:

$$m\,\ddot{x} = -k\,x + m\,\omega_u^2\,(x + l_0), \qquad 0 = N_1 - m\,\varepsilon_u\,(x + l_0) - 2\,m\,\omega_u\,V_w. \tag{5}$$

Współrzędna położenia kulki w dowolnej chwili czasu jest równa:

$$x = l_p - l_0 + V_w\,t. \tag{6}$$

Rozpatrując pierwsze równanie (5) z uwzględnieniem $V_w = \text{const}$ i $a_w = \ddot{x} = 0$, otrzymamy:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k\,(l_p - l_0 + V_w\,t)}{m\,(l_p + V_w\,t)}}, \tag{7}$$

skąd:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{400000\,(0{,}05 - 0{,}03 + 0{,}01\,t)}{0{,}2\,(0{,}05 + 0{,}01\,t)}} = 10^3 \sqrt{\frac{2\,(2+t)}{5+t}}\,s^{-1}.$$

Z drugiego równania (5) mamy:

$$N_1 = m\,\varepsilon_u\,(x + l_0) + m\,\omega_u V_w. \tag{8}$$

Przyspieszenie kątowe unoszenia ε_u obrotu rurki wyznaczymy z (7) jako:

$$\varepsilon_u = \frac{d\omega_u}{dt} = \frac{V_w\,l_0\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\,(l_p + V_w\,t)\,\sqrt{(l_p + V_w\,t)(l_p - l_0 + V_w\,t)}}. \tag{9}$$

Podstawiając znaczenie ε_u z (9), ω_u z (7) i x z (6) do (8), po przekształceniach, otrzymamy poszukiwany nacisk kulki na boczną ściankę rurki:

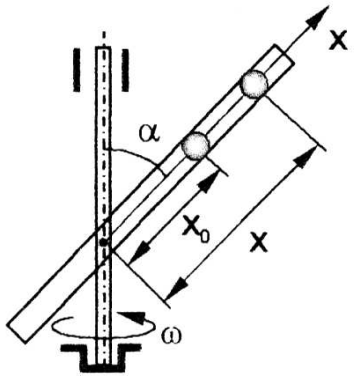
$$N_1 = \frac{V_w\sqrt{k\,m}\,[4\,(l_p - l_0 + V_w\,t) + l_0]}{2\sqrt{(l_p + V_w\,t)\,(l_p - l_0 + V_w\,t)}}.$$

W chwili, t = 1 s mamy:

$$N_1 = \frac{0{,}01\sqrt{400000 \cdot 0{,}2}\;\;[4\,(0{,}05 - 0{,}03 + 0{,}01 \cdot 1) + 0{,}03]}{2\sqrt{(0{,}03 + 0{,}01 \cdot 1)\;\;(0{,}05 - 0{,}03 + 0{,}01 \cdot 1)}} = 5\,N.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

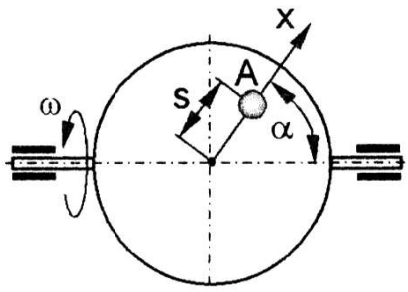
Zadanie 1. W rurce nachylonej pod kątem $\alpha = 45^0$ do osi obrotu porusza się wzdłuż osi x kulka o masie m. Rurka porusza się ze stałą prędkością kątową ω. W chwili początkowej kulka nie poruszała się względem rurki i znajdowała się w odległości x_0 od osi obrotu, jak na rysunku. Wyznaczyć równanie ruchu kulki wzdłuż osi x.



Odpowiedź:

$$x = \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\omega t/\sqrt{2}} + e^{-\omega t/\sqrt{2}}\right)$$

Zadanie 2. Punkt A, którego masa m = 500 g porusza się od środka koła wzdłuż promienia nachylonego pod kątem $\alpha = 60^0$ do osi obrotu, jak na poniższym rysunku. Odległość punktu zmienia się według zależności $s = 4\,t^2$ cm, a prędkość kątowa $\omega = 2\,t\,s^{-1}$. Znaleźć w niutonach wartość sił bezwładności unoszenia, względnej, Coriolisa i bezwzględnej w chwili t = 1s.



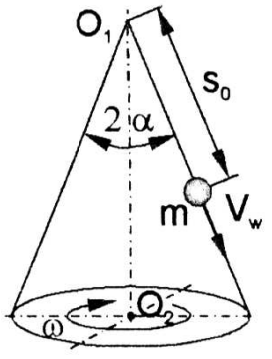
Odpowiedź:

$F_{u\tau} = 0{,}04\sqrt{3}\,m\,t^2$, $F_{un} = 0{,}08\sqrt{3}\,m\,t^4$,

$F_u = \sqrt{F_{u\tau}^2 + F_{un}^2}$, $F_{w\tau} = 0{,}08\,m = F_w$, $F_{w\tau} = 0$,

$F_C = 0{,}16\sqrt{3}\,mt^2$, $F = 0{,}1775\,N$

Zadanie 3. Punkt A porusza się po tworzącej kołowego stożka o osi O_1O_2 od wierzchołka do podstawy ze stałą prędkością względną V_w. Kąt przy wierzchołku wynosi 2α. W chwili początkowej punkt znajdował się w odległości s_0 od wierzchołka. Stożek obraca się ze stałą prędkością kątową ω. Znaleźć siłę bezwładności unoszenia, względną, Coriolisa i bezwzględną, jeżeli punkt ma masę m.



Odpowiedź: $F_{un} = m\,\omega^2\,(s_0 + V_w\,t)\sin\alpha$, $F_w = 0$,

$F_C = 2\,m\,\omega\,V_w\sin\alpha$, $F = \sqrt{F_{un}^2 + F_C^2}$

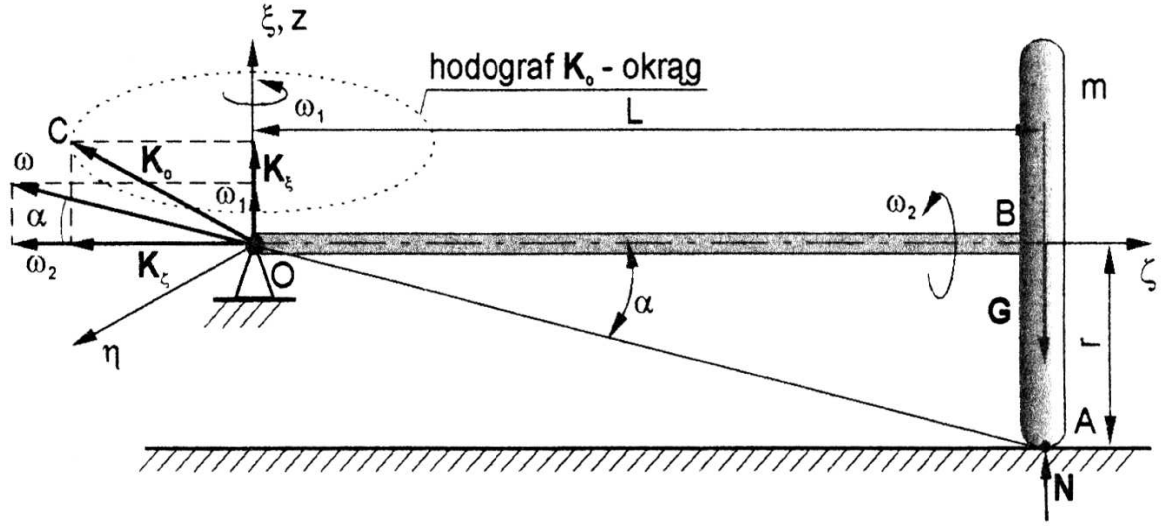
5. Ruch kulisty. Równania dynamiczne ruchu kulistego

Zadanie. 29

Tarcza kołowa o promieniu r i masie m osadzona jest obrotowo na wale OB o długości L (rys. 29). Koniec wału O umocowany jest przegubowo i obraca się wokół pionowej osi ze stałą prędkością kątową (precesji) ω_1. Pomijając masę wału i zakładając, że w czasie ruchu tarcza toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej, obliczyć wartość siły oddziaływania (reakcji normalnej) podłoża na tarczę.

Rozwiązanie

Zakładając, że tarcza toczy się bez poślizgu, a punkt styczności tarczy z podłożem A jest w danej chwili nieruchomy (jest chwilowym środkiem obrotu), to chwilowa oś obrotu tarczy będzie prostą łączącą stały punkt O z chwilowym środkiem obrotu A.



Rys. 29

Tarcza razem z wałem obraca się dookoła pionowej osi ξ ze stałą prędkością kątową precesji ω_1 i obraca się dookoła osi wału ζ z prędkością kątową obrotu własnego ω_2. Wektor całkowitej prędkości kątowej obrotu tarczy jest sumą wektorów prędkości kątowych:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 ,$$

i leży na chwilowej osi obrotu AO.
Prędkość kątowa obrotu własnego:

$$\omega_2 = \omega_1 \operatorname{ctg}\alpha = \omega_1 \frac{L}{r}. \tag{1}$$

Dla przyjętego ruchomego układu współrzędnych $O\xi\eta\zeta$ składowe wektora krętu tarczy są:

$$K_\xi = J_\xi \omega_\xi = J_\xi \omega_1, \qquad K_\eta = J_\eta \omega_\eta = 0, \qquad K_\varsigma = J_\varsigma \omega_\varsigma = -J_\varsigma \omega_2,$$

gdzie: J_ξ, J_η, J_ζ momenty bezwładności odpowiednio względem osi ξ, η, ζ. Osie te są także głównymi osiami bezwładności, gdyż względem nich momenty dewiacji są równe zeru.
Kręt całkowity (względem stałego punktu O) jest sumą wektorową krętów względem poszczególnych osi:

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{K}_\xi + \mathbf{K}_\eta + \mathbf{K}_\varsigma = J_\xi \boldsymbol{\omega}_\xi + J_\eta \boldsymbol{\omega}_\eta + J_\varsigma \boldsymbol{\omega}_\varsigma.$$

Z zasady krętu wiadomo, że pochodna wektorowa krętu $\mathbf{K}_o$ po czasie t, wyznaczonego względem dowolnego punktu, równa się sumie wektorowej momentów sił zewnętrznych $\mathbf{M}_o$ względem tegoż punktu, stąd:

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \mathbf{M}_o.$$

Z drugiej strony (definicja pochodnej funkcji wektorowej), pochodna wektorowa krętu $\mathbf{K}_o$ po czasie t jest równa prędkości z jaką porusza się punkt C (rys. 29) końca wektora $\mathbf{K}_o$ po jego hodografie (w tym przypadku okrąg). Napiszemy wówczas:

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{K}_o = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(J_\xi \boldsymbol{\omega}_1 + J_\varsigma \boldsymbol{\omega}_2\right) = \mathbf{M}_o,$$

lub po wykonaniu przekształceń, uwzględniając, że $\boldsymbol{\omega}_1 \times J_\xi \boldsymbol{\omega}_1 = 0$, ponieważ $\sin(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_1) = 0$, dostaniemy:

$$J_\varsigma \left(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2\right) = \mathbf{M}_o.$$

Wartość liczbowa momentu $\mathbf{M}_o$ wynosi:

$$M_o = J_\varsigma \, \omega_1 \, \omega_2 , \tag{2}$$

ponieważ: $\angle(\omega_1, \omega_2 = 90^o)$ i $\sin(\omega_1, \omega_2) = 1$.
Na tarczę działają dwie siły: siła ciężkości **G** = m **g** i reakcja podłoża **N**. Moment tych sił względem punktu O jest równy:

$$M_o = (N - G)\, L . \tag{3}$$

Po podstawieniu w powyższe równanie wartości M_o, otrzymamy:

$$J_\varsigma \, \omega_1 \, \omega_2 = (N - G) L ,$$

skąd:

$$N = \frac{J_\varsigma \, \omega_1 \, \omega_2}{L} + G .$$

Podstawiając w powyższą zależność wartość momentu bezwładności $J_\varsigma = \frac{m\, r^2}{2}$, zależność między prędkościami kątowymi $\omega_2 = \omega_1 \frac{L}{r}$ oraz ciężar $G = m\, g$, po przekształceniach otrzymamy:

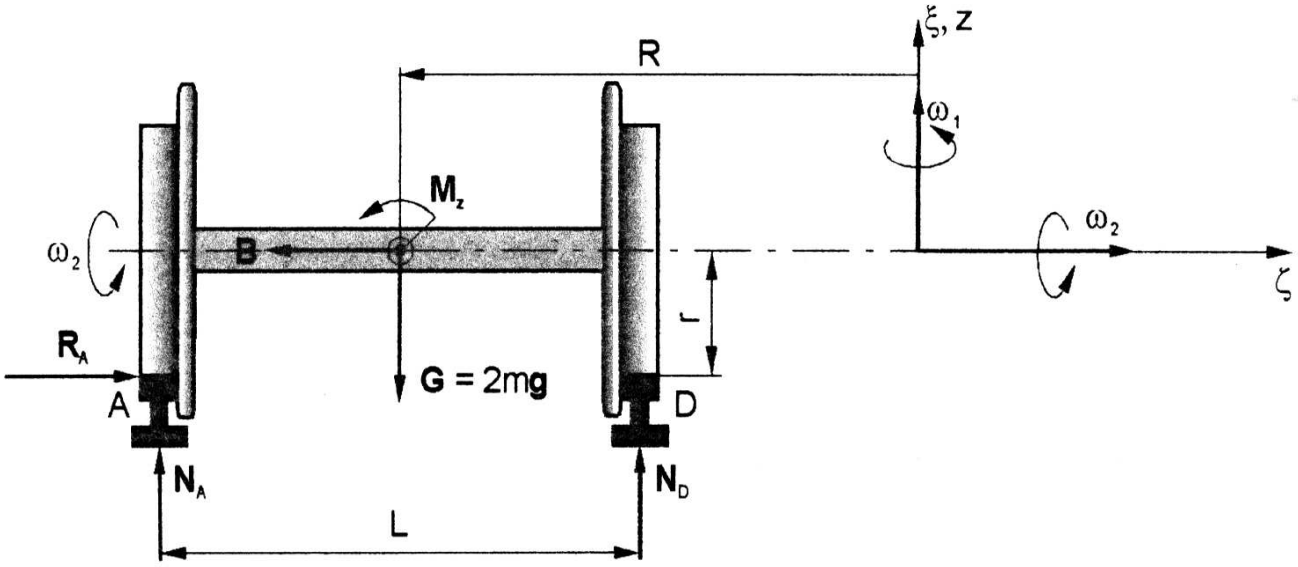
$$N = m\left(\frac{r\, \omega_1^2}{2} + g\right).$$

Zadanie. 30

Dwa koła o masach m i promieniach r osadzone są na wspólnej osi i toczą się ze stałą prędkością V po torze kołowym o promieniu R. Znaleźć nacisk jaki wywierają koła na szyny, jeżeli rozstaw kół jest L. Koła są jednorodnymi krążkami, ciężar osi pominąć.

Rozwiązanie

Na koła działają następujące siły: siła ciężkości **G** = 2 m **g**, siły normalne reakcji podłoża $\mathbf{N_A}$ i $\mathbf{N_D}$, siła odśrodkowa bezwładności **B** i reakcja pozioma zewnętrznej szyny $\mathbf{R_A}$.



Rys. 30

Siła odśrodkowa **B** jest określona w następujący sposób:

$$B = 2\,m\,\omega_1^2\,R\,,$$

gdzie: $\omega_1 = V/R$ jest prędkością kątową osi w jej ruchu obrotowym wokół osi ξ. Pomijając nieznaczną różnicę prędkości kątowych obu kół, wynikającą z tego, że toczą się one po okręgach o rożnych promieniach, określimy prędkość kątową obrotu własnego kół z wzoru:

$$\omega_2 = \frac{V}{r}.$$

Moment $\mathbf{M}_o$ wyznaczymy z jednej strony z zasady krętu, a z drugiej z zasady d'Alemberta.
Z zasady krętu mamy:

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \mathbf{M}_o\,.$$

Prędkości kątowe ω_1 i ω_2 są stałe co do wartości. W wektorze prędkości kątowej ω_2, zmienia się tylko kierunek z prędkością ω_1, stąd tak jak w poprzednim zadaniu mamy:

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{K}_o = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left(J_\xi\,\boldsymbol{\omega}_1 + J_\varsigma\,\boldsymbol{\omega}_2\right) = \mathbf{M}_o\,,$$

a po wykonaniu przekształceń:

$$J_{\varsigma}(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) = \mathbf{M}_0 .$$

Zmieniając kolejność czynników w iloczynie wektorowym dostaniemy:

$$\mathbf{M}_0 + J_{\varsigma}(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1) = 0 ,$$

oznaczając $\mathbf{M}_z = J_{\varsigma}(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)$, zapiszemy:

$$\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_z = 0,$$

gdzie: M_z jest momentem sił bezwładności zwanym momentem giroskopowym. Z powyższego wynika, że moment giroskopowy równoważy się z momentem sił zewnętrznych. Wektor $\mathbf{M}_z$, zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej, jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez ω_1 i ω_2 i skierowany grotem do nas.
Wartość tego momentu :

$$M_z = J_{\varsigma}\, \omega_1\, \omega_2 ,$$

ponieważ: $\angle(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1 = 90^{\circ})$ i $\sin(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1) = 1$.
Stosując zasadę d'Alemberta napiszemy równanie momentów względem punktu A z uwzględnieniem momentu giroskopowego:

$$M_z + N_D\, L + B\, r + 2\, m\, g \frac{L}{2} = 0 ,$$

skąd:

$$N_D = m\, g - \frac{M_z + B\, r}{L} \quad \text{lub} \quad N_D = m\, g - \frac{J_{\varsigma}\, \omega_1\, \omega_2 + 2\, m\, \omega_1^2\, R\, r}{L}. \qquad (1)$$

Wartość reakcji N_A wyliczamy z sumy rzutów na kierunek pionowy:

$$N_A + N_D - 2\, m\, g = 0 ,$$

skąd po przekształceniach i podstawieniu (1) otrzymamy:

$$N_A = 2\,m\,g - N_D = m\,g + \frac{J_\varsigma\,\omega_1\,\omega_2 + 2\,m\,\omega_1^2\,R\,r}{L}. \qquad (2)$$

Podstawiając w (1) i (2) wartość momentu bezwładności dwu kół $J_\varsigma = 2\,\frac{m\,r^2}{2}$ i zależność na prędkość kątową $\omega_1 = \frac{V}{R}$, po przekształceniach otrzymamy:

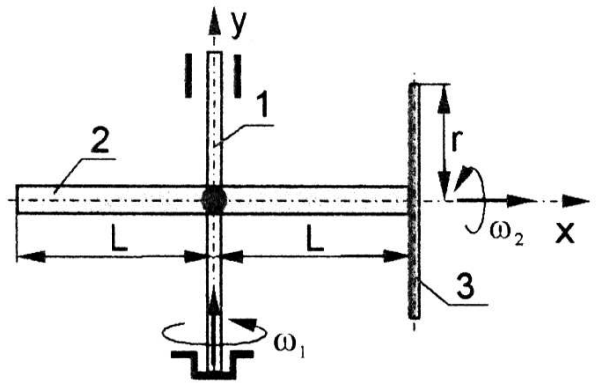
$$N_A = m\left(g + r\,\omega_1\,\frac{r\,\omega_2 + 2\,\omega_1\,R}{L}\right),$$

$$N_D = m\left(g - r\,\omega_1\,\frac{r\,\omega_2 + 2\,\omega_1\,R}{L}\right).$$

Z powyższych zależności wynika, że zewnętrzna szyna kolejowa na zakręcie jest bardziej obciążona niż wewnętrzna.

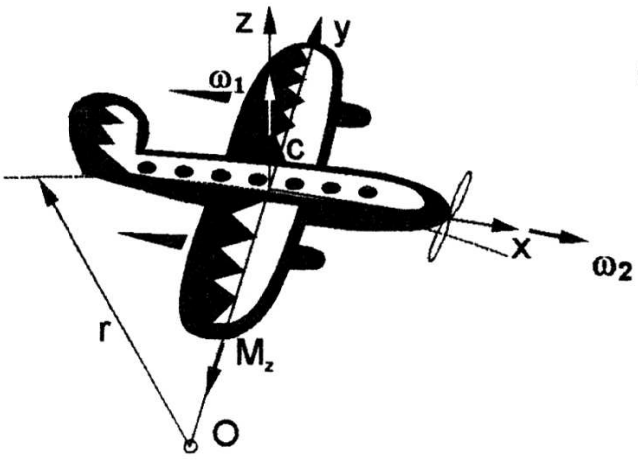
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Obliczyć prędkość kątową ω_1 pionowego pręta 1, do którego przymocowany jest przegubowo poziomy pręt 2 o masie m i długości 2 L (rysunek poniżej). Na końcu pręta 2 przymocowano jednorodną płaską tarczę kołową 3 o masie 2 m i promieniu r. Pręt 2 i tarcza 3 obracają się wspólnie z prędkością kątową ω_2.



Odpowiedź: $\omega_1 = \frac{2\,g\,l}{\omega_2\,r^2}$

Zadanie 2. Moment bezwładności śmigła i obracających się części silnika względem podłużnej osi samolotu wynosi J = 8 kgm^2. Prędkość obrotowa wynosi n = 1200 obr/min. Obliczyć działanie momentu giroskopowego tych części na samolot lecący z prędkością V = 50 m/s po łuku o promieniu r = 50 m.



Odpowiedź:

$$M_z = \frac{\pi\, n\, V\, J}{30\, r} = 1005 \text{ Nm}$$

LITERATURA

1. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.: Vector mechanics for engineers. Statics and dynamics. Fourth Edition, McGraw-Hill B.C. 1984
2. Leyko J.: Mechanika Ogólna. T. 2. Dynamika, Warszawa, PWN 1997
3. Leyko J., Szmelter J.: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej. T. 2. Kinematyka i dynamika, Warszawa, PWN 1977
4. Meriam J.L.: Statics and dynamics, New York, London, Sydney, Toronto 1971
5. Misiak J.: Mechanika ogólna. T. II, Dynamika, Warszawa, WNT 1993
6. Misiak J.: Zadania z mechaniki ogólnej. Cz. III, Dynamika, Warszawa, WNT 1999
7. Mieszczerski I.W.: Zbiór zadań z mechaniki. Warszawa, PWN 1971
8. Nizioł J.: Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki. Warszawa, PWN 1983
9. Osiński Z.: Mechanika ogólna. Warszawa, PWN 1997
10. Бражниченко Р. А., Кан В. Л. и др.: Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособе для вузов. Москва, Высша школа 1974
11. Колесников К. С. под ред.: Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособе для втузов. Москва, Наука 1983
12. Колъзон А. С.: Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособе для втузов. Москва, Высша школа 1987
13. Яаблонский А. А.: Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика. Москва, Высша школа 1977