

POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA  
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA I INŻYNIERII ŚRODOWISKA  
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI

Robert Adamczyk

Analiza numeryczna ustrojów zabezpieczających konstrukcje  
budowlano – inżynierskie przed skutkami nagłych obciążeń

PROMOTOR

Dr hab. inż. Zbigniew Sienkiewicz

Profesor Politechniki Koszalińskiej

Koszalin 2003

	Strona
Spis oznaczeń	3
Rozdział 1	8
Wstęp	
1.1. Cel, teza i zakres pracy	8
1.2. Przegląd literatury	11
Rozdział 2	19
Omówienie założeń oraz metod dotyczących analiz numerycznych	
2.1. Analiza nieliniowa	19
2.2. Zapis w uaktualnionym układzie Lagrange'a	21
2.3. Równania zachowania w uaktualnionym opisie Lagrange'a	22
2.4. Słaba forma w uaktualnionym układzie Lagrange'a, zasada mocy wirtualnych	25
2.5. Dyskretyzacja równań elementu skończonego w uaktualnionym opisie Lagrange'a	26
2.6. Związki konstytutywne	28
2.7. Numeryczna metoda rozwiązywania nieliniowych układów dyskretnych	29
2.8. Zbieżność rozwiązania – metody badania	30
Rozdział 3	32
Konstytutywne modele materiałowe stosowane w analizie numerycznej ustrojów obciążonych w sposób nagły	
3.1. Sprężysto – lepkoplastyczny model stali	32
3.2. Zmodyfikowany model betonu Druckera – Pragera (DP)	33
3.3. Model kruchego pęknięcia betonu (BC)	35
3.4. Sprężysto – plastyczny model betonu z uwzględnieniem degradacji (EPD)	37
3.5. Sprężysto – lepkoplastyczny model betonu z uwzględnieniem degradacji (EVPD)	40
Rozdział 4	42
Weryfikacja modeli materiałowych	
4.1. Próba z prętem Hopkinsona	42
4.2. Doświadczenie dynamicznego ściskania betonu	52
4.3. Numeryczna analiza belki żelbetowej obciążonej w sposób nagły	65

Rozdział 5	76
Analiza numeryczna kształtowania zewnętrznej powłoki zabezpieczającej wybraną konstrukcję inżynierską przed skutkami wybuchu podwodnego	
5.1. Wstęp do problemu	76
5.2. Opis rozważanej konstrukcji inżynierskiej	76
5.3. Zakres analizy	78
5.4. Sposób generowania obciążenia	81
5.5. Modele konstytutywne betonu i stali	83
5.6. Modele elementów skończonych	83
5.7. Analiza wyników symulacji i wnioski	85
5.7.1. Wariant I: Kształtowanie zewnętrznych powłok zabezpieczających przy ustalonej masie materiału wybuchowego	85
5.7.2. Wariant II: Analiza odpowiedzi konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia i masy materiału wybuchowego, przy zastosowaniu różnych związków konstytutywnych betonu	92
5.7.3. Wariant III: Analiza odpowiedzi dynamicznej konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia oraz wybranego związku konstytutywnego betonu przy zmieniającej się masie materiału wybuchowego	97
5.8. Wnioski końcowe dotyczące zabezpieczeń tunelu podwodnego	103
Rozdział 6	104
Wnioski i podsumowanie	
6.1. Wnioski i uwagi końcowe	104
6.2. Podsumowanie	106
Literatura	109

## Spis oznaczeń

$\nabla$	– operator wektorowy
$\Delta d$	– wektor przyrostu przemieszczeń
$\Delta t$	– krok (przyrost) czasowy
$\Gamma$	– granica obszaru w konfiguracji aktualnej
$\Gamma_0$	– granica obszaru w konfiguracji początkowej
$\Psi$	– swobodna energia Helmholtza
$\Omega$	– obszar ciała kontynuualnego w konfiguracji aktualnej
$\Omega_0$	– obszar ciała kontynuualnego w konfiguracji początkowej
$\alpha$	– parametr promienia przejścia powierzchni
$\beta$	– kąt tarcia wewnętrznego
$\delta P$	– całkowita moc wirtualna
$\delta P^{\text{ext}}$	– wirtualna moc zewnętrzna
$\delta P^{\text{int}}$	– wirtualna moc wewnętrzna
$\delta P^{\text{kin}}$	– wirtualna moc kinetyczna
$\delta v$	– wektor prędkości wirtualnej
$\varepsilon_I$	– odkształcenie w pręcie inicjującym
$\varepsilon_R$	– odkształcenie w pręcie inicjującym powstałe w skutek odbicia fali naprężenia od próbki
$\varepsilon_s$	– odkształcenie próbki
$\varepsilon_T$	– odkształcenie w pręcie przekazującym
$\varepsilon_{\text{eq}}^p$	– równoważne odkształcenie plastyczne
$\varepsilon_{\text{eq}}^{p\text{max}}$	– maksymalna wartość równoważnych odkształceń plastycznych
$\varepsilon_v^p$	– objętościowe odkształcenie plastyczne dla początkowej pozycji powierzchni płynięcia
$\varepsilon_R^d$	– odkształcenie odpowiadające dynamicznej wytrzymałości na ściskanie
$\varepsilon_R^{\text{st}}$	– odkształcenie odpowiadające statycznej wytrzymałości na ściskanie
$\varepsilon_v$	– pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia $\underline{\varepsilon}$
$\varepsilon_v^{\text{in}}$	– pierwszy niezmiennik tensora odkształceń niesprężystych $\underline{\varepsilon}^{\text{in}}$

$\dot{\underline{\epsilon}}_{eq}^p$	– równoważna prędkość odkształcenia plastycznego
$\underline{\epsilon}^{in}$	– tensor odkształceń niesprężystych
$\dot{\underline{\epsilon}}$	– tensor prędkości odkształcenia
$\dot{\underline{\epsilon}}^e$	– tensor prędkości odkształcenia sprężystego
$\dot{\underline{\epsilon}}^p$	– tensor prędkości odkształcenia plastycznego
$\underline{\epsilon}_R^d$	– tensor odkształcenia zależny od prędkości odkształcenia
$\underline{\epsilon}_d^{in}$	– tensor odkształceń niesprężystych zależny od prędkości odkształcenia
$\dot{\epsilon}_s$	– prędkość odkształcenia próbki
$\phi$	– funkcja wektorowa odwzorowująca przemieszczenie
$\varphi$	– tolerancja
$\dot{\lambda}$	– parametr pracy odkształcenia plastycznego
$\rho$	– gęstość materii ciała kontynuualnego
$\sigma_I$	– naprężenie w pręcie inicjującym
$\sigma_{gmn}$	– graniczne naprężenie hydrostatyczne
$\sigma_R$	– naprężenie na granicy pręt inicjujący – próbka
$\sigma_s$	– naprężenie w próbce
$\sigma_T$	– naprężenie w pręcie przekazującym
$\sigma^o$	– statyczne naprężenie plastyczne
$\sigma_I^l(e_{nn}^{ck})$	– ewolucja osłabienia przy rozciąganiu
$\underline{\sigma}$	– tensor naprężenia Cauchy’ego
$\underline{\sigma}_R^d$	– tensor naprężenia Cauchy’ego zależny od prędkości odkształcenia
$\underline{\dot{\sigma}}$	– tensor prędkości naprężenia
$A_B$	– pole przekroju pręta przekazującego
$A_s$	– przekrój poprzeczny próbki
$C_o$	– prędkość fali podłużnej w próbce
$\underline{C}$	– tensor naprężenia zapisany w układzie współrzędnych kierunku rys
$D$	– miara zniszczenia
$E_B$	– moduł sprężystości pręta przekazującego
$E_{bt}^d$	– początkowy styczny moduł sprężystości – dynamiczny

$E_{bt}^{st}$	– początkowy styczny moduł sprężystości – statyczny
$\underline{E}$	– tensor odkształcenia Greena – Lagrange’a
$\underline{F}$	– gradient deformacji
$G$	– moduł ścinania
$G_D$	– moduł ścinania materiału uszkodzonego
$G^d$	– moduł ścinania zależny od prędkości odkształcenia
$I_1$	– pierwszy niezmiennik tensora naprężenia
$\underline{I}$	– tensor jednostkowy
$J_2$	– drugi niezmiennik dewiatora naprężenia
$J(X,t)$	– Jacobian w konfiguracji aktualnej
$J_0(X,t)$	– Jacobian w konfiguracji początkowej
$K$	– moduł ściśliwości
$K_D$	– moduł ściśliwości materiału uszkodzonego
$K^d$	– moduł ściśliwości zależny od prędkości odkształcenia
$L_s$	– długość próbki
$N_l$	– funkcja kształtu
$M$	– macierz mas
$\underline{M}$	– tensor mas
$R$	– stosunek naprężenia plastycznego w niezerowym stanie odkształcenia do statycznego naprężenia plastycznego
$R_0$	– parametr mimośrodowo zaokrąglenia nasadki
$R_1$	– parametr
$R_d$	– odległość od centrum ładunku wybuchowego
$R_b^d$	– dynamiczna wytrzymałość betonu na ściskanie
$R_b^{st}$	– statyczna wytrzymałość betonu na ściskanie
$S_t^{\sigma \dot{\epsilon}}(\dot{\epsilon}, \sigma, \dots)$	– przykładowa funkcja historii deformacji
$T(X,t)$	– wektor naprężenia Cauchy’ego
$U_1$	– przemieszczenie płaszczyzny styku próbka – pręt inicjujący
$U_2$	– przemieszczenie płaszczyzny styku próbka – pręt przekazujący
$X$	– wektor położenia we współrzędnych materialnych (Lagrange’a)
$Y$	– prędkości uwalniania energii zniszczenia

$W_{ext}$	– energia zewnętrzna
$W_{int}$	– energia wewnętrzna
$W_{kin}$	– energia kinetyczna
$b_i$	– parametry zależne od materiału ( $i = 1 \dots 7$ )
$b(X,t)$	– wektor siły masowej działającej na ciało
$c_e$	– aktualna prędkość fali w elemencie $e$
$c_0$	– prędkość rozchodzenia się dźwięku w wodzie
$d$	– kohezja materiałowa
$\underline{e}$	– dewiator tensora odkształcenia $\underline{\varepsilon}$
$\underline{e}^{in}$	– dewiator tensora odkształcenia niesprężystego $\underline{\varepsilon}^{in}$
$e_{nn}^{ck}$	– wartość odkształceń w lokalnym kierunku $n$
$f^{ext}$	– wektor zewnętrznych sił węzłowych
$f^{int}$	– wektor wewnętrznych sił węzłowych
$f^{kin}$	– wektor kinetycznych siły węzłowych (bezwładności)
$f(t)$	– wektor siły całkowitej działającej na ciało
$f(\underline{\sigma}; D)$	– funkcja płynięcia
$g$	– potencjał plastycznego płynięcia
$g(\underline{\sigma}, Y; D)$	– potencjał niesprężystego płynięcia
$k_d$	– współczynnik wzrostu dynamicznej wytrzymałości
$l_e$	– najmniejszy wymiar elementu $e$
$m_k$	– parametr materiałowy
$n$	– wektor jednostkowy normalny do powierzchni w punkcie
$n_k$	– parametr materiałowy
$p_a$	– parametr definiujący wzmocnienie lub osłabienie zaokrąglenia nasadki, w zależności od objętościowych odkształceń plastycznych
$p_b$	– plastyczne naprężenie hydrostatycznego ściskania
$p_t$	– naprężenie ściskające
$p_v$	– naprężenie średnie
$p(t)$	– wektor pędu liniowego
$p(R_d, t)$	– funkcja ciśnienia od wybuchu

$p_{\max}$	– maksymalna wartość ciśnienia określona półempirycznym wzorem Henrycha
$q$	– naprężenie równoważne Misesa
$\underline{q}$	– zewnętrzny strumień ciepły
$s$	– dostarczona energia zewnętrzna z innych źródeł
$\underline{s}$	– dewiator tensora naprężenia
$t$	– czas
$t_n$	– wartość naprężenia na kierunku $n$
$u$	– wektor przemieszczenia
$x$	– wektor położenia we współrzędnych przestrzennych (Eulera)
$v, v(X,t)$	– wektor prędkości
$\dot{v}$	– wektor przyspieszenia
$w$	– masa ładunku wybuchowego
$\dot{w}^{\text{int}}$	– prędkość wewnętrznej pracy



### 1.1. Cel, teza i zakres pracy

W celu ochrony ważnych obiektów inżynierskich (rurociągi, tunele, elementy odpowiedzialnych budowli morskich) przed skutkami obciążeń nagłych typu wybuchy podwodne lub uderzenia stosowane są różnego rodzaju środki zaradcze, mające na celu zminimalizowanie trwałych skutków takich obciążeń (odkształcenia, zniszczenie elementów konstrukcji aż do całkowitej utraty jej nośności). Może być to odpowiednie kształtowanie nośnych elementów konstrukcji, jak też wykonanie specjalnej konstrukcji osłonowej o znacznej odporności na zniszczenie. Umieszczenie tej osłony w pewnej odległości od właściwego ustroju daje w przypadku wybuchu podwodnego znaczne obniżenie poziomu uszkodzeń chronionej konstrukcji.

Z punktu widzenia bezpieczeństwa i ekonomii należy przeprowadzić szeroką analizę zagadnienia, która z różnych propozycji dla danej konstrukcji będzie bardziej odpowiednia. Czy w danym przypadku bardziej właściwe jest projektowanie układów nośnych mogących przenieść te obciążenia, czy też stosowanie ekranów, konstrukcji osłonowych rozpraszających bądź pochłaniających energię obciążenia. W obu przypadkach pojawia się szereg problemów, bezpośrednio związanych z danym zagadnieniem, których należy być świadomym.

Jak wynika z przeprowadzonych badań eksperymentalnych oraz symulacji komputerowych, w przypadku zewnętrznych konstrukcji osłonowych, umieszczonych w pewnej odległości od właściwej konstrukcji, decydujący wpływ na uszkodzenia konstrukcji nośnej mają uderzenia zniszczonych fragmentów konstrukcji osłonowej o zewnętrzną powierzchnię chronionego ustroju. W związku z tym praktyczne znaczenie ma określenie optymalnej konfiguracji konstrukcji osłonowej, rozpraszającej poprzez swoją deformację niesprężystą maksymalną energię, i nie ulegającej łatwo fragmentacji.

Podstawową trudnością analizy takich zadań inżynierskich jest brak możliwości przeprowadzenia rzetelnego eksperymentu (ze względu na złożoność zjawiska pod względem obciążenia i geometrii układu) a co się z tym wiąże nie można porównać rozwiązań numerycznych, z wynikami doświadczalnymi. W literaturze dostępnych jest szereg dynamicznych zagadnień doświadczalnych dla prostych (jednoosiowych) stanów obciążeń, które mogą być zastosowane do weryfikacji związków konstytutywnych, użytych następnie w złożonych symulacjach, lecz i tak nie mamy pewności jak daleka jest taka symulacja od rzeczywistości.

W przypadku symulacji komputerowych istnieje wiele problemów które muszą zostać rozwiązane. Pierwszym jest dojście do modelu elementów skończonych o takiej gęstości podziałów, aby jej dalsze zwiększanie nie miało większego wpływu na stabilność i zbieżność rozwiązania. Innym problemem, o wiele trudniejszym, jest dobór związków konstytutywnych materiałów użytych w danym doświadczeniu. Ponieważ mamy tu do czynienia ze zjawiskiem wysoce nieliniowym oraz wpływem prędkości odkształceń na naprężenia w materiałach, użyte związki w kodzie komputerowym mają decydujący wpływ na ostateczną postać wyników. Ważna jest również świadomość sposobu modelowania zjawiska (warunki brzegowe, sposób obciążenia, symetrie układu), który jest też pewnym uproszczeniem, będącym wypadkową złożoności zagadnienia rzeczywistego oraz możliwości obliczeniowych komputerów.

### **Cel pracy**

Analiza numeryczna ustrojów zabezpieczających konstrukcje budowlano – inżynierskie przed skutkami obciążeń nagłych.

### **Teza pracy**

Modelowanie konstytutywne i jego weryfikacja jest jednym z najważniejszych elementów analiz numerycznych w celu otrzymania wiarygodnej prognozy odpowiedzi złożonej konstrukcji inżynierskiej na działanie obciążeń nagłych.

### **Zakres pracy**

W pierwszym rozdziale przedstawiono w zarysie ogólnym problematykę zagadnień związaną z analizami numerycznymi. Dokonano przeglądu literatury dotyczącej tych analiz.

Ogólne sformułowania nieliniowej mechaniki ośrodków ciągłych w uaktualnionym opisie Lagrange’a przedstawiono w rozdziale drugim.

Rozdział trzeci jest poświęcony związkom konstytutywnym, które były brane do analiz.

Na rozdział czwarty składają się numeryczne analizy porównawcze prostych doświadczeń jednoosiowych z eksperymentami oraz analiza numeryczna belki żelbetowej. W rozdziale tym została przeprowadzona weryfikacja związków konstytutywnych betonu.

Rozdział piąty poświęcony jest analizie numerycznej wybranej konstrukcji inżynierskiej jaką jest podwodny tunel obciążony w sposób nagły. W rozdziale tym

zawarta jest analiza zabezpieczenia tej konstrukcji za pomocą dodatkowych warstw i osłon pochłaniających energię uderzenia.

Podsumowaniem pracy jest rozdział szósty, w którym zawarto szereg wniosków i uwag końcowych dotyczących przeprowadzonych rozważań oraz analiz.

## 1.2. Przegląd literatury

Analiza numeryczna ustrojów zabezpieczających konstrukcje budowlano – inżynierskie przed skutkami nagłych obciążeń jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym i szerokim. Wymaga ona orientowania się w wielu gałęziach związanych bezpośrednio i pośrednio z tematem.

Przez obciążenia nagłe należy tu rozumieć obciążenia, które charakteryzują się bardzo szybkim wzrostem do maksymalnej wartości i o przeważnie krótkim czasie działania. Przykładami takich obciążeń mogą być gwałtowne uderzenia, zderzenia czy wybuchy. Należy przy tym zaznaczyć, iż destrukcyjna siła takich obciążeń może mieć również charakter pozytywny dla człowieka, np. w przypadku wyburzania obiektów metodami pirotechnicznymi lub udarowymi. Obciążenia wybuchem są zagadnieniami złożonymi, mogą być zmienne w czasie i przestrzeni. Modelowanie numeryczne obciążenia wybuchem stanowi bardzo skomplikowane i niejednoznaczne zadanie. W literaturze można znaleźć wiele półempirycznych opisów przedstawiających przestrzenno – czasowe charakterystyki ciśnienia na froncie fali uderzeniowej. Jeden z takich opisów został przedstawiony w [35] (Dacko A., 1998). Szeroki opis eksperymentalny i teoretyczny obciążeń nagłych w postaci wybuchów można również znaleźć w [44] (Henrych J., 1979), [19] (Bangash M.Y.H, 1993) czy [76] (Włodarczyk E., 1994) . Wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych przez Kwona i Foxa [51] (Kwon Y.W., Fox P.K., 1995) ukazują jak trudnym zagadnieniem jest analiza wybuchu podwodnego w przypadku gdy ładunek oddalony jest od konstrukcji. Próbę modelowania tego doświadczenia, z zadowalającymi rezultatami, za pomocą metody elementów skończonych podejmują Adamczyk, Cichocki i Ruchwa [2] (Adamczyk R., Cichocki K., Ruchwa M., 1997).

Niezmiernie ważnym problemem jest poprawne rozpoznanie i opis matematyczny ośrodka w jakim odbywa się obciążenie wybuchem, gdyż właściwości tego ośrodka mają znaczny wpływ m.in. na prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej oraz interakcję konstrukcja – ośrodek. Oprócz wspomnianych już wybuchów podwodnych, możemy rozróżnić wybuchy powietrzne oraz wybuchy w ośrodkach gruntowych.

Różnorodność konstrukcji budowlanych zmusza nas do indywidualnej analizy ochrony przed skutkami obciążeń nagłych każdego przypadku z osobna. Bardzo szeroki

i ciekawy opis wielu konstrukcji budowlanych rozpatrywanych pod działaniem obciążeń nagłych przedstawiono w [19] (Bangash M.Y.N., 1993). W pracy tej znajdziemy opis wielu podstawowych badań eksperymentalnych konstrukcji stalowych, betonowych, żelbetowych oraz kompozytowych, które porównano z przeprowadzonymi symulacjami komputerowymi. Przedstawiono tu również numeryczne analizy dynamiczne katastrof samolotowych, m.in. samolotów uderzających w budynek, w chłodnię kominową, „crash testów” samochodowych, awarie platform wiertniczych, skutki uderzeń raketami lub innymi pociskami wybuchowymi.

Ciekawą grupę stanowią konstrukcje drogowe (bariery sprężyste, bariery niesprężyste, latarnie przydrożne, itp.) obciążone dynamicznie na skutek uderzeń samochodów [43] (Hendricks F., Wekezer J.W., 1996). Są to konstrukcje, które projektuje się tak aby w przypadku uderzenia pochłaniały jak największą część energii, aby pojazd odniósł jak najmniejsze szkody i istniało większe prawdopodobieństwo uratowania znajdujących się w nim osób.

Ważnym problemem z punktu widzenia oddziaływań dynamicznych są kolizje samochodowe [75] (Wekezer J.W., Oskard M.S., Logan R.W., Zywicz E., 1993).

Analizy dynamiczne są z powodzeniem prowadzone w przemyśle zbrojeniowym i wojskowym [18] (Borkowski W., Rybak P., 1998). Wykorzystuje się je do kształtowania osłon i projektowania maszyn i pojazdów wojskowych [36] (Dacko M., Dacko A., 1998).

Obciążenia dynamiczne mają również zastosowanie w różnych gałęziach przemysłu i budownictwie specjalistycznym. W przemyśle wydobywczym, tak jak w wojskowym, stanowią podstawę do projektowania osłon i części maszyn [67] (Rusiński E., Smolnicki T., Karliński J., 1998).

W omawianych przypadkach, ze względu na intensywność obciążenia mamy do czynienia z silnie nieliniowym charakterem zjawisk, zarówno dotyczących zmian geometrii układu (nieliniowość geometryczna), jak i zakresu pozasprężystego pracy materiałów (nieliniowość materiałowa).

Jednym z najważniejszych elementów analizy komputerowej takiego zagadnienia jest teoretyczny opis zachodzących zjawisk. Podstawą do formułowania zjawisk dynamiki nieliniowej są pozycje literaturowe mechaniki ośrodków ciągłych [38] (Fung Y.C., 1969), [56] (Mase G.E., 1990), [68] (Rymarz Cz., 1993), [49] (Kleiber M., 1995). Zasady dynamiki nieliniowej oraz sposoby ich implementacji w metodzie elementów

skończonych przedstawiono w [15] (Belytschko T., Liu W.K., Moran B., 2000), [55] (Macaulay M., 1987) oraz w [7] (Bathe K.J., 1982). Znajdziemy tu również teoretyczne podstawy dotyczące samej metody elementów skończonych, sposoby rozwiązywania, badanie stabilności rozwiązania, itd.

Podstawowym zagadnieniem w przypadku nieliniowości materiałowej jest poprawny opis konstytutywny materiałów użytych w analizie dynamicznej. Fundamentem prac z zakresu teorii lepkoplastyczności jest [64] (Perzyna P., 1966). Zawarty w niej ogólny opis modelu sprężysto – lepkoplastycznego uwzględniający anizotropię materiałowych właściwości dynamicznych stał się podstawą do budowy bardziej skomplikowanych modeli konstytutywnych takich jak, np. Lemaitre’a i Chaboche’a [53] (Lemaitre J., Chaboche J.L., 1990), [52] (Lemaitre J., 1996). Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych oraz szeroki przekrój przez teoretyczne podstawy opisujące i analizujące różne modele materiałowe sprężyste i plastyczne można znaleźć w [22] (Chen S., 1994) oraz [58] (Muhlhaus H.B., 1995). Większość konstrukcji budowlanych składa się przeważnie z dwóch materiałów: betonu i stali. W pracy skupiono się tylko nad tymi dwoma materiałami.

Bardzo bogaty rys literaturowy i historyczny dotyczący badań stali i jej opisu teoretycznego oraz wybranych innych metali przedstawiono w pracy [66] (Ruchwa M., 2001). Ponieważ modele dla stali uznano za stosunkowo dobrze opracowane i dające wiarygodne odpowiedzi w przypadkach nagłych obciążeń, nie poświęcono im tutaj wiele miejsca.

Można wymienić bardzo wiele prac z tematyki modelowania dynamicznego zachowania się betonu. Pierwsze próby opisu materiałowego betonu dotyczyły modeli jednoparametrowych [50]. Treska (1864) założył, że materiał osiąga granicę plastyczności gdy maksymalne naprężenie styczne uzyskuje wartość krytyczną. Von Mises (1913) założył, że zniszczenie pojawia się gdy oktaedryczne naprężenie styczne osiąga wartość krytyczną. Kryterium to zakłada, że o uplastycznieniu decyduje tylko dewiatorowa część energii odkształcenia. Modele te z powodzeniem zostały użyte do opisu konstytutywnego metali, lecz nie są zbyt odpowiednie do opisu pracy betonu. Wynikiem tego było zastosowanie dwuparametrowych modeli Mohra – Coulomba oraz Druckera – Pragera. Pierwszy model zakładał zniszczenie gdy naprężenie styczne w jakiegokolwiek płaszczyźnie w dowolnym punkcie osiąga wartość, która zależy liniowo od naprężeń normalnych w tej samej płaszczyźnie. Model Mohra – Coulomba jest

powszechnie stosowany dla gruntów, gdzie wyraźnie jest obserwowana zależność od naprężenia hydrostatycznego. W szczególnym przypadku kryterium to redukuje się do warunków Treski. Model Druckera – Pragera (1952) jest modyfikacją modelu von Misesa i w płaszczyźnie dewiatorowej modele te mają identyczny kształt. Różnica polega na uwzględnieniu wpływu pierwszego niezmiennika tensora naprężenia w równaniu powierzchni uplastycznienia. Jego mutacje, modele Druckera – Pragera z pojedynczą i podwójną eliptyczną nasadką zwane zmodyfikowanymi modelami Druckera – Pragera [22], wykorzystywane są w programach MES do definiowania własności konstytutywnych betonu.

Jeden z najprostszych modeli trójparametrowych został zaproponowany przez Cowana i innych (1952) [33] (Cowan H.J., 1953). Połączył on kryterium Mohra – Coulomba z graniczną wytrzymałością na rozciąganie. Bardziej złożony model trójparametrowy zaproponowali Bresler i Pister [20] (Bresler B., Pister K.S., 1958). Założyli oni paraboliczną zależność pomiędzy naprężeniami normalnymi a stycznymi.

Najczęściej stosowane czteroparametrowe modele materiałowe betonu to modele Reimanna (1965), Ottosena (1977), i Hsieha (1979) [22]. Pierwszy z nich rozszerzył kryterium Mohra – Coulomba tak, że w płaszczyźnie dewiatorowej warunek największych naprężeń rozciągających składa się z kombinacji części liniowej i części nieliniowej. Model Ottosena dla szczególnych kombinacji wartości stałych staje się modelem von Misesa lub modelem Druckera – Pragera. Dla małych naprężeń, wykres w płaszczyźnie dewiatorowej przechodzi z kształtu prawie trójkątnego w prawie kołowy. Hsieh zaproponował model betonu określony za pomocą pierwszego i drugiego niezmiennika tensora naprężeń oraz jednego z naprężeń głównych.

Rozwinięciem poprzednich modeli był pięcioparametrowy model Williama i Warke'a (1974). Zakłada on eliptyczny kształt powierzchni plastyczności na płaszczyźnie dewiatorowej i paraboliczną zależność naprężeń normalnych i stycznych w płaszczyźnie oktaedrycznej. Model ten spełnia wymagane charakterystyki co do gładkości przebiegu, wypukłości i symetrii dla wszystkich kombinacji naprężeń.

Obecnie zauważa się bardzo szybki rozwój modelowania betonu jako materiału, w którym następuje zmiana właściwości fizycznych na skutek pojawienia się rys [50]. Istnieją trzy podejścia analityczne definiowania rys w betonie w zależności od sposobu modelowania numerycznego. Podejście 1: modelowanie rys rozmytych;

podejście 2: modelowanie rys dyskretnych i podejście 3: modelowanie za pomocą mechaniki zniszczenia.

Modele materiałowe z rysami rozmytymi zakładają, że po pojawieniu się szczelin beton dalej pozostaje ośrodkiem ciągłym, lecz staje się on materiałem ortotropowym. Osie anizotropii materiału skierowane są odpowiednio do kierunku pęknięcia. W przypadku rozciągania zakłada się, że szczeliny powstają prostopadle do kierunku maksymalnych naprężeń rozciągających. W modelu tym przyjmuje się istnienie nieskończonej liczby pęknięć równoległe do siebie. Szczegółowy opis takiego modelowania można znaleźć w [60] (Nilsson A.H., 1968).

Dyskretny model szczelin został przedstawiony przez Ngo i Scordelisa [59] (Ngo D., Scordelis A.C., 1967). Istnienie szczelin uwzględnia się przez wprowadzenie ich do siatki elementów skończonych. Modelowanie takie obarczone jest dużym błędem, gdyż początkowa lokalizacja i orientacja szczelin jest nieznaną. Zmiany topologii modelu geometrycznego powodują zwiększenie czasochłonności obliczeń i z praktycznego punktu widzenia niewielka jest efektywność tego typu modelowania.

Podstawy teoretyczne modeli opartych na mechanice zniszczenia zostały stworzone przez Griffitha. Porównał on energię sprężystą odkształcenia ciała z rysą oraz ciała bez niej i otrzymał różnicę energii wynikającą z istnienia rysy. Propagacja szczeliny jest więc możliwa, gdy energia dostarczona w postaci sił zewnętrznych będzie co najmniej równa ubytkowi energii towarzyszącemu powstaniu nowej rysy. Teoria ta została następnie uzupełniona o dyssypację plastyczną (Irwin) oraz siły spójności w bliskim sąsiedztwie wierzchołka szczeliny (Dugdale – Berenblat). Opis procesu niszczenia na skutek propagacji w ciele szczeliny okazał się niezadowalający, gdyż nieznaną była lokalizacja początkowa rysy. Lepsze wydaje się podejście traktowania materiału jako ciała ciągłego. Pierwszym, który zajmował się opisem kontynualnym betonu w mechanice zniszczenia był Kaczanow (1958). W jego rozumieniu uszkodzenie spowodowane szczelinami zmniejsza efektywną powierzchnię przekroju ciała. Wprowadził on skalarną miarę uszkodzenia w przypadku jednowymiarowym. Jej wartość wynosiła 1 dla materiału niezniszczonego i 0 w chwili zlokalizowania zniszczenia. Rabinow (1969) uzupełnił tę teorię o parametr uszkodzenia, który definiował ciągłość materiału. Ze względu na anizotropowy charakter uszkodzenia później wprowadzono wektorowe, a następnie tensorowe miary uszkodzenia. Teoria ta



stała się prototypem wielu późniejszych modeli uwzględniających degradację sprężystą materiału i uważana jest za początek kontynualnej mechaniki zniszczenia.

Rozwijając tę teorię w zakresie energetycznym Chaboche i Lemaitre wprowadzili opis miary degradacji oparty na wartościach modułów sprężystych w stanie uszkodzonym i idealnym [53] (Lemaitre J., Chaboche J.L., 1990). Dla zajścia procesu niszczenia konieczna jest więc nadwyżka energii dostarczonej do ciała na dyssypację plastyczną. Obecnie metody energetyczne uznane są za najbardziej adekwatne do opisu materiału o właściwościach kruchego pęknięcia. Próby opisu własności materiałowych betonu oraz problemów związanych z lokalizacją i efektami skali podejmuje i rozwija z dużym powodzeniem Bazant [10] (Bazant Z.P., 1998). Jest on również autorem wielu publikacji opisujących zniszczenie w materiałach o własnościach kruchego pęknięcia, jak np. [11] (Bazant Z.P., Ozbolt J., 1992) czy [13] (Bazant Z.P., Xiang Y., Prat P.C., 1996).

Nieliniowe zachowanie się betonu opisywać można za pomocą modeli przyrostowych, w których prawo konstytutywne wiąże ze sobą przyrosty odkształcenia i naprężenia, a nie ich całkowitą wartość. Ze względów numerycznych równanie konstytutywne powinno być liniowe. Odpowiada ono lokalnej linearyzacji nieliniowej relacji pomiędzy odkształceniem i naprężeniem. Dokładny opis modelu konstytutywnego przyrostowo – liniowego z uwzględnieniem degradacji sprężystej i deformacji plastycznej można znaleźć w [50] (Klisiński M., Mróz Z.).

Na podstawie rozważań Lemaitre'a i Chaboche'a, Comi C., i inni w pracy [32] (Comi C., Berthaud Y., Billardon R., 1995) zaproponowali teoretyczny model sprężysto – plastyczny betonu, który opisuje zachowanie aż do zniszczenia tzw. materiałów plastyczno – kruchych, głównie przy obciążeniu ściskającym. Efekt degradacji materiału może zostać zdefiniowany przez pojedynczy skalar zmiennej zniszczenia. Swobodna energia Helmholtza  $\Psi$  jest funkcją zmiennej zniszczenia  $D$  i tensora odkształceń plastycznych, co z kolei umożliwi zdefiniowanie prędkości niesprężystego tensora odkształcenia  $\dot{\underline{\epsilon}}^{\text{in}}$  i zniszczenia  $\dot{D}$ . Ten ośmioparametrowy model konstytutywny stał się inspiracją dla autorów publikacji [26] (Cichocki K., Adamczyk R., Ruchwa M., 1999), którzy wykorzystali go w analizach porównawczych konstrukcji inżynierskich obciążonych w sposób nagły.

Brak wpływu prędkości odkształceń plastycznych na wartości naprężeń w modelu materiałowym betonu nie daje pełnego obrazu odpowiedzi materiału na obciążenia dynamiczne. Autor rozprawy proponuje prosty model, który zależny jest od prędkości odkształceń [3] (Adamczyk R., Łodygowski T., 2001). Oprócz parabolicznej zależności naprężeń normalnych od stycznych, uwzględniającej prędkość odkształceń, model uzupełniony został o kryterium naprężeniowe wytrzymałości na rozciąganie.

Badania eksperymentalne zmian właściwości betonu w zależności od prędkości odkształceń zostały przeprowadzone przez Nilssona [61] (Nilsson L., 1979). Sformułował on zależności pomiędzy charakterystykami naprężeniowo – odkształceniowymi a prędkością odkształceń. Wyniki tych badań zostały wykorzystane do opracowywania modelu konstytutywnego betonu uzależnionego od prędkości odkształceń.

Analiza numeryczna konstrukcji betonowych lub żelbetowych obciążonych dynamicznie stanowi obecnie duży problem ze względu na związki konstytutywne betonu. Weryfikacja teorii w testach doświadczalnych jest dosyć uboga udokumentowana w literaturze. Podstawowym doświadczeniem sprawdzającym związki konstytutywne, ogólnie stosowanym, jest test z prętem Hopkinsona [65] (Rossi P., Toutlemonde F., 1996). Wadą tego testu jest jego jednoosiowy charakter. Mimo to test ten jest uważany jednak za podstawę do określenia parametrów betonu i jest powtarzany i cytowany przez wielu autorów badań doświadczalnych jak i analiz numerycznych [39] (Gatuingt F., Burlion N., Daudeville, Pijaudier-Cabot G., 1998). Był on również podstawą dla prac [5] (Adamczyk R., Maliszewski G., 1998,) i [25] (Cichoński K., Adamczyk R., Maliszewski G., 1998).

Ważnym problemem jest poprawna metodyka pomiaru w trakcie badań eksperymentalnych [62] (Perry S.H., Bischoff P.H., 1990), gdyż źle przeprowadzony eksperyment może doprowadzić do błędnych wniosków. Bischoff i Perry przeprowadzili doświadczenie dynamicznego ściskania próbek betonowych [17] (Bischoff P.H., Perry S.H., 1995). Doświadczenie to jest o tyle ważne, iż autorzy próbują określić dynamiczne charakterystyki betonu w zależności od prędkości odkształceń. Dzięki temu doświadczenie to może stać się podstawą do weryfikacji dynamicznych związków konstytutywnych betonu. Doświadczenie to zostało numerycznie przeanalizowane [4] (Adamczyk R., Łodygowski T., 2001).

Analizę bardziej złożonych prętowych konstrukcji żelbetonowych obciążonych impulsowo podejmują Bąk i Stolarski [14] (Bąk G., Stolarski A., 1990). I tu również fundamentalnym problemem okazują się związki konstytutywne betonu oraz sposób ich określenia w zależności od prędkości odkształceń.

Próbie uzyskania odpowiedzi na problem zachowania się powłok cylindrycznych pojedynczych oraz wielowarstwowych dynamicznie obciążonych podejmuje Salvatorelli [69] (Salvatorelli F., 1989).

Analizę numeryczną belki żelbetowej poddanej działaniu obciążeń impulsowych przeprowadzili Beshara oraz Viridi [16] (Beshara F.B.A., Viridi K.S., 1992). Główny nacisk pracy autorzy kładą na modelowanie konstytutywne betonu i badanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Praca ta stała się inspiracją do analizy porównawczej wyników uzyskanych przez Cichockiego, Ruchwę, Adamczyka w symulacji komputerowej [30] (Cichocki K., Ruchwa M., Adamczyk R., 1998). Wynikiem analizy jest porównanie odpowiedzi dynamicznej belki żelbetowej obciążonej impulsowo dla modeli: sprężystego, modelu kruchego pęknięcia przy rozciąganiu i sprężystego przy ściskaniu, modelu kruchego pęknięcia przy rozciąganiu i sprężysto – plastycznego przy ściskaniu, modelu Druckera – Pragera, modelu sprężysto – plastycznego, zaproponowanego przez autorów w [26] oraz modelu sprężysto – lepkoplastycznego z uwzględnieniem degradacji.

Wiele zjawisk fizycznych charakteryzuje lokalny zasięg występowania pod wpływem czynników zewnętrznych. W przypadku odpowiedzi betonu i stali na działanie obciążeń nagłych możemy obserwować również silnie lokalny i zmienny charakter zachodzących wewnątrz materiału koncentracji naprężeń w zależności od prędkości odkształceń (która też jest wielkością lokalną) [54] (Łodygowski T., 1996), [42] (Glema A., Łodygowski T., Perzyna P.). Ma to znaczący wpływ na wynik odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń nagłych [32] (Comi C., Berthud Y., Billardon R., 1995.). Rozważając rzeczywistą konstrukcję pod działaniem obciążeń nagłych musimy być również świadomi efektów skali [12] (Bazant, Z.P., Planas, J., 1998), które także mają wpływ na charakter zniszczenia materiału.

Implementacja danego modelu konstytutywnego do programu MES jest kolejnym skomplikowanym zadaniem, ponieważ opis matematyczny musi być podporządkowany metodzie rozwiązywania przyjętej w programie MES.

## Rozdział 2

### Omówienie założeń oraz metod dotyczących analiz numerycznych

#### 2.1. Analiza nieliniowa

Symulowanie zjawisk z dziedziny dynamiki nieliniowej staje się coraz bardziej powszechne. Głównym powodem takiego rozwoju jest szybsze otrzymywanie wyników obliczeń, możliwość wielokrotnego powtórzenia zjawiska oraz natychmiastowe wprowadzanie zmian i, co się z tym wiąże, lepsze wykorzystanie zdobytych doświadczeń w procesie projektowania. Faktem, który ma również wpływ na popularność metod komputerowych jest coraz niższy koszt wykonania takich symulacji przy jednoczesnym wzroście możliwości systemów i maszyn obliczeniowych.

Obecnie nieliniowa analiza metodą elementów skończonych jest podstawą wspomaganego komputerowo projektowania procesów dynamiki nieliniowej [31].

Każdy program metody elementów skończonych wymaga jednak pełnego zrozumienia zasad z nią związanych i jest tylko narzędziem, przy którym trzeba podjąć wiele właściwych decyzji opierając się na wiadomościach teoretycznych.

Ogólnie nieliniowa analiza procesów dynamicznych składa się z następujących kroków:

1. Tworzenie modelu,
2. Formułowanie równań,
3. Dyskretyzacja równań,
4. Rozwiązanie równań,
5. Interpretacja wyników.

Punkty od 2 do 4 powinny zostać zrealizowane przez program komputerowy. Punkty 1 i 5 zależą tylko od analizującego zjawisko, choć oczywiście mogą być wspomagane przez odpowiednie moduły lub programy. Podanie więc danych lub interpretacja wyników zależy wyłącznie od doświadczenia i wiedzy teoretycznej osoby przeprowadzającej analizę.

Analizujący nieliniowe zadanie metodą elementów skończonych powinien przeprowadzić dyskusję oraz dokonać następujących, istotnych wyborów:

1. Wybór odpowiedniej metody rozwiązania,
2. Wybór odpowiedniego opisu siatki modelu i kinematycznego opisu zadania,
3. Dyskusja nad stabilnością rozwiązania i stabilnością procedury,
4. Dyskusja nad zbieżnością i jakością odpowiedzi modelu w zależności od stopnia skomplikowania zadania,
5. Dyskusja nad wpływem założeń upraszczających na wynik i źródłami przewidywanych błędów.

Wybór metody rozwiązania uzależniony jest w dużej mierze od rodzaju problemu, jego wielkości oraz dokładności z jaką chcemy uzyskać rozwiązania.

Wybór właściwego opisu siatki modelu Lagrange'a lub Eulera lub dowolnego Lagrange'a – Eulera jest ważny z punktu widzenia dużych deformacji i analizy zniszczenia. Zalety i wady każdego z tych opisów powinny mieć wpływ na wybór opisu modelu.

Podczas symulacji komputerowej możliwe jest uzyskanie rozwiązań, które nie są fizycznie stabilne. Wiele rozwiązań jest wrażliwych na imperfekcje materiałowe i parametry obciążenia a nawet na rodzaj siatki elementów skończonych użytej w symulacji. Bardzo ważnym elementem analiz nieliniowych jest również badanie jakości otrzymanych wyników i ich filtracja. Brak takiej filtracji może spowodować wprowadzenie niezrozumiałych zakłóceń lub osłabić jednoznaczność rozwiązania. Badanie jakości rozwiązania jest prowadzone w programie przez tzw. funkcje testowe. Procedury te często nie są związane ze zjawiskami fizycznymi i wyznaczenie stałych dla nich stanowi poważny problem.

Stabilność i jakość rozwiązania zależy od wielu czynników. Mogą to być czynniki fizyczne lub numeryczne. Kontrola rozwiązania musi być przeprowadzona na wielu etapach, na etapie doboru elementu skończonego jak i opisu materiałowego.

Wyniki symulacji muszą zostać poddane dyskusji nad ich zbieżnością, co stanowi kontrolę rozwiązania danego zadania. Brak takiej kontroli może doprowadzić do błędnych wniosków [37].

Opracowując wyniki badań należy również zwrócić uwagę na błąd jaki może być wynikiem uproszczeń i założeń w danym modelu.

## 2.2. Zapis w uaktualnionym układzie Lagrange'a

Ruch ciała materialnego można zapisać w postaci:

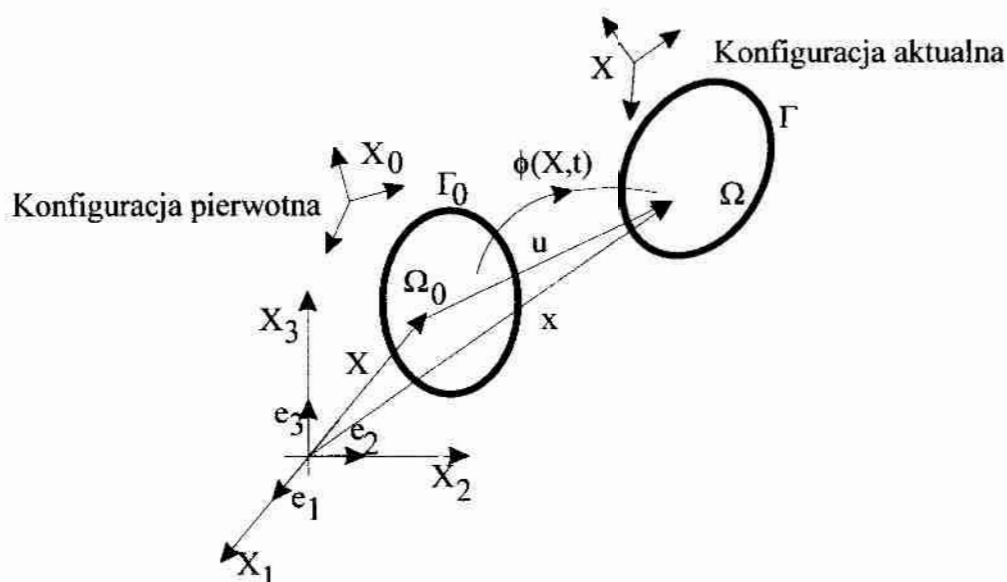
$$x = \phi(X, t), \quad (2.1)$$

gdzie:  $X$  określa położenie punktu we współrzędnych Lagrange'a (materialnych), przez  $x$  oznacza się położenie punktu we współrzędnych Eulera (przestrzennych),  $t$  jest zmienną czasu.

Sposób rozwiązywania zagadnienia nieliniowego zależy od jego sformułowania. Generalnie wyróżniamy dwa opisy: Eulera i Lagrange'a. Były one podstawą dla stworzenia uaktualnionego opisu Lagrange'a oraz dowolnego opisu Lagrange'a – Eulera. Dla odróżnienia pierwszy opis Lagrange'a jest często nazywany opisem stacjonarnym. W opisie stacjonarnym Lagrange'a zmiennymi niezależnymi są położenie punktu materialnego w chwili początkowej oraz czas. W opisie Eulera zmiennymi niezależnymi są położenie punktu oraz czas [48]. W układzie stacjonarnym Lagrange'a położenie punktu materialnego definiowane jest za pomocą współrzędnych materialnych względem konfiguracji początkowej, w układzie Eulera położenie punktu materialnego jest definiowane za pomocą współrzędnych przestrzennych względem konfiguracji początkowej. Opis Eulera wydaje się być odpowiedni dla zjawisk przepływu, gdzie łatwiej jest obserwować w danym punkcie przestrzeni przemieszczające się punkty materialne. Opis Lagrange'a lepiej wyraża deformacje ciała kontynualnego. Odpowiednim sposobem opisu dużych deformacji oraz nieliniowości materiałowej i geometrycznej w kodach komputerowych jest uaktualniony opis Lagrange'a, rys. 2.1. W opisie tym równania dyskretne są zapisywane w konfiguracji bieżącej za pomocą współrzędnych przestrzennych. Wykorzystywane są tu również eulerowskie miary naprężeń i odkształceń. Każde położenie punktu można wyrazić w tym opisie za pomocą współrzędnych Eulera. Jednak w praktyce znalezienie funkcji odwrotnej do (2.1):

$$X = \phi^{-1}(x, t) \equiv X(x, t), \quad (2.2)$$

może okazać się bardzo trudne lub czasami wręcz niemożliwe.



Rys. 2.1. Opis stanu deformacji ciała w uaktualnionym układzie Lagrange'a

W uaktualnionym układzie Lagrange'a miarą odkształcenia jest prędkość deformacji  $\underline{\dot{\epsilon}}$ , zwana również prędkością odkształceń. Prędkość tę można zdefiniować w poniższej postaci:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \text{sym}(\nabla v), \quad (2.3)$$

gdzie  $v$  jest wektorem prędkości,  $\nabla$  oznacza operator wektorowy,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ .

### 2.3. Równania zachowania w uaktualnionym opisie Lagrange'a

Fundamentalnymi równaniami mechaniki ciała ciągłego są równania zachowania masy, momentu pędu liniowego i kąowego, energii oraz związków konstytutywnych. Są one wynikiem fizycznych praw i bilansów. Równania te muszą być spełnione i odpowiednio sformułowane dla opisu ruchu ciała.

W uaktualnionym układzie Lagrange'a równania dyskretne są formułowane w konfiguracji aktualnej. Naprężenie jest definiowane w tym układzie za pomocą naprężenia fizycznego Cauchy'ego. Zmiennymi niezależnymi jest położenie początkowe punktu materialnego oraz czas. W poniższych rozważaniach rozpatrywane jest ciało o wydzielonym granicą  $\Gamma$  obszarze  $\Omega$ .

W opisie Lagrange'a pęd liniowy  $p(t)$  dany jest za pomocą następującej całki zapisanej w konfiguracji aktualnej:

$$p(t) = \int_{\Omega} \rho v(X, t) d\Omega, \quad (2.3)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość,  $v(X, t)$  – wektor prędkości.

Siła całkowita  $f(t)$ , działająca na ciało otrzymywana jest jako całka ze wszystkich sił przypadających na obszar i naprężenie w granicach obszaru:

$$f(t) = \int_{\Omega} \rho b(X, t) d\Omega + \int_{\Gamma} T(X, t) d\Gamma, \quad (2.4)$$

gdzie:  $b(X, t)$  – siła masowa działająca na ciało,  $T(X, t)$  – wektor naprężenia zdefiniowany za pomocą prawa Cauchy’ego (2.8).

Druga zasada Newtona ma postać:

$$\frac{dp}{dt} = f. \quad (2.5)$$

Podstawiając równania (2.3) i (2.4) do (2.5) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v d\Omega = \int_{\Omega} \rho b d\Omega + \int_{\Gamma} T d\Gamma. \quad (2.6)$$

Ponieważ dziedzina odniesienia jest stała w czasie, pochodna może zostać włączona wewnątrz całki:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v(X, t)}{\partial t} d\Omega. \quad (2.7)$$

Wektor naprężenia  $T$ , jest zdefiniowany za pomocą prawa Cauchy’ego:

$$n \cdot \underline{\sigma} d\Gamma = T d\Gamma, \quad (2.8)$$

gdzie:  $n$  – wektor jednostkowy normalny,  $\underline{\sigma}$  – tensor naprężenia Cauchy’ego.

Podstawiając prawo Cauchy’ego do powyższych wzorów otrzymujemy:

$$\int_{\Gamma} T d\Gamma = \int_{\Gamma} n \cdot \underline{\sigma} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\sigma} d\Omega. \quad (2.9)$$

Podstawiając (2.7) i (2.9) do równania (2.6) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega} \left( \rho \frac{\partial v(X, t)}{\partial t} - \rho b - \nabla \cdot \underline{\sigma} \right) d\Omega = 0. \quad (2.10)$$

Otrzymana powyższa postać jest formą równania pędu w zapisie układu uaktualnionego Lagrange’a. Równanie to można przekształcić i przedstawić w następującej formie:

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho b = \rho \dot{v}. \quad (2.11)$$

W podobny sposób można wyprowadzić pozostałe równania zachowania w zapisie uaktualnionym Lagrange’a. Równania te przytoczono w tabeli 2.1.



Tabela 2.1. Równania zachowania w uaktualnionym opisie Lagrange'a

Równanie zachowania masy	
$\rho(X, t)J(X, t) = \rho_0(X)J_0(X) = \rho_0(X)$	(2.12)
Równanie zachowania momentu pędu:	
$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$	(2.13)
Równanie zachowania energii:	
$\rho \dot{w}^{int} = \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\sigma} - \nabla \cdot \underline{q} + \rho s$	(2.14)
Równania konstytutywne:	
$\underline{\sigma}^{\nabla} = S_t^{\sigma \dot{\epsilon}}(\underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\sigma}, \dots)$	(2.15)
Równanie zachowania miary odkształcenia:	
$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I})$	(2.16)
Równanie zachowania prędkości deformacji:	
$\underline{\dot{\epsilon}} = \text{sym}(\nabla v)$	(2.17)
Równania związków brzegowych:	
$n \cdot \underline{\sigma} = \bar{T} \text{ na } \Gamma_t, \quad v = \bar{v} \text{ na } \Gamma_v$	(2.18)
$\Gamma_t \cap \Gamma_v = \emptyset, \Gamma_t \cup \Gamma_v = \Gamma$	
Równania warunków początkowych:	
$v(X, 0) = v_0(X), \underline{\sigma}(X, 0) = \underline{\sigma}_0(X) \text{ lub}$	(2.19)
$v(X, 0) = v_0(X), u(X, 0) = u_0(X)$	(2.20)
Równania zachowania warunków ciągłości	
$\text{Na } \Gamma_{int} : [n \cdot \underline{\sigma}] = 0$	(2.21)

gdzie:  $J(X, t)$  – Jacobian,  $\dot{w}^{int}$  – prędkość wewnętrznej pracy,  $\underline{q}$  – zewnętrzny strumień ciepły,  $s$  – dostarczona energia zewnętrzna,  $S_t^{\sigma \dot{\epsilon}}(\underline{\dot{\epsilon}}, \underline{\sigma}, \dots)$  – funkcja historii deformacji,  $\underline{E}$  – tensor odkształceń Greena – Lagrange'a,  $\underline{F}$  – gradient deformacji,  $\underline{I}$  – tensor jednostkowy.

W uaktualnionym układzie Lagrange’a równanie zachowania momentu pędu można zapisać za pomocą tzw. słabej formy w zależności od konfiguracji bieżącej i współrzędnych przestrzennych. Słabą formę następnie przekształca się w równanie dyskretne.

#### 2.4. Słaba forma w uaktualnionym układzie Lagrange’a, zasada mocy wirtualnych

Zasada mocy wirtualnych jest słabą formą zasady zachowania pędu z naprężeniowymi warunkami brzegowymi oraz warunkami ciągłości wewnętrznej. Słabą formę można uzyskać odpowiednio przekształcając formę mocną [15].

Aby wyprowadzić słabą formę należy wcześniej zdefiniować przestrzeń funkcji testowych i próbnych. Funkcje te muszą być odpowiedniej klasy. Przestrzeń funkcji testowych  $U_0$  jest dana w następujący sposób:

$$\delta v(X) \in U_0, U_0 = \{ \delta v \mid \delta v \in C^0(X), \delta v = 0 \text{ na } \Gamma_v \}, \quad (2.22)$$

gdzie  $\delta v$  jest wektorem prędkości wirtualnej.

Próbne funkcje prędkości znajdują się w przestrzeni  $U$ :

$$v(X, t) \in U, U = \{ v \mid v \in C^0(X), v = \bar{v} \text{ na } \Gamma_v \}, \quad (2.23)$$

gdzie  $v$  jest wektorem prędkości.

Przestrzeń prędkości zdefiniowana w (2.22) jest zwana przestrzenią kinematycznie dopuszczalnych prędkości, które muszą spełniać warunki ciągłości oraz warunki brzegowe.

Mnożąc skalarnie równanie momentu pędu (2.11) przez funkcję testową oraz całkując po konfiguracji aktualnej otrzymamy:

$$\int_{\Omega} \delta v \cdot (\nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho b - \rho \dot{v}) d\Omega = 0. \quad (2.24)$$

Pierwszy składnik równania (2.24) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\int_{\Omega} \delta v \cdot (\nabla \cdot \underline{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\delta v \cdot \underline{\sigma}) - \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} : \underline{\sigma} \right] d\Omega. \quad (2.25)$$

Zakładając na podstawie twierdzenia Gaussa [38], że nieciągłość pojawia się na skończonym zbiorze na powierzchni  $\Gamma_{int}$ , mamy:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\delta v \cdot \underline{\sigma}) d\Omega = \int_{int} \delta v \cdot [n \cdot \underline{\sigma}] d\Gamma + \int \delta v \cdot (n \cdot \underline{\sigma}) d\Gamma. \quad (2.26)$$

Z warunku ciągłości naprężenia (2.21) pierwsza całka prawej strony równania znika. Uwzględniając warunki brzegowe (2.18) w drugiej całce prawej strony równania otrzymujemy:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\delta v \cdot \underline{\sigma}) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \delta v \cdot \bar{T} d\Gamma. \quad (2.27)$$

Podstawiając równanie (2.27) do (2.25) otrzymujemy:

$$\int_{\Omega} \delta v \cdot (\nabla \cdot \underline{\sigma}) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \delta v \cdot \bar{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} : \underline{\sigma} d\Omega. \quad (2.28)$$

Następnie podstawiając równanie (2.28) do (2.24) otrzymujemy słabą formę równania momentu pędu:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} : \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho b d\Omega - \int_{\Gamma_T} \delta v \cdot \bar{T} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho \dot{v} d\Omega = 0. \quad (2.29)$$

Powyższe równanie można przedstawić używając fizycznych terminów dla jego składowych:

$$\delta P = \delta P^{int} - \delta P^{ext} + \delta P^{kin} = 0 \quad \forall \delta v \in U_0, \quad (2.30)$$

gdzie:

$\delta P$  – całkowita moc wirtualna,

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega} \delta \underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} : \underline{\sigma} d\Omega \quad \text{– wirtualna moc wewnętrzna,} \quad (2.31)$$

$$\delta P^{ext} = \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho b d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta v \cdot \bar{T} d\Gamma \quad \text{– wirtualna moc zewnętrzna,} \quad (2.32)$$

$$\delta P^{kin} = \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho \dot{v} d\Omega \quad \text{– wirtualna moc kinetyczna.} \quad (2.33)$$

## 2.5. Dyskretyzacja równań elementu skończonego w uaktualnionym opisie Lagrange'a

Dyskretyzacja polega na rozwinięciu równań elementu skończonego opisanych w uaktualnionym układzie Lagrange'a za pomocą zasady mocy wirtualnych (2.30). Funkcje testowe można przedstawić w konwencji sumacyjnej za pomocą funkcji kształtu  $N_I$  w następujący sposób:

$$\delta v(X) = \delta v_I N_I(X), \quad (2.34)$$

gdzie  $\delta v_I$  jest wektorem wirtualnych prędkości węzłowych.

Pierwszym krokiem do dyskretyzacji równań elementu skończonego jest podstawienie równania (2.34) do (2.29). Otrzymujemy następującą formę zasady zachowania mocy wirtualnych:

$$\delta v_I \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x} \cdot \underline{\sigma} d\Omega - \delta v_I \cdot \int_{\Omega} N_I \rho b d\Omega - \delta v_I \cdot \int_{\Gamma_T} N_I \bar{T} d\Gamma + \delta v_I \cdot \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v} d\Omega = 0. \quad (2.35)$$

Ostateczna forma słaba równania momentu pędu jest przedstawiona równaniem (2.36).

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x} \cdot \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} N_I \rho b d\Omega - \int_{\Gamma_T} N_I \bar{T} d\Gamma + \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v} d\Omega = 0. \quad (2.36)$$

Siły węzłowe można wyprowadzić z odpowiednich składowych równania mocy wirtualnych:

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} : \underline{\sigma} d\Omega = \delta v_I \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x} \cdot \underline{\sigma} d\Omega = \delta v_I \cdot f^{int}, \quad (2.37)$$

$$\text{gdzie: } f^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_I}{\partial x} \cdot \underline{\sigma} d\Omega \quad - \text{ wewnętrzne siły węzłowe.} \quad (2.38)$$

$$\delta P^{ext} = \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho b d\Omega + \int_{\Gamma_T} \delta v \cdot \bar{T} d\Gamma = \delta v_I \cdot \int_{\Omega} N_I \rho b d\Omega + \delta v_I \cdot \int_{\Gamma_T} N_I \bar{T} d\Gamma = \delta v_I \cdot f^{ext} \quad (2.39)$$

$$\text{gdzie: } f^{ext} = \int_{\Omega} N_I \rho b d\Omega + \int_{\Gamma_T} N_I \bar{T} d\Gamma \quad - \text{ zewnętrzne siły węzłowe.} \quad (2.40)$$

$$\delta P^{kin} = \int_{\Omega} \delta v \cdot \rho \dot{v} d\Omega = \delta v_I \cdot \int_{\Omega} N_I \rho \dot{v} d\Omega = \delta v \cdot f^{kin}, \quad (2.41)$$

$$\text{gdzie: } f^{kin} = \int_{\Omega} \rho N_I \dot{v} d\Omega \quad - \text{ kinetyczne siły węzłowe.} \quad (2.42)$$

Analogicznie do (2.34) przyspieszenie dane za pomocą funkcji testowych można zapisać jako:

$$\dot{v} = \dot{v}_J N_J \quad (2.43)$$

$$\text{oraz } \dot{v} \cdot \dot{v}_J^{-1} = N_J. \quad (2.44)$$

Mnożąc równanie (2.42) przez  $v_J^{-1}$  oraz podstawiając równanie (2.44) można uzyskać tensor mas  $\underline{M}$ :

$$\underline{M} = \int_{\Omega} \rho N_I N_J d\Omega. \quad (2.45)$$

Podstawiając równania (2.38), (2.40) i (2.45) do równania (2.36) otrzymujemy dyskretną formę równania momentu pędu:

$$\underline{M} \cdot \dot{v} + f^{int} = f^{ext}. \quad (2.46)$$

Aby rozwiązać równanie (2.46) musi ono być uzupełnione o związki konstytutywne w punktach całkowania oraz o prędkość deformacji w zależności od prędkości węzłowych.

## 2.6. Związki konstytutywne

Jednym z najważniejszych elementów nieliniowej symulacji komputerowej jest użycie odpowiedniego związku konstytutywnego opisu materiału [13]. Związek ten powinien uwzględniać wpływ prędkości odkształceń plastycznych na wartości naprężeń wewnętrznych. Założeniem dla modeli plastycznych jest to, że istnieje addytywny związek pomiędzy prędkościami odkształceń:

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p, \quad (2.47)$$

gdzie:  $\underline{\dot{\epsilon}}$  – tensor prędkości odkształcenia,  $\underline{\dot{\epsilon}}^e$  – tensor prędkości odkształcenia sprężystego,  $\underline{\dot{\epsilon}}^p$  – tensor prędkości odkształcenia plastycznego.

Pozostałe ogólne sformułowania dla modeli niesprężystych:

– równanie ewolucji naprężeń:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{E} : \underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{E} : (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^p), \quad (2.48)$$

– reguła płynięcia:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\sigma}}, \quad (2.49)$$

gdzie:  $\dot{\lambda}$  jest parametrem pracy odkształcenia plastycznego,  $g$  – potencjałem plastycznego płynięcia.

Szerzej modele konstytutywne zastosowane w dalszej części rozprawy omówiono w rozdziale 3.

## 2.7. Numeryczna metoda rozwiązywania nieliniowych układów dyskretnych

Równanie ruchu (2.46) można zdyskretyzować w opisie Lagrange'a w formie:

$$M\ddot{u} + f^{int} = f^{ext}, \quad (2.50)$$

gdzie:  $u$  – wektor przemieszczenia,  $M$  – macierz mas.

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne. Najprostszą metodą rozwiązania tego równania jest jawne całkowanie w funkcji czasu. Najbardziej efektywną metodą rozwiązań problemów nieliniowych jest metoda różnic centralnych.

W metodzie tej prędkości są wyznaczone przez równanie (2.51) przy założeniu stałego przyspieszenia:

$$\dot{u}^{i+1/2} = \frac{u^{i+1/2} - u^{i-1/2}}{\Delta t} = \frac{u(t + \Delta t/2) - u(t - \Delta t/2)}{\Delta t}. \quad (2.51)$$

Prędkości są całkowane w czasie i dodawane do przemieszczeń na początku przyrostu aby wyznaczyć przemieszczenia na końcu przyrostu czasowego:

$$u^{i+1} = u^i + \Delta t \dot{u}^{i+1/2}. \quad (2.52)$$

Przyspieszenia są wyznaczone w następujący sposób:

$$\ddot{u}^i = \frac{v^{i+1/2} - v^{i-1/2}}{\Delta t} \text{ lub } v^{i+1/2} = \Delta t M^{-1} f^i + v^{i-1/2}. \quad (2.53)$$

Uaktualnianie przemieszczeń w równaniu (2.53) nie wymaga żadnych algebraicznych równań. Rozwiązanie całkowania jawnego jest więc prostsze od statycznych liniowych analiz naprężeń.

Poniżej pokazany jest schemat rozwiązania zagadnienia metodą całkowania różnic centralnych.

## 2.7.1 Schemat rozwiązania problemu numerycznego metodą całkowania jawnego w uaktualnionym opisie Lagrange'a

1. Ustalenie warunków początkowych oraz ustawienie początkowe  $v^0, \underline{\sigma}^0; i=0, t=0$ ,  
wyznaczenie  $M$ ,
2. Określenie  $f^i$  (patrz poniżej),

3. Obliczenie przyspieszeń  $a^i = M^{-1}f^i$ ,
4. Uaktualnienie prędkości węzłów:  $v^{i+1/2} = v^{i+1/2-\alpha} + \alpha \Delta t a^n$  :  $\alpha = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } i = 0 \\ 1 & \text{dla } i > 0 \end{cases}$ ,
5. Założenie podstawowych warunków brzegowych: jeśli węzeł I na  $\Gamma_v$  :  $v_I^{i+1/2} = \bar{v}(x_I, t^{i+1/2})$ ,
6. Uaktualnienie przemieszczeń węzłowych:  $u^{i+1} = u^i + \Delta t v^{i+1/2}$ ,
7. Uaktualnienie licznika i czasu:  $i \leftarrow i + 1, t \leftarrow t + \Delta t$ ,
8. Wyjście; jeśli symulacja jeszcze nie skończona należy przejść do punktu 2.

Określenie  $f^i$

1. Złożyć węzłowe przemieszczenia elementu  $u^i$  i prędkości  $v^{i+1/2}$ ,
2. Jeśli  $i = 0$  należy przejść do punktu 5,
3. Obliczenie miar deformacji,
4. Obliczenie naprężeń za pomocą równań konstytutywnych,
5. Obliczenie wewnętrznych sił węzłowych poprzez odpowiednie równanie,
6. Obliczenie zewnętrznych sił węzłowych w elemencie oraz  $f = f^{\text{ext}} - f^{\text{int}}$ ,
7. Przeniesienie sił węzłowych elementu do macierzy globalnej.

## 2.8. Zbieżność rozwiązania – metody badania

Podstawową wielkością decydującą o stabilności metody różnic centralnych jest krytyczny krok czasowy, zwany również stabilnym krokiem czasowym. Krok ten zależy od częstości drgań własnych najmniejszego elementu w modelu i można przedstawić go wzorem [15]:

$$\Delta t = \min \frac{l_e}{c_e}, \quad (2.54)$$

gdzie:  $l_e$  jest najmniejszym wymiarem elementu  $e$ ,  $c_e$  jest aktualną prędkością fali w elemencie  $e$ .

Niestabilność rozwiązania metodą różnic centralnych można skontrolować za pomocą bilansu energii. Niestabilność powoduje, że zostaje zachwiana zasada

zachowania energii. W metodzie różnic centralnych energia jest całkowana podobnie jak równania ruchu.

Energia wewnętrzna  $W_{int}$ :

$$W_{int}^{i+1} = W_{int}^i + \frac{\Delta t^{i+1/2}}{2} (\mathbf{v}^{i+1/2})^T (\mathbf{f}_{int}^i + \mathbf{f}_{int}^{i+1}) = W_{int}^i + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_{int}^i + \mathbf{f}_{int}^{i+1}). \quad (2.55)$$

Energia zewnętrzna  $W_{ext}$ :

$$W_{ext}^{i+1} = W_{ext}^i + \frac{\Delta t^{i+1/2}}{2} (\mathbf{v}^{i+1/2})^T (\mathbf{f}_{ext}^i + \mathbf{f}_{ext}^{i+1}) = W_{ext}^i + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_{ext}^i + \mathbf{f}_{ext}^{i+1}), \quad (2.56)$$

gdzie:  $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{i+1} - \mathbf{d}^i$  – wektor przyrostu przemieszczeń. (2.57)

Energia kinetyczna:

$$W_{kin}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^i)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^i. \quad (2.58)$$

Zasada zachowania energii zakłada bilans:

$$|W_{kin} + W_{int} - W_{ext}| \leq \varphi \max(W_{kin}, W_{int}, W_{ext}), \quad (2.59)$$

gdzie  $\varphi$  jest tolerancją.

Czasami procesy dynamiczne wymagają dodatkowych zabiegów utrzymujących stabilność rozwiązania. Tymi procesami jest skalowanie masy oraz ustanowienie czasu podcyklu. Pierwszy proces polega na zamrożeniu spadku wielkości przyrostu kroku wraz ze wzrostem masy sztywnego elementu. Drugi polega na podzieleniu modelu na podobszary i ustaleniu kroku całkowego w każdym z obszarów z osobna.

Narzędziem numerycznym, które wybrano do analizy jest Abaqus Explicit. System ten oparty jest na przedstawionych w skrócie powyższych założeniach.



## Rozdział 3

Modele materiałowe stosowane w analizie numerycznej ustrojów obciążonych w sposób nagły

## 3.1. Sprężysto – lepkoplastyczny model stali ze zniszczeniem

We wszystkich analizach założono jeden model konstytutywny dla stali, tzn. kryterium plastyczności von Misesa ze wzmocnieniem izotropowym, osłabieniem i stowarzyszonym prawem płynięcia. Został również uwzględniony wpływ prędkości odkształceń plastycznych za pomocą modelu Cowpera – Symodsa [34]. W zmiennych jednoosiowych model ten jest zdefiniowany poprzez następujące równanie, wyrażające krzywe wzmocnienia prędkości odkształceń w zależności od statycznej relacji [45,72]:

$$\sigma_y^o(\varepsilon_{eq}^p, \dot{\varepsilon}_{eq}^p) = \sigma_y^o(\varepsilon_{eq}^p)R(\dot{\varepsilon}_{eq}^p), \quad (3.1)$$

gdzie:  $\sigma_y^o$  jest statycznym naprężeniem plastycznym,  $\varepsilon_{eq}^p$  jest równoważnym odkształceniem plastycznym,  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$  jest równoważną prędkością odkształceń plastycznych,  $R$  jest stosunkiem naprężeń plastycznych w niezerowym stanie odkształcenia do statycznego naprężenia plastycznego ( $R=1$  dla  $\dot{\varepsilon}_{eq}^p = 0.0$ ). Parametr  $R$  jest zdefiniowany przez:

$$R = \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^p}{m_k} \right)^{n_k} + 1, \quad (3.2)$$

gdzie  $m_k$ ,  $n_k$  są parametrami materiałowymi (dla stali plastycznej  $m_k = 40 \text{ s}^{-1}$ ,  $n_k = 5$  [48]). Zniszczenie materiału zostało zdefiniowane jako zniszczenie plastyczne, oparte na maksymalnej wartości równoważnych odkształceń  $\varepsilon_{eq}^{p \max}$  zdefiniowanych jak niżej:

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} (\underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p)} dt, \quad (3.3)$$

gdzie  $\underline{\dot{\varepsilon}}^p$  jest tensorem prędkości odkształceń plastycznych. W tym modelu, miara zniszczenia  $D$  może zostać określona wg poniższego wzoru:

$$D = \frac{\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_{eq,0}^p}{\varepsilon_{eq,f}^p - \varepsilon_{eq,0}^p}, \quad (3.4)$$

gdzie:  $\varepsilon_{eq}^p$  jest bieżącym, równoważnym odkształceniem plastycznym,  $\varepsilon_{eq,0}^p, \varepsilon_{eq,f}^p$  oznaczają początkową i końcową wartość równoważnych odkształceń plastycznych; kiedy zjawisko zniszczenia zaczyna się  $D = 0$ , gdy się kończy  $D = 1$ .

Według danych wyrażen, sprężysta odpowiedź jest oparta na sprężystości materiału uszkodzonego. Moduły sprężystości materiału z uszkodzeniami ( $G_D$  – moduł ścinania,  $K_D$  – moduł ściśliwości) są zdefiniowane przez:

$$\begin{aligned} G_D &= (1 - D)G, \\ K_D &= (1 - D)K. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Powierzchnia płynięcia plastycznego materiału uszkodzonego również zależy od wartości  $D$ :

$$\sigma_{yd} = (1 - D)\sigma_y(\varepsilon_{eq}^p). \quad (3.6)$$

Zestaw parametrów materiałowych wziętych do analiz przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Charakterystyka materiałowa stali

Granica plastyczności	345 MPa
Wytrzymałość na ściskanie (rozciąganie)	700 MPa
Odształcenia plastyczne odpowiadające wytrzymałości na ściskanie	0.20
Równoważne końcowe odkształcenie plastyczne $\varepsilon_{eq,f}^p$	0.45
Równoważne początkowe odkształcenie plastyczne $\varepsilon_{eq,0}^p$	0.25

### 3.2. Zmodyfikowany model betonu Druckera – Pragera (DP)

Zmodyfikowany model Drackera – Pragera jest zdefiniowany przez powierzchnię plastyczności wyrażoną w formie:

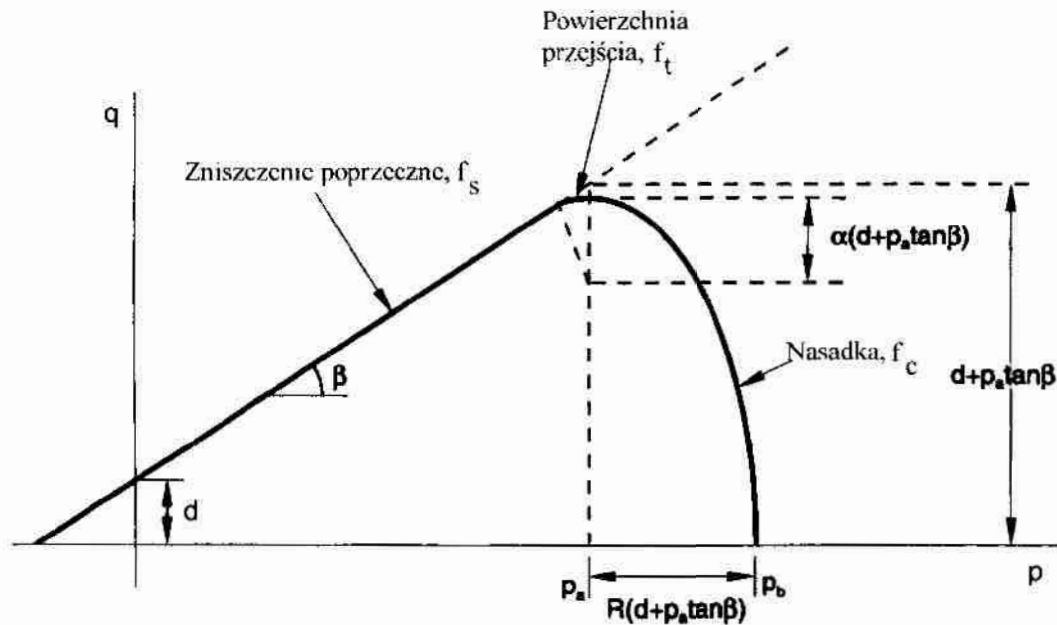
$$f_s(\sigma, \beta, d) = q - p_v \tan\beta - d, \quad (3.7)$$

gdzie:  $\beta$  jest kątem tarcia wewnętrznego,  $d$  jest kohezją,

$$p_v = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad - \text{naprężenie średnie,} \quad (3.8)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{s} : \underline{s})} \quad - \text{równoważne naprężenie Misesa,} \quad (3.9)$$

$$\underline{s} = \underline{\sigma} + p_v \underline{I} \quad - \text{dewiator tensora naprężeń.} \quad (3.10)$$



Rys. 3.1. Zmodyfikowany model betonu Druckera – Pragera

Powierzchnia plastyczności jest uzupełniona poprzez nasadkę o kształcie eliptycznym ze stałym mimośrodem w płaszczyźnie  $p - q$ , wyrażonej jak niżej:

$$f_c(\underline{\sigma}, \beta, d, R_0, \varepsilon_v^p, \alpha) = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left( \frac{R_0 t}{1 + \alpha - \alpha / \cos \beta} \right)^2} - R_0 (d + p_a \tan \beta) = 0, \quad (3.11)$$

gdzie:  $R_0$  jest parametrem materiałowym,  $\alpha$  jest parametrem, który pozwala na łagodne przejście z powierzchni plastyczności (3.7) do nasadki (3.11). Parametr  $p_a$  definiuje wzmocnienie lub osłabienie zaokrąglenia, w zależności od objętościowych odkształceń plastycznych:

$$p_a = \frac{p_b - R_0 d}{(1 + R_0 \tan \beta)}, \quad (3.12)$$

gdzie  $p_b$  jest plastycznym naprężeniem hydrostatycznego ściskania.

Model jest uzupełniony o powierzchnię przejścia z (3.7) do (3.11), [1]:

$$f_t = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[ q - \left( 1 - \frac{\alpha}{\cos\beta} \right) (d + p_a \tan\beta) \right]^2} - \alpha(d + p_a \tan\beta) = 0. \quad (3.13)$$

Aby otrzymać właściwe wartości parametrów definiujących model, przeprowadzono szereg testów na podstawie wyników eksperymentalnych przedstawionych w [40,74]. Podstawowe wartości parametrów zmodyfikowanego modelu Druckera – Pragera zastosowane w dalszych analizach zostały przedstawione w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Parametry zmodyfikowanego modelu betonu Druckera – Pragera.

Kohezja materiałowa $d$	6.14 MPa
Kąt tarcia wewnętrznego $\beta$	60°
Parametr mimośrodowo zaokrąglenia nasadki $R_0$	0.11
Objętościowe odkształcenie plastyczne $\varepsilon_v^p$ dla początkowej pozycji powierzchni płynięcia	0.0
Parametr promienia przejścia powierzchni $\alpha$	0.01

Model ten przyjęto nazywać w dalszej części rozprawy modelem Druckera – Pragera (DP).

### 3.3. Model kruchego pęknięcia betonu (BC)

Model kruchego pęknięcia, który znajduje się w bibliotece kodu ABAQUS/Explicit [1] odzwierciedla pęknięciowe zachowanie betonu z założeniem charakterystyki liniowosprężystej podczas ściskania. W tym podejściu założono kruche pęknięcie wraz z ustalonymi kierunkami pęknięcia prostopadłego. Aby wykryć początek procesu pęknięcia zastosowano kryterium Rankine'a – rysy pojawiają się gdy maksymalne naprężenia główne rozciągające przekroczą wytrzymałość materiału na rozciąganie. Powierzchnia pęknięcia z założenia jest normalna do kierunku maksymalnych głównych naprężeń rozciągających. Możliwym jest również zamykanie i ponowne otwarcie rys [41].

Analogicznie do warunków klasycznej plastyczności, warunek zgodności dla pęknięcia został wprowadzony w postaci tensora:

$$\underline{C}(\underline{t}, \underline{\sigma}^{I,II}) = 0, \quad (3.14)$$

gdzie:  $\underline{C} = [C_{nn} \ C_{tt} \ C_{ss} \ C_{nt} \ C_{ns} \ C_{ts}]^T$  i  $\underline{t} = [t_{nn} \ t_{tt} \ t_{ss} \ t_{nt} \ t_{ns} \ t_{ts}]^T$  są tensorami zapisanymi w układzie współrzędnych kierunku rys,  $\underline{\sigma}^{I,II}$  odwzorowuje osłabienie modelu podczas rozciągania w przypadku zgodnych składowych naprężenia i poprzeczne osłabienie / zatrzymanie (retencja) modelu w przypadku poprzecznych składowych naprężenia.

Warunek pęknięcia dla pojedynczej rysy kierunku normalnego  $n$  może zostać wyrażony w sposób jawny:

$$C_{nn}(t_{nn}, \sigma_t^I) = t_{nn} - \sigma_t^I(e_{nn}^{ck}) = 0, \quad (3.14)$$

gdzie:  $e_{nn}^{ck}$  jest odpowiednią wartością odkształceń w lokalnym kierunku  $n$ ,  $\sigma_t^I(e_{nn}^{ck})$  jest ewolucją osłabienia przy rozciąganiu.

Dla zamknięcia / ponownego otwarcia rys, odpowiedni warunek posiada następującą formę:

$$C_{nn}(t_{nn}, \sigma_c^I) = t_{nn} - \sigma_c^I(e_{nn}^{ck}) \Big|_{e_{nn}^{open}} = 0, \quad (3.15)$$

W tym przypadku, wartość  $\sigma_c^I(e_{nn}^{ck}) \Big|_{e_{nn}^{open}}$  jest ewolucją zamknięcia / ponownego otwarcia rys. Maksymalne odkształcenie otwarcia rys jest zdefiniowane jako:  $e_{nn}^{open} = \max(e_{nn}^{ck})$  zmierzone po historii. Podobne warunki mogą być napisane dla kierunków  $t$  i  $s$ .

Warunek pęknięcia poprzecznego dla składowej  $nt$  może być wyrażony jak niżej:

$$C_{nt}(t_{nt}, \sigma_s^{II}) = t_{nt} - \sigma_s^{II}(g_{nt}^{ck}, e_{nn}^{ck}, e_{tt}^{ck}) = 0, \quad (3.16)$$

gdzie  $\sigma_s^{II}(g_{nt}^{ck}, e_{nn}^{ck}, e_{tt}^{ck})$  jest ewolucją siły tnącej, zależnej liniowo od odkształceń poprzecznych, jak i również od odkształceń otwarcia rys. Odpowiednie warunki dla składowych  $ns$  i  $ts$  posiadają podobną postać.

Ten konstytutywny model kruchej pęknięcia jest dostępny w bibliotece systemu ABAQUS/Explicit [1], i był wykorzystany do modelowania zachowania betonu w wewnętrznej części konstrukcji warstwowej tunelu. Parametry modelu założone w analizach przedstawia tabela 3.3.

Tabela 3.3. Parametry modelu kruchego pęknięcia betonu (BC)

Naprężenie pozostałe po otwarciu rys $\sigma_t^l$	Odkształcenie po otwarciu rys $e_{nn}^{ck}$
10 MPa	0.0
0.1 MPa	0.005
Współczynnik retencji siły poprzecznej $\rho_1$	Odkształcenie otwarcia rys $e_{nn}^{ck}$
1.0	0.0
0.01	0.05

### 3.4. Sprężysto – plastyczny model betonu z uwzględnieniem degradacji (EPD)

Aby uniknąć ograniczeń, które niosą ze sobą przedstawione wcześniej modele konstytutywne betonu, alternatywny model został wprowadzony na podstawie rozważań przedstawionych przez Comi i in. [32]. Ten model zakłada zachowanie plastyczno – kruche aż do zniszczenia, głównie przy obciążeniu ściskającym. Efekty makroskopowe mikroskopowej degradacji materiału mogą zostać zdefiniowane przez pojedynczy skalar zmiennej zniszczenia  $D$  [52,53].

Tensor naprężenia  $\underline{\sigma}$  można zdefiniować jako pochodną swobodnej energii Helmholtza  $\Psi$ :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^{in}}, \quad (3.17)$$

gdzie:  $\rho$  jest gęstością materiału oraz  $\underline{\varepsilon}^{in} = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^e$  oznacza tensor odkształcenia niesprężystego.

Prędkość uwalniania swobodnej energii Helmholtza  $Y$  można przedstawić jako:

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D}. \quad (3.18)$$

Dla swobodnej energii Helmholtza, zakłada się następującą jej postać:

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} (1 - D) \left\{ K (\varepsilon_v - \varepsilon_v^m)^2 + 2G (1 - aD) (\underline{e} - \underline{e}^m) : (\underline{e} - \underline{e}^m) \right\}, \quad (3.19)$$

gdzie:  $K$  i  $G$  są odpowiednio modułami objętościowym i ścinania niezniszczonego materiału,  $\varepsilon_v$  jest pierwszym niezmiennikiem tensora odkształcenia  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{e}$  jest jego dewiatorem:

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\underline{\varepsilon}), \quad (3.20)$$

$$\underline{e} = \underline{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_v \cdot \underline{I} \quad (3.21)$$

oraz w zakresie niesprężystym:

$$\varepsilon_v^{in} = \text{tr}(\underline{\varepsilon}^{in}), \quad (3.22)$$

$$\underline{e}^{in} = \underline{\varepsilon}^{in} - \frac{1}{3}\varepsilon_v^{in} \cdot \underline{I}, \quad (3.23)$$

Moduły „zniszczone”  $G_D, K_D$ :

$$\begin{aligned} G_D &= (1-D)(1-aD)G \\ K_D &= (1-D)K \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie  $a$  jest parametrem zmieniającym się w zakresie  $a \in (0,1)$  [32].

Przyjęta postać wolnej energii  $\Psi$  daje następujące wyrażenie dla tensora naprężenia  $\underline{\sigma}$  i prędkości uwalniania energii zniszczenia  $Y$  [32]:

$$\underline{\sigma} = (1-D) \left\{ K(\varepsilon_v - \varepsilon_v^{in}) \underline{I} + 2G(1-aD)(\underline{e} - \underline{e}^{in}) \right\}, \quad (3.25)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \left\{ K(\varepsilon_v - \varepsilon_v^{in})^2 + 2G(1+a-2aD)(\underline{e} - \underline{e}^{in}) : (\underline{e} - \underline{e}^{in}) \right\}.$$

Funkcja plastyczności, definiująca obszar sprężysty jest określona poprzez wyrażenie:

$$f(\underline{\sigma}; D) = \frac{I_1^2}{18K(1-D)^2} + \frac{J_2}{2G(1-D)^2(1-aD)} + \frac{b_1(1+b_2D)}{1-D} I_1 - R_1, \quad (3.26)$$

gdzie:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}) \quad - \text{pierwszy niezmiennik tensora naprężenia } \underline{\sigma},$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s} \quad - \text{drugi niezmiennik dewiatora naprężenia } \underline{s},$$

$$R_1 = b_3 D + b_4,$$

$$b_i, i = 1, \dots, 4 \quad - \text{parametry zależne od materiału.}$$

Kryterium plastyczności jest uzupełnione poprzez tzw. „tension cut – off”:

$$I_1 - R_1(D) \leq 0. \quad (3.27)$$

Ewolucja funkcji wzmocnienia  $R_1$  jest sterowana poprzez miarę zniszczenia  $D$ . Dla całkowitej degradacji materiału  $D = 1$ .

Dla potencjału niesprężystego  $g(\underline{\sigma}, Y; D)$  otrzymano wyrażenie:

$$g(\underline{\sigma}, Y; D) = g_{in}(\underline{\sigma}; D) + g_d(Y; D), \quad (3.28)$$

$$g_{in}(\underline{\sigma}; D) = \frac{b_6}{18K} I_1^2 + \frac{b_5}{2G(1-aD)} J_2 + b_7(1+b_2D)(1-D)I_1,$$

$$g_d = Y,$$

gdzie  $b_i, i = 5, \dots, 7$  – parametry zależne od materiału.

Na tej podstawie możliwe jest zdefiniowanie prędkości niesprężystego tensora odkształcenia  $\dot{\underline{\epsilon}}^{in}$  i zniszczenia  $\dot{D}$ :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{in} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \left\{ \left[ \frac{b_6}{9K} I_1 + b_7(1+b_2D)(1-D) \right] \underline{1} + \frac{b_5}{2G(1-aD)} \underline{s} \right\}, \quad (3.29)$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial Y} = \dot{\lambda},$$

gdzie  $\dot{\lambda}$  jest parametrem pracy odkształceń plastycznych [52].

Parametry materiałowe wyznaczone doświadczalnie przez Comi i in. [32] i przejęte w dalszych analizach pokazano w tabeli 3.4. Model ten zaimplementowano za pomocą wewnętrznych procedur systemu ABAQUS/Explicit.

Tabela 3.4. Parametry sprężysto – plastycznego modelu betonu z uwzględnieniem degradacji (EPD)

$b_1$	$550 \cdot 10^{-6}$
$b_2$	5.5
$b_3$	0.02 MPa
$b_4$	0.002 MPa
$b_5$	1.47
$b_6$	1.02
$b_7$	$550 \cdot 10^{-6}$



## 3.5. Sprężysto – lepkoplastyczny model betonu z uwzględnieniem degradacji (EVPD)

Nowy model konstytutywny betonu utworzono na podstawie poprzedniego modelu (EPD) oraz wykorzystując badania doświadczalne przeprowadzone przez Nilssona [61]. Wykorzystano półempiryczne wzory, uśrednione przez Szcześniaka [73] i in., będące przekształceniem zależności uzyskanych przez Nilssona [61]. Równania te przedstawiono poniżej:

$$\frac{E_{bt}^d}{E_{bt}^{st}} = 1.061 + 0.0464 \cdot \log(\dot{\epsilon}) + 0.00683 \cdot (\log \dot{\epsilon})^2, \quad (3.30)$$

$$\frac{\epsilon_R^d}{\epsilon_R^{st}} = 1.08 + 0.112 \cdot \log(\dot{\epsilon}) + 0.0193 \cdot (\log \dot{\epsilon})^2. \quad (3.31)$$

gdzie:

$E_{bt}^d$  – początkowy styczny moduł sprężystości – dynamiczny,

$E_{bt}^{st}$  – początkowy styczny moduł sprężystości – statyczny,

$\epsilon_R^d$  – odkształcenie odpowiadające dynamicznej wytrzymałości na ściskanie,

$\epsilon_R^{st}$  – odkształcenie odpowiadające statycznej wytrzymałości na ściskanie,

$\dot{\epsilon}$  – prędkość odkształcenia.

Związki te zakładają stałą prędkość odkształceń w funkcji czasu.

Współczynnik wzrostu dynamicznej wytrzymałości został określony zależnością:

$$k_d = \frac{R_b^d}{R_b^{st}}, \quad (3.32)$$

gdzie:

$R_b^d$  – dynamiczna wytrzymałość betonu na ściskanie,

$R_b^{st}$  – statyczna wytrzymałość betonu na ściskanie.

Współczynnik ten został wyznaczony eksperymentalnie [61]:

$$k_d(\dot{\epsilon}) = 1.53 + 0.21 \cdot \log \dot{\epsilon} + 0.021 \cdot (\log \dot{\epsilon})^2. \quad (3.33)$$

Daje on zadowalającą zgodność w przedziale prędkości odkształceń:

$$\dot{\epsilon} \in [10^{-5} \text{s}^{-1}, 100 \text{s}^{-1}].$$

Tensor naprężenia przyjmuje postać:

$$\underline{\sigma}_R^d = (1-D) \left\{ K^d (\underline{\varepsilon}_v - \underline{\varepsilon}_v^{in}) \underline{1} + 2G^d (1-aD) (\underline{e} - \underline{e}^{in}) \right\}, \quad (3.34)$$

gdzie:

$K^d$  – moduł ścisłości zależny od  $\dot{\varepsilon}$ ,

$G^d$  – moduł ścinania zależny od  $\dot{\varepsilon}$ ,

$\varepsilon_v = \text{tr}(\underline{\varepsilon}_R^d)$  – pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia,

$\underline{e} = \underline{\varepsilon}_R^d - \frac{1}{3} \varepsilon_v \cdot \underline{1}$  – dewiator tensora odkształcenia,

$\varepsilon_v^{in} = \text{tr}(\underline{\varepsilon}_d^{in})$  – pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia w zakresie niesprężystym,

$\underline{e}^{in} = \underline{\varepsilon}_d^{in} - \frac{1}{3} \varepsilon_v^{in} \cdot \underline{1}$  – dewiator tensora odkształcenia w zakresie niesprężystym,

$\underline{\varepsilon}_R^d$  – tensor odkształcenia zależny od  $\dot{\varepsilon}$ ,

$\underline{\varepsilon}_d^{in}$  – tensor odkształceń niesprężystych zależny od  $\dot{\varepsilon}$ .

W celu opisu powierzchni plastyczności uzupełniono warunek (3.26):

$$f(\underline{\sigma}_R^d; D) = \frac{I_1^2}{18K^d(1-D)^2} + \frac{J_2}{2G^d(1-D)^2(1-aD)} + \frac{b_1(1+b_2D)}{1-D} I_1 - R_1, \quad (3.35)$$

gdzie:

$I_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}_R^d)$  – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia  $\underline{\sigma}_R^d$ ,

$J_2 = \frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s}$  – drugi niezmiennik dewiatora naprężenia  $\underline{s}$ ,

$R_1 = b_3 D + b_4$ ,

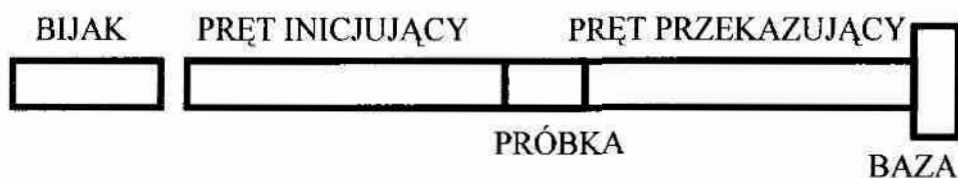
$b_i, i = 1, \dots, 4$  – parametry zależne od materiału.

## Rozdział 4

## 4.0. Weryfikacja modeli materiałowych

## 4.1. Próba z prętem Hopkinsona

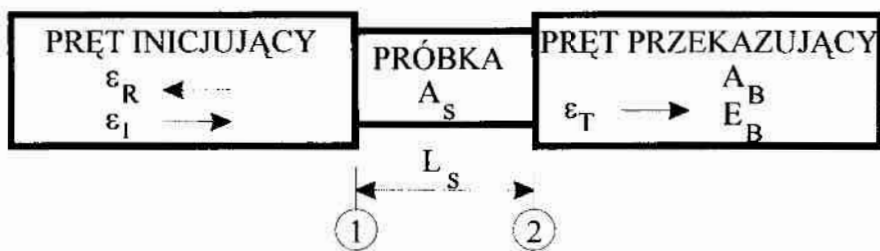
Doświadczenie polega na wywołaniu fali ściskającego naprężenia w pręcie nazwanym inicjującym poprzez uderzenie bijakiem [74]. Fala naprężeniowa wywołana w pręcie inicjującym ( $\sigma_I$ ) przechodzi przez niego i jest zapisywana na urządzeniu pomiarowym, częściowo odbija się na granicy styku pręt inicjujący – próbka a częściowo odbija się na granicy styku próbka – pręt przekazujący. Urządzenia pomiarowe na pręcie przekazującym zapisują tę część fali, która została przekazana przez próbkę ( $\sigma_T$ ) a urządzenia pomiarowe na pręcie inicjującym zapisują tę część fali, która odbiła się od granicy styku pręt inicjujący – próbka ( $\sigma_R$ ). Na podstawie tych pomiarów można określić naprężenie i odkształcenie w próbce betonowej. Schemat ideowy doświadczenia pokazuje rys. 4.1.



Rys. 4.1. Schemat ideowy doświadczenia z prętem Hopkinsona

## 4.1.1. Opis doświadczenia

W tym doświadczeniu pręt Hopkinsona składa się z cylindrycznej próbki betonowej umieszczonej pomiędzy dwoma również cylindrycznymi prętami stalowymi, rys. 4.2. Każdy pręt stalowy ma średnicę 51 mm i 1.3208 m długości. Do doświadczenia użyto stali nierdzewnej o symbolu PH 13-8 MO. Próbka betonowa ma wysokość równą średnicy, czyli 51 mm.



Rys. 4.2. Schemat zależności w pręcie Hopkinsona

Przy założeniu podłużnego rozchodzenia się fali naprężenia zgodnie z kierunkiem zaburzenia oraz równomiernego rozkładu naprężenia po długości próbki, przemieszczenie płaszczyzny próbka – pręt inicjujący ( $U_1$ ) oraz przemieszczenie płaszczyzny próbka – pręt przekazujący ( $U_2$ ) można zdefiniować jako:

$$U_1 = -C_0 \int \varepsilon_1(t) dt, \quad (4.1)$$

$$U_2 = -C_0 \int \varepsilon_2(t) dt, \quad (4.2)$$

gdzie  $C_0$  jest prędkością fali podłużnej. Odształcenie w punkcie 1 (rys. 4.2) jest sumą składowej odkształcenia  $\varepsilon_1$  od pręta inicjującego oraz składowej odkształcenia odbitego  $\varepsilon_R$ . Odształcenie w punkcie 2 (rys. 4.2) jest tylko odkształceniem przekazanym  $\varepsilon_T$ . Przy równomiernym rozłożeniu naprężenia w próbce po jej długości  $L_s$ , możemy określić wzór na odkształcenie w próbce  $\varepsilon_s$  jako:

$$\varepsilon_s = \frac{U_1 - U_2}{L_s}. \quad (4.3)$$

Podstawiając równania (4.1) i (4.2) do (4.3) otrzymujemy następującą zależność na odkształcenie próbki:

$$\varepsilon_s = \frac{-C_0}{L_s} \int [(\varepsilon_1 - \varepsilon_R) - \varepsilon_T] dt. \quad (4.4)$$

Zakładając równomierny rozkład po długości próbki, ciągłość naprężeń i prędkości, przy zachowaniu momentu pędu uzyskamy zależność na odkształcenie przy ściskaniu próbki:

$$\varepsilon_s = \frac{-2 \cdot C_0}{L_s} \cdot \int \varepsilon_R(t) dt. \quad (4.5)$$

Całkowanie równania (4.5) odbywa się w granicach od  $t = 0$  do  $t_i$ , gdzie  $t_i$  jest długością impulsu fali w pręcie inicjującym.

Poniższe równanie pokazuje warunek równowagi w doświadczeniu, rys. 4.2:

$$\sigma_s \cdot A_s = \sigma_T \cdot A_B, \quad (4.6)$$

gdzie:  $\sigma_s$  jest naprężeniem w próbce,  $A_s$  jest polem przekroju próbki,  $\sigma_T$  jest naprężeniem w pręcie przekazującym,  $A_B$  jest polem przekroju tego pręta. Dla układu Hopkinsona pręty stalowe muszą wykazywać pracę sprężystą, skąd można obliczyć naprężenie:

$$\sigma_T = E_B \cdot \varepsilon_T, \quad (4.7)$$

gdzie  $E_B$  jest modułem Younga dla pręta przekazującego. Naprężenie w próbce betonowej może być wyznaczone jako:

$$\sigma_s = \frac{A_B}{A_s} \cdot E_B \cdot \varepsilon_T. \quad (4.8)$$

Prędkość odkształceń próbki betonowej można określić różniczkując równanie (4.4):

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{-2 \cdot C_o}{L_s} \cdot \varepsilon_R. \quad (4.9)$$

Badania eksperymentalne, na których wzorowana była symulacja komputerowa, zostały przeprowadzone przez Tedesco, Hughesa i Rossa [74]. Quasi – statyczne parametry betonu podane przez autorów eksperymentu przedstawiono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Quasi – statyczne parametry betonu

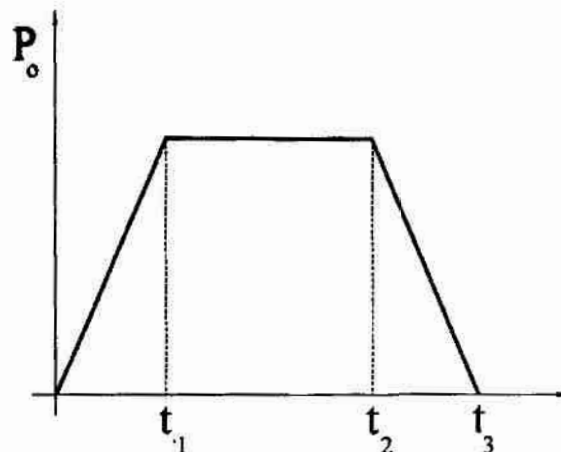
Parametr	Wartość
Początkowy moduł Younga [GPa]	37.93
Naprężenie ściskające [MPa]	57.7
Naprężenie rozciągające [MPa]	4.53
Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	2405

#### 4.1.2. Opis analizy komputerowej

Symulację komputerową przeprowadzono w środowisku ABAQUS/Explicit ver. 5.8 [1].

Dla stali przyjęto model konstytutywny jako sprężysty. Dla betonu użyto sprężysto – plastycznego modelu Druckera – Pragera z izotropowym wzmocnieniem i osłabieniem, zastosowano niestowarzyszone prawo płynięcia. Obciążenie zrealizowano za pomocą funkcji systemu (Amplitude, [1]), pozwalającą na wprowadzenie zmiennego w czasie obciążenia rozłożonego równomiernie na powierzchnię elementu. Funkcję obciążenia pokazuje rys. 4.3. Przeanalizowano dwa przypadki obciążenia: a) obciążenie

o wartości maksymalnej 77 MPa (wariant A) oraz b) obciążenie o wartości maksymalnej 240 MPa (wariant B).



Rys. 4.3. Wykres funkcji obciążenia

W tabeli 4.2 podano wartości obciążeń jakie przyjęto do analizy.

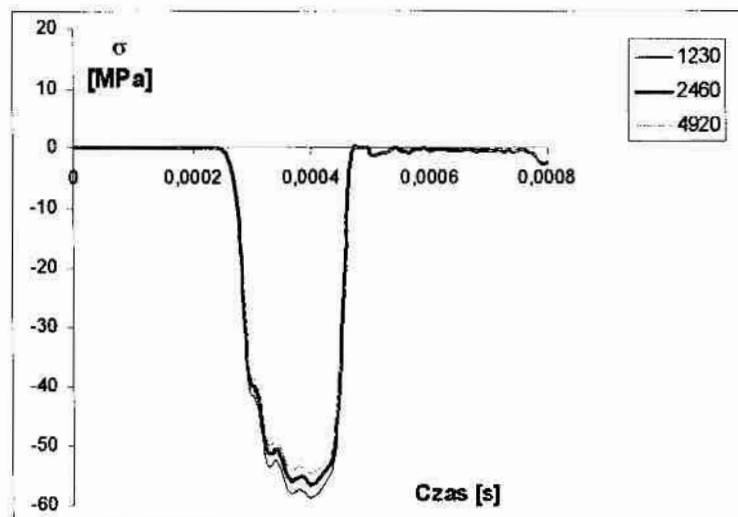
Tabela 4.2. Wartości obciążenia w czasie.

Wariant	Czas uzyskiwania wartości maks.	Czas działania maks. obciążenia	Czas	Poziom naprężeń
	$t_1$ [s·10 <sup>-6</sup> ]	$t_2$ [s·10 <sup>-6</sup> ]	$t_3$ [s·10 <sup>-6</sup> ]	$P_0$ [MPa]
A	27	227	252	-77
B	25	250	275	-240

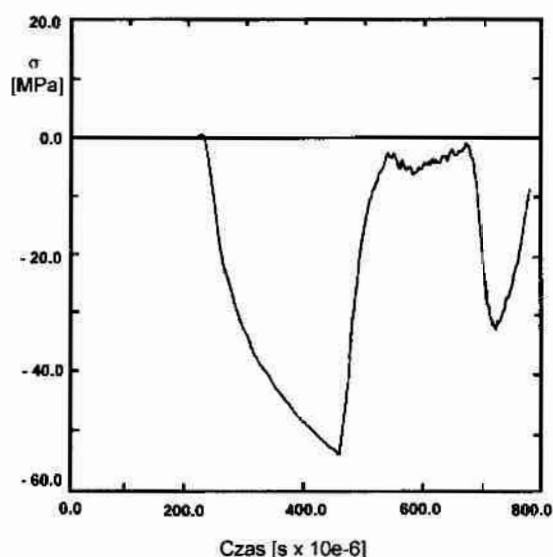
Do utworzenia modelu wykorzystano elementy z biblioteki systemu: CAX4R. Jest to element osiowosymetryczny, czterowęzłowy z jednym punktem całkowania Gaussa [46]. Próbkę jak i pręty stalowe modelowano w ten sam sposób. Pomiedzy prętami stalowymi a próbką betonową założono kontakt. Pręt przekazujący został zamocowany na brzegu. Przeanalizowano trzy gęstości siatki elementów skończonych: model (pręty stalowe i próbka) składający się z 510 elementów mający 1230 stopni swobody, model 1020 elementów o 2460 stopniach swobody oraz model 2040 elementów o 4920 stopniach swobody. W pierwszym modelu próbka składała się z 9 elementów o 32 stopniach swobody, w drugim z 25 elementów o 72 stopniach swobody i w trzecim z 49 elementów o 128 stopniach swobody. Pozostała liczba elementów przypadała na pręty stalowe. Po przeprowadzeniu analizy dotyczącej gęstości siatki i jej wpływu na wyniki, zdecydowano się użyć do porównań siatki składającej się

z 1020 elementów o 2460 stopniach swobody. Rys. 4.4 przedstawia wykres zmian naprężenia w próbce betonowej w czasie w zależności od liczby stopni swobody dla wariantu obliczeniowego A.

a)



b)



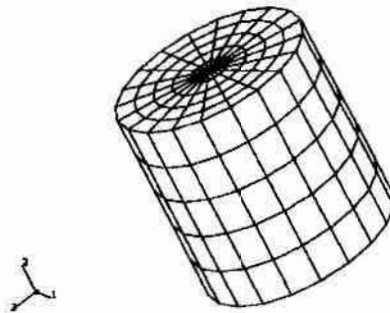
Rys. 4.4. Naprężenie podłużne w betonowej próbce – wariant obciążenia A

- a) wyniki z symulacji komputerowej Abaqus/Explicit w zależności od liczby stopni swobody w modelu elementów skończonych
- b) wyniki uzyskane przez Tedesco i in. [74]

Rys. 4.4a ilustruje kontrolę stabilności rozwiązania zadania. Jak widać na rysunku, wpływ gęstości siatki jest niewielki i uzasadnia wybór danego modelu.

Na rys. 4.5 przedstawiono widok modelu elementów skończonych samej próbki betonowej użytej do analiz porównawczych z pominięciem prętów inicjującego i odbijającego.

ABAQUS

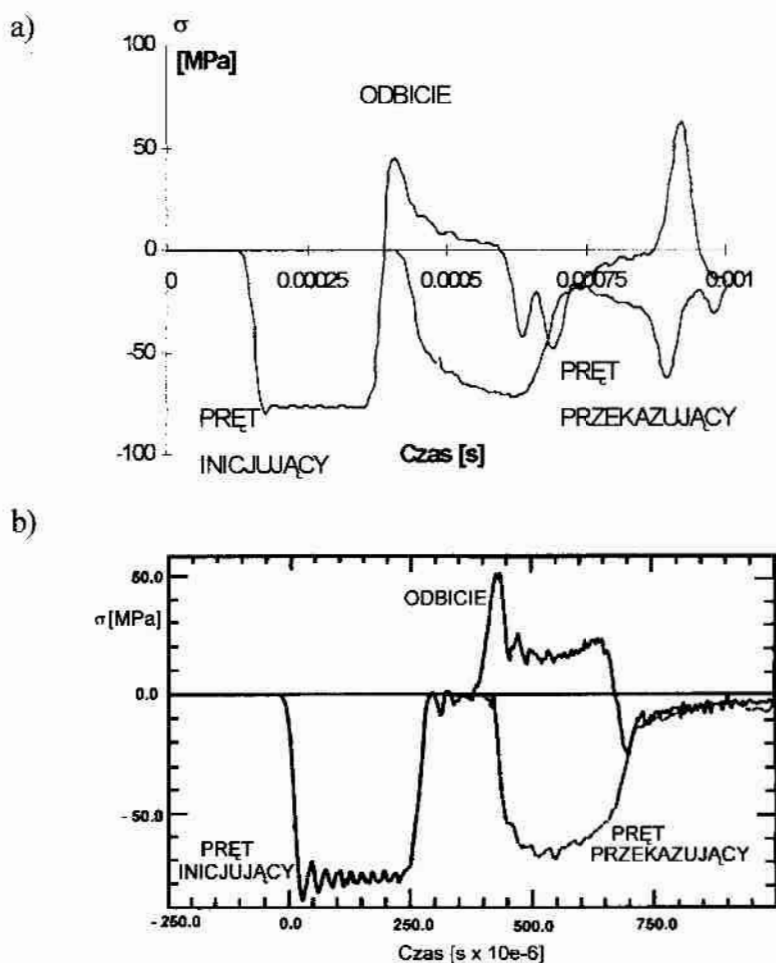


Rys. 4.5. Widok modelu elementów skończonych próbki betonowej wybranego do analiz

#### 4.1.3. Porównanie otrzymanych wyników

Doświadczenie pozwala na zbadanie rozchodzenia się fali naprężenia w zależności od czasu w prętach stalowych (pręcie inicjującym i przekazującym) oraz podłużnego naprężenia zmiennego w czasie, w betonowej próbce. Porównano wyniki uzyskane w symulacji komputerowej oraz wyniki z doświadczenia laboratoryjnego uzyskanego przez Tedesco i in. [74]. Rys. 4.6 przedstawia wykres propagacji naprężeń w prętach stalowych dla wariantu obciążenia A.





Rys. 4.6. Propagacja naprężeń w prętach stalowych – wariant obciążenia A

a) wyniki z symulacji komputerowej Abaqus/Explicit

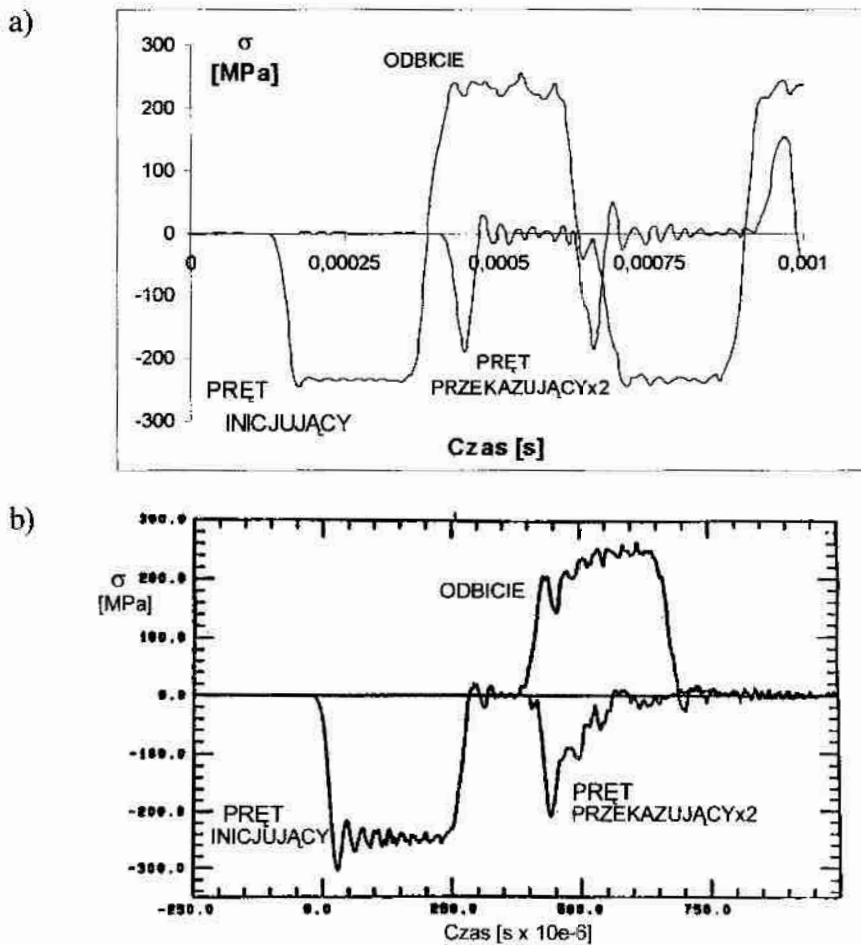
b) wyniki uzyskane przez Tedesco i in. [74]

Przedstawione ilustracje graficzne pokazują dobrą zgodność symulacji komputerowej doświadczenia z wynikami eksperymentu. Drobne różnice przesunięcia przebiegów w czasie mogą być spowodowane uproszczeniami modelowania eksperymentu.

Na kolejnych rysunkach przedstawiono wyniki jakie uzyskano w wariantcie obciążenia B – 240 MPa. Rys. 4.7 przedstawia wykres propagacji naprężeń w prętach stalowych.

Wadą użytego tu związku konstytutywnego betonu jest brak kryterium zniszczenia. Po obliczeniach należy przeprowadzić dodatkowo analizę odkształceń i usunąć z modelu te elementy, w których przekroczono wartość odkształceń

maksymalnych. Drugą bardzo istotną wadą jest brak wpływu prędkości odkształcenia, co przy większych obciążeniach daje większe rozbieżności wyników.

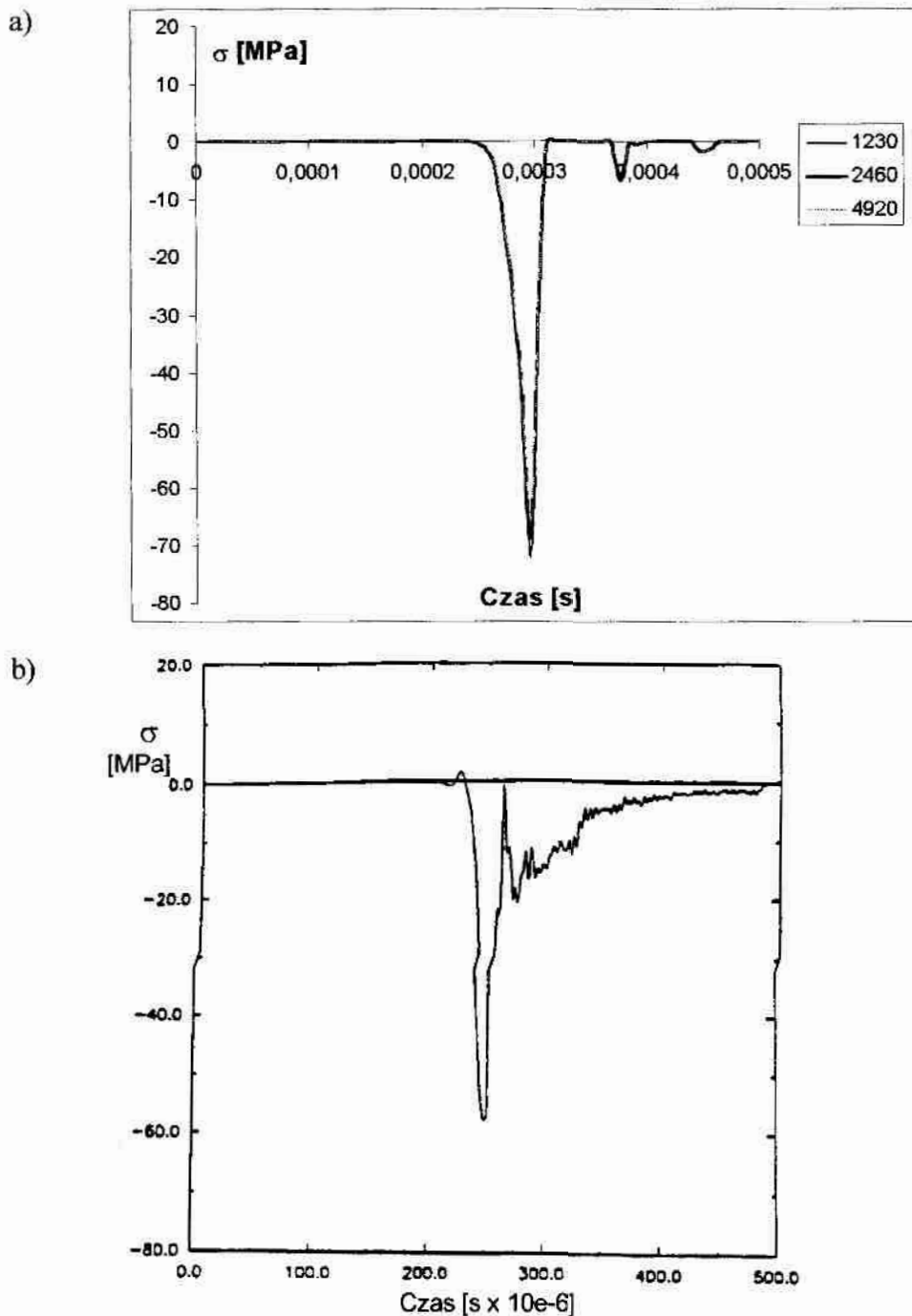


Rys. 4.7. Propagacja naprężeń w prętach stalowych – wariant obciążenia B

a) wyniki z symulacji komputerowej Abaqus/Explicit

b) wyniki uzyskane przez Tedesco i in. [74]

Na rys. 4.8 przedstawiono wykres zmian naprężenia w próbce betonowej w czasie, w zależności od liczby stopni swobody dla wariantu obliczeniowego B. Również w tym wariantcie wpływ gęstości siatki elementów skończonych nie ma dużego wpływu na końcowy wynik symulacji.

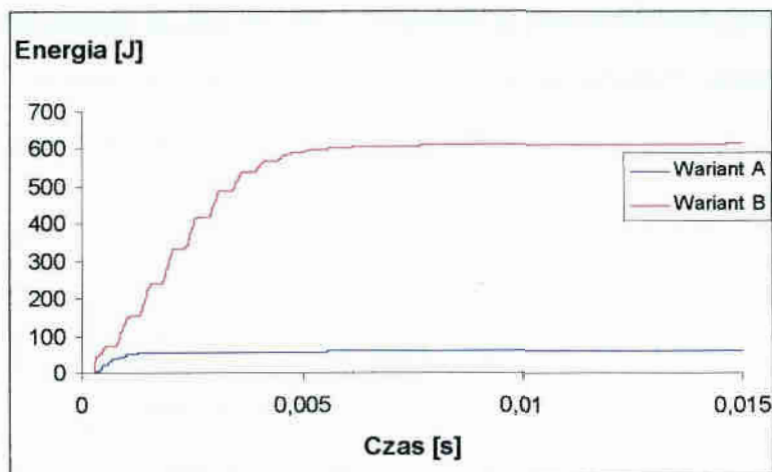


Rys. 4.8. Naprężenie podłużne w betonowej próbce – wariant obciążenia B

- a) wyniki z symulacji komputerowej Abaqus/Explicit w zależności od liczby stopni swobody w modelu elementów skończonych
- b) wyniki uzyskane przez Tedesco i in. [74]

Wyniki uzyskane w symulacji komputerowej w tej próbie dają zadowalającą zgodność z wynikami eksperymentu. Jednakże różnice są zauważalne i wynikają one ze sposobu modelowania warunków brzegowych, głównie zamocowania pręta przekazującego.

Szttywne zamocowanie daje o sobie znać wyraźnym odbiciem fali naprężenia, pojawiającym się cyklicznie o maksymalnej wartości. Wyższa wartość naprężenia w próbce betonowej zauważona w symulacji komputerowej jest spowodowana brakiem kryterium zniszczenia w związku konstytutywnym.



Rys. 4.9. Energia dyssypowana w czasie dla poszczególnych wariantów obciążenia

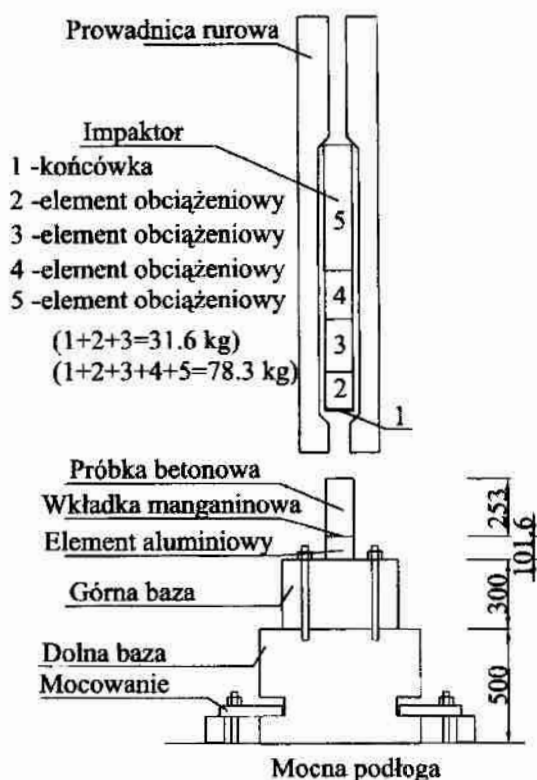
Rys. 4.9 przedstawia wykresy energii dyssypowanej w próbce betonowej na odkształceniach plastycznych dla poszczególnych wariantów obliczeniowych. Wykres ten jest kontrolą procesu obliczeniowego, a odcinek plateau wykresu świadczy o zakończonych procesach odkształceń plastycznych w próbce betonowej.

#### 4.1.4. Wnioski dotyczące analizy doświadczenia z prętem Hopkinsona

Doświadczenie z prętem Hopkinsona pozwala nam na zbadanie zachowania się modelu konstytutywnego betonu w przypadku obciążeń dynamicznych. Doświadczenie to może być używane do kalibracji takiego związku. Wadą eksperymentu, na którym została przeprowadzona kalibracja jest brak jakichkolwiek informacji na temat zmierzonych prędkości odkształceń. Nie pozwoliło to uzależnić związku materiałowego od tej wielkości. Wadą samego modelu Druckera – Pragera jest brak kryterium zniszczenia na poziomie obliczeń. Oznacza to, iż związek konstytutywny jest aktywny w module obliczeniowym bez względu na to, czy zostaną przekroczone wartości maksymalne naprężeń i odkształceń dla betonu, czy też nie. Niewątpliwie ma to również wpływ na dokładność obliczeń. Mimo tych uproszczeń model Druckera – Pragera nadaje się do symulacji złożonych konstrukcji inżynierskich.

## 4.2. Doświadczenie dynamicznego ściskania betonu

Drugim doświadczeniem jakie użyto do weryfikacji modeli konstytutywnych betonu jest eksperyment przeprowadzony przez Bischoffa i Perry'ego [17,62]. Eksperyment ten polega na dynamicznym ściskaniu próbki betonowej poprzez zrzucenie na nią masy z pewnej wysokości. Rys. 4.10 pokazuje schemat zestawu do badania dynamicznego ściskania jaki zastosowano w doświadczeniu.



Rys. 4.10. Schemat zestawu użytego w doświadczeniu Bischoffa – Perry'ego

## 4.2.1. Opis doświadczenia

Do badania użyto cylindrów betonowych o średnicy 101,6 mm i wysokości 254 mm. Zbadano zachowanie się materiału dla różnych charakterystyk wytrzymałościowych oznaczonych jako beton 30 MPa i beton 50 MPa. Dla porównania przeprowadzono zarówno testy dynamicznego, jak i statycznego ściskania. Szczegółowy opis aparatury pomiarowej oraz sposobów pomiarów zamieszczono w [62]. W doświadczeniu dynamicznym próbki zostały doprowadzone do zniszczenia poprzez uderzenie masą. Proces trwał  $300 \div 450 \mu\text{s}$ . Zastosowano masę 31,6 kg spadającą

z prędkością  $8.0 \div 8.35$  m/s i 78.3 kg spadającą z prędkością  $5.0 \div 5.5$  m/s. Autorzy eksperymentu określili doświadczalnie dla każdego z badanych przypadków średnią prędkość odkształceń. Dla serii wyników z betonem 30 MPa obciążonych dynamicznie masą 36.1 kg prędkość tę oszacowano na  $9 \text{ s}^{-1}$ , dla przypadku z betonem 50 MPa obciążonym dynamicznie masą 36.1 kg prędkość odkształceń określono na  $5.2 \text{ s}^{-1}$  i dla przypadku z betonem 50 MPa obciążonego masą 78.3 kg prędkość odkształceń określono na  $5.6 \text{ s}^{-1}$ . Prędkości te zostały uznane za średnie i stałe w całym procesie. W doświadczeniu statycznym próbki ściskano i doprowadzano do zniszczenia w czasie  $300 \div 350$  s. W testach laboratoryjnych deformacje mierzono za pomocą dwóch osiowych i obwodowych tensometrów umieszczonych po przeciwnych stronach próbki w centralnej jej części. Wyniki były zapisywane za pomocą specjalnej aparatury.

#### 4.2.2. Związek konstytutywny betonu przyjęty w symulacji komputerowej

Ze względu na dużą liczbę danych występujących w eksperymencie postanowiono zbadać sprężysto – lepkoplastyczny model konstytutywny betonu, model uwzględniający prędkość odkształcenia [3].

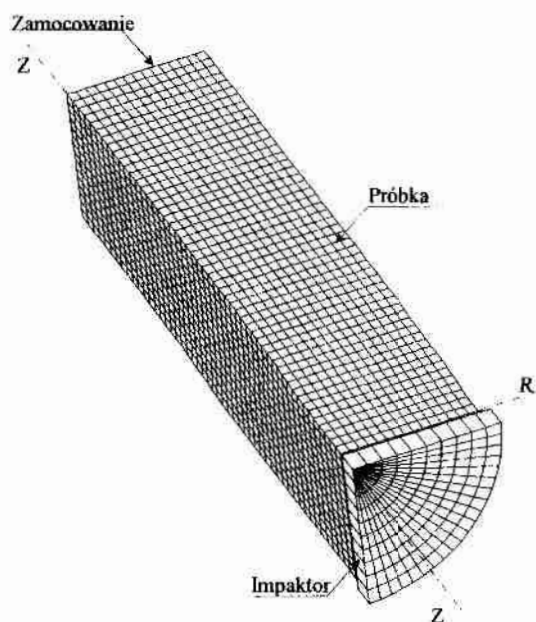
Opis związku konstytutywnego zastosowanego w analizie numerycznej przedstawiono w szczegółach w rozdziale 3.5.

#### 4.2.3. Opis analizy komputerowej

Symulację komputerową przeprowadzono w środowisku ABAQUS/Explicit i Standard ver. 5.8 [1]. Doświadczenie wymodelowano za pomocą elementów osiowosymetrycznych. Zastosowano element z biblioteki systemu komputerowego CAX4R. Jest to element osiowosymetryczny, czterowęzłowy z jednym punktem całkowania Gaussa [46]. Przeprowadzono analizę wpływu gęstości siatki na zbieżność wyników. Wzięto pod uwagę pięć różnych przypadków gęstości siatki elementów skończonych modelowanej próbki betonowej: model 9x20 (180 elementów, 464 stopnie swobody), 9x50 (450 elementów, 1064 stopni swobody), 15x50 (750 elementów, 1676 stopni swobody), 15x100 (1500 elementów, 3276 stopni swobody) oraz model 29x100 (2900 elementów, 6104 stopnie swobody). Po dyskusji i analizie otrzymanych wyników

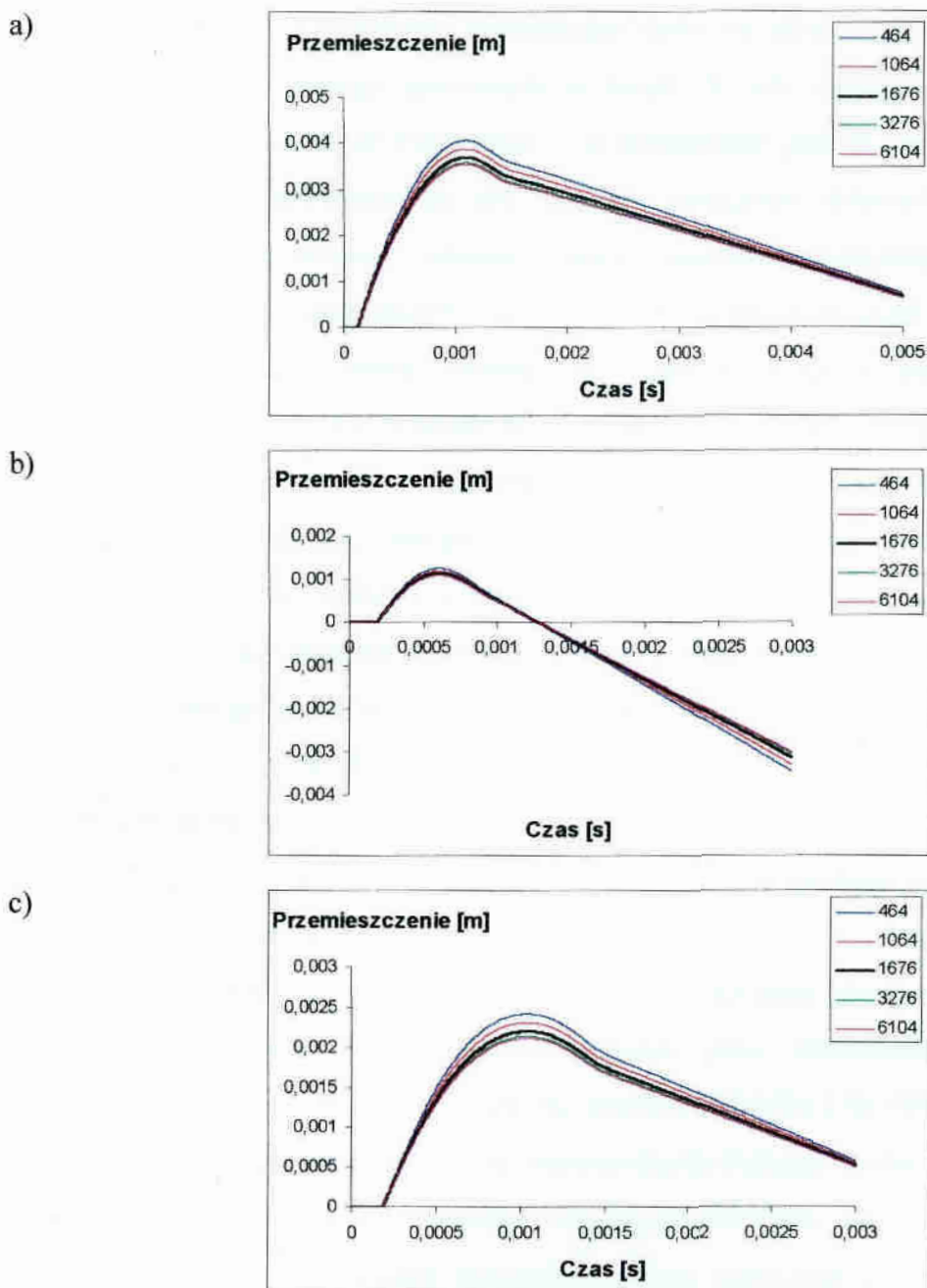
model 15x50 (750 elementów) został uznany za stabilny i wybrany do dalszych analiz.

Rys. 4.11 przedstawia widok modelu próbki betonowej użytej do analiz porównawczych.



Rys. 4.11. Widok siatki elementów skończonych (1/4 układu)

Na rys. 4.12 przedstawiono porównanie średniego przemieszczenia w czasie węzłów siatki w przekroju poddanemu obciążeniu w zależności od liczby stopni swobody. Porównanie to jest podstawą wyboru siatki modelu elementów skończonych.



Rys. 4.12. Wykres średniego przemieszczenia w czasie węzłów modelu w przekroju poddanym obciążeniu, w zależności od liczby stopni swobody

a) Beton 30 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora

$v_0 = 8.2$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 9$  [s<sup>-1</sup>]

b) Betonu 50 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora

$v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.2$  [s<sup>-1</sup>]

c) Beton 50 MPa, masa impaktora = 78.3 kg, początkowa prędkość impaktora

$v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.6$  [s<sup>-1</sup>]



Aby uprościć proces modelowania zastosowano klasyczne zamocowanie węzłów próbki (w miejscu doświadczalnego mocowania na bazie). W celu uzyskania pełnej symetrii osiowej nałożono dodatkowe więzy wzdłuż osi definiowanej jako oś obrotu.

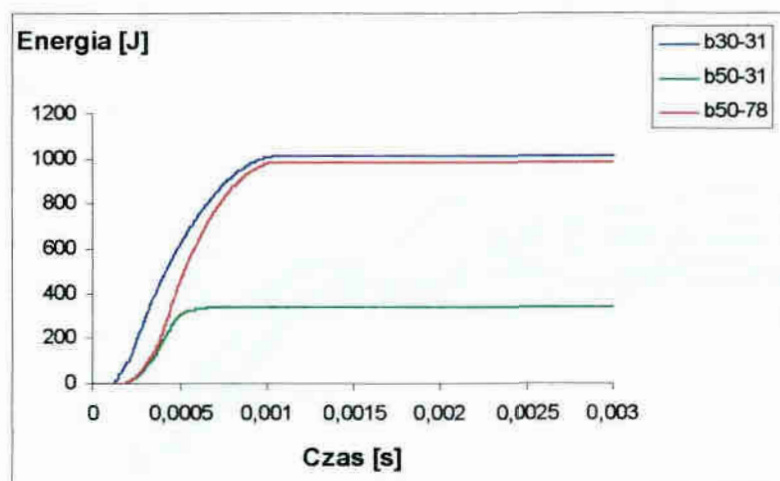
W testach numerycznych aby uzyskać obciążenie zbliżone do warunków eksperymentu, zastosowano element, który nazwano impaktorem. Został on zdefiniowany w ten sam sposób co próbka betonowa i posiadał we wszystkich symulacjach te same wymiary. Zmianę masy tego elementu otrzymywano poprzez zmianę jego gęstości. Impaktor przekazywał obciążenie dynamiczne na próbkę. Na węzły impaktora nałożono warunki początkowe – prędkości o wartości danej w materiałach z badań laboratoryjnych, uwzględniono również grawitację. Pomiędzy próbką a impaktorem zadano warunki kontaktu. Elementy te rozsunięto o 1 mm w celu obserwacji zjawiska zbliżenia się impaktora do próbki. Układ tak zdefiniowano aby odpowiadał następującym przypadkom: obciążenia dynamiczne masą 31.6 kg próbki betonu 30 MPa i próbki betonu 50 MPa ze średnimi prędkościami spadania 8.2 m/s i 5.3 m/s, prędkości odkształceń określono na  $9.0 \text{ s}^{-1}$  i  $5.2 \text{ s}^{-1}$  oraz obciążenie dynamiczne masą 78.3 kg próbki betonu 50 MPa ze średnią prędkością spadania 5.3 m/s, prędkość odkształceń określono na  $5.6 \text{ s}^{-1}$ .

W testach statycznych obciążono próbkę obciążeniem równym wytrzymałości betonu na ściskanie. Obciążenie zdefiniowano jako równomiernie rozłożone. Próbie statycznego ściskania poddano próbki betonowe 30 MPa i 50 MPa.

W symulacjach statycznych nie wprowadzono żadnego kryterium zniszczenia. Symulacje te miały na celu sprawdzenie czy model statyczny, na podstawie którego opracowano dynamiczny związek materiałowy dający zadowalające wyniki w pewnym zakresie prędkości odkształceń, da również wyniki zadowalające w symulacjach statycznych.

#### 4.2.4. Porównanie otrzymanych wyników

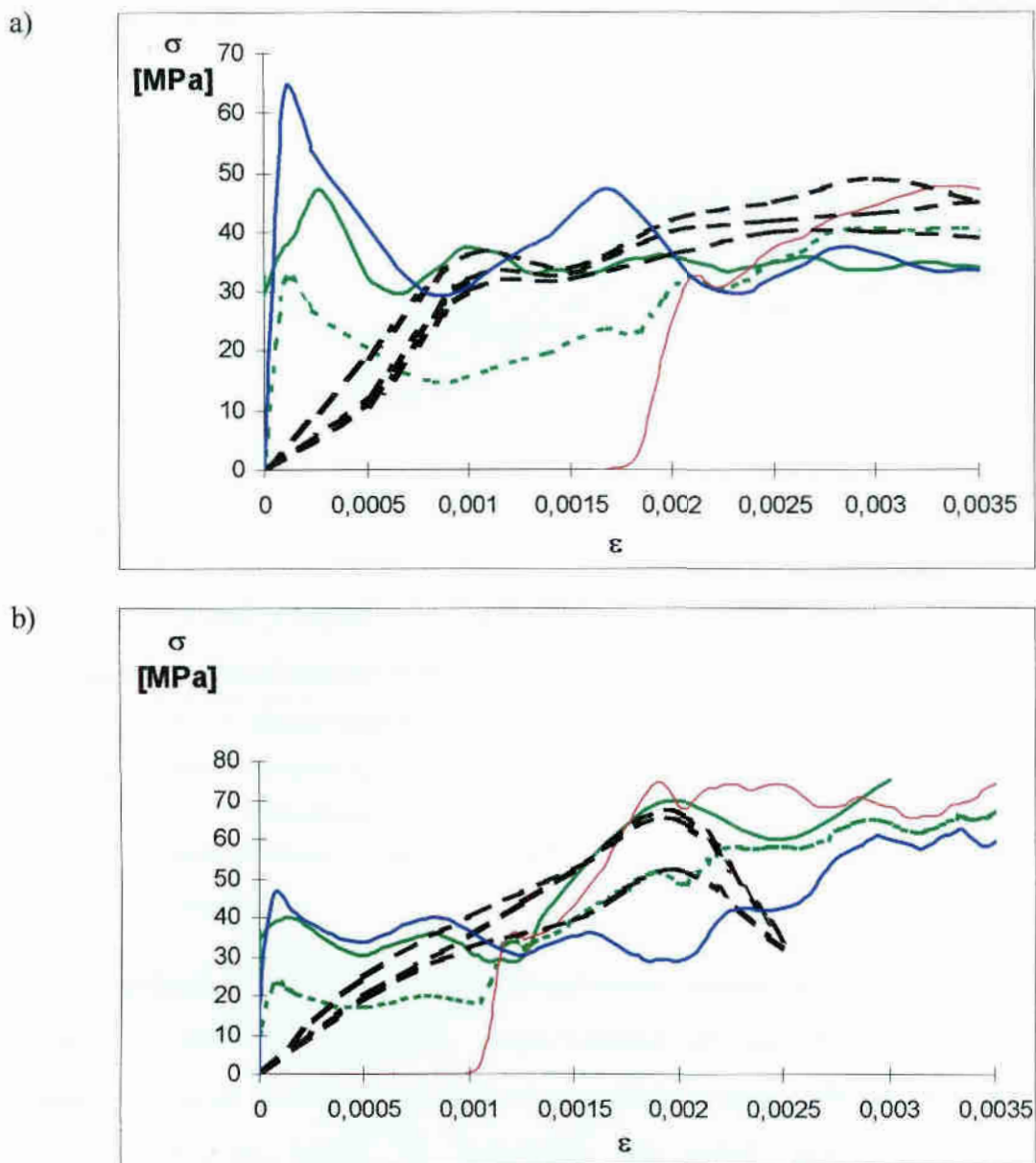
Kontrolę przebiegu procesu odkształceń plastycznych przedstawia rys. 4.13. Na wykresie pokazano rozkład energii dyssypowanej na odkształceniach plastycznych w czasie dla próbki betonowej w poszczególnych przypadkach obliczeniowych.



Rys. 4.13. Energia dyssypowana na odkształceniach plastycznych w czasie

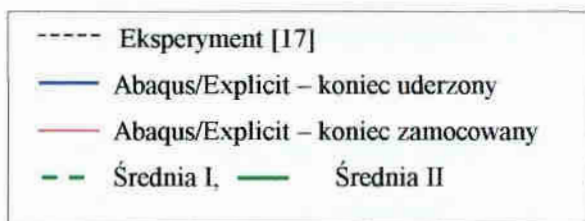
- b30-31 dla betonu 30 MPa, masa impaktor = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 8.2$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 9$  [s<sup>-1</sup>]
- b50-31 dla betonu 50 MPa, masa impaktor = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.6$  [s<sup>-1</sup>]
- b50-78 dla betonu 50 MPa, masa impaktor = 78.3 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.6$  [s<sup>-1</sup>]

W pierwszym rzędzie porównano charakterystyki dynamiczne  $\sigma - \epsilon$  uzyskane w symulacjach komputerowych oraz w testach laboratoryjnych. Charakterystyki te przedstawiono na rys. 4.14. Wykresy  $\sigma - \epsilon$  przedstawiono dla różnych przekrojów próbki betonowej. Zbadano naprężenia na końcu próbki, która została uderzona przez impaktor oraz na końcu próbki zamocowanym w bazie urządzenia pomiarowego. Odkształcenie w charakterystyce  $\sigma - \epsilon$  dotyczy przekroju ze środka wysokości próbki. Autorzy eksperymentu przedstawili trzy charakterystyki  $\sigma - \epsilon$ , dla każdej próby oddzielnie, gdyż trudności spowodowane sterowaniem procesu dynamicznego spowodowały, że współczynnik zmienności uzyskanych przez nich wyników lokalnie był zbyt duży aby wprowadzić wartość średnią [17]. Wykresy z symulacji komputerowej prezentują, jak widać, wyraźne różnice szczególnie w fazie początkowej doświadczenia. Postanowiono więc określić dodatkowo wartość średnią (średnia I), która wskazała uśredniony wynik doświadczenia numerycznego.

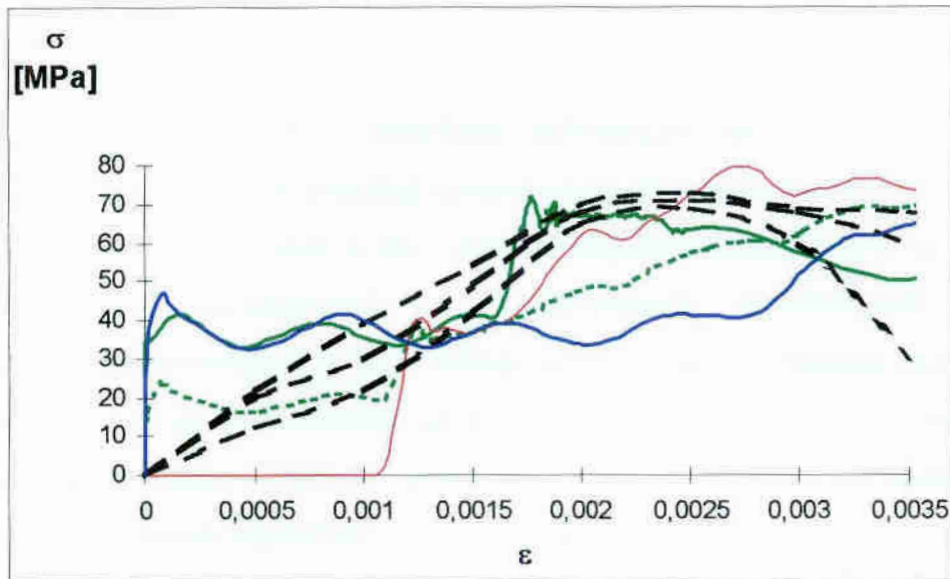


Rys. 4.14a. Charakterystyka  $\sigma - \epsilon$  dla betonu 30 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 8.2$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 9[s^{-1}]$

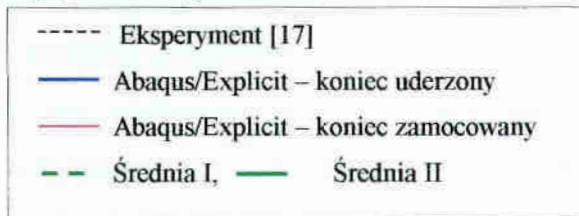
Rys. 4.14b. Charakterystyka  $\sigma - \epsilon$  dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.2[s^{-1}]$



c)



Rys. 4.14c. Charakterystyka  $\sigma - \epsilon$  dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 78.3 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.6$  [s<sup>-1</sup>]

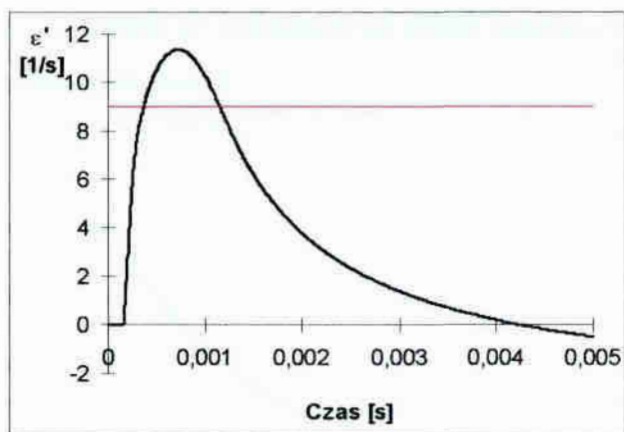


Wynik średniej I również wykazał zdecydowane różnice w przebiegu wykresów. Najbardziej zbliżony do danych eksperymentalnych jest wynik określony jako średnia II. Krzywa ta przedstawia wartość naprężenia na końcu obciążonym próbki przy odkształceniach ze środka jej wysokości. Jak widać zgodność wyników jest tu zadowalająca. W początkowej fazie można jednak zauważyć, że naprężenia nie zaczynają się od zera. Jest to wynik założeń symulacji, naprężenie już pojawiło się w przekroju badanym lecz odkształcenie środka przekroju próbki jest jeszcze zerowe, gdyż w tym czasie naprężenie nie spowodowało jeszcze odkształceń w tym przekroju. Wyraźnie uwidacznia to lokalny charakter zachodzących zjawisk. Zjawisko to mogło zostać pominięte przez autorów eksperymentu ze względu na niewystarczającą czułość aparatury pomiarowej.

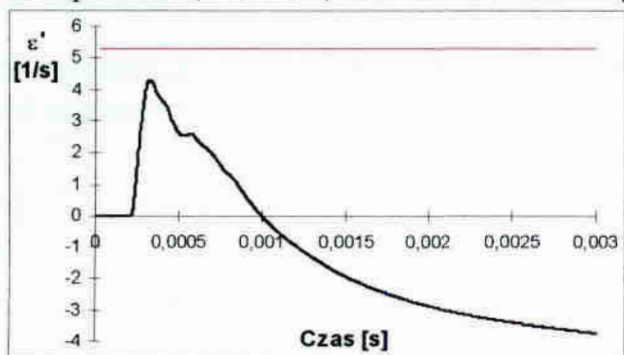
Autorzy eksperymentu, być może z przyczyn aparaturowych, pominieli charakter falowy zjawiska. Pierwszy pik na wykresach świadczy o odbiciu się fali naprężenia od zamocowanej podpory, co łatwo jest udowodnić za pomocą prostych wzorów mechaniki falowej.

Z drugiej strony ważnym czynnikiem wpływającym na wyniki są warunki brzegowe jakie zdefiniowano w symulacji komputerowej. Pełne zamocowanie próbki nie odwzorowuje sytuacji mocowania w bazie podczas eksperymentu. Ponieważ nie istniał szczegółowy opis materiałowych i geometrycznych charakterystyk bazy w doświadczeniu, postanowiono dokonać takiego uproszczenia, tym bardziej, że autorzy eksperymentu motywują wprowadzenie tak masywnej konstrukcji bazy celem uzyskania sztywnego zamocowania. Założenie takie poczynione w symulacji komputerowej skutkuje zniekształceniem odpowiedzi badanej próbki.

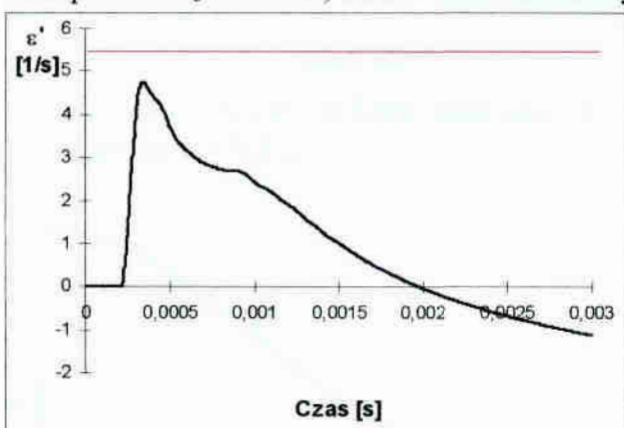
Drugą wielkością jaką uwzględniono w analizie była prędkość deformacji. Autorzy eksperymentu założyli, że prędkość ta jest stała w całym procesie. Określono ją na podstawie pomiarów odkształcenia w połowie wysokości próbki betonowej. Po analizie wyników komputerowych okazało się, że podejście to jest błędne. Prędkość odkształceń jest wielkością zmienną i silnie lokalną. Rys. 4.15 pokazuje wykres prędkości odkształceń odczytanych z symulacji komputerowej w przekroju, w środku wysokości próbki betonowej. Linia prostą zaznaczono wartość prędkości odkształceń zmierzoną w eksperymencie. Różnice wynikają z dyskretnego sposobu pomiarów w przypadku wyników eksperymentalnych, przy możliwości ciągłego odczytu, jaką daje symulacja komputerowa. Maksymalna wartość na wykresie dla prędkości odkształceń z analizy komputerowej mieści się w przedziale rozrzutu wyników jakie uzyskano w testach doświadczalnych.



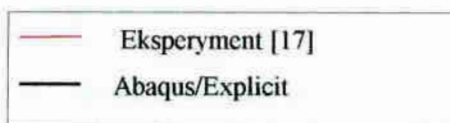
Rys. 4.15a. Prędkość odkształceń dla betonu 30 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 8.2$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 9$  [s<sup>-1</sup>]



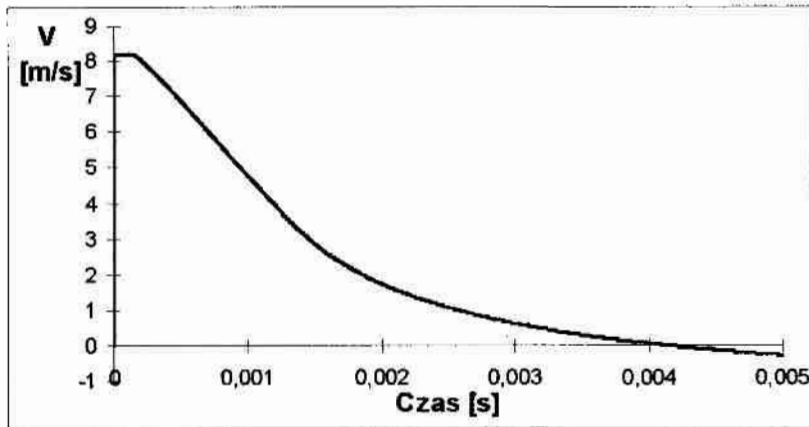
Rys. 4.15b. Prędkość odkształceń dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.2$  [s<sup>-1</sup>]



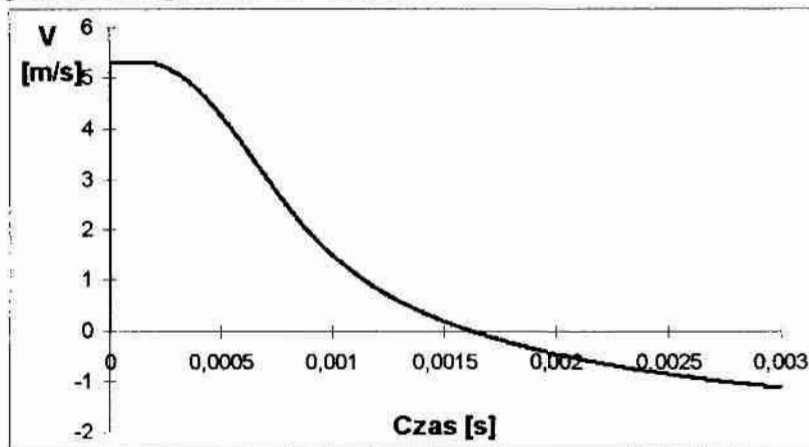
Rys. 4.15c. Prędkość odkształceń dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 78.3 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s, oszacowana laboratoryjna  $\dot{\epsilon} = 5.6$  [s<sup>-1</sup>]



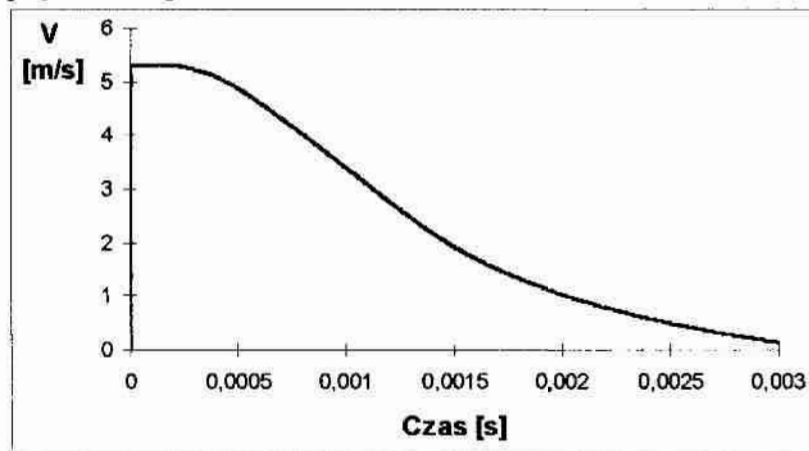
Zmianę prędkości impaktora w czasie przedstawia rys. 4.16. Przejście wykresu poniżej zera świadczy o odbiciu się impaktora od próbki betonowej. Wyraźnie widoczne jest zbliżanie się impaktora do próbki.



Rys. 4.16a. Prędkość impaktora dla betonu 30 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 8.2$  m/s

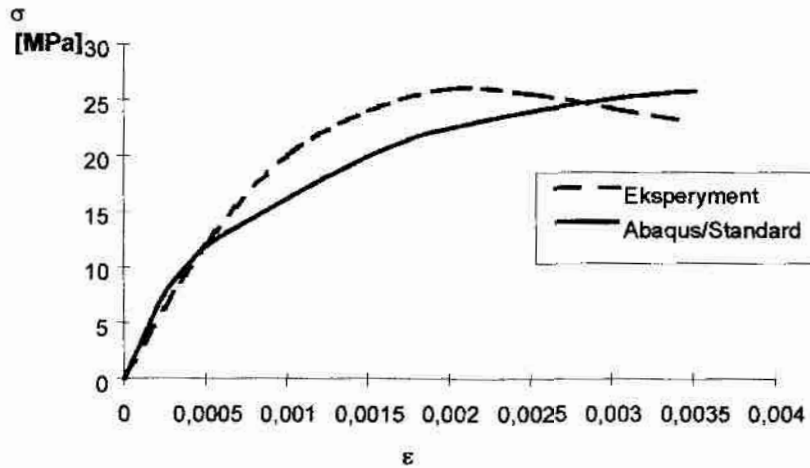


Rys. 4.16b. Prędkość impaktora dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 31.6 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s

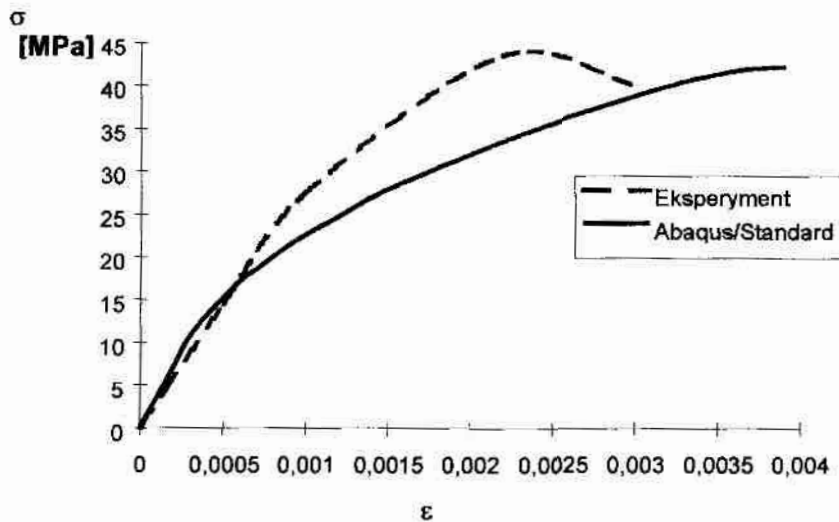


Rys. 4.16c. Prędkość impaktora dla betonu 50 MPa, masa impaktora = 78.3 kg, początkowa prędkość impaktora  $v_0 = 5.3$  m/s

Przeprowadzono również symulacje komputerowe statycznej próby wytrzymałościowej i porównano je z wynikami z testów laboratoryjnych. W próbach tych wykorzystano związki konstytutywne bez uwzględnienia prędkości odkształceń oraz bez kryterium zniszczenia. Wyniki przedstawiono na rys. 4.17. Jak widać, krzywe laboratoryjne przeplatają się z krzywymi otrzymanymi z symulacji komputerowej.



Rys. 4.17a. Charakterystyka  $\sigma - \epsilon$  dla betonu 30 MPa, test statyczny



Rys. 4.17b. Charakterystyka  $\sigma - \epsilon$  dla betonu 50 MPa, test statyczny



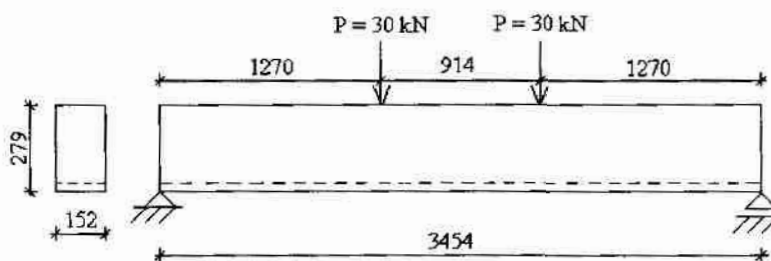
#### 4.2.5. Wnioski dotyczące analizy dynamicznego ściskania betonu

Doświadczenie dynamicznego ściskania betonu przeprowadzone przez Bischoffa i Perry'ego [17] było niezmiernie ciekawe, gdyż autorzy doświadczenia pokusili się o doświadczalne wyznaczenie wielkości dynamicznych, takich jak prędkość odkształceń oraz dynamicznej zależności  $\sigma - \varepsilon$ . Wielkości te pozwalają na weryfikację dynamicznego modelu materiałowego betonu na drodze symulacji numerycznych. Stworzono więc model betonu, który zależy od prędkości odkształceń. Ponieważ wyniki laboratoryjne określiły prędkość odkształcenia jako średnią i stałą wartość, model bazuje na stałej prędkości odkształcenia. Obliczenia wskazują jednak, że niemal wszystkie wielkości nie są stałe w procesie, jak to założono w doświadczeniu. Symulacja dowiodła lokalnego charakteru zjawisk dynamicznych, co było praktycznie nie do uchwycenia w doświadczeniu i pokazuje ze szczegółami to co w doświadczeniu może zostać przeoczone. Prawidłowa interpretacja krzywych  $\sigma - \varepsilon$  (średnia II) w stosunku do tego co zostało zmierzone w eksperymencie pozwala na stwierdzenie, że zaproponowany związek konstytutywny dla betonu w danym przedziale prędkości odkształceń zachowuje dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi (praktycznie mieści się w rozrzucie wyników eksperymentu). Zaproponowany model uznano za wiarygodny i zastosowano w późniejszych dynamicznych symulacjach złożonej konstrukcji inżynierskiej. Dużo gorzej model ten zachowuje się w przypadkach statycznych (prędkość odkształceń równa zero). Widać znaczne rozbieżności pomiędzy prognozowanym związkiem  $\sigma - \varepsilon$  a wynikami eksperymentu, szczególnie w przypadku betonu o wyższej wytrzymałości. Bardziej logiczne byłoby tu wykorzystanie innych, prostszych i sprawdzonych związków, np. Druckera – Pragera.

## 4.3. Numeryczna analiza belki żelbetowej obciążonej w sposób nagły

## 4.3.1. Opis doświadczenia

Przeprowadzono analizę numeryczną belki żelbetowej obciążonej w sposób nagły. Schemat belki przedstawia rys. 4.18. Wymiary elementu: rozpiętość 3.454 m, przekrój poprzeczny belki 0.152 m x 0.279 m. Powierzchnia zbrojenia rozciąganego wynosiła 12.9 cm<sup>2</sup>. Zagadnienie zostało rozwiązane wcześniej przez innych autorów: Beshara i Viridi [16], Bathe i Ramaswamy [9], Cervena i inni [21]. Parametry materiałowe betonu i stali przyjęte przez autorów zadania przedstawiono w tabelach 4.3 i 4.4.



Rys. 4.18. Schemat analizowanej belki

Tabela 4.3. Parametry dla betonu

Parametr	Wartość
Początkowy moduł Younga [GPa]	42.059
Współczynnik Poissona	0.2
Wytrzymałość na ściskanie [MPa]	25.8
Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	3.2
Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	1932

Tabela 4.4. Parametry dla stali

Parametr	Wartość
Początkowy moduł Younga [GPa]	206.85
Granica plastyczności [MPa]	303.4
Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	6535

Celem analizy było porównanie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji przy założeniu różnych modeli materiałowych betonu.

#### 4.3.2 Modele konstytutywne

Dla stali (zbrojenie) przyjęto model sprężysto – lepkoplastyczny z kryterium uplastycznienia von Misesa, wzmocnieniem izotropowym oraz stowarzyszonym prawem płynięcia. Zależności parametrów modelu od prędkości odkształceń plastycznych przyjęto zgodnie z modelem Cowpera – Symondsa. Szczegółowo model ten opisano w rozdziale 3 pracy.

Do definicji modelu betonu użyto następujących związków: model liniowo – sprężysty (LE), model kruchego pęknięcia (BC), zmodyfikowany model kruchego pęknięcia (BCm), model Druckera – Pragera (DP), model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji (EPD) oraz model zaproponowany przez autora pracy sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji (EVPD). Wyniki dla tych modeli porównano z wynikami uzyskanymi w symulacji przez Beshara i Virdi'ego [16] (BVNL). Modyfikacja modelu kruchego pęknięcia polegała na zadaniu właściwości sprężysto – plastycznych w strefie ściskanej, tworząc w ten sposób hybrydę dwóch modeli, modelu kruchego pęknięcia (BC) w strefie rozciąganej przekroju betonu oraz modelu sprężysto – plastycznego (EPD) w strefie ściskanej betonu.

Model jaki użyli Beshara i Virdi początkowo zakłada liniowe zachowanie się betonu przy ściskaniu aż do osiągnięcia granicy sprężystości. W zakresie plastycznym model jest opisany dwoma powierzchniami w przestrzeni naprężeń: powierzchnią plastyczności (aby zdefiniować koniec zakresu sprężystego) oraz powierzchnią zniszczenia (aby zdefiniować niezrównoważoną wartość początkową energii zniszczenia).

Powierzchnia plastyczności jest zdefiniowana przez:

$$f_0(I_1, J_2, \tau) = f(I_1, J_2) - \tau = 0, \quad (4.10)$$

gdzie:  $I_1$  jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężeń,  $J_2$  jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężeń i  $\tau$  jest naprężeniem efektywnym.

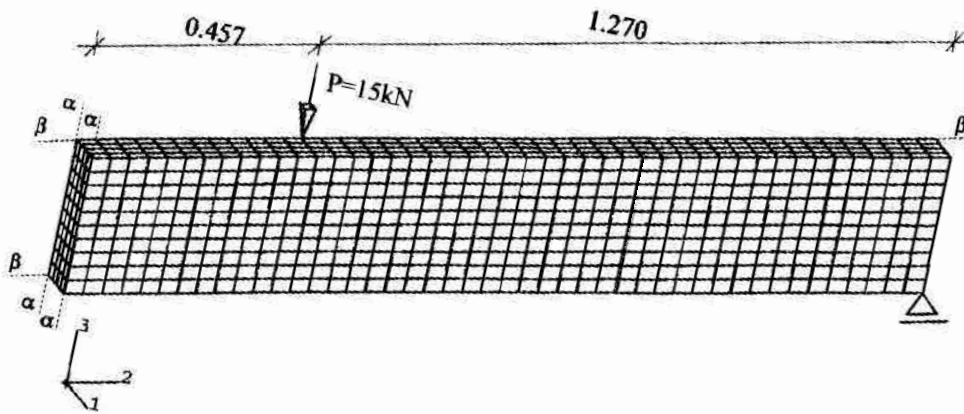
Powierzchnia zniszczenia została zaproponowana w następujący sposób:

$$f_f(I_1, J_1, \sigma_{cd}) = f(I_1, J_2) - \sigma_{cd} = 0. \quad (4.11)$$

gdzie  $\sigma_{cd}$  jest dynamiczną wytrzymałością na ściskanie. Szczegółowy opis modelu można znaleźć w pracy [16].

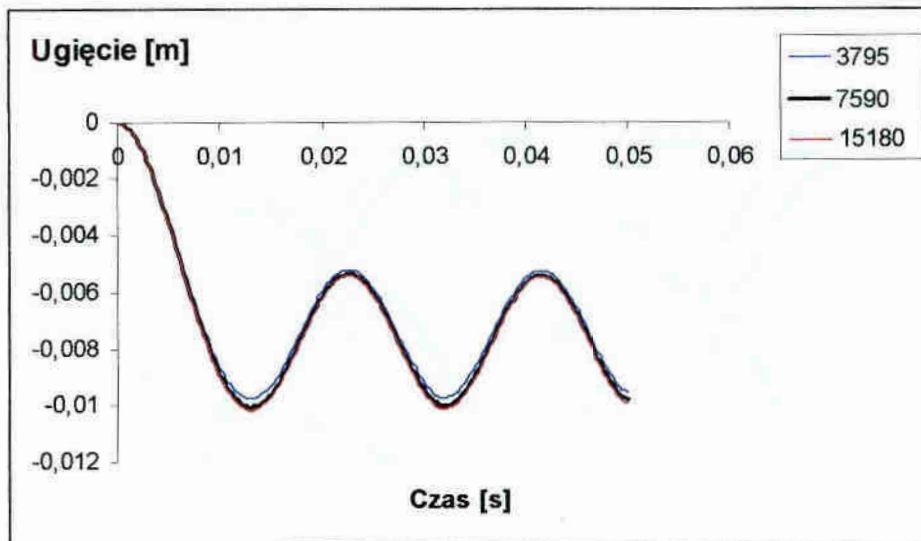
#### 4.3.3. Model elementów skończonych

Do analizy komputerowej w celu zmniejszenia czasochłonności obliczeń przyjęto  $\frac{1}{4}$  układu stosując odpowiednie warunki brzegowe (płaszczyzny symetrii), rys. 4.19. Do analizy wykorzystano elementy przestrzenne ośmiowęzłowe z jednym punktem całkowania Gaussa. Elementy te w bibliotece systemu Abaqus nazywane są C3D8R [1]. Po przeprowadzeniu dyskusji wpływu gęstości siatki na zbieżność uzyskiwanych wyników, do analiz porównawczych wybrano model składający się z 1800 elementów o 7590 stopniach swobody.



Rys. 4.19. Model siatki elementów skończonych (płaszczyzny symetrii  $\alpha - \alpha$ ,  $\beta - \beta$ )

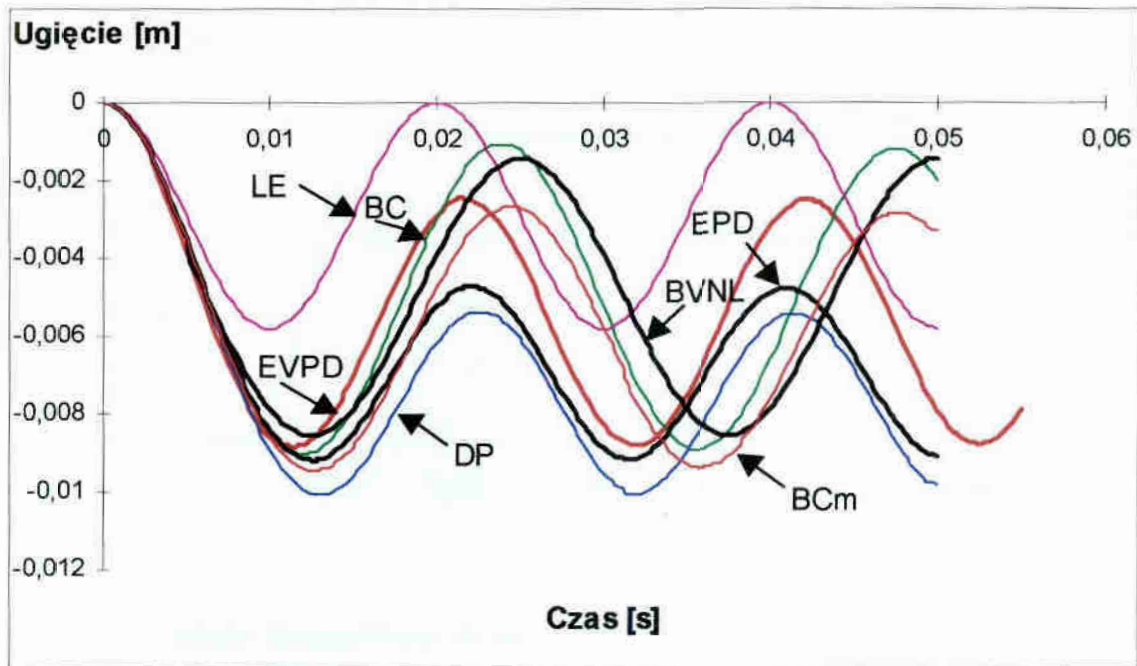
Rys. 4.20 przedstawia zbieżność rozwiązania dla wybranego modelu materiałowego w zależności od gęstości siatki.



Rys. 4.20. Ugięcie środka rozpiętości belki w zależności od czasu dla modelu Druckera – Pragera przy różnej gęstości siatek: 3795 stopni swobody, 7590 stopni swobody i 15180 stopni swobody

#### 4.3.4. Porównanie otrzymanych rezultatów

Wartością jaką porównano w tej analizie było ugięcie środka rozpiętości belki w funkcji czasu. Rys. 4.21 przedstawia wykres porównawczy tej wartości. Jak widać odpowiedzi konstrukcji różnią się w zależności od zastosowanego związku materiałowego. Najmniejsze ugięcie wykazuje model sprężysty (LE), jest to wynikiem braku odkształceń plastycznych, które na wykresie stanowią dużą część odkształceń całkowitych. Model kruchego pęknięcia (BC) zachowuje się podobnie do modeli sprężysto – plastycznych z wyjątkiem ściskania, gdyż przy ściskaniu jest to model sprężysty. Część z tych czysto – sprężystych właściwości została odebrana w zmodyfikowanym modelu kruchego pęknięcia (BCm). Wszystkie modele, z wyjątkiem sprężystego, wykazują dosyć dobrą zgodność maksymalnej wartości ugięcia belki. Model uwzględniający prędkość odkształceń (EVPD) nie odbiega znacząco od innych zaproponowanych tu modeli, prędkość odkształceń jest stosunkowo niewielka i nie ma dużego wpływu na odpowiedź belki. Średnią prędkość odkształceń w danej konstrukcji oszacowano na  $0.6 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ .



Rys. 4.21. Ugięcie środka rozpiętości belki w zależności od czasu dla różnych modeli materiałowych

LE – model sprężysty

BC – model uwzględniający pękanie przy rozciąganiu, dla ściskania model sprężysty

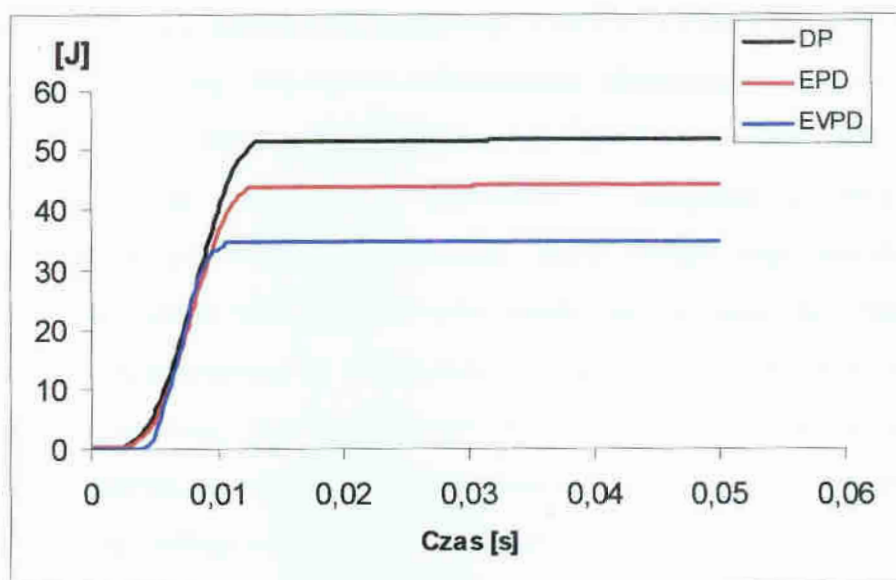
BCm – model uwzględniający pękanie przy rozciąganiu, dla ściskania model sprężysto-plastyczny

DP – model Druckera – Pragera

BVNL – model Beshara i Virdi

EPD – model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji

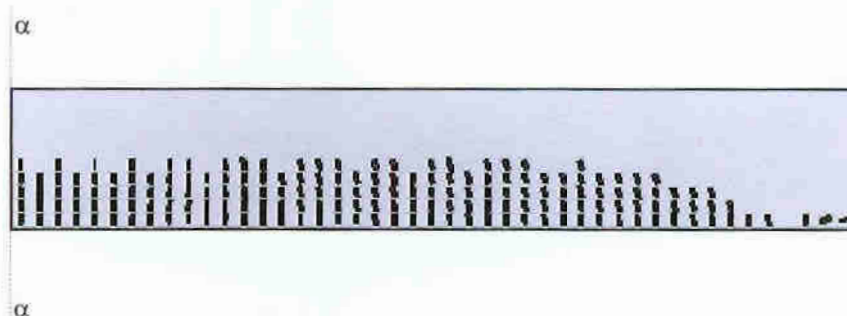
EVPD – model sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji



Rys. 4.22. Energia dyssypowana na odkształceniach plastycznych w funkcji czasu dla wybranych modeli konstytutywnych betonu

Rys.4.22 przedstawia energię dyssypowaną na odkształceniach plastycznych w funkcji czasu dla wybranych modeli konstytutywnych betonu. Rozkład tej energii świadczy o zakończonych procesach plastycznych w betonie.

Kontynuując modele kruchego pęknięcia pozwalają nam na określenie rozkładu ilościowego rys w badanej konstrukcji. Na rys. 4.23 przedstawiono rozkład rys w betonie, w strefie rozciąganej belki. Rysunek uwzględnia połowę rozpiętości belki.

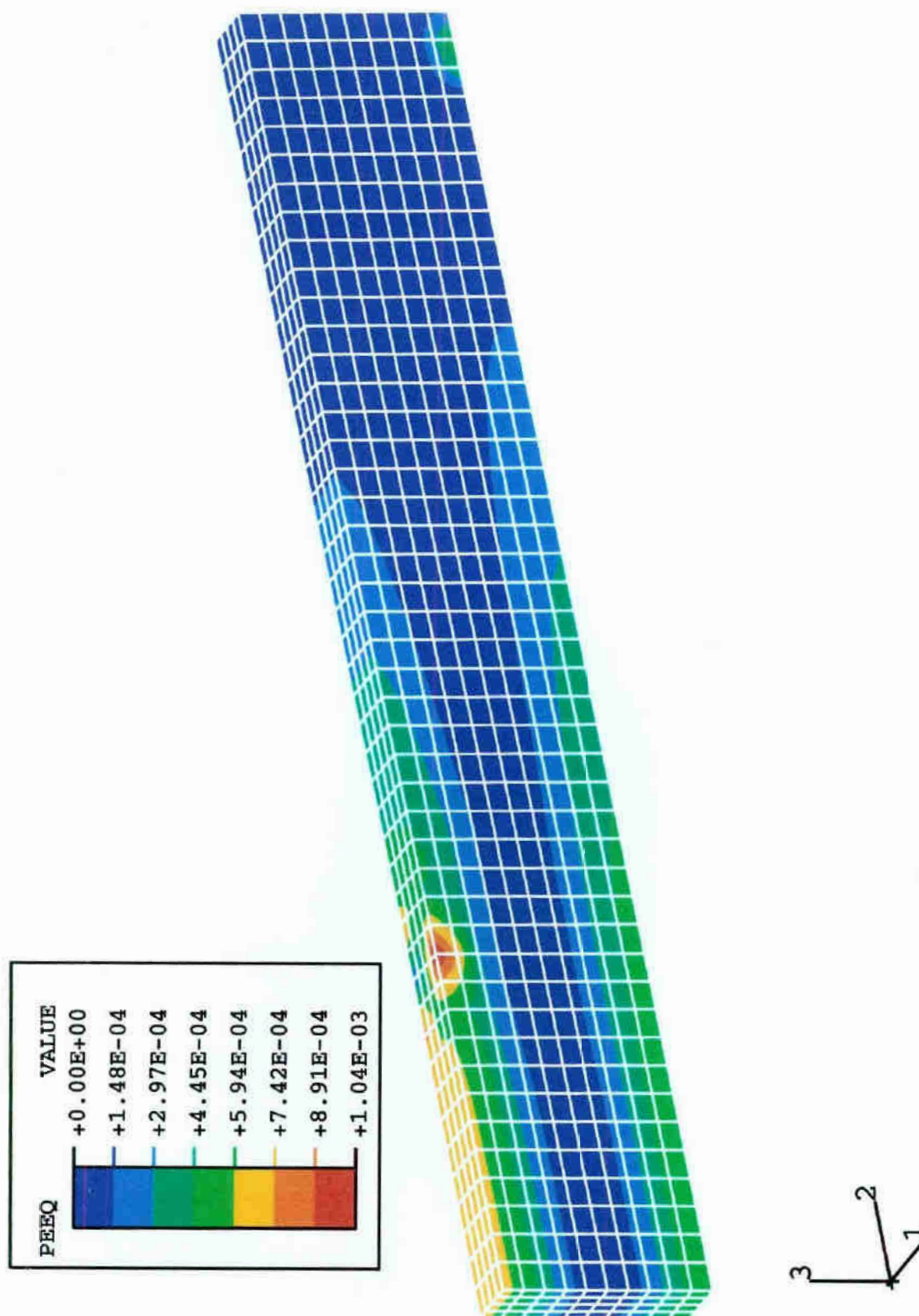


Rys. 4.23. Rozkład rys w betonie dla modelu kruchego pęknięcia (BC), (płaszczyzna symetrii  $\alpha - \alpha$ )

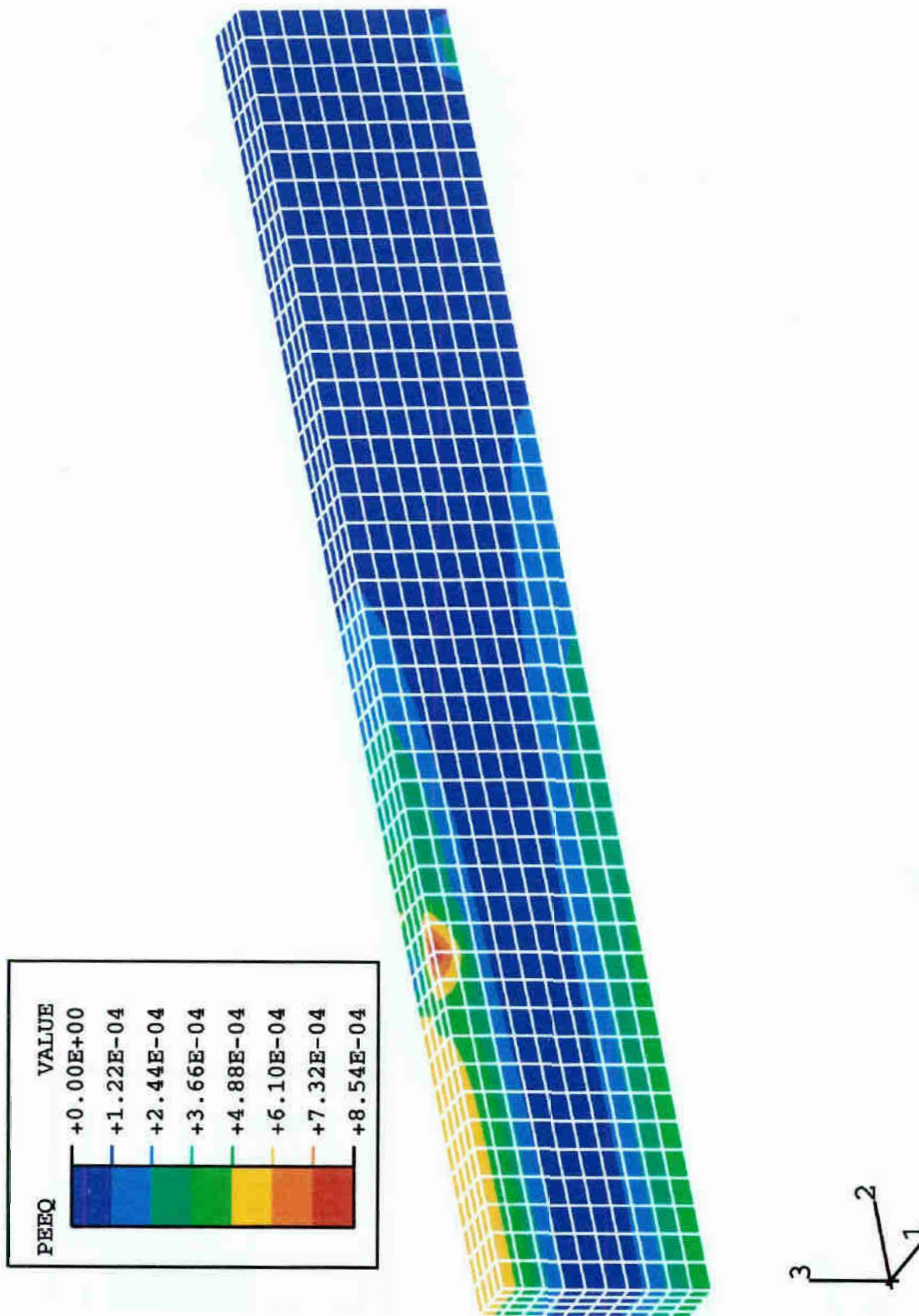
Rozkład równoważnych odkształceń plastycznych w betonie przedstawiono na rys. 4.24. Przedstawiono wyniki dla modelu: Druckera – Pragera (DP), sprężysto – plastycznego z uwzględnieniem degradacji (EPD) oraz dla modelu sprężysto –

lepkoplastycznego z uwzględnieniem degradacji (EVPD). Rozkłady te, jak widać, różnią się nieznacznie od siebie. Największe odkształcenia plastyczne występują w modelu Druckera – Pragera (DP), gdyż model ten nie zawiera w sobie zdefiniowanych warunków zniszczenia. Drugi model (sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji) zawiera już warunki zniszczenia, część energii więc pochłaniana jest w procesach degradacji stąd odkształcenia plastyczne są mniejsze. Trzeci model (sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji) wykazuje najmniejsze odkształcenia plastyczne, jest to efektem wzmocnienia się materiału na skutek uwzględnienia prędkości odkształceń plastycznych. Jednakże, jak pokazują dalsze badania, efekt ten zależy od wartości prędkości odkształceń. W danym przypadku prędkość odkształceń była stosunkowo niewielka i wynosiła  $0.6 [s^{-1}]$ .

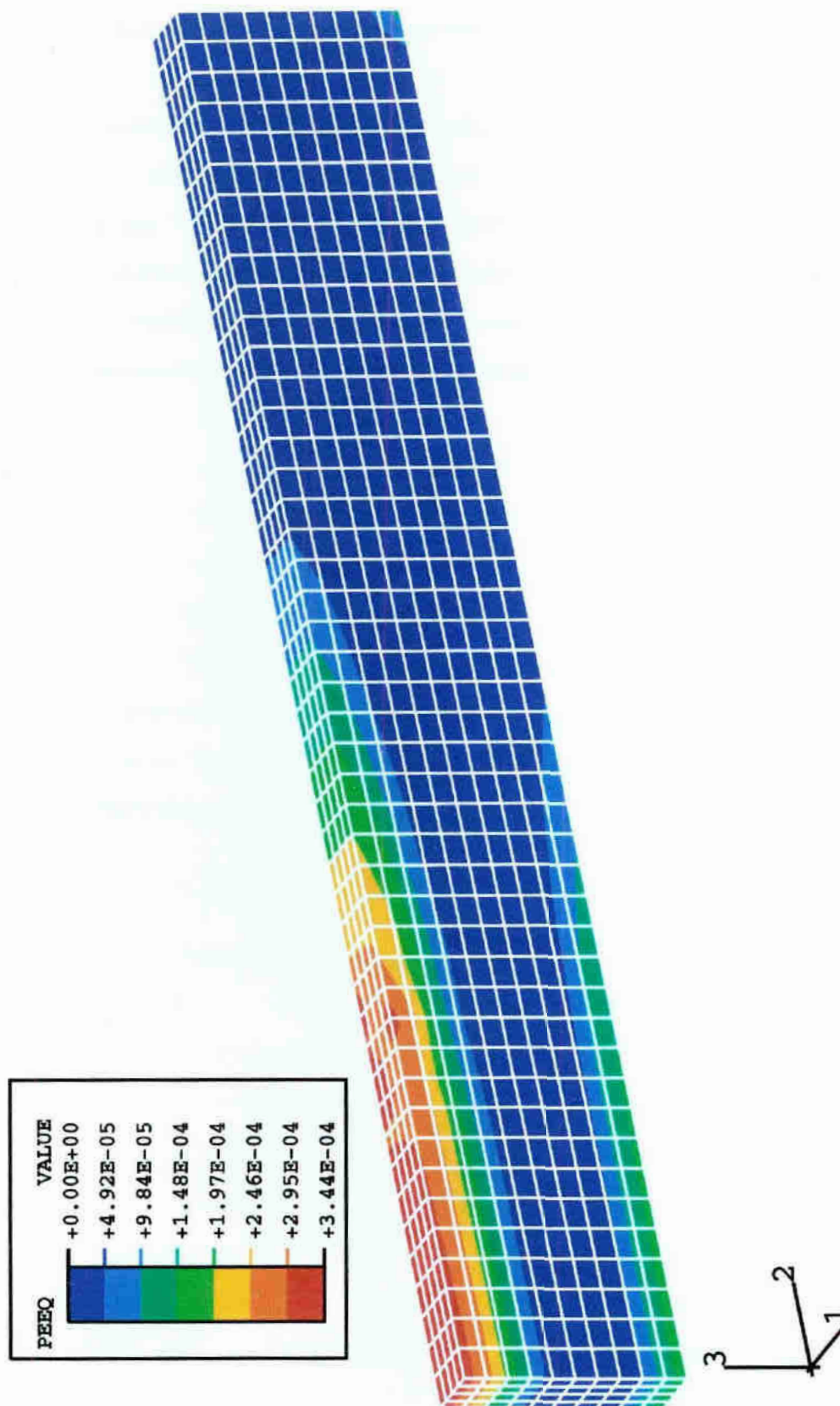




Rys. 4.24a. Rozkład równoważnych odkształceń plastycznych w betonie, model Druckera – Pragera (DP)



Rys. 4.24b. Rozkład równoważnych odkształceń plastycznych w betonie, model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji (EPD)



Rys. 4.24c. Rozkład równoważnych odkształceń plastycznych w betonie, model sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji (EVPD)

#### 4.3.5. Wnioski dotyczące analizy belki żelbetowej obciążonej w sposób nagły

Przedstawione wyniki dla różnych związków materiałowych dały dobrą zbieżność ugięcia elementu żelbetowego, poza modelem sprężystym. Porównanie z wynikami uzyskanymi przez Beshara i Virdi'ego [16] zostało ocenione jako dobre. Występuje podobieństwo zarówno w formie przebiegu ugięcia belki w czasie jak i co do wartości maksymalnych. Również rozkłady wartości równoważnych odkształceń plastycznych potwierdzają założenia teoretyczne modeli materiałowych.

## Rozdział 5.

Analiza numeryczna kształtowania zewnętrznej powłoki zabezpieczającej wybraną konstrukcję inżynierską przed skutkami wybuchu podwodnego.

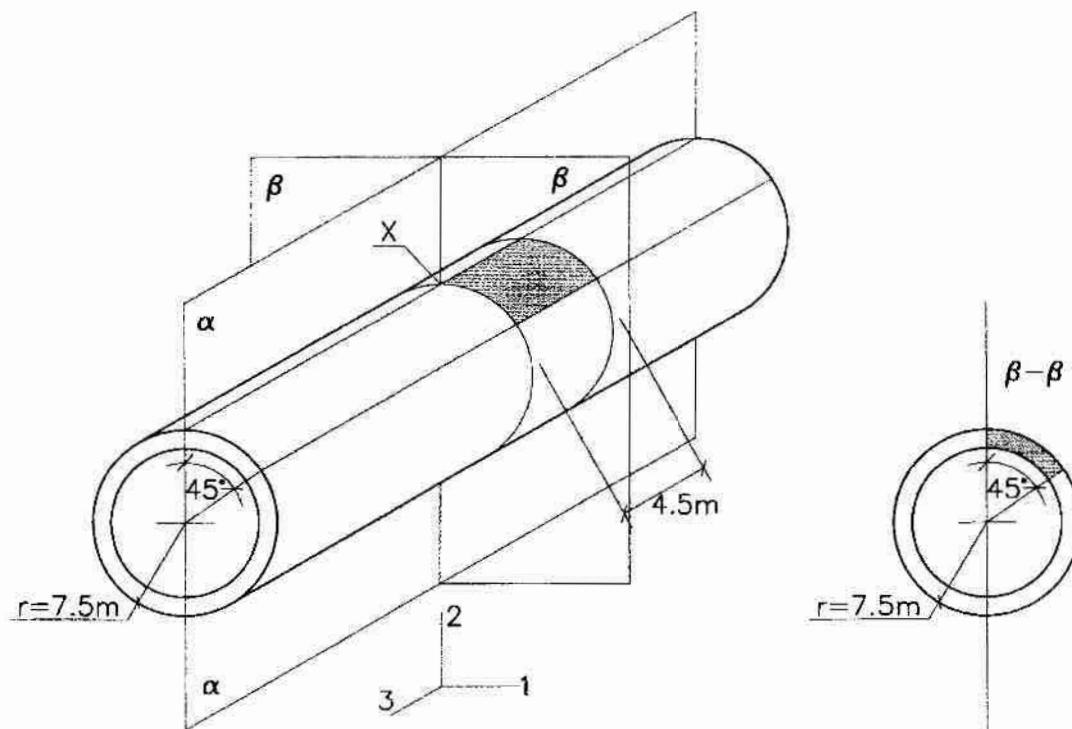
### 5.1. Wstęp do problemu

W tym rozdziale rozważono odpowiedź wybranej konstrukcji inżynierskiej poddanej działaniu obciążeniom nagłym oraz dokonano analizy sposobu zabezpieczenia tej konstrukcji przed skutkami wybuchu. Konstrukcją tą jest podwodny tunel komunikacyjny, którego projekt był kilka lat temu rozważany jako jedna z dwóch możliwości powiązania komunikacyjnego Sycylii z kontynentem przez cieśninę Mesyńską [28,29]. Jednym z wariantów obciążenia poza standardowymi wariantami wytrzymałościowo – użytkowymi było obciążenie zewnętrznej powłoki tunelu ładunkiem wybuchowym [29]. Ilość takiego ładunku określono jako masę jaką mógłby jeden człowiek przetransportować na miejsce zdarzenia i umieścić ją na konstrukcji. Masa ta w przybliżeniu może się wahać od 20 do 60 kg. Przyjęto, że tunel został obciążony na swojej zewnętrznej powierzchni eksplozją materiału wybuchowego trinitrotoluenu (TNT).

### 5.2. Opis rozważanej konstrukcji inżynierskiej

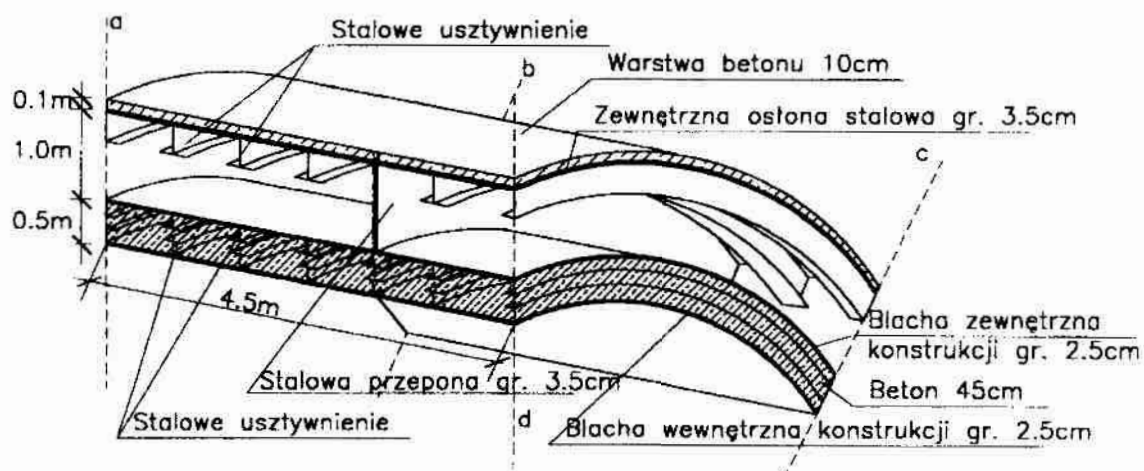
Tunel jest cylindryczną konstrukcją o budowie warstwowej. Grubość ściany walca konstrukcji właściwej wynosi 0.50 m, wykonany jest on z płaszcza betonowego o grubości 0.45 m, obłożonego po obu stronach blachami o grubości 25 mm z poprzecznymi łącznikami blachy z betonem w postaci teowników. Połączone z blachami teowniki o wysokości 15 cm z półką o szerokości 19 cm są zatopione w warstwie betonu co 75 cm. Cylinder nośny otoczony jest współosiową konstrukcją ochronną z blachy grubości 35 mm, pokrytej 10 cm warstwą betonu w celu ochrony przed korozją oraz uzyskania większej odporności na obciążenia zewnętrzne. Konstrukcja ta usztywniona jest w kierunku obwodowym elementami z blachy w kształcie teowników. Teowniki o wysokości 30 cm i półce o szerokości 30 cm znajdują się co 75 cm po stronie wewnętrznej blachy osłony. Wewnętrzna i zewnętrzna konstrukcja połączone są masywnymi przeponami z blachy 35 mm, występującymi co

4.5 m. W ten sposób utworzone są komory powietrzne, o wysokości równej odległości obu konstrukcji od siebie: nośnej i zabezpieczającej. Przestrzeń ta jednocześnie może być wykorzystana jako luk konserwacyjny. Średnica zewnętrzna konstrukcji wynosi 15 m. Schematyczną geometrię konstrukcji tunelu przedstawia rys. 5.1.



Rys. 5.1. Geometria tunelu (X – ładunek wybuchowy)

Szczegół konstrukcji zaznaczony na rys. 5.1 przedstawiono z detalami na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Szczegół konstrukcji tunelu

## 5.3. Zakres analizy

Analizę przeprowadzoną za pomocą systemu komputerowego ABAQUS/Explicit, rozpatrując następujące warianty:

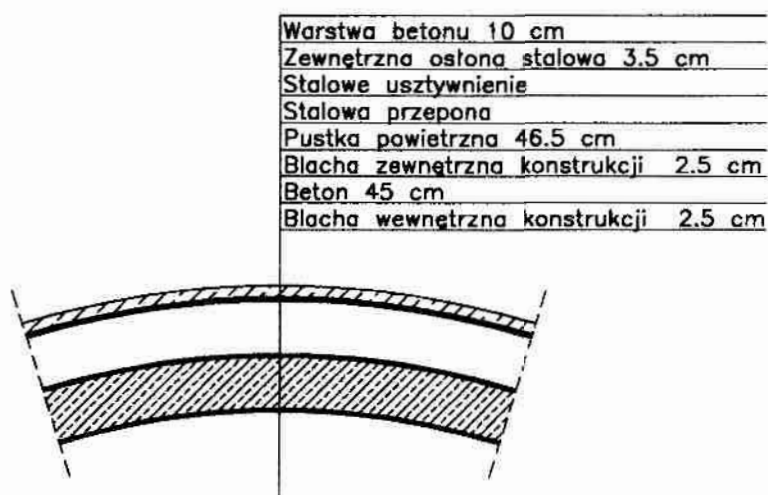
*Wariant I:* Kształtowanie zewnętrznych powłok zabezpieczających przy ustalonej masie materiału wybuchowego.

W wariantcie tym poddano analizie konstrukcję tunelu w następujących przypadkach zabezpieczenia:

- a) EX10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 10 cm bez dodatkowej warstwy na konstrukcji tunelu, rys. 5.3a,
- b) EX10/AD10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 10 cm z dodatkową betonową warstwą grubości 10 cm na konstrukcji tunelu, rys. 5.3b,
- c) EX15 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 15 cm bez dodatkowej warstwy na konstrukcji tunelu, rys. 5.3c,
- d) EX15/AD10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 15 cm z dodatkową betonową warstwą grubości 10 cm na konstrukcji tunelu, rys. 5.3d.

We wszystkich przypadkach obciążenie odpowiadało wybuchowi 40 kg materiału wybuchowego TNT. W symulacji numerycznej wykorzystano sprężysto – plastyczny model materiałowy dla betonu z uwzględnieniem degradacji (EPD). Dla stali zastosowano model von Misesa, pkt. 3.1.

a)

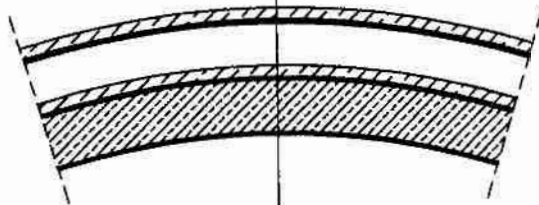


Rys. 5.3. Przypadki zabezpieczenia konstrukcji nośnej tunelu

a) EX10

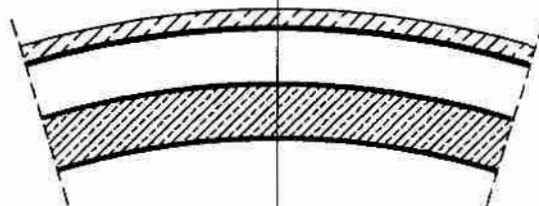
b)

Warstwa betonu 10 cm
Zewnętrzna osłona stalowa 3.5 cm
Stalowe usztywnienie
Stalowa przepona
Pustka powietrzna 36.5 cm
Dodatkowa warstwa betonu 10 cm
Blacha zewnętrzna konstrukcji 2.5 cm
Beton 45 cm
Blacha wewnętrzna konstrukcji 2.5 cm



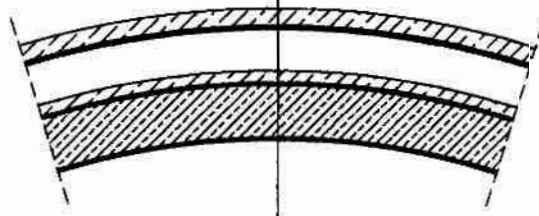
c)

Warstwa betonu 15 cm
Zewnętrzna osłona stalowa 3.5 cm
Stalowe usztywnienie
Stalowa przepona
Pustka powietrzna 46.5 cm
Blacha zewnętrzna konstrukcji 2.5 cm
Beton 45 cm
Blacha wewnętrzna konstrukcji 2.5 cm



d)

Warstwa betonu 15 cm
Zewnętrzna osłona stalowa 3.5 cm
Stalowe usztywnienie
Stalowa przepona
Pustka powietrzna 36.5 cm
Dodatkowa warstwa betonu 10 cm
Blacha zewnętrzna konstrukcji 2.5 cm
Beton 45 cm
Blacha wewnętrzna konstrukcji 2.5 cm



Rys. 5.3. Przypadki zabezpieczenia konstrukcji nośnej tunelu

b) EX10/AD10

c) EX15

d) EX15/AD10



*Wariant II:* Analiza odpowiedzi konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia i masy materiału wybuchowego, przy zastosowaniu różnych związków konstytutywnych betonu.

W wariantcie tym zbadano odpowiedź konstrukcji tunelu z zabezpieczeniem wg EX10, rys. 5.3a, obciążenie odpowiadało wybuchowi 40 kg materiału wybuchowego TNT. Symulacje przeprowadzono dla następujących związków konstytutywnych betonu:

- a) DP – model betonu Druckera – Pragera,
- b) BC – model betonu kruchego pęknięcia,
- c) EPD – model betonu sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji,
- d) EVPD – model betonu sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji.

Ponieważ jeden ze związków materiałowych dla betonu (EVPD) zależy od prędkości odkształceń plastycznych, za pomocą symulacji testowych określono średnią prędkość odkształceń w betonie konstrukcji nośnej. Wartość ta wyniosła  $47 [s^{-1}]$ .

W symulacji został użyty model von Misesa dla stali. Model ten opisano szczegółowo w pkt. 3.1.

*Wariant III:* Analiza odpowiedzi dynamicznej konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia oraz wybranego związku konstytutywnego betonu przy zmieniającej się masie materiału wybuchowego.

W wariantcie tym przeprowadzono analizę odpowiedzi konstrukcji tunelu dla przypadku zabezpieczenia EX10, rys. 5.3a oraz sprężysto – plastycznego modelu konstytutywnego betonu (EPD). Dla stali zastosowano model von Misesa, pkt. 3.1. Symulację przeprowadzono dla trzech przypadków obciążenia wybuchem, które odpowiadają następującym wartościom masy materiału wybuchowego TNT:

- a) 20 kg,
- b) 40 kg,
- c) 60 kg.

Dla każdego z tych ładunków określono finalny stan konstrukcji, zakres zniszczeń oraz ilość energii dyssypowanej przez dany układ [24, 27].

## 5.4. Sposób generowania obciążenia

Obciążenie generowane jest poprzez symulowanie wybuchu ładunku TNT, umieszczonego na zewnętrznej powierzchni konstrukcji osłaniającej. Modelowanie obciążenia zostało zrealizowane w postaci ciśnienia zmiennego w czasie i przestrzeni, działającego na konstrukcję osłaniającą. Funkcję ciśnienia dla sferycznego ładunku wybuchowego można przedstawić poniższym wzorem [23]:

$$p(R_d, t) = 0 \text{ dla } t < t_0, \quad (5.1)$$

$$p(R_d, t) = p_{\max}(R_d) \exp\left(\frac{-(t-t_0)}{\vartheta}\right) \text{ dla } t \geq t_0,$$

gdzie:  $t$  – czas [s],  $R_d$  – odległość od centrum ładunku wybuchowego [m],

$$t_0 = \frac{R_d}{c_0}, \quad (5.2)$$

$c_0$  – prędkość rozchodzenia się dźwięku w wodzie,  $c_0 = 1460$  [m/s],

$$\vartheta = 10^{-4} \sqrt[3]{w \hat{R}}^{-0,24} \text{ [s]}, \quad (5.3)$$

$$\hat{R} = R_d / \sqrt[3]{w}, \quad (5.4)$$

$w$  – masa ładunku [kg],

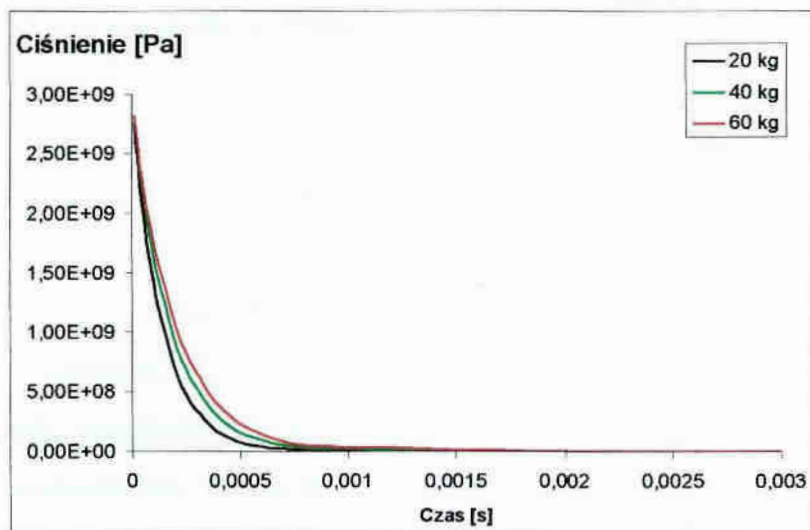
$$p_{\max} = \frac{355}{\hat{R}} + \frac{115}{\hat{R}^2} - \frac{2.44}{\hat{R}^3} \text{ dla } 0.05 < \hat{R} \leq 10, \quad (5.5)$$

$$p_{\max} = \frac{294}{\hat{R}} + \frac{1387}{\hat{R}^2} - \frac{1783}{\hat{R}^3} \text{ dla } 10 < \hat{R} \leq 50,$$

$p_{\max}$  – maksymalna wartość ciśnienia określona półempirycznym wzorem (5.5) [44].

Wykres ciśnienia przypadającego na punkt konstrukcji znajdujący się najbliżej epicentrum wybuchu dla różnych wartości masy materiału wybuchowego przedstawia rys. 5.4. Na rysunku tym pominięto czas uzyskania wartości maksymalnej fali ciśnienia. Jak widać krzywe ciśnienia nie przedstawiają dużego zróżnicowania przebiegu mimo znacznych różnic wielkości masy materiału wybuchowego. Jest to wynik dużej podziałki skali ciśnienia na wykresie. Rys. 5.5 przedstawia wykres impulsu przypadający na jednostkę powierzchni w punkcie znajdującym się najbliżej epicentrum wybuchu i tu wyraźnie uwidaczniają się różnice wartości w zależności od wielkości ładunku. Funkcję obciążenia określono na podstawie półempirycznych zależności podanych przez

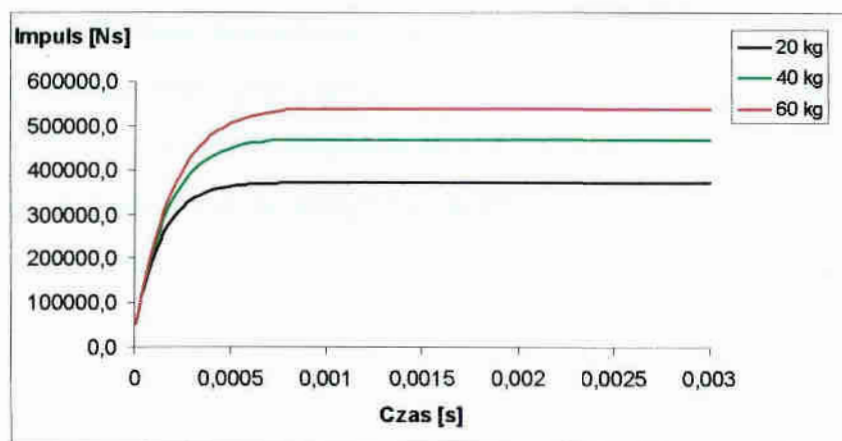
Henrycha [44], i zmodyfikowanych w oparciu o analityczne rozwiązania dotyczące zagadnienia odbicia fali uderzeniowej od przeszkody zakrzywionej [71]. Obciążenie zostało zdefiniowane jako procedura użytkownika, którą dołączono do systemu obliczeniowego ABAQUS.



Rys. 5.4. Wykres obciążenia konstrukcji tunelu dla różnej wartości masy TNT

Impuls działający na jednostkę powierzchni, przedstawiony na rys. 5.5, można wyznaczyć całkując ciśnienie po czasie wg wzoru:

$$I(t) = \int_0^t P(t) dt. \quad (5.6)$$



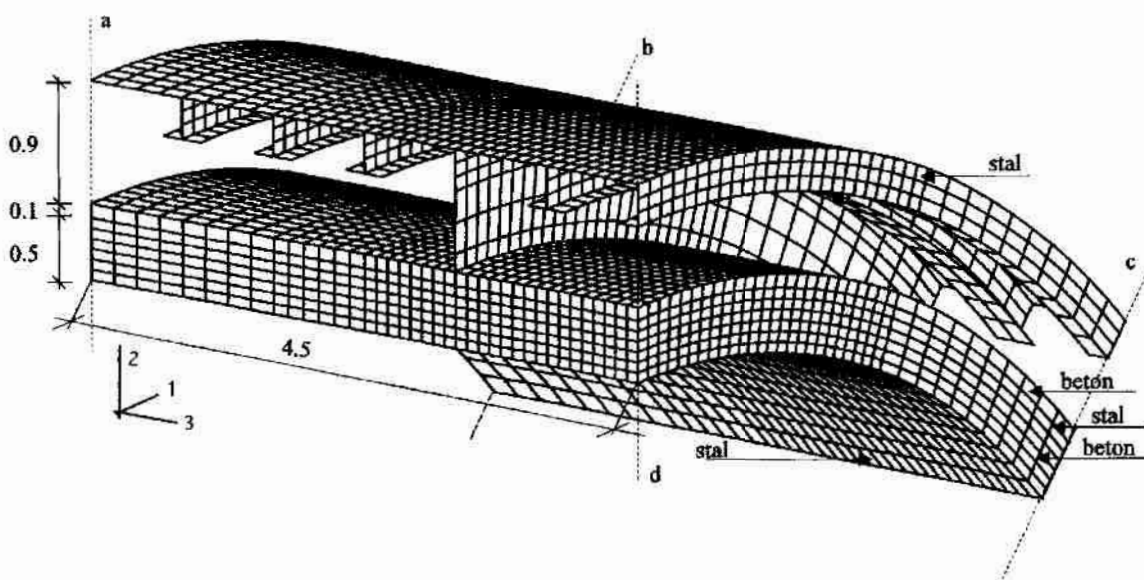
Rys. 5.5. Wykres impulsu na jednostkę powierzchni dla różnej wartości masy TNT

### 5.5. Modele konstytutywne betonu i stali

W symulacjach numerycznych wykorzystano różne modele materiałowe betonu. Modele te dokładniej opisano w rozdziale 3. Dla stali zastosowano jeden model von Misesa, opisany szczegółowo w pkt. 3.1.

### 5.6. Modele elementów skończonych

Do analizy porównawczej ostatecznych wyników przyjęto dwa modele elementów skończonych. Model z elementami warstwy zabezpieczającej na konstrukcji właściwej tunelu, przedstawiony na rys. 5.6 oraz taki sam model lecz bez tej warstwy. Do analizy wykorzystano elementy przestrzenne ośmiowęzłowe C3D8R [1] oraz powłokowe elementy czterowęzłowe S4R [1,47]. Oba wymienione typy elementów posiadają jeden punkt całkowania Gaussa [46]. Blachy stalowe występujące w modelu były definiowane za pomocą elementów powłokowych, natomiast wypełnienie betonowe oraz betonowe warstwy ochronne na konstrukcji tunelu były definiowane za pomocą elementów przestrzennych. Ponieważ obciążenie działające na osłonę jest tak duże, że wywołuje duże przemieszczenia węzłów co z kolei doprowadza do natychmiastowego jej zniszczenia, warstwę betonu oraz zmianę jej grubości na zewnętrznej osłonie stalowej postanowiono definiować elementami powłokowymi, zmieniając odpowiednio gęstość materiału. W celu dalszego ograniczenia czasochłonności obliczeń model ograniczono do wycinka o kącie rozwarcia  $45^\circ$ . Założenie to zostało oparte na podstawie rozchodzenia się fali ciśnienia działającego na przegrody zakrzywione [6,71]. Założono odpowiednie warunki brzegowe: płaszczyzny a – b, b – c: utwierdzenie, c – d, a – d: symetria.



Rys. 5.6. Siatka elementów skończonych całego układu.

Warunki brzegowe:

płaszczyzny a – b, b – c: utwierdzenie;

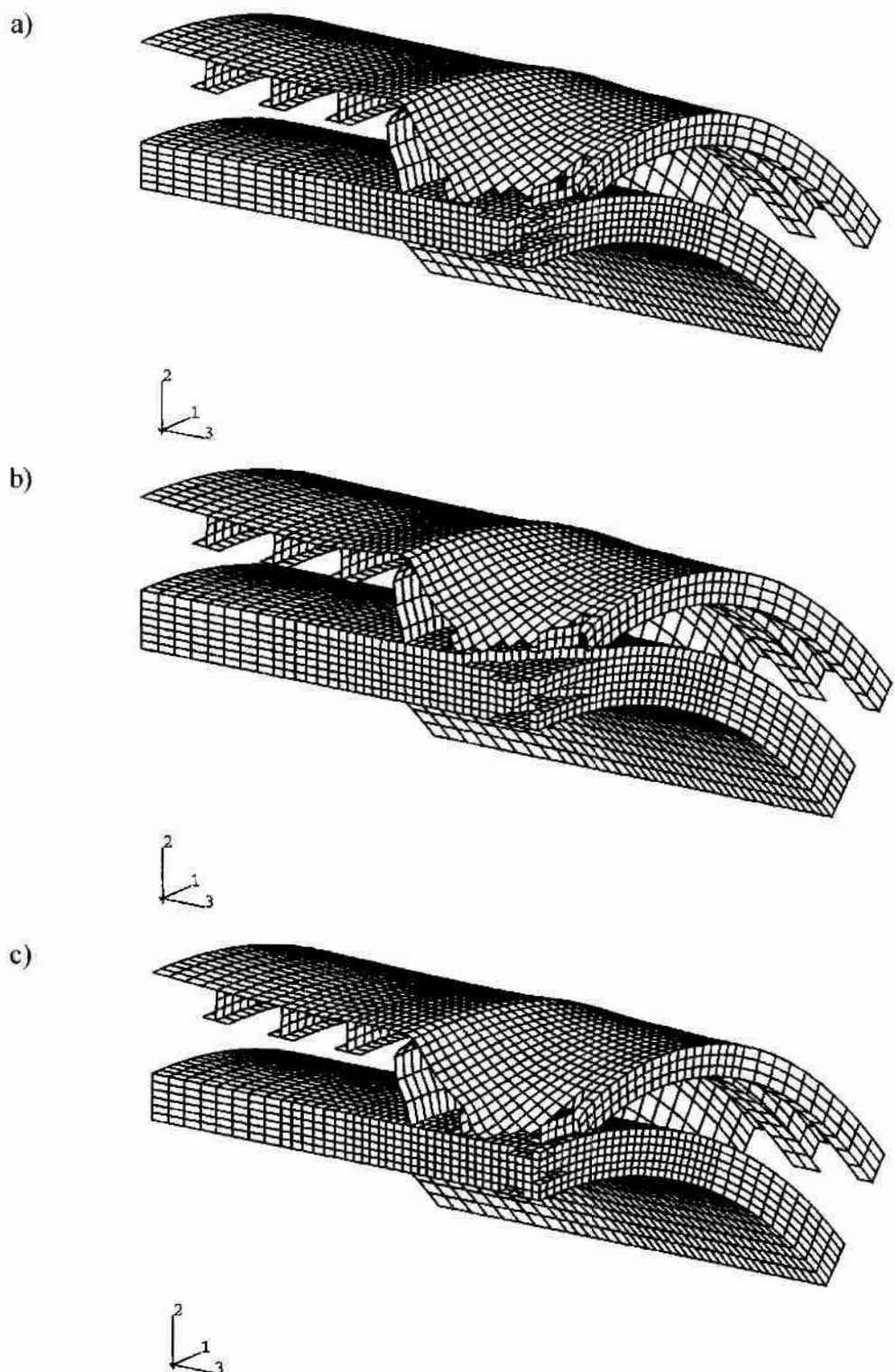
płaszczyzny c - d, a - d: symetria

Dzięki tym uproszczeniom udało się zredukować model elementów skończonych do 13 582 elementów, przy 12 283 węzłach, co daje 36 849 stopni swobody dla modelu bez elementów warstwy ochronnej na konstrukcji tunelu oraz 14 912 elementów, przy 13 723 węzłach, co daje 41 169 stopni swobody dla modelu z elementami warstwy ochronnej na konstrukcji tunelu. Całkowita jednak liczba zmiennych (stopnie swobody oraz zmienne wprowadzone przez użytkownika), była większa i sięgała w pierwszym przypadku 54 240 i w drugim 58 560. W modelach tych zadano również kontakt. Kontakt został wprowadzony pomiędzy elementami zewnętrznej osłony a konstrukcją właściwą tunelu i w drugim przypadku pomiędzy osłoną zewnętrzną a elementami warstwy ochronnej na konstrukcji tunelu oraz pomiędzy osłoną zewnętrzną a konstrukcją właściwą tunelu. Dla zmniejszenia czasochłonności obliczeń kontakt zadano tylko na pewnym obszarze tych warstw. Obszar ten wyznaczono za pomocą próbnych symulacji komputerowych.

## 5.7. Analiza wyników symulacji i wnioski

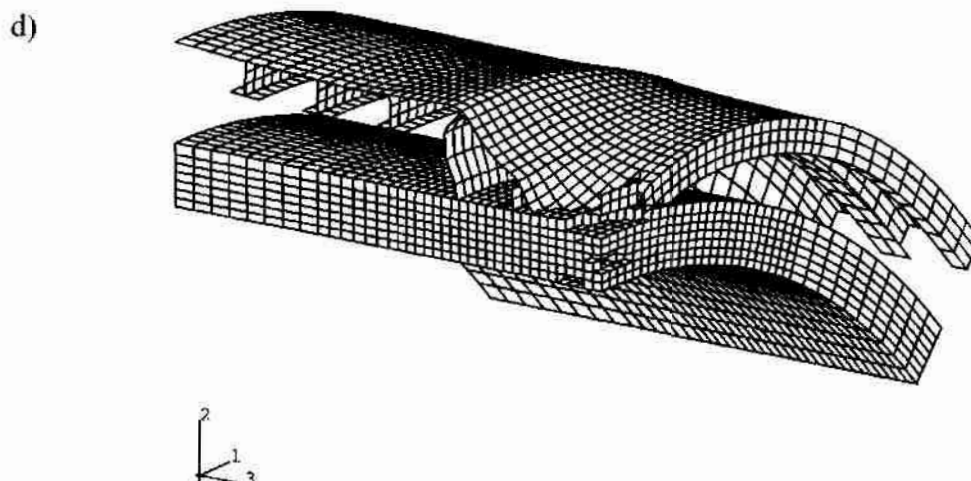
### 5.7.1. Wariant I: Kształtowanie zewnętrznych powłok zabezpieczających przy ustalonej masie materiału wybuchowego

Porównując otrzymane wyniki dla różnych konfiguracji konstrukcji ochronnej można zaobserwować praktycznie taki sam obraz deformacji finalnego kształtu budowli (np. strefy zniszczenia są w przybliżeniu takie same dla wszystkich przypadków). Rys. 5.7 pokazuje końcową postać odkształconą dla wybranych wartości grubości zewnętrznej powłoki ochronnej, oraz dodatkowej betonowej warstwy ochronnej na konstrukcji tunelu. Elementy zniszczone zostały usunięte z rysunku.



Rys. 5.7. Końcowy obraz zdeformowanej konstrukcji

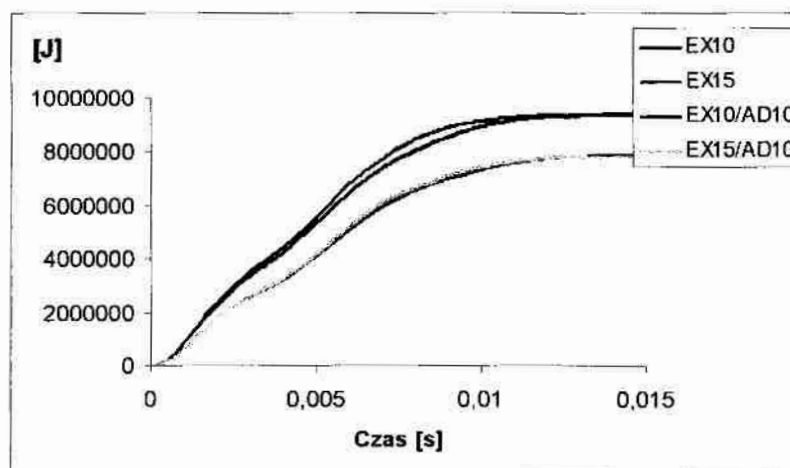
- a) EX10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 10 cm bez dodatkowej warstwy na konstrukcji tunelu
- b) EX10/AD10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 10 cm z dodatkową betonową warstwą grubości 10 cm na konstrukcji tunelu
- c) EX15 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 15 cm bez dodatkowej warstwy na konstrukcji tunelu



Rys. 5.7. Końcowy obraz zdeformowanej konstrukcji

d) EX15/AD10 – zewnętrzna betonowa powłoka ochronna 15 cm z dodatkową betonową warstwą grubości 10 cm na konstrukcji tunelu

Rys. 5.8 pokazuje przebiegi energii rozproszonej dla całości konstrukcji otrzymanych z założonych kombinacji wariantów.



Rys. 5.8. Energia dyssypowana w funkcji czasu dla poszczególnych przypadków obliczeniowych

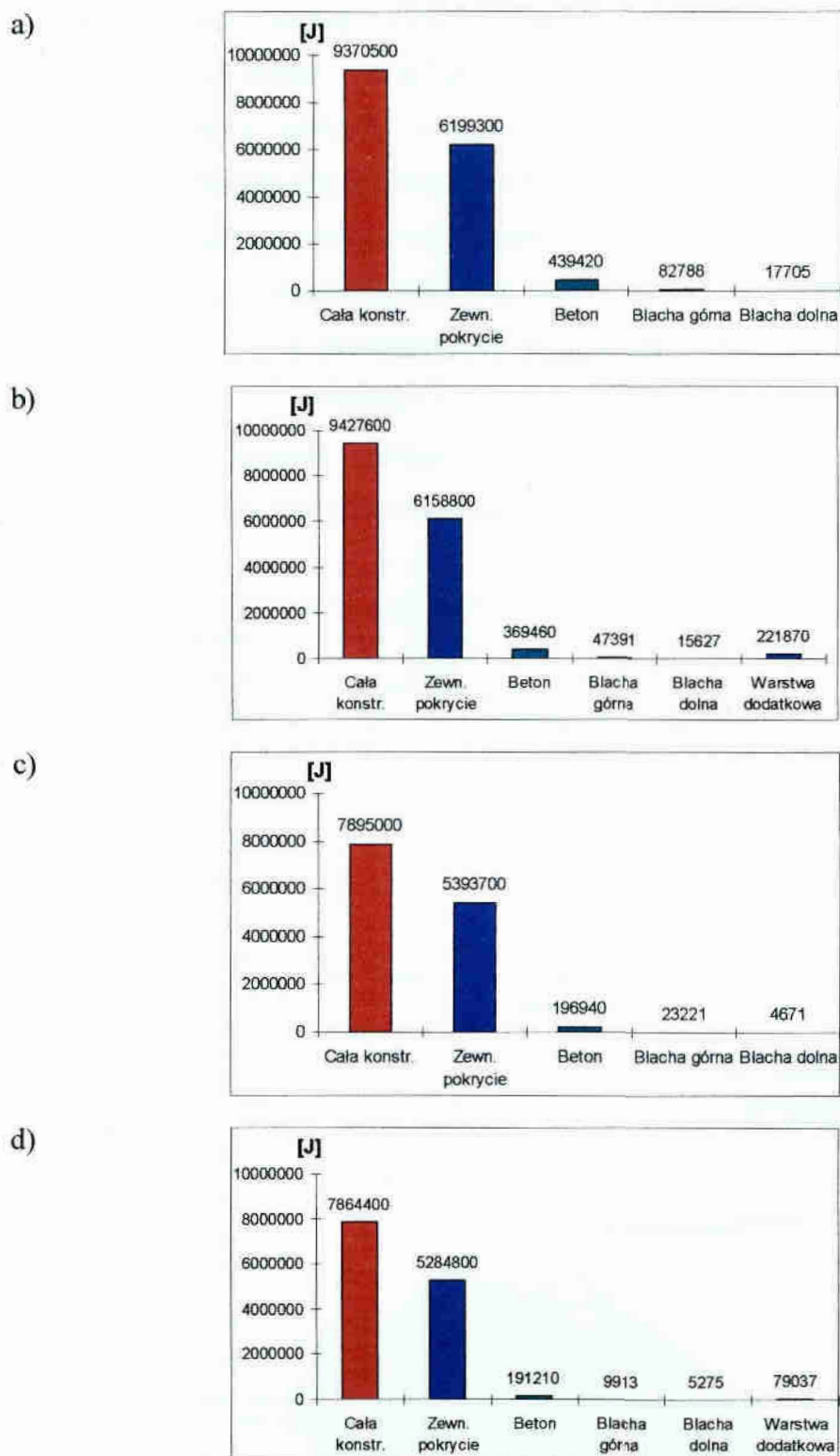
EX10 – zewnętrzna powłoka ochronna 10cm bez dodatkowej warstwy zabezpieczającej

EX15 – zewnętrzna powłoka ochronna 15cm bez dodatkowej warstwy zabezpieczającej

EX10/AD10 – zewnętrzna powłoka ochronna 10cm z dodatkową warstwą zabezpieczającą

EX15/AD10 – zewnętrzna powłoka ochronna 15cm z dodatkową warstwą zabezpieczającą

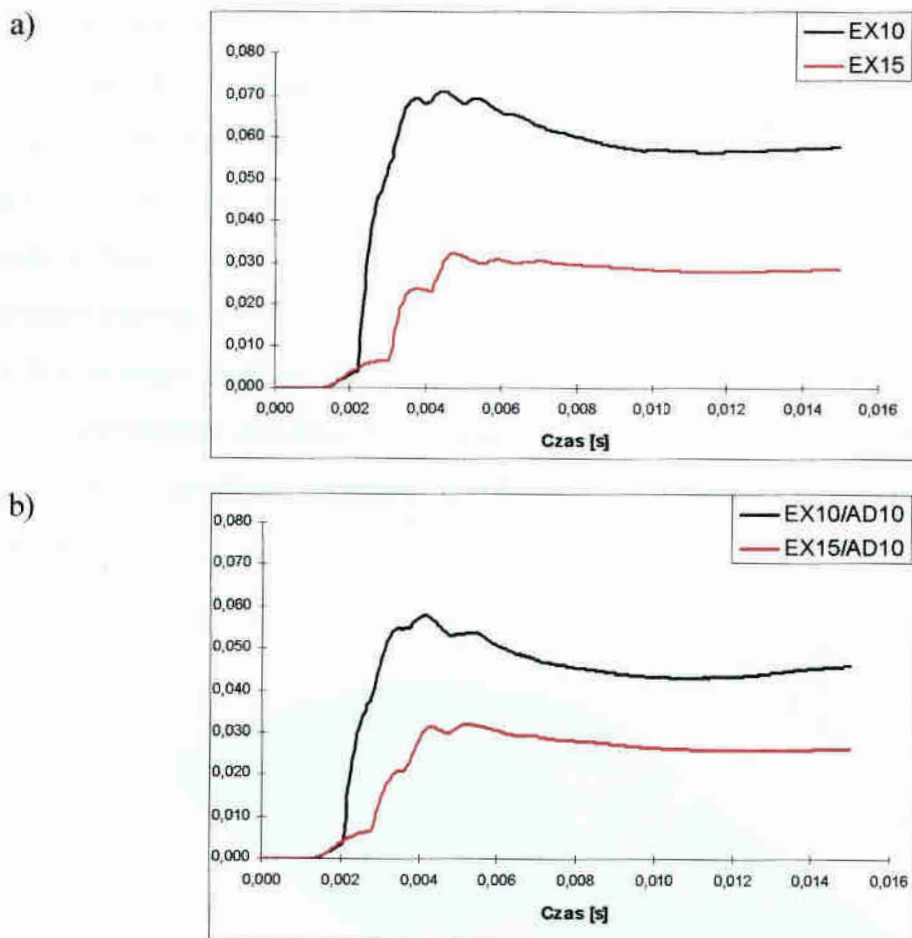




Rys. 5.9. Maksymalna energia dyssypowana na odkształceniach plastycznych

- a) EX10
- b) EX10/AD10
- c) EX15
- d) EX15/AD10

Na rys. 5.9 pokazane zostały wartości maksymalne energii dyssypowanej na odkształceniach plastycznych oddzielnie dla różnych elementów konstrukcji. Z praktycznego punktu widzenia ważnym jest zwiększenie tej części energii dyssypowanej na odkształceniach plastycznych, która odpowiada za odkształcenie i zniszczenia zewnętrznych osłon, a zmniejszenie ilości energii rozproszonej podczas plastycznych deformacji konstrukcji właściwej tunelu. W tym przypadku zwiększanie grubości warstw osłonowych betonowych na zewnętrznej osłonie ochronnej redukuje energię rozproszoną przez poszczególne elementy konstrukcji. Rys. 5.10 ukazuje stosunek pomiędzy całkowitą energią dyssypowaną układu na odkształceniach plastycznych oraz energią dyssypowaną na odkształceniach plastycznych w konstrukcji, w funkcji czasu.



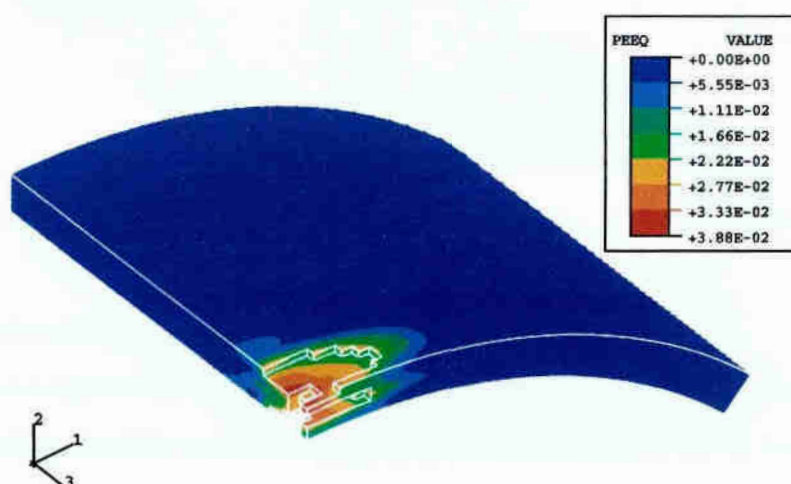
Rys. 5.10. Stosunek  $E_s/E_t$  w funkcji czasu, gdzie  $E_s$  – energia dyssypowana w konstrukcji tunelu,  $E_t$  – wartość całkowitej energii dyssypowanej dla całego układu. EX10 – warstwa zewnętrzna betonu 10 cm, EX15 – warstwa zewnętrzna betonu 15cm.

a) wariant bez dodatkowej warstwy na konstrukcji tunelu

b) wariant z dodatkową warstwą na konstrukcji tunelu /AD10

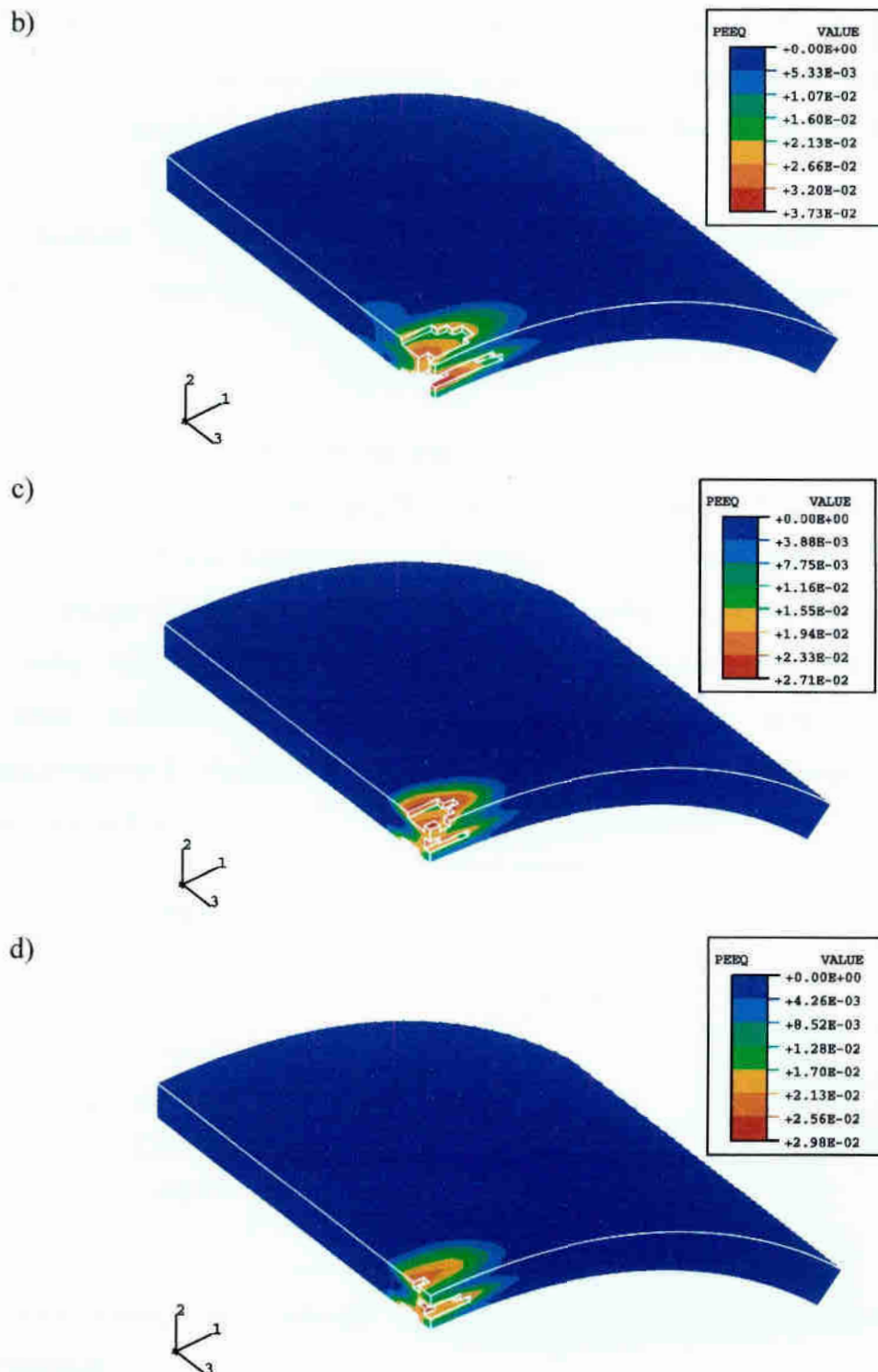
Po początkowym gwałtownym wzroście, krzywa stabilizuje się z lekkim wzrostem po powtórnej deformacji zewnętrznej powłoki spowodowanej przez dalsze kolizje zniszczonych elementów, odbitych od zewnętrznej powłoki tunelu. Podczas tej drugiej fazy, nie występuje praktycznie dyssypacja, wszystkie liczące się efekty (plastyczne deformacje i zniszczenia) zakończyły się w początkowej fazie, po kilku milisekundach po eksplozji. Główne różnice są widoczne w rozkładzie plastycznych odkształceń równoważnych we wszystkich trzech warstwach konstrukcji właściwej tunelu. To samo dotyczy strefy zniszczenia rdzenia betonowego. Tutaj rezultaty zależą od założonej grubości betonowej warstwy na osłonie zewnętrznej. Zwiększając tę grubość można otrzymać znaczną redukcję strefy zniszczenia w betonowym rdzeniu tunelu. Mniej efektywnym sposobem jest stosowanie dodatkowej 10 cm powłoki betonu po stronie zewnętrznej konstrukcji nośnej. W tym przypadku redukcja zniszczeń jest raczej nieduża. Rys. 5.11 pokazuje rozkład równoważnych odkształceń plastycznych w betonowym trzonie konstrukcji tunelu. Zniszczone elementy zostały usunięte z siatki. Obecność dodatkowej betonowej warstwy ochronnej na zewnętrznej powłoce konstrukcji tunelu daje widoczną redukcję strefy zniszczenia w górnej części betonowego rdzenia i ma raczej mały wpływ na zniszczenia w środkowej i w niższej części betonowego rdzenia. Porównując rezultaty otrzymane dla dwóch różnych grubości zewnętrznej powłoki betonowej (10 i 15cm) można zauważyć redukcję zniszczenia we wszystkich częściach konstrukcji. Takie samo zachowanie prezentują warstwy stalowe.

a)



Rys. 5.11. Warstwyce plastycznych odkształceń równoważnych

a) EX10 – zewnętrzna powłoka ochronna 10 cm bez warstwy na konstrukcji tunelu



Rys. 5.10. Warstwyce plastycznych odkształceń równoważnych

b) EX10/AD10 – zewnętrzna powłoka ochronna 10 cm z warstwą na konstrukcji tunelu

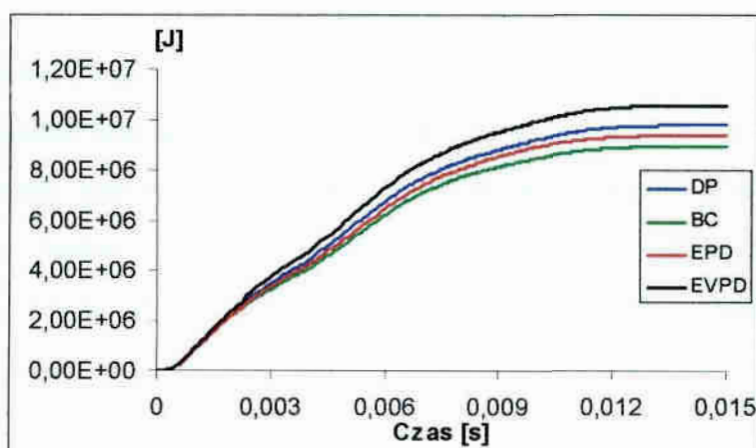
c) EX15 – zewnętrzna powłoka ochronna 15 cm bez warstwy na konstrukcji tunelu

d) EX15/AD10 – zewnętrzna powłoka ochronna 15 cm z warstwą na konstrukcji tunelu

W przypadku wykonania grubszej warstwy betonu na zewnętrznej powierzchni osłony stalowej zmniejsza się poziom zniszczenia, w porównaniu z przypadkiem dodatkowych 10 cm warstwy betonu umieszczonej na zewnętrznej powierzchni konstrukcji tunelu.

5.7.2. Wariant II: Analiza odpowiedzi konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia i masy materiału wybuchowego, przy zastosowaniu różnych związków konstytutywnych betonu.

Na rys. 5.11 przedstawiona jest energia dyssypowana na odkształceniach plastycznych w czasie dla poszczególnych modeli materiałowych. Przebiegi wykresów różnią się maksymalną wartością energii dyssypowanej. W celu porównania różnic rozkładu energii dla poszczególnych modeli konstytutywnych na rys. 5.12 pokazano maksymalną energię dyssypowaną w wybranych elementach konstrukcji tunelu. Jak widać wykres ten pokazuje pewne rozbieżności w rozkładzie energii w poszczególnych elementach. Jest to wynik różnic w definicji związków konstytutywnych betonu.



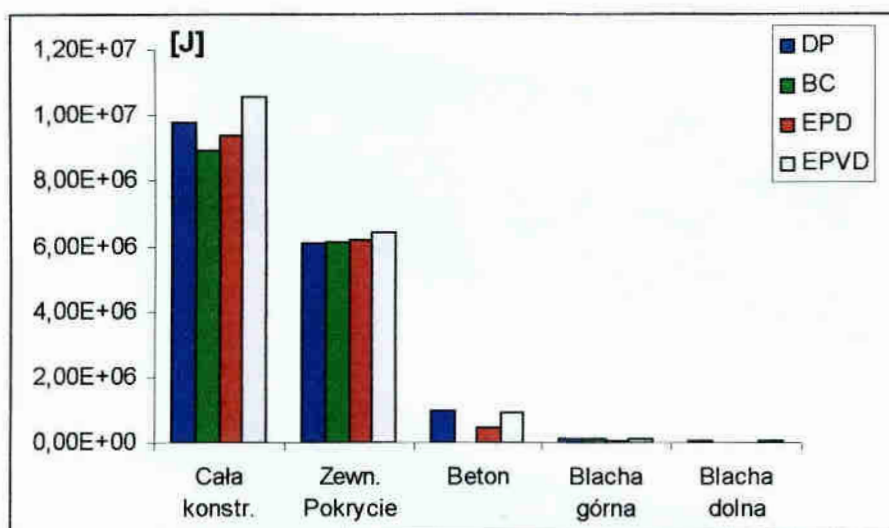
Rys. 5.11. Energia dyssypowana w funkcji czasu dla poszczególnych modeli materiałowych

DP – model Druckera – Pragera

BC – model kruchego pęknięcia

EPD – model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji

EVPD – model sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji



Rys. 5.12. Maksymalna energia dyssypowana w wybranych elementach konstrukcji przy różnych związkach konstytutywnych dla betonu

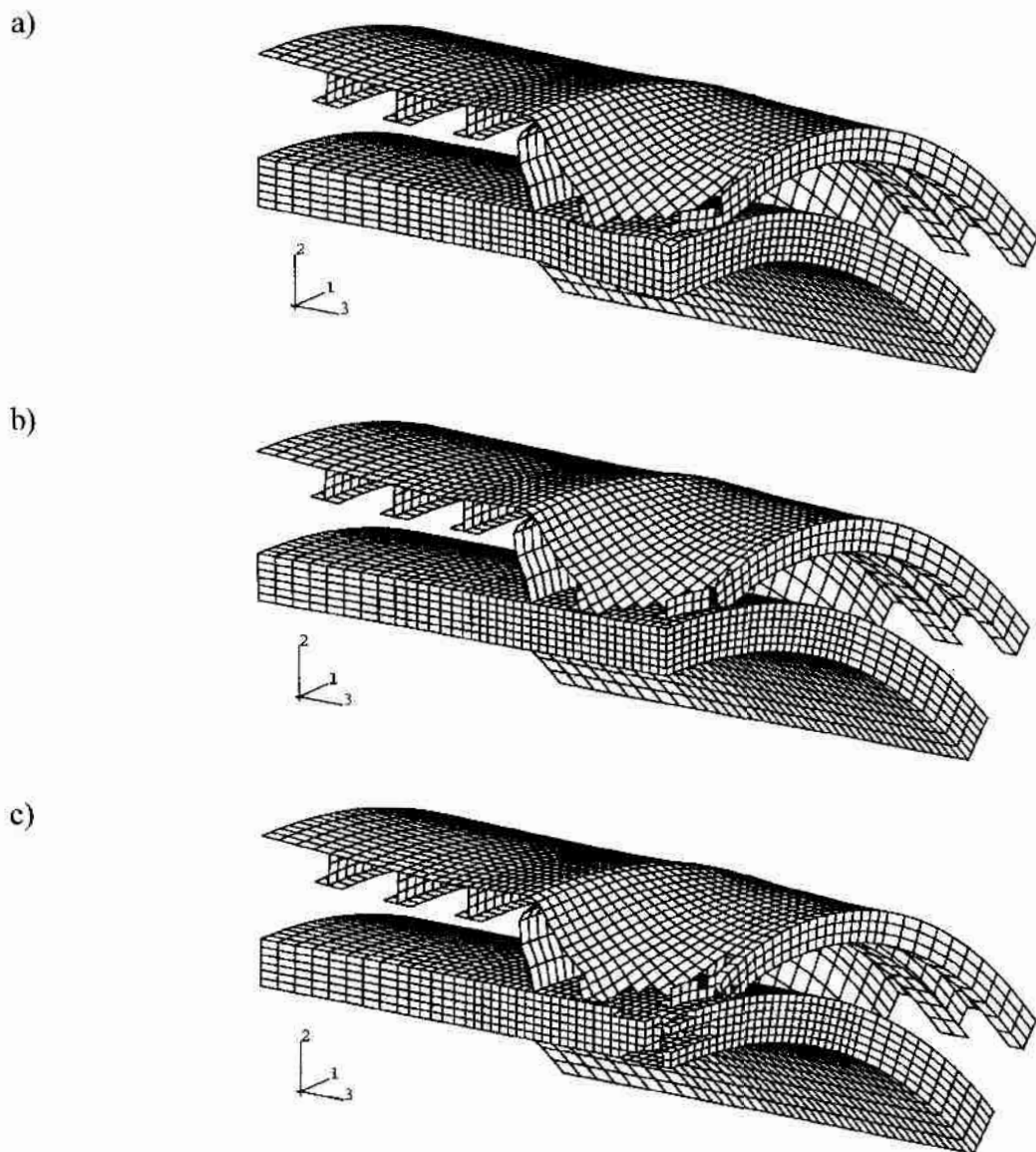
DP – model Druckera – Pragera

BC – model kruchego pęknięcia

EPD – model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji

EPVD – model sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji

Szczególną uwagę należy zwrócić na wartość energii dyssypowanej dla betonu w przypadku modelu kruchego pęknięcia. Jest ona równa zero, gdyż model ten z założenia nie jest modelem plastycznym. W przypadku ściskania model pracuje tylko jako sprężysty, w przypadku rozciągania pojawiają się rysy będące wynikiem pęknięcia betonu. Na rys. 5.13 przedstawiono postać zdeformowaną siatki konstrukcji dla poszczególnych modeli materiałowych.



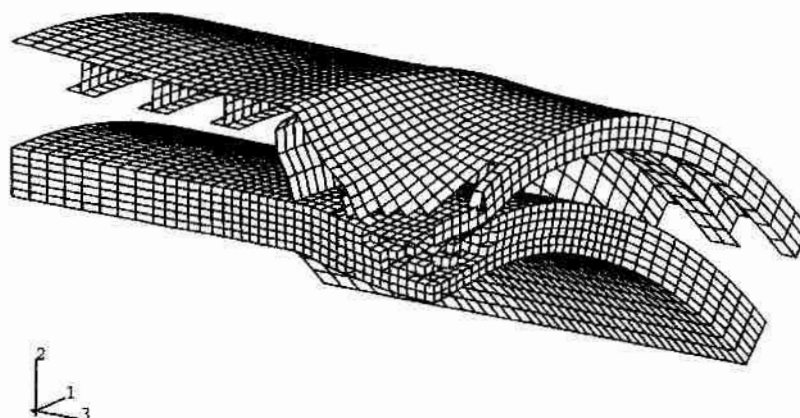
Rys. 5.13. Końcowy obraz zdeformowanej konstrukcji

a) model betonu Druckera – Pragera (DP)

b) model betonu kruchego pęknięcia (BC)

c) model betonu sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji (EPD)

d)



Rys. 5.13. Końcowy obraz zdeformowanej konstrukcji

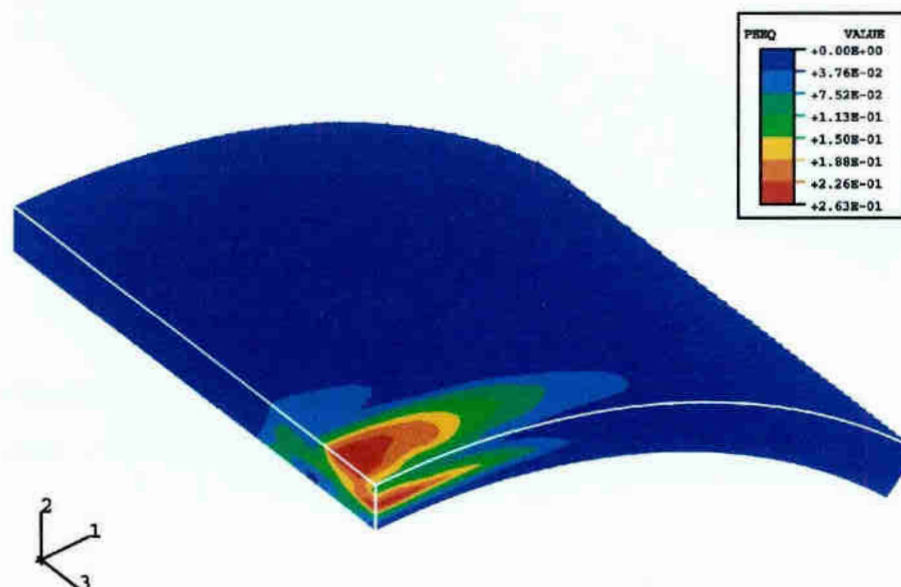
d) model betonu sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji (EVPD)

Jak widać istnieją różnice w uzyskanej formie zdeformowanej ustroju dla poszczególnych związków materiałowych. W modelu Druckera – Pragera (DP) widać wyraźną deformację ustroju, jednakże analizę elementów zniszczonych (takich, które przekroczyły wartości równoważnych odkształceń plastycznych) należy dokonać osobno posługując się warstwicami odkształceń (lub naprężeń). W przypadku modelu kruchego pęknięcia (BC) system nie pokazuje deformacji betonu, jedynie można uzyskać rozkład rys powstałych w poszczególnych elementach. W przypadku zastosowania modelu sprężysto – plastycznego (EPD) z uwzględnieniem degradacji możliwe jest uzyskanie obrazu zdeformowanej konstrukcji bez elementów zniszczonych, tych które przekroczyły zadane kryterium zniszczenia. Model ostatni, sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji i prędkości odkształceń (EVPD), również umożliwia przedstawienie zdeformowanej konstrukcji z uwzględnieniem elementów zniszczonych. Jak widać na przedstawionym rysunku, ostatni model ulega największej deformacji. Do dokładnej analizy zmian w układzie nośnym konstrukcji służą warstvice równoważnych odkształceń plastycznych. Warstvice te dla głównej warstwy betonowej przedstawiono na rys. 5.14. Lokalnie wartości równoważnych odkształceń plastycznych w modelu z uwzględnieniem prędkości odkształceń są dużo większe niż w pozostałych modelach, lecz obszary na których występują są mniejsze. Daje to mniejszą strefę zniszczenia co do powierzchni lecz bardziej rozległą jeśli chodzi o głębokość występowania. W modelu Druckera – Pragera występują pośrednie pomiędzy poprzednimi modelami równoważne odkształcenia plastyczne. Z przeprowadzonych analiz wynika, że kryterium zniszczenia i prędkość odkształceń w modelu

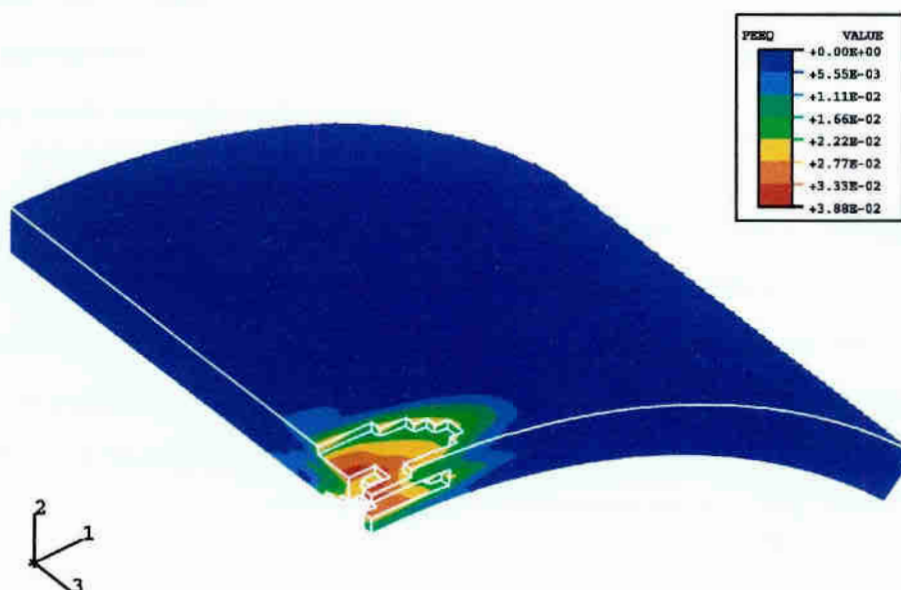


konstryktywnym betonem powinny być uwzględniane przy projektowaniu konstrukcji inżynierskich obciążonych w sposób nagły, gdyż brak ich może doprowadzić do niedoszacowania nośności konstrukcji.

a)



b)

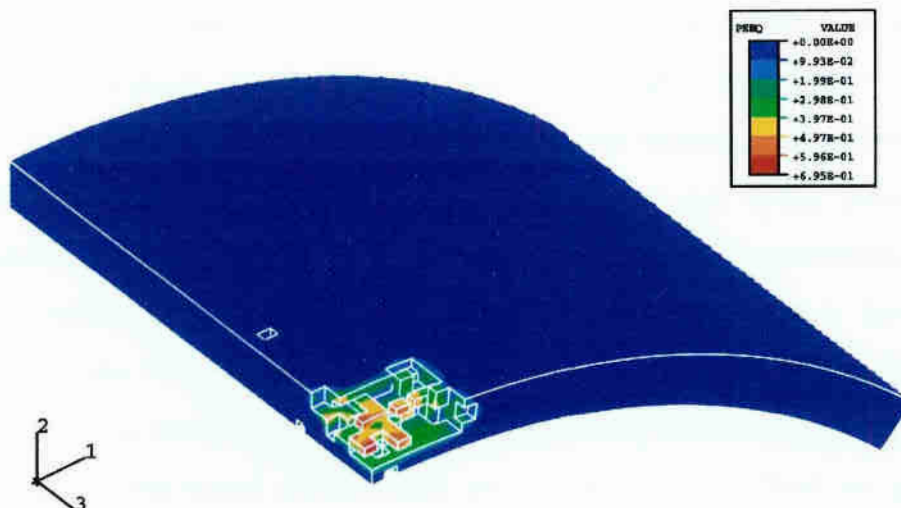


Rys. 5.14. Warstwy plastycznych odkształceń równoważnych

a) model Druckera – Pragera (DP)

b) model sprężysto – plastyczny z uwzględnieniem degradacji (EPD)

c)

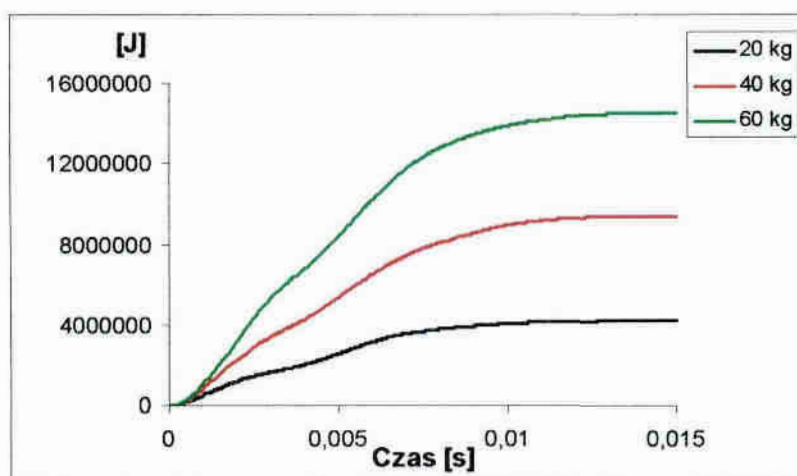


Rys. 5.14. Warstwicę plastycznych odkształceń równoważnych

c) model sprężysto – lepkoplastyczny z uwzględnieniem degradacji (EVPD)

5.7.3. Wariant III: Analiza odpowiedzi dynamicznej konstrukcji dla wybranej konfiguracji zabezpieczenia oraz wybranego związku konstytutywnego betonu przy zmieniającej się masie materiału wybuchowego.

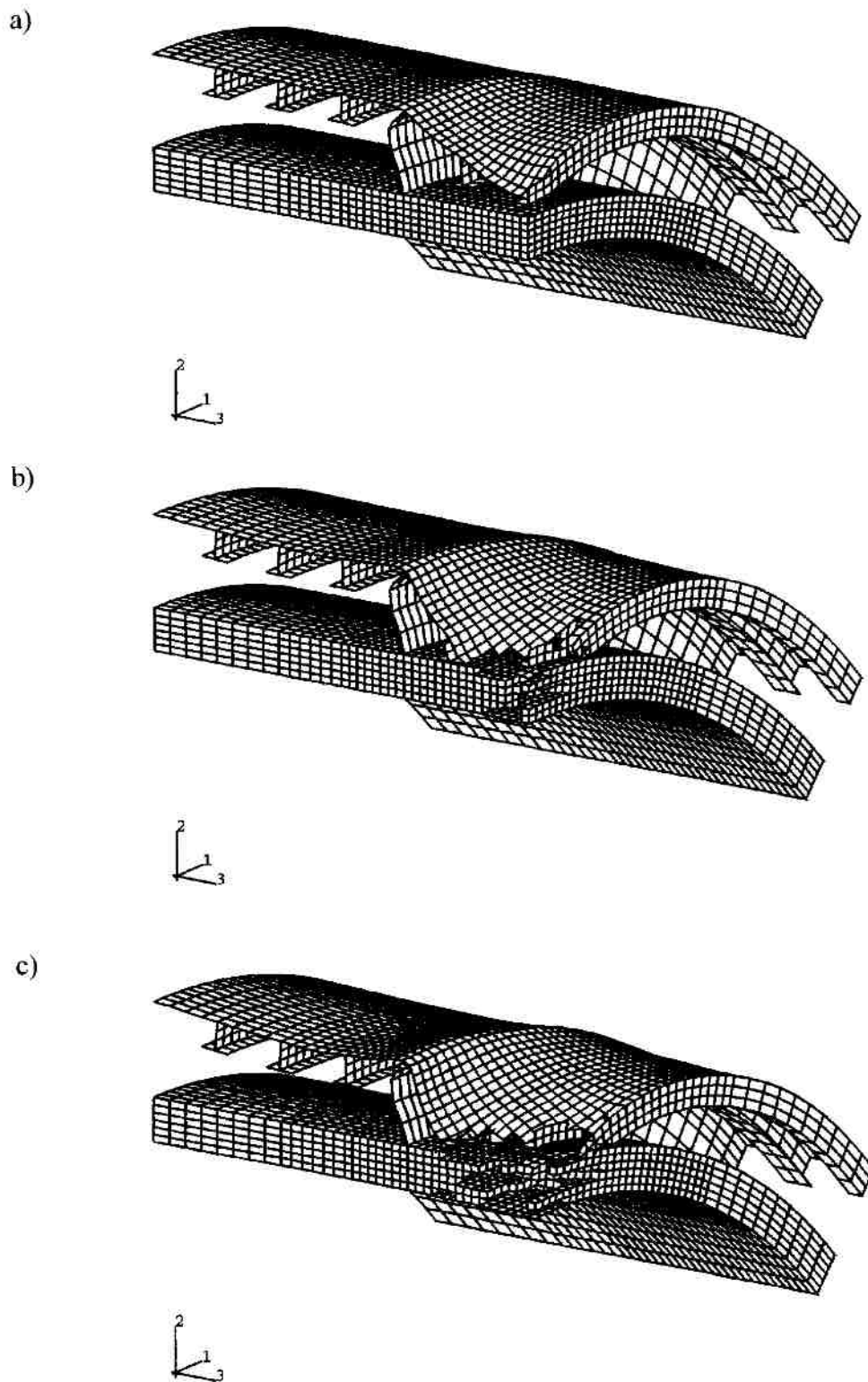
Rys. 5.15 przedstawia energię dyssypowaną na odkształceniach plastycznych w całym ustroju, przedstawioną w funkcji czasu, dla rozpatrywanych wartości masy TNT. Jak można zauważyć, po około 10 milisekundach wartość funkcji we wszystkich przypadkach jest praktycznie stała: zakończyły się plastyczne odkształcenia konstrukcji, która osiągnęła nową konfigurację.



Rys. 5.15. Rozkład w czasie energii dyssypowanej na odkształceniach plastycznych

Na rys. 5.16 pokazano końcową konfigurację części konstrukcji poddanej działaniu wybuchu, kolejno dla wszystkich wartości ładunku: a) 20 kg TNT, b) 40 kg TNT, c) 60 kg TNT. Z rysunku usunięto zniszczone elementy, tak stalowe jak i betonowe. Łatwo można zauważyć, że wybuch 20 kg TNT, rys. 5.16a, powoduje jedynie uszkodzenie zewnętrznej powłoki osłaniającej, polegające na zniszczeniu pasa przyległego do żebra usztywniającego oraz niewielkie wygięcie przepony łączącej. W obrębie wewnętrznej konstrukcji nośnej nie zanotowano żadnych zniszczeń, chociaż obecne są odkształcenia plastyczne, związane bardziej z pracą konstrukcji jako całości, niż z lokalnymi odkształceniami plastycznymi na skutek uderzeń odłamków górnej powłoki.

Inna sytuacja widoczna jest na rys. 5.16b oraz rys. 5.16c. Zwiększenie ładunku wybuchowego (40 i 60 kg TNT) spowodowało silne wygięcie przepony łączącej, powstanie widocznej strefy zniszczeń górnej powłoki osłaniającej w bezpośredniej bliskości przyłożonego ładunku, jak też uformowanie się strefy zniszczeń w obrębie wewnętrznej konstrukcji nośnej. O ile dla 40 kg TNT zniszczeniu ulega jedynie część betonu, natomiast stalowe warstwy pozostają praktycznie bez trwałych uszkodzeń, ładunek zwiększony do 60 kg daje szeroką strefę zniszczeń – bez trwałych zniszczeń pozostaje jedynie wewnętrzna warstwa stalowa (choć i w niej wartości odkształceń plastycznych są dość wysokie). W warstwie betonu łatwo można wyróżnić otwór przechodzący przez całą jej grubość.



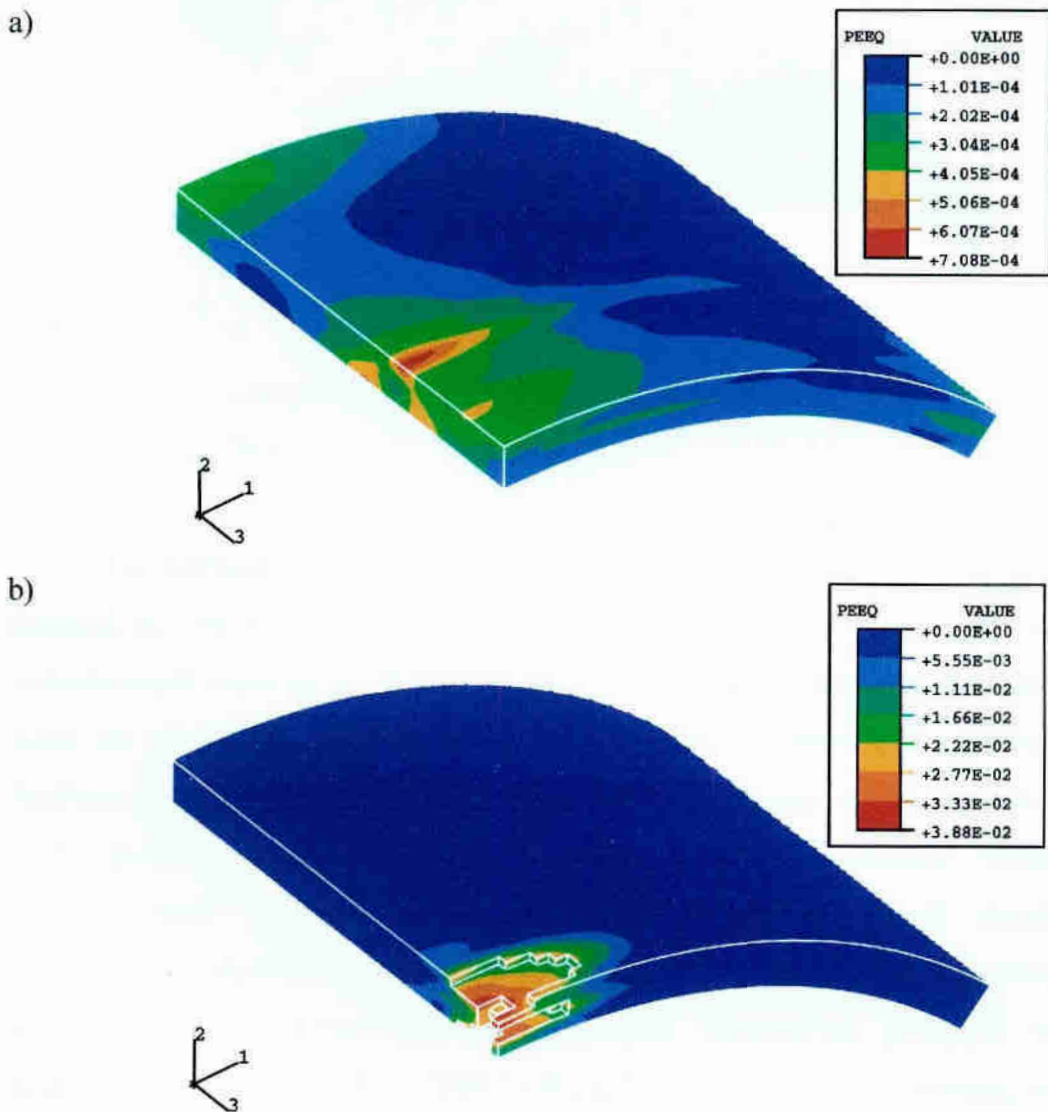
Rys. 5.16. Końcowa postać odkształconego ustroju

a) 20 kg TNT

b) 40 kg TNT

c) 60 kg TNT

Warstwie plastycznych odkształceń równoważnych dla warstwy betonu konstrukcji nośnej podano na rys. 5.17, dla wszystkich trzech przypadków obciążenia. Także tutaj z siatki usunięto zniszczone elementy ( $D=1$ ).

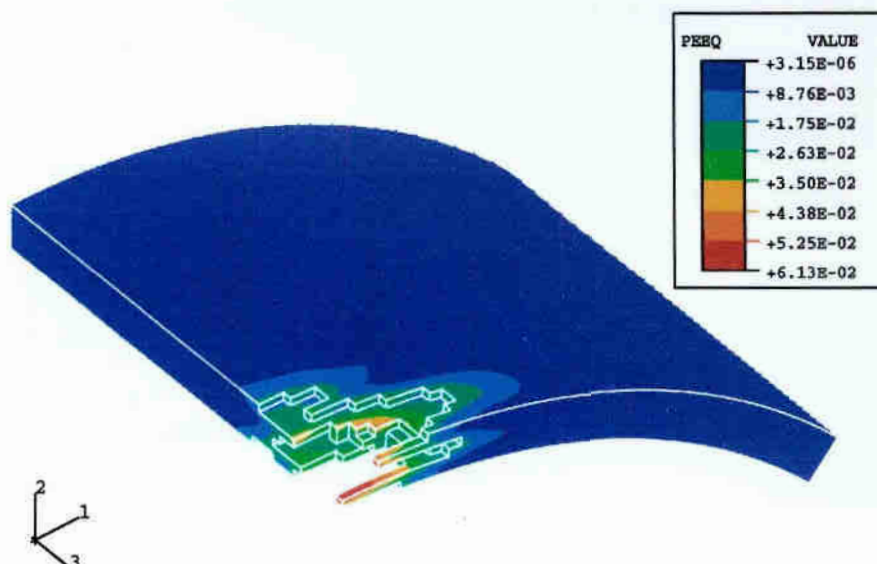


Rys. 5.17. Warstwie plastycznych odkształceń równoważnych

a) 20 kg TNT

b) 40 kg TNT

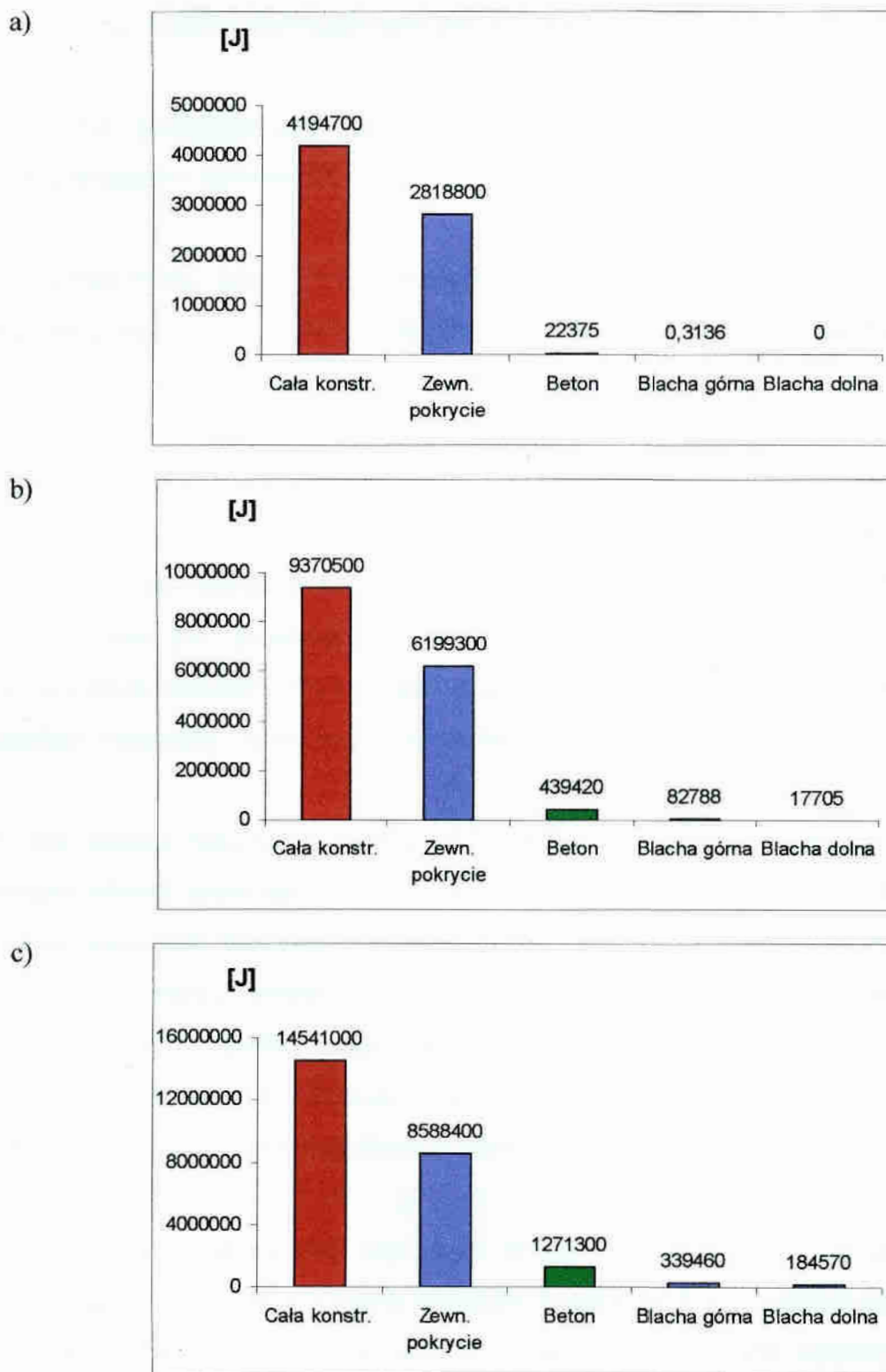
c)



Rys. 5.17. Warstwy plastycznych odkształceń równoważnych

c) 60 kg TNT

Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzić można, że rozpatrywana konstrukcja osłonowa spełnia swoje zadanie w zakresie obciążeń ładunkami wybuchowymi rzędu 20 kg TNT. W przypadku wystąpienia większych ładunków należy liczyć się z trwałymi zniszczeniami, także w obrębie wewnętrznej konstrukcji nośnej. Możliwe jest ograniczenie ich wielkości i zakresu, poprzez np. wykonanie większej liczby przepon łączących ze sobą stalowe warstwy konstrukcji tunelu, bądź zaprojektowanie zbrojenia betonu. Rozkład maksymalnej energii dyssypowanej w poszczególnych elementach konstrukcji przedstawiony został na rys. 5.18. Można przy tym zauważyć, że konstrukcja zabezpieczająca (zewnętrzne pokrycie) pochłania w pierwszym przypadku (20 kg TNT) 67% całkowitej energii dyssypowanej, w drugim (40 kg TNT) 66% a w trzecim (60 kg TNT) już tylko 59%. Jak widać dana osłona najwyższą skuteczność ma w przypadku pierwszym i drugim.



Rys. 5.18. Maksymalna energia dyssypowana na odkształceniach plastycznych w wybranych elementach konstrukcji tunelu

- a) obciążenie ładunkiem – 20 kg
- b) obciążenie ładunkiem – 40 kg
- c) obciążenie ładunkiem – 60 kg

## 5.8. Wnioski końcowe dotyczące zabezpieczeń tunelu podwodnego

Na podstawie przedstawionych analiz różnych konfiguracji konstrukcji zabezpieczająco – ochronnych, można wysnuć następujące wnioski:

1. Główne efekty (plastyczna deformacja i zniszczenie właściwej konstrukcji tunelu) występują na skutek kontaktu pomiędzy zniszczonymi częściami zewnętrznej osłony i zewnętrznej powierzchni konstrukcji tunelu.

2. Energia rozproszona podczas deformacji plastycznych oraz zniszczenia środków ochronnych zależy od ich założonej konfiguracji. Aby zwiększyć dyssypację energii na elementach ochronnych i jednocześnie zmniejszyć na elementach chronionych, lepszym rozwiązaniem jest zwiększanie grubości zewnętrznych powłok dodatkowych na zewnętrznych osłonach. Zwiększanie grubości warstwy osłonowej na zewnętrznej powłoce konstrukcji właściwej tunelu jest mniej efektywne.

3. Aby uniknąć całkowitego przebicia konstrukcji i związanego z tym ryzyka dla jej bezpieczeństwa, koniecznym jest zminimalizowanie deformacji plastycznych i zniszczeń warstw stalowych. Zewnętrzna warstwa stali jest bardziej narażona na zniszczenie lub przebicie. Warstwa wewnętrzna jest chroniona dodatkowo warstwą betonowego rdzenia. W jej przypadku zwiększanie warstwy znajdującej się na konstrukcji tunelu powoduje zmniejszenie odkształceń plastycznych. Również zwiększanie grubości warstwy zewnętrznej powłoki ochronnej działa na korzyść.

4. Istotny wpływ na wartości uzyskanych wyników ma modelowanie konstytutywne. Na podstawie porównania różnych związków wynika, że w przypadkach obciążonych dynamicznie niezbędne jest uwzględnienie degradacji materiału oraz wpływu prędkości odkształceń aby poprawnie określić odpowiedź konstrukcji.



## Rozdział 6

### Wnioski i podsumowanie

#### 6.1. Wnioski i uwagi końcowe

Przeprowadzone w pracy badania i analizy doprowadziły do sformułowania następujących wniosków i uwag końcowych.

1.

Podstawowym problemem analiz komputerowych jest modelowanie konstytutywne.

Modelowanie konstytutywne materiałów anizotropowych (w tym wypadku betonu) jest zagadnieniem trudnym i do końca nie rozwiązany. Nie istnieje uniwersalny model materiałowy, który opisywałby właściwości takich materiałów w sposób jednoznaczny dla wszystkich przypadków obciążenia i geometrii.

Istnieje duża liczba związków konstytutywnych opisująca zachowanie się betonu w przypadku obciążeń nagłych, udokumentowana w literaturze. Jednakże zastosowanie jakiegokolwiek opisu betonu w analizach numerycznych musi być poprzedzone weryfikacją i dyskusją nad poziomem wiarygodności otrzymanych wyników za pomocą danego związku. Propozycję takiej weryfikacji przedstawiono w postaci schematu blokowego i zamieszczono w podsumowaniu.

Mimo tak dużej liczby związków konstytutywnych opisujących zachowanie się betonu pod wpływem obciążeń nagłych, istnieje potrzeba opracowania nowych modeli, bardziej uniwersalnych. Przykładem jest opracowany i zaimplementowany przez autora model uwzględniający wpływ prędkości odkształceń plastycznych na naprężenia. Należy przy tym pamiętać, że nie każdy model matematyczny można bez ograniczeń dołączyć do istniejących systemów obliczeniowych. Tworzenie takich modeli musi być podporządkowane procedurom MES rozwiązującym dane zagadnienie.

Zaproponowany model betonu nie uwzględnia lokalnego charakteru zjawisk dynamicznych. Zmianę właściwości materiału uwzględnia się na podstawie średniej prędkości odkształceń. Założenie takie jest stosowane przez wielu autorów [17,63, 70] i wynika z braku możliwości dokładnego zmierzenia przebiegu zmienności prędkości odkształceń w testach eksperymentalnych i, co się z tym wiąże, braku możliwości

porównania z modelami matematycznymi. W przyszłości model ten zostanie rozbudowany i uzależniony od lokalnej wartości prędkości odkształceń.

W pracy głębiej nie analizowano modelowania konstytutywnego stali, gdyż modele stali są stosunkowo dobrze opracowane i dają wiarygodne odpowiedzi na działanie obciążeń nagłych w szerokim zakresie prędkości odkształceń.

2.

Ze względu na różnorodny charakter każdej z konstrukcji inżynierskich oraz braku możliwości przewidzenia dokładnej charakterystyki obciążenia, nie istnieje jednoznaczna odpowiedź na sposób ich ochrony przed skutkami obciążeń nagłych. Każdą z nich należy rozpatrywać indywidualnie. O wiele lepszym rozwiązaniem wydaje się umieszczanie osłon, powłok, barier ochronnych w pewnej odległości od konstrukcji, niż powiększanie elementów konstrukcyjnych. Osłony te mają za zadanie przejąć część energii impulsu i rozproszyć ją, niejednokrotnie samemu ulegając całkowitemu zniszczeniu. Odległość pomiędzy konstrukcją nośną a konstrukcją ochronną powinna zostać starannie dobrana tak, aby oderwane, luźne elementy osłony, przemieszczające się z dużą prędkością nie uszkadzały konstrukcji nośnej. Niedobrym rozwiązaniem jest również umieszczanie powłok ochronnych bezpośrednio na konstrukcji nośnej, gdyż osłony te pochłaniają niewiele energii obciążenia.

3.

Z przeprowadzonych analiz numerycznych wynika, że nieuwzględnienie wpływu prędkości odkształceń na wartości naprężeń w konstrukcjach betonowych i żelbetowych poddanych nagłym obciążeniom, przy dużych wartościach tych prędkości, może doprowadzić do zawyżenia nośności konstrukcji inżynierskich.

4.

Analiza numeryczna nigdy nie zastąpi eksperymentu. Błędnym jest odczytanie sensu tej pracy jako propozycji odejścia od badań eksperymentalnych. W tak złożonym przypadku, jak tu zaprezentowano, na razie jest to jedyne narzędzie do prognozy zachowania się złożonej konstrukcji inżynierskiej w przypadku nagłego obciążenia. Analiza komputerowa powinna służyć do planowania dużych eksperymentów, aby

obniżyć koszty przeprowadzenia pojedynczych badań doświadczalnych. Dzięki niej możemy poznać prawdopodobny przebieg zjawiska, co pozwoli uniknąć błędów, które mogą wypaczyć rezultat eksperymentu.

## 6.2. Podsumowanie

Przedmiotem analizy jest zabezpieczenie konstrukcji tunelu podwodnego obciążonego wybuchem przez zastosowanie warstwy ochronnej, pochłaniającej energię obciążenia, znajdującej się w pewnej odległości od ustroju nośnego. Poddano analizie różne sposoby umieszczenia głównej warstwy osłonowej oraz wpływ grubości warstwy osłonowej na skutki wywołane obciążeniem. Zbadano również odpowiedź konstrukcji na zmianę wielkości obciążenia przy danym rodzaju zabezpieczenia.

Praca ta obejmuje również propozycję rozwiązania zagadnienia, gdzie ze względu na jego złożoność, nie istnieje możliwość przeprowadzenia całościowych badań eksperymentalnych. W pracy podejmuje się dyskusję nad dojściem do modelu elementów skończonych, weryfikacją związków konstytutywnych, modelowaniem obciążenia oraz sposobem określenia rzetelności wyników.

Ze względu na duże deformacje oraz silną nieliniowość geometryczną w definicji numerycznej problemu wykorzystywany jest opis uaktualniony Lagrange'a. Rozwiązanie problemu następuje za pomocą metody elementów skończonych, poprzez jawne całkowanie równań ruchu przy użyciu algorytmu różnic centralnych.

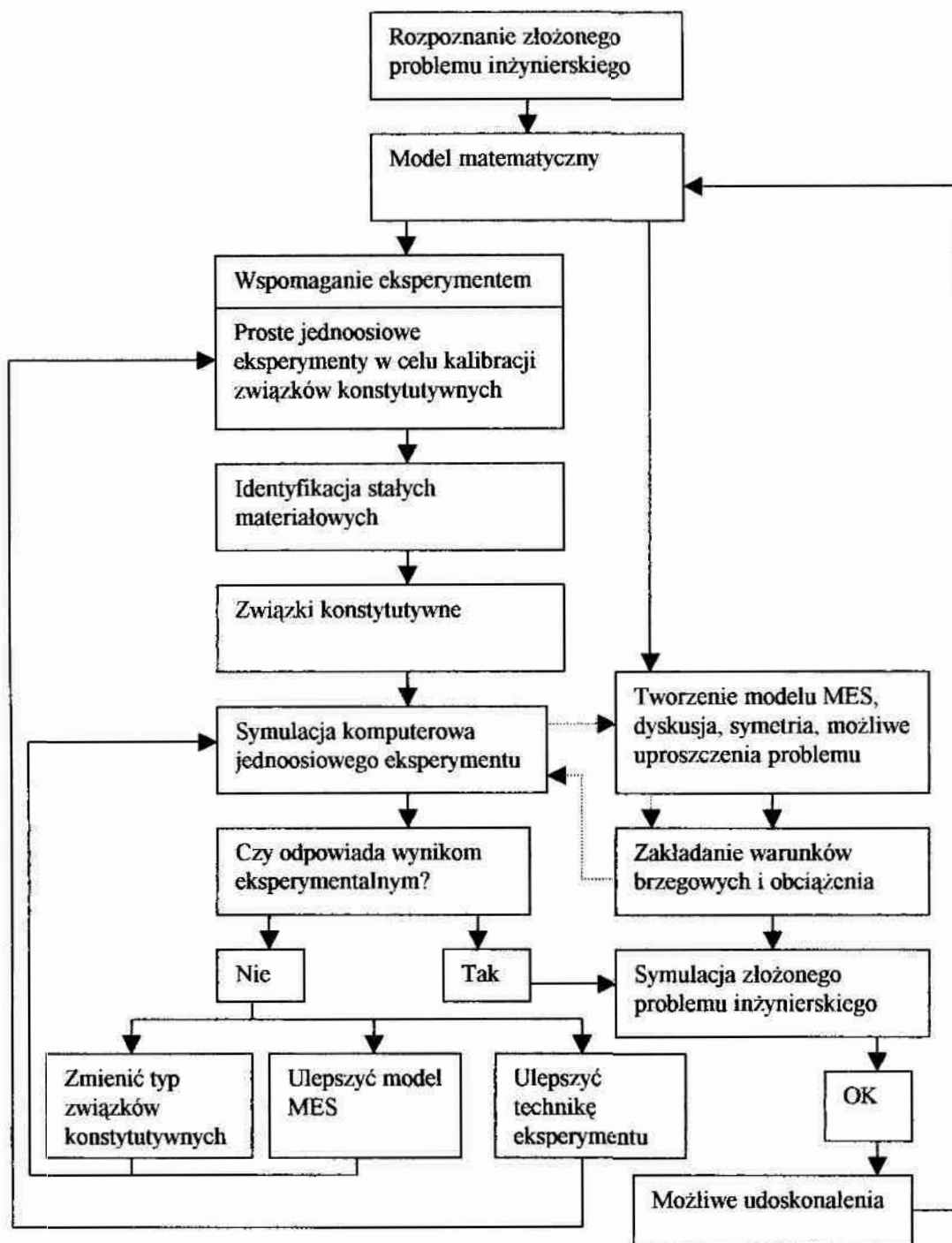
Podstawowym problemem takich analiz jest dojście do właściwych związków konstytutywnych. W pracy skupiono się na weryfikacji modeli materiałowych dla betonu, gdyż modelowanie konstytutywne betonu stanowi duży problem w analizach numerycznych zagadnień dynamicznych. W tym celu przeprowadzono symulacje numeryczne doświadczeń dynamicznych z różnymi związkami konstytutywnymi betonu.

Związki konstytutywne dla stali dają wyniki zgodne z badaniami eksperymentalnymi w szerokim zakresie prędkości odkształceń, potwierdzone to zostało wieloma symulacjami komputerowymi. Związki materiałowe dla betonu są bardzo słabo opracowane pod tym względem, często opracowane modele dają wyniki zgodne z badaniami eksperymentalnymi tylko w pewnych określonych zakresach prędkości. Podstawowym problemem jest zmienny i silnie lokalny charakter prędkości odkształceń

w zjawisku dynamicznym, co nie jest uwzględnione w żadnym z modeli konstytutywnych dla betonu. Trudności potęguje fakt, iż z przyczyn ekonomicznych i technicznych nie jesteśmy w stanie przeprowadzić badań eksperymentalnych dużego, złożonego zadania inżynierskiego z dużymi prędkościami odkształceń. Poprawność związku konstytutywnego możemy jedynie zweryfikować za pomocą prostych doświadczeń a i te, czasem, okazują się niedoskonałe.

W zaprezentowanej rozprawie przeanalizowano dwa proste, jednoosiowe doświadczenia pozwalające na określenie czy dany związek konstytutywny dla betonu spełnia podstawowe warunki jednoosiowego stanu naprężeń dynamicznych. W tym celu przeprowadzono również analizę numeryczną belki żelbetowej obciążonej w sposób nagły. Przeprowadzono analizę porównawczą wyników otrzymanych w symulacjach komputerowych z wynikami badań doświadczalnych ogólnie dostępnych w literaturze.

Rys. 6.1 pokazuje schemat blokowy propozycji podejścia do analizy złożonego zadania inżynierskiego z weryfikacją w zakresie związków materiałowych przy pomocy prostych doświadczeń eksperymentalnych.



Rys. 6.1. Schemat blokowy podejścia do analizy złożonego problemu inżynierskiego

## Literatura

1. ABAQUS 5.8 *Manuals*, 1999, Hibbit, Karlson & Sorensen Inc.
2. Adamczyk R., Cichocki K., Ruchwa M., 1997, *Computer Simulation of the Underwater Shock Response of a Cylinder Subjected to a Far-Field Explosion*, XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań V 1997
3. Adamczyk R., Łodygowski T., 2001, *Concrete constitutive model calibration in numerical simulation under impact loads*, Materiały z XIX Ogólnopolskiej Konferencji Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania, Mielno, 5-8 czerwca, 2001, Politechnika Koszalińska, Zeszyty Naukowe Wydziału Mechanicznego, Koszalin-Mielno, 2001, Nr 28, 13-20
4. Adamczyk R., Łodygowski T., 2001, *Numerical simulation of concrete laboratory test under impact loads*, Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics „ECCM-2001”, Kraków, 26-29 June 2001
5. Adamczyk R., Maliszewski G., 1998, *Numerical Analysis of High Strain Rate Concrete Compression Test*, XX Międzynarodowe Sympozjum Naukowe Studentów i Młodych Pracowników Nauki, V 1998, Zielona Góra
6. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., 1970, *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*, Int. J. Numer. Meths. Eng.2
7. Bathe K.J., 1982, *Finite element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New Jersey
8. Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L., 1975, *Finite element formulation for large deformation dynamic analysis*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 9, 353-86
9. Bathe K.J., Ramaswamy S., 1979, *On three-dimensional non-linear analysis of concrete structure*, Nucl. Engng Design, Vol. 52, 385-409
10. Bazant Z.P., 1998, *Modelling of compressive strain softening, fracture and size effect in concrete*, In: R. de Borst et al., eds., Proceedings of Euro-C International Conference *Computational modelling of concrete structure*, 623-631, Balkema, Badgastein, Austria
11. Bazant Z.P., Ozbolt J., 1992, *Compression failure of quasibrittle material*, ASCE Journal of Engineering Mechanics 118 (3), 540-556
12. Bazant Z.P., Planas J., 1998, *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC Press Boca Raton and London
13. Bazant Z.P., Xiang Y., Prat P.C., 1996, *Microplane model for concrete*, ASCE Journal of Engineering Mechanics 122 (3), 245-254

14. Bąk G., Stolarski A., 1990, *Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo*, PAN, Warszawa
15. Belytschko T., Kam Liu W., Moran B., 1999, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley Ltd.
16. Beshara F.B.A., Viridi K.S., 1992, *Prediction of dynamic response of blast-loaded reinforced concrete structure*, Computer and Structures, Vol. 44, No ½, 297-313
17. Bischoff P.H., Perry S.H., 1995, *Impact behavior of plain concrete loaded in uniaxial compression*, Journal of Engineering Mechanics, No. 6, Vol. 121, 685-693
18. Borkowski W., Rybak P., 1998, *Kształtowanie odporności udarowej struktury nośnej wozu bojowego*, Materiały z II Konferencji Naukowo-Technicznej „Odporność Udarowa Konstrukcji”, Rynia, 1998, *Odporność Udarowa Konstrukcji. Zbiór referatów*, WAT, Warszawa, 99-110
19. Bungash M.Y.H., 1993, *Impact and explosion – Analysis and design*, Blackwell Scientific Publications, Cambridge
20. Bresler B., Pister K.S., 1958, *Strength of Concrete Under Combined Stresses*, Journal of American Concrete Institute, pp. 321-345
21. Cervena M., Hinton E., Bicanic N., 1987, *Non-linear transient dynamic analysis of three-dimensional reinforced concrete structures using a three-dimensional approach*, In Numerical Methods for Transient and Coupled Problems, (Edited by R.W. Lewis et al.)
22. Chen W.F., 1994, *Constitutive equations for engineering materials*, Elsevier, Amsterdam
23. Cichocki K., 1997, *Computer analysis of dynamic response due to underwater explosions on a hybrid structure*, In: HKS, ed., Proceedings of ABAQUS Users' Conference, Milan, Italy
24. Cichocki K., Adamczyk R., 1998, *Kształtowanie zewnętrznych powłok zabezpieczających przed skutkami wybuchu podwodnego*, II Konferencja Naukowo Techniczna "Odporność Udarowa Konstrukcji", Rynia 9 - 11.XII, 1998
25. Cichocki K., Adamczyk R., Maliszewski G., 1998, *Symulacja numeryczna testu Hopkinsona*, II Konferencja Naukowo Techniczna "Odporność Udarowa Konstrukcji", Rynia 9 - 11.XII, 1998
26. Cichocki K., Adamczyk R., Ruchwa M., 1999, *Material modelling for structures subjected to impulsive loading*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 6: 231-244

27. Cichocki K., Adamczyk R., Ruchwa M., 1998, *Effect of protective coating on underwater structure subjected to an explosion*. In: R. de Borst et al., eds., *Proceedings of Euro-C International Conference Computational modelling of concrete structure*, 623-631, Balkema, Badgastein, Austria
28. Cichocki K., Maier G., Perego U., 1994, *Analysis of damages due to underwater explosions on a hybrid structures*, *International Journal for Engineering Analysis and Design*, Vol 1, 341-361
29. Cichocki K., Maier G., Perego U., 1995, *On numerical simulations of explosions on sealines*, *Proceedings of the 9<sup>th</sup> DYMAT Technical Conference*, Munich
30. Cichocki K., Ruchwa M., Adamczyk R., 1998, *Numerical analysis of blast-loaded reinforced concrete beam*, XVI Ogólnopolska Konferencja "Poliptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania", Mielno 1998
31. Clough R.W., Penzien J., 1993, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc.
32. Comi C., Berthaud Y., Billardon R., 1995, *On localization in ductile-brittle materials under compressive loadings*, *Eur.J.Mech. A/Solids*, Vol.14, 19-41
33. Cowan H.J., 1953, *The Strength of Plain, Reinforced and Prestressed Concrete Under Action of Combined Stresses, with Particular References to the Combined Bending and Torsion of Rectangular Sections*, *Magazine of Concrete Research*, Vol. 5, No.14, pp. 75-86
34. Cowper G.R., Symonds P.S., 1957, *Strain hardening and strain rate effects in the impact loaded cantilever beams*, Brown University, Technical Report No 28
35. Dacko A., 1998, *Modelowanie obciążeń dynamicznych od fali uderzeniowej wybuchu*, Materiały z II Konferencji Naukowo-Technicznej „Odporność Udarowa Konstrukcji”, Rynia, 1998, *Odporność Udarowa Konstrukcji. Zbiór referatów*, WAT, Warszawa, 99-110
36. Dacko M., Dacko A., 1998, *Dynamiczny model płyty dna czołgu*, Materiały z II Konferencji Naukowo-Technicznej „Odporność Udarowa Konstrukcji”, Rynia, 1998, *Odporność Udarowa Konstrukcji. Zbiór referatów*, WAT, Warszawa, 111-120
37. Flangan D.P., Belytschko T., *A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral and Orthogonal Hourglass Control*, 1981, *Int. J. Numer. Meths. Eng.* 17, 679-706
38. Fung Y.C., 1969, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa
39. Gatuingt F., Burlion N., Daudeville, Pijaudier-Cabot G., 1998, *Computational modelling of split Hopkinson test performed on confined concrete*, In: R. de Borst et al., eds., *Proceedings of Euro-C International Conference Computational modelling of concrete structure*, 623-631, Balkema, Badgastein, Austria



40. Georgin J.F., Reynouard J.M., Mearbet O., 1998, *Modelling of concrete at high strain rate*, In: R. de Borst et al., eds., *Proceedings of Euro-C International Conference Computational modelling of concrete structure*, 623-631, Balkema, Badgastein, Austria
41. Gerard B., Breysee D., Ammouche A., Houdusse O., Didry O., 1996, *Cracking and permeability of concrete under tension*, *Materials and Structures*, Vol.29, 141-151
42. Glema A., Łodygowski T., Perzyna P., 2000, *Interaction of deformation waves and localization phenomena in inelastic solids*, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183, 123 - 140
43. Hedricks F., Wekezer J.W., 1996, *Finite Element Modeling of G2 Guardrail*, *Transportation Research Record No. 1528*, 130-137
44. Henrych J., 1979, *The Dynamics of Explosions and Its Use*. Elsevier, Amsterdam
45. Hertzberg R.W., 1996, *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, Wiley
46. Hughes T.J.R., 1987, *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J.
47. Hughes T.J.R., Liu W.K., Levit, I., 1981, *Nonlinear Dynamics Finite Element Analysis of Shells*, *Nonlinear Finite Element Analysis in Struct. Mech.*, Eds. W. Wunderlich, E. Stein, and K.J. Bathe, Springer-Verlag, Berlin, 151-168
48. Kleiber M., 1985, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Poznań
49. Kleiber M. (red.), 1995, *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, PWN, Warszawa
50. Klisiński M, Mróz Z., 1988, *Opis niesprężystych deformacji i uszkodzenia betonu*, *Rozprawy, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej* Nr 193
51. Kwon Y.W., Fox P.K., 1993, *Underwater shock response of a cylinder subjected to a side-on explosion*, *Computers and Structures*, 48, pp.637-646
52. Lemaitre J., 1996, *A Course on Damage Mechanics*, Springer, Berlin
53. Lemaitre J., Chaboche J.L., 1990, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press
54. Łodygowski T., 1996, *Theoretical and numerical aspects of plastic strain localization*, *Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej*, Poznań

55. Macaulay M., 1987, *Introduction to Impact Engineering*, Chapman and Hall, London-New York
56. Mase G., E., 1990, *Theory and problems of continuum mechanics*, McGraw-Hill Book Company
57. Molyneaux T.C.K., Li L.Y., Firth N., *Numerical simulation of underwater explosion*, *Computer Fluids*, Vol. 23, 903-911
58. Muhlhaus H.B., 1995, *Continuum Models for Materials with Microstructure*, Wiley
59. Ngo D., Scordelis A.C., 1967, *Finite element analysis of reinforced concrete beams*, *J. Am. Concr. Inst.*, Vol. 64, pp. 152 – 163
60. Nilsson A.H., 1968, *Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method*, *ACI Journal*, Vol. 65, pp. 757 – 766
61. Nilsson L., 1979, *Impact Loading on Concrete Structures*, Publication 79-1, Department of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden
62. Perry S.H., Bischoff P.H., 1990, *Measurement of the compressive impact strength of concrete using a thin loadcell*. *Mag. of Concrete Res.*, 42(151), 75-81
63. Perzyna P., 1966, *Fundamental problems in viscoplasticity*, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, (9), 244-368
64. Perzyna P., *Teoria lepkoplastyczności*, 1966, PWN, Warszawa
65. Rossi P., Toutlemonde F., 1996, *Effect of loading rate on the tensile behaviour of concrete: description of the physical mechanisms*, Vol. 29, 116-118
66. Ruchwa M., 2001, *Odpowiedź dynamiczna płyt sprężysto-plastycznych na działanie nagłych obciążeń*, rozprawa doktorska, Politechnika Koszalińska
67. Rusiński E., Smolnicki T., Karliński J., 1998, *Wybrane zagadnienia przy modelowaniu konstrukcji ochronnych maszyn obciążonych udarowo*, Materiały z II Konferencji Naukowo-Technicznej „Odporność Udarowa Konstrukcji”, Rynia, 1998, *Odporność Udarowa Konstrukcji. Zbiór referatów*, WAT, Warszawa, 99-110
68. Rymarz Cz., 1993, *Mechanika Ośrodków Ciągłych*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa
69. Salvatorelli F., 1989, *Dynamic response and failure of singular and sandwich cylindrical shells under blast loading*, In: *Structure under shock and impact*, P.S. Boulson (Ed), Elsevier, Amsterdam, 381-395
70. Soroushian P., Choi K.B., Alhamad A., 1986, *Dynamic constitutive behaviour of concrete*. *J. ACI*, Vol. 83, No. 2, 251-259

71. Srivastava R.S., 1994, *Interaction of Shock Waves*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
72. Stouffer D.C., Dame L.T., 1996, *Inelastic Deformations of Metals*, Wiley
73. Szcześniak Z., 1999, *Modelowanie zachowania dynamicznego konstrukcji podziemnych w warunkach działania powietrznej fali uderzeniowej*, WAT Warszawa
74. Tedesco J.W., Hughes M.L., Ross C.A., 1994, *Numerical Simulation of High Strain Rate Concrete Compression Test*, *Computers and Structures*, Vol. 51, 65-77
75. Wekezer J.W., Oskard M.S., Logan R.W., Zywicz E., 1993, *Vehicle Impact Simulation*, *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, Vol. 119, No.4, 598-617
76. Włodarczyk E., 1994, *Wstęp do mechaniki wybuchu*, PWN, Warszawa