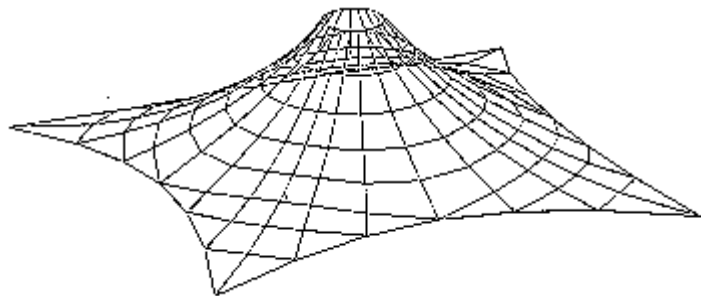


Praca doktorska

Politechnika Koszalińska
Wydział Budownictwa I Inżynierii Środowiska
Katedra Konstrukcji Metalowych

Mgr inż. Monika Matuszkiewicz

Analiza statyczna ustrojów ciągnowych w zakresie sprężysto-plastycznym



Promotor :

Prof. dr hab. inż. Szymon Pałkowski

Koszalin 2001

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Charakterystyka konstrukcji ciągnowych.....	5
1.2. Metody analizy ustrojów ciągnowych (przegląd literatury).....	9
1.3. Charakterystyka, cel i zakres pracy.....	12
2. Właściwości mechaniczne ciągien	15
2.1. Druty i liny stalowe.....	15
2.2. Zależność $\sigma - \epsilon$ dla lin.....	17
2.3. Pojęcie współczynnika sprężystości liny.....	19
2.4. Badania doświadczalne liny.....	20
2.4.1. Opis przeprowadzonych badań.....	24
2.4.2. Wyniki badań.....	25
2.4.3. Określenie zależności $\sigma - \epsilon$ na podstawie badań.....	27
3. Statyka pojedynczego ciągu	30
3.1. Równanie ciągu.....	30
3.2. Przybliżone równanie ciągu.....	31
3.3. Metody obliczania ciągien w zakresie sprężysto-plastycznym.....	35
3.3.1. Metoda oparta na odcinkowo liniowej zależności $\sigma - \epsilon$	36
3.3.2. Metoda przyrostowa (sztywności stycznej).....	37
3.3.3. Metoda Newtona.....	39
3.3.4. Metoda siecznych (kolejnych przybliżeń).....	40
3.4. Przykłady obliczeń ciągu w zakresie sprężysto-plastycznym.....	42
4. Zagadnienia statyki przestrzennych ustrojów ciągnowych	48
4.1. Wprowadzenie.....	48
4.2. Zastosowanie MES do analizy statycznej ustrojów ciągnowych.....	48
4.2.1. Macierze sztywności prostoliniowych elementów ciągien.....	49
4.2.2. Metody rozwiązywania zagadnienia geometrycznie nieliniowego.....	54
4.2.3. Zastosowanie elementów krzywoliniowych.....	56
4.2.4. Uwzględnienie nieliniowości fizycznej ciągien	59
4.2.5. Wpływ podatności konstrukcji wsporczej na stan sił i przemieszczeń ustrojów ciągnowych.....	62
5. Programy komputerowe	66

5.1. Program NET1.....	66
5.2. Program NET2.....	68
6. Przykłady obliczeń numerycznych.....	70
6.1. Test programu NET1 – układ cięgnowy o dużej geometrycznej zmienności.	70
6.2. Siatka cięgnowa - zakres liniowo sprężysty.....	71
6.3. Siatka cięgnowa - zakres sprężysto-plastyczny.....	75
6.4. Ustroje cięgnowo-belkowe.....	82
7. Uwagi końcowe.....	92
8. Załącznik.....	95
9. Literatura.....	108

1. Wstęp

1.1. Charakterystyka konstrukcji cięgnowych

Do ustrojów cięgnowych należą konstrukcje, których głównym elementem nośnym jest cięgno, tj. element, którego jeden wymiar jest wielokrotnie większy od pozostałych wymiarów i który w wyniku znikomej sztywności poprzecznej na zginanie lub skręcanie jest zdolny przenosić tylko siły rozciągające. Tak wąski zakres przenoszonych obciążeń nie pomniejsza jednak wartości cięgna, zresztą od dawna znanego elementu konstrukcyjnego, które staje się bardzo często podstawowym elementem konstrukcji, zwłaszcza w rozwiązaniach o dużych rozpiętościach lub powierzchniach.

Niewątpliwą zaletą konstrukcji cięgnowych jest ich szeroki zakres zastosowań i możliwość kształtowania różnorodnych architektonicznych form projektowanych obiektów. Najczęściej znajdują one zastosowanie jako przekrycia hal widowiskowo-sportowych, pawilonów wystawowych, dworców i hangarów, jako mosty wiszące i podwieszane lub też maszty i kominy z odciągami. Na ciągły wzrost zainteresowania tymi konstrukcjami ma wpływ nie tylko stosunkowo tania, prosta i szybka technologia montażu, ale przede wszystkim sama lekkość konstrukcji, wynikająca z wysokiej wytrzymałości materiału i maksymalnego wykorzystania przekroju cięgna.

Znane od czasów starożytnych konstrukcje cięgnowe zostały jakby na nowo odkryte przez architektów i konstruktorów dopiero po 1950 r., na co istotny wpływ miały współczesne materiały, a zwłaszcza zastosowanie stali o wysokiej wytrzymałości. Zalety ustrojów cięgnowych widoczne są szczególnie na przykładzie rekordowych budowli tego typu. Można tu m.in. wyróżnić :

- przekrycie obiektów olimpijskich w Monachium (1972 r.) o łącznej powierzchni 69000 m² [6],
- przekrycie wiszące centrum kulturalnego w Hong Kongu o powierzchni 10000 m² [36],
- niemieckie pawilony wystawowe na Expo'67 w Montrealu o powierzchni 8000 m² [6],
- chłodnię kominową w RFN (1975 r.) o wys. 180 m i średnicy 140 m [6],
- przekrycie podwieszane fabryki odzieżowej firmy Benetton w Treviso o powierzchni zabudowy 40000 m² [28],

- przekrycie podwieszane Grande Bigo wystawy „Columbus” w Genui (tekstylny namiot o pow. 12000 m² i wymiarach 400 x 30 m podwieszony do dwóch pylonów) [28].

Jednak prawdziwe rekordy rozpiętości osiągają konstrukcje mostowe, przy czym warto podkreślić, że mosty wiszące i podwieszane o największych rozpiętościach przęseł (tabl. 1.1 i 1.2) zostały zbudowane w ostatnim dziesięcioleciu.

Tablica 1.1. Mosty wiszące o największych rozpiętościach głównego przęsła [56]

L.p.	Nazwa mostu	Rozpiętość [m]	Miejscowość	Rok budowy
1	Akashi Kaikyo	1991	Kobe Naruto, Japonia	1998
2	Great Belt East	1624	Halskov Sprog, Dania	1998
3	Humber	1410	Hull, Anglia	1981
4	Jiangyin	1385	Jiangsu Prov., Chiny	1999
5	Tsing Ma	1377	Hong Kong, Chiny	1997
6	Verrazano Narows	1298	New York, USA	1964
7	Golden Gate	1280	San Francisco, USA	1937
8	Höga Kusten	1210	Veda, Szwecja	1997
9	Mackinac	1158	Mackinaw City, USA	1957
10	Minami Bisan sato	1100	Kojima Sakaide, Japonia	1988

Tablica 1.2. Mosty podwieszane o największych rozpiętościach głównego przęsła [56]

L.p.	Nazwa mostu	Rozpiętość [m]	Miejscowość	Rok budowy
1	Tatara	890	Onomichi Imabari, Japonia	1999
2	Pont de Normandie	856	Le Havre, Francja	1995
3	Qingzhou Minjiang	605	Fuzhou, Chiny	1996
4	Yangpu	602	Szanghaj, Chiny	1993
5	Xupu	590	Szanghaj, Chiny	1997
6	Meiko Chuo	590	Nagoya, Japonia	1997
7	Skarnsundet	530	Trondheim, Norwegia	1991
8	Tsurumi Tsubasa	510	Yokohama, Japonia	1994
9	Ikuchi	490	Onomichi Imabari, Japonia	1991
10	Öresund	490	Dania/Szwecja	2000

W realizacji konstrukcji cięgnowych przodują państwa wysoko uprzemysłowane, takie jak Japonia, Chiny, kraje skandynawskie, Niemcy, czy Francja,

ale także inne kraje – w tym również Polska – mogą się poszczycić wieloma ciekawymi rozwiązaniami konstrukcji cięgnowych. Rozwiązania te uwarunkowane są jednak dostępnością do najnowszych technik i technologii, opartych na komputeryzacji i optymalizacji konstrukcji. Ostatnie lata przyniosły także zmiany motywacji sięgania po rozwiązania obiektów o konstrukcji cięgnowej. Obok względów estetycznych i bezkonkurencyjności w przekrywaniu dużych powierzchni, coraz większą rolę odgrywa także przekonanie, że konstrukcje te są przyjazne środowisku naturalnemu. Wpływa na to oszczędność materiału (maksymalne wykorzystanie wytrzymałościowe przekroju cięgna), a także fakt, że są to z reguły konstrukcje łatwo rozbieralne, a ich części mogą być ponownie wykorzystywane. Dzięki niezwykle różnorodnym kształtom, często naśladującym naturę, budowle te, mimo swoich rozmiarów, całkowicie integrują się z otoczeniem. Przykładami tego rodzaju nowych rozwiązań konstrukcji cięgnowych są m.in. :

- Gottlieb-Daimler-Stadion w Stuttgarcie o powierzchni przekrycia 32 000 m² (rys. 1.1.) [3,52] ,



Rys. 1.1. Gottlieb-Daimler-Stadion w Stuttgarcie [52]

- cięgnowo-membranowy dach National Stadium of Malaysia w Kuala Lumpur o powierzchni 39 500 m² [3] ,

- pochyły parasol o konstrukcji cięgnowo-prętowej typu namiotowego nad dziedzińcem Sony Center w Berlinie (rys. 1.2., 1.3.) – przekrycie na rzucie zbliżonym do elipsy o wymiarach 102 x 77 m i maksymalnej wysokości 40 m [22] ,



Rys. 1.2. Budowa parasola nad dziedzińcem Sony Center w Berlinie [22]



Rys. 1.3. Parasol – widok od strony wieży [22]

- niemieckie pawilony wystawowe na Expo'2000 w Hannoverze : hala nr 26 z wiszącym dachem o wymiarach 220 x 115 m i wysokości 26 m (rys. 1.4.), hala nr 9 o wymiarach przekrycia 138 x 238 m i maksymalnej wysokości 26 m (rys. 1.5.) [50].



Rys. 1.4. Hala nr 26 [50]



Rys. 1.5. Hala nr 9 [50]

Ustroje cięgnowe, mimo swoich zalet, stwarzają jednak także szereg problemów, które dotyczą między innymi technologii produkcji cięgien, zabezpieczenia cięgien przed korozją, niezawodności zakotwień, sposobu przekazywania obciążenia na

fundament, czy odkształcalności pokrycia dachowego. Problemy te, a także przekonanie, że konstrukcje cięgnowe nie są dostatecznie sztywne oraz że ich obliczanie jest trudne, ograniczają i utrudniają ich powszechne zastosowanie. Współczesne, efektywne rozwiązania technologiczne i konstrukcyjne ustrojów cięgnowych są projektowane na podstawie analizy optymalizacyjnej uwzględniającej różne kryteria, wśród których najważniejszym jest kryterium wytrzymałościowe.

O tym, czy w końcowym efekcie konstrukcja cięgnowa będzie spełniała stawiane jej zadania, decyduje przyjęcie poprawnej metody obliczeń statycznych, uwzględniającej nieliniowość geometryczną konstrukcji, ale także – w niektórych przypadkach – odkształcalność fizyczną czy reologiczną. Wydaje się, że brak dostatecznie opracowanych i przygotowanych do inżynierskiego użytku metod obliczeniowych konstrukcji cięgnowych, jak również niedostateczne rozpoznanie, kiedy można korzystać z uproszczonych metod obliczeń, jest główną przeszkodą w szerszym zastosowaniu tych ustrojów.

1.2. Metody analizy ustrojów cięgnowych (przegląd literatury)

Istnieją dwie zasadnicze grupy metod obliczania ustrojów cięgnowych : metody oparte na ciągłym (kontynualnym) modelu obliczeniowym ośrodka i metody oparte na dyskretnym modelu obliczeniowym.

W przypadku modelu ciągłego do obliczeń przestrzennych ustrojów cięgnowych wykorzystuje się teoretyczne podstawy obliczania powłok – stosując zazwyczaj dodatkowe założenia upraszczające polegające np. na uwzględnianiu tylko pionowych obciążeń i przemieszczeń. Rozwiązanie otrzymuje się w tym podejściu przez całkowanie nieliniowych równań różniczkowych opisujących równowagę elementu powierzchni w stanie odkształconym. Ciągły model obliczeniowy ośrodka obecnie jest rzadko wykorzystywany. Wynika to z ograniczonego zakresu zastosowań praktycznych, spowodowanego przyjmowanymi uproszczeniami obliczeniowymi, a także warunkami, jakie muszą spełniać ustroje cięgnowe (regularny sposób przyłożenia obciążenia, dostatecznie gęsty układ cięgien). Podejście to jest reprezentowane np. przez prace [20,25] . Autorka pracy [25] wykorzystuje ciągły model obliczeniowy do analizy statycznej siatek cięgnowych wstępnie napiętych przyjmując działanie dowolnego obciążenia statycznego i zakładając nieodkształcalność dźwigara brzegowego. Jendo i Stachowicz w pracy [20], oprócz omówienia zagadnień związanych z obliczaniem

ustrojów ciągowych opartym na modelu ciągłym, dużo uwagi poświęcają problemom kształtowania tych ustrojów. W projektowaniu przekryć wiszących zagadnienie to jest szczególnie ważne z uwagi na dużą efektywność rozwiązań optymalizacyjnych, ale także ze względu na konieczność zapewnienia konstrukcji kinematycznej niezmienności.

Przydatne w praktyce inżynierskiej wyniki można było także uzyskać stosując do obliczeń pewne uproszczenie polegające na zastąpieniu układu równań różniczkowych układem równań różnicowych, rozwiązywanym za pomocą metod numerycznych. Taką metodę obliczeń prezentują np. Kuś i Bujak w pracy [23], w której konfrontują uzyskane wyniki obliczeń z wynikami eksperymentalnymi. Praca Cabaja i Kowala [7] stanowi obszerną monografię nt. przekryć ciągowych. Autorzy omawiają w niej stosowane wówczas przybliżone metody wyznaczania sił wewnętrznych w tych ustrojach, opisują także właściwości ciągów, specyfikę obciążenia konstrukcji ciągowych, metody kotwienia i wiele innych zagadnień występujących w projektowaniu, wykonawstwie i montażu tych konstrukcji. Zestawiona w pracy [7] bibliografia obejmuje ponad czterysta pozycji - w tym wiele poświęconych kontynualnemu modelowi obliczeniowemu.

Przyjęcie dyskretnego modelu obliczeniowego wiąże się z traktowaniem ustroju jako układu przegubowo połączonych prętów. Zagadnienie obliczania ustrojów ciągowych sprowadza się tu do rozwiązywania nieliniowych układów równań algebraicznych [2,4,13]. Wśród metod opartych na dyskretnym modelu obliczeniowym (fizycznej aproksymacji konstrukcji) często wykorzystywano dawniej *metodę energetyczną*, polegającą na poszukiwaniu minimum całkowitej energii potencjalnej ustroju [43,58]. Pietrzak i Trafas przedstawiają w [43] sposób obliczeń przestrzennych ustrojów ciągowych metodą energetyczną, przyjmując następujące założenia:

- układ jest zbudowany z elementów prostoliniowych, zdolnych do przenoszenia wyłącznie rozciągających sił normalnych,
- materiał ciągów jest liniowo sprężysty,
- siły zewnętrzne są przyłożone wyłącznie w węzłach układu,
- konfiguracja układu i wstępny naciąg są tak dobrane, że pod wpływem obciążenia zewnętrznego we wszystkich elementach układu występują wyłącznie naprężenia rozciągające.

Autorzy pracy [43] szukają przemieszczeń węzłów formułując zadanie minimalizacyjne znalezienia takiej konfiguracji układu, w której łączna energia potencjalna układu osiąga minimum.

Obecnie najbardziej popularną i efektywną metodą bazującą na dyskretnym modelu obliczeniowym jest *metoda przemieszczeń* w ujęciu *metody elementów skończonych* (MES) [8,9,42,59]. Metodę tę wykorzystuje się chętnie z uwagi na małą wrażliwość na zmiany obciążenia i zmiany schematu statycznego ustroju, a także możliwość uwzględnienia w prosty sposób współpracy elementów ciągnien z elementami belkowymi. Podstawy MES w zastosowaniu do konstrukcji ciągnowych zostały opracowane przede wszystkim w Uniwersytecie Technicznym w Stuttgarcie pod kierunkiem J.H. Argyrisa. Powstały tam jedne z pierwszych prac wykorzystujących MES w zastosowaniu do ciągnien, przy użyciu najprostszych elementów dwuwęzłowych [1,49]. W pracy [6] przedstawiono pełną dokumentację działalności naukowo-badawczej tego ośrodka. Elementy dwuwęzłowe wykorzystywali także polscy autorzy, szczególnie w ośrodkach poznańskim, gdańskim, krakowskim i koszalińskim. W większości prac autorzy korzystają z najprostszego modelu obliczeniowego, polegającego na założeniu, że elementy łączące sąsiednie węzły są odcinkami prostymi [5,11,32,44,45]. W pracach [5,32,45] przedstawiono wyniki obliczeń siatek ciągnowych obciążonych węzłowo, z uwzględnieniem podatności dźwigara brzegowego. Filipkowski z zespołem w pracy [12] konfrontuje wyniki otrzymane z badań modelowych przekrycia amfiteatru w Koszalinie z wynikami obliczeń numerycznych z uwzględnieniem współpracy siatki ciągnowej z odkształcalnym dźwigarem brzegowym (dokładny opis tej konstrukcji przedstawiono w [11]). Praca [54] zawiera podsumowanie działalności naukowo-badawczej ośrodka poznańskiego. Przedstawiono w niej obszerny przegląd problematyki dotyczącej analizy statycznej i dynamicznej ustrojów ciągnowych.

Krzywoliniowe elementy ciągnien w siatkach ciągnowych obciążonych ciągłym obciążeniem międzywęzłowym uwzględniają autorzy prac [30,33,36,40]. Orkisz i Stanuszek [30] omawiają zastosowanie izoparametrycznych elementów wyższego rzędu, w pracach [33,36,40] przyjęto koncepcję tzw. ścisłego elementu, którego kształt jest wynikiem działającego obciążenia międzywęzłowego.

Wyżej wymienione prace dotyczą obliczeń ustrojów ciągnowych przy założeniu fizycznej liniowości materiału ciągnien (zakres sprężysty). Szulc i Flaga [53] omawiają trzy rodzaje odkształceń, jakie wykazują ciągnia poddane obciążeniu :

- sprężyste, znikające po zdjęciu obciążenia,
- doraźne trwałe (plastyczne), pozostające po zdjęciu obciążenia,
- reologiczne (trwałe), wynikające wskutek pełzania ciągu pod obciążeniem długotrwałym.

Sprężysto-plastyczne właściwości lin nie są na ogół uwzględniane w obliczeniach ustrojów ciągnowych. W literaturze krajowej istnieje bardzo mała liczba prac poświęconych temu zagadnieniu. Można tu wymienić prace [34,35,39], gdzie analizowano głównie pojedyncze ciągną w zakresie pozasprężystym, oraz prace [41,46], dotyczące analizy siatek ciągnowych. Rakowski i Świtka [46] uwzględniają w obliczeniach zarówno nieliniowość geometryczną, jak i fizyczną, jednak przy użyciu elementów prostoliniowych. W pracy [41] zamieszczono wyniki analizy siatki ciągnowej w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym, z uwzględnieniem obciążenia działającego bezpośrednio na elementy ciągów.

Reologicznymi odkształceniami siatek ciągnowych zajmowali się autorzy prac [16,17,18,19]. W pracy [17] autorzy badają wpływ pełzania na zmiany w aktualnej konfiguracji siatki ciągnowej, w [18] zamieszczono wyniki obliczeń siatek ciągnowych w zakresie sprężystym i lepko-sprężystym. Z badań prowadzonych przez autorów tego artykułu wynika, że właściwości reologiczne siatek ciągnowych z lin stalowych są na tyle wyraźne, że powinny być uwzględniane przy ich projektowaniu.

1.3. Charakterystyka, cel i zakres pracy

W pracy podjęto próbę stosunkowo kompleksowej analizy statycznej przestrzennych ustrojów ciągnowych z uwzględnieniem zarówno obciążeń skupionych (prostoliniowe elementy ciągów), jak i obciążeń ciągłych (krzywoliniowe elementy ciągów) przy założeniu, że ustrój ciągnowy cechuje nieliniowość geometryczna lub – dodatkowo – nieliniowość fizyczna. W przypadku uwzględnienia fizycznej nieliniowości ciągów obliczenia oparto na rzeczywistej, nieliniowej zależności $\sigma - \epsilon$, określonej na podstawie badań eksperymentalnych liny. Do obliczeń numerycznych autorka wykorzystuje napisane przez siebie programy komputerowe uwzględniające różne rodzaje obciążenia (ciągłe i skupione) i geometryczną oraz fizyczną nieliniowość konstrukcji.

Do istotnych i oryginalnych elementów pracy można zaliczyć :

- przeprowadzenie badań doświadczalnych liny w celu określenia jej właściwości mechanicznych,
- uwzględnienie w obliczeniach numerycznych zarówno geometrycznej, jak i fizycznej nieliniowości ustroju opartej na rzeczywistej zależności $\sigma - \varepsilon$ cięgna, otrzymanej z badań eksperymentalnych,
- zastosowanie efektywnej metody siecznych (kolejnych przybliżeń) w celu uwzględnienia w obliczeniach nieliniowości fizycznej cięgna,
- zastosowanie iteracyjnej metody obliczania ustrojów cięgnowo-belkowych,
- wykazanie, że rodzaj obciążenia ma istotny wpływ na stan sił i przemieszczeń siatek cięgnowych,
- utworzenie programów komputerowych służących do obliczania ustrojów cięgnowych przy wykorzystaniu wyżej wspomnianych metod,
- sformułowanie wniosków i zaleceń, które mogą być przydatne w praktyce inżynierskiej.

Za najważniejsze zaś osiągnięcie rozprawy można, zdaniem autorki, uznać opracowanie metody rozwiązywania siatek cięgnowych o właściwościach sprężysto-plastycznych obciążonych w sposób ciągły (międzywęzłowy). W prezentowanym ujęciu całe cięgno wraz z działającym na nie obciążeniem jest traktowane jako element o nieliniowych właściwościach niesprężystych. Żadna inna praca o tego rodzaju tematyce nie jest autorce znana.

Pierwszy rozdział uwzględnia pewne wstępne informacje dotyczące pracy.

Drugi rozdział pracy zawiera omówienie właściwości mechanicznych cięgien. Dużo uwagi poświęcono tu pojęciu współczynnika sprężystości liny i trudnościom związanym z przyjęciem właściwego współczynnika do obliczeń, wynikającym z nieliniowej zależności $\sigma - \varepsilon$ lin. W dalszej części rozdziału przedstawiono przebieg i wyniki badań eksperymentalnych lin. Znany z badań zbiór punktów na doświadczalnej krzywej $\sigma - \varepsilon$ pozwala na znalezienie funkcji aproksymującej rzeczywistą zależność między odkształceniem a naprężeniem i na uwzględnienie jej w obliczeniach cięgien w zakresie sprężysto-plastycznym.

Trzeci rozdział jest poświęcony statyce pojedynczego cięgna. Przedstawiono tu podstawowe równania cięgna i metody ich rozwiązań ze szczególnym uwzględnieniem

sprężysto-plastycznej pracy ciągien. Szerzej omówiono metodę siecznych (kolejnych przybliżeń), wykorzystywaną w pracy do szczegółowych obliczeń numerycznych.

W czwartym rozdziale omówiono wybrane zagadnienia dotyczące statyki przestrzennych ustrojów ciągnowych. Przyjęto dyskretny model obliczeniowy i przedstawiono wykorzystywaną do obliczeń metodę elementów skończonych. Zaprezentowano sposób rozwiązania zagadnienia geometrycznie nieliniowego i metodę uwzględnienia krzywoliniowych elementów ciągien w przypadku obciążenia międzywęzłowego działającego bezpośrednio na elementy ciągien. Następnie przedstawiono sposób rozwiązania tego zagadnienia w przypadku uwzględnienia fizycznej nieliniowości materiału. W dalszej części rozdziału omówiono iteracyjną metodę obliczania ustrojów ciągnowo-belkowych.

W piątym rozdziale pracy przedstawiono utworzone przez autorkę algorytmy i programy komputerowe, napisane w języku QBASIC, za pomocą których są rozwiązywane zagadnienia omawiane w pracy. Programy te mają duże cechy uniwersalności i mogą służyć do praktycznej analizy statycznej wielu ustrojów ciągnowych.

Szósty rozdział zawiera przykłady zastosowań omówionych programów komputerowych do obliczeń wybranych ustrojów ciągnowych, poddanych działaniu różnego rodzaju obciążenia.

W siódmym rozdziale sformułowano wnioski i uwagi końcowe, które, zdaniem autorki, mają charakter użyteczny i mogą być przydatne w praktyce inżynierskiej.

W załączniku do pracy zamieszczono wydruki komputerowe wybranego przykładu liczbowego.

Pracę kończy zestawienie literatury, obejmujące sześćdziesiąt osiem pozycji.

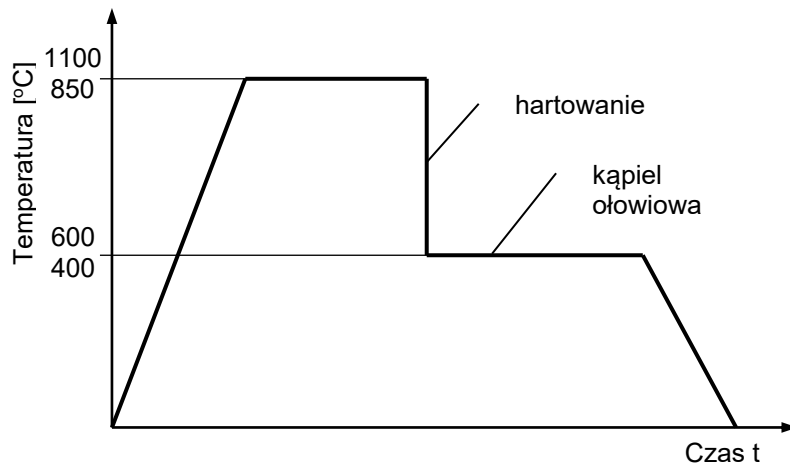
2 . Właściwości mechaniczne cięgien

2.1. Druty i liny stalowe

Korzystne właściwości mechaniczne lin stalowych, mogących przenosić bardzo duże siły rozciągające przy stosunkowo małej średnicy przekroju, są wynikiem wysokiej wytrzymałości drutów, z których produkowana jest lina. Druty stalowe wytwarza się najczęściej z uspokojonej stali węglowej o wysokiej zawartości węgla, od 0,4 do 1 %. Udział stopowy innych pierwiastków jest mały. Według np. normy niemieckiej [65] ich zawartość powinna wynosić : Si 0,1 ÷ 0,3 %, Mn 0,3 ÷ 0,7 %, P i S < 0,04 %. Wysoka zawartość siarki i fosforu wpływa na osłabienie ciągliwości stali. Z rosnącą zawartością węgla zwiększa się wytrzymałość stali na rozciąganie, a zmniejsza odkształcalność. W wyjątkowych przypadkach produkuje się druty z wysokostopowej, nierdzewnej stali. Przykładem takiej stali może być, wg [66], stal X5 Cr Ni Mo 17 12 2, w której skład wchodzi: węgiel 0,05 %, chrom 17 %, nikiel 12 % i molibden 2 %. Druty z tych stali nie osiągają jednak wytrzymałości drutów ze stali węglowych.

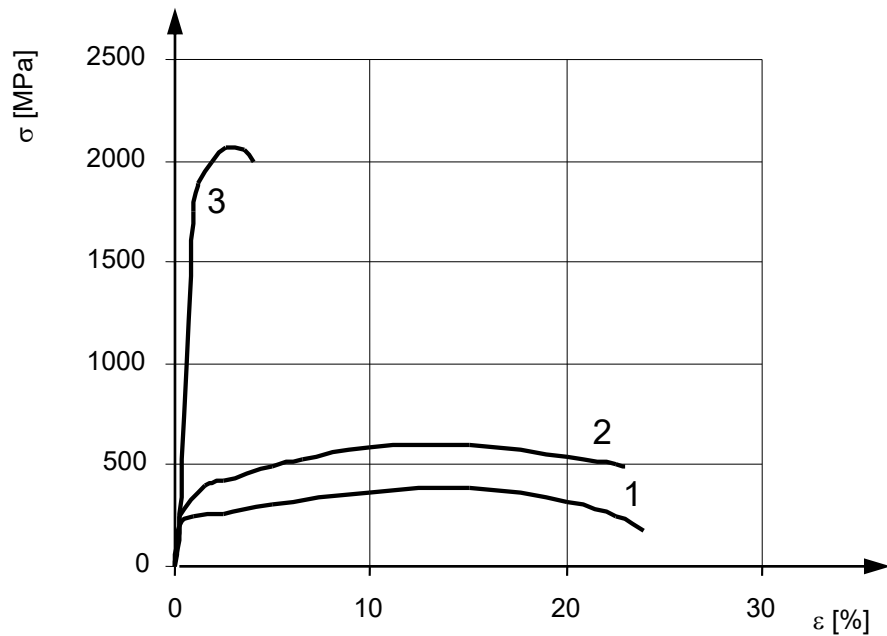
Druty stalowe uzyskują wysoką wytrzymałość dzięki szczególnej obróbce cieplnej i ciągnięciu na zimno. Materiałem wyjściowym jest tu walcówka o średnicy 5,5 cm i większej. Druty są najpierw rozżarzane, a następnie patentowane. Patentowanie polega na rozgrzewaniu drutów do temperatury około 1000°C (zakres austenitu) i hartowaniu w temperaturze 400 ÷ 600°C w zależności od rodzaju stali. Hartowanie przebiega w kąpeli ołowiowej lub solnej. Po pewnym czasie drut pozostawia się do ostygnięcia na powietrzu. Na rys. 2.1. pokazano przebieg temperatury podczas patentowania. W procesie tym stal uzyskuje sorbityczną strukturę, w której cząstki stali ułożone są pasmowo. Efektem tego jest znaczne – nawet kilkukrotne – zwiększenie wytrzymałości na rozciąganie w stosunku do pierwotnej wytrzymałości materiału. Od niedawna patentowanie jest zastępowane przez wielostopniowy proces stygnięcia drutów podczas walcowania. W wyniku tego procesu, przeprowadzanego z różną intensywnością studzenia, powstaje podobna struktura stali jak podczas patentowania.

Przy wielokrotnym przeciąganiu drutów na zimno ich przekrój maleje o 75 ÷ 95 %, w zależności od zawartości węgla.



Rys. 2.1. Przebieg temperatury w procesie patentowania [10]

Wraz z malejącym przekrojem i wzrastającą zawartością węgla maleje plastyczna odkształcalność drutu, a zakres sprężystości rozszerza się prawie do granicy wytrzymałości na zerwanie. Typowe zależności $\sigma - \epsilon$ dla drutu i stali budowlanych przedstawiono na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Zależność $\sigma - \epsilon$ dla :

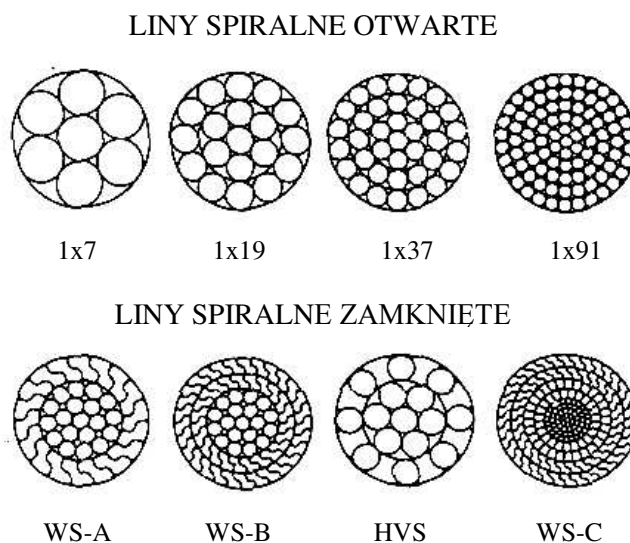
- 1- stali niskowęglowej St3S ,
- 2- stali niskostopowej 18G2 ,
- 3- drutu stalowego na liny .

Należy tu zwrócić uwagę, że mimo znacznie większej wytrzymałości na rozciąganie i pomimo redukcji plastycznych właściwości drutu stalowego na liny w stosunku do stali budowlanych, normowy moduł sprężystości ma w obydwu przypadkach podobną wartość ($E = 195 \text{ GPa}$ – drut stalowy na liny, $E = 205 \text{ GPa}$ - stal budowlana) .

W Polsce jest produkowany drut stalowy na liny o wytrzymałości na rozciąganie: 1200, 1400, 1600, 1800, 2000 i 2200 MPa. Zgodnie z normą [60] rozróżnia się dwie klasy jakości drutu : drut klasy I , wytwarzany ze stali gatunku D45A ÷ D85A, oraz drut klasy II ze stali gatunku D35 ÷ D85.

Liny są produkowane z drutów gołych, bądź ocynkowanych. Cynkowanie obok nasycania smarem jest dość dobrym zabezpieczeniem antykorozyjnym, zmniejsza jednak nieco wytrzymałość drutów.

Do konstrukcji ciągnowych najczęściej używane są liny spiralne (jednozвите), splotowe (wielozвите) oraz prefabrykowane kable. Przykładowe przekroje lin spiralnych otwartych i zamkniętych pokazano na rys. 2.3.

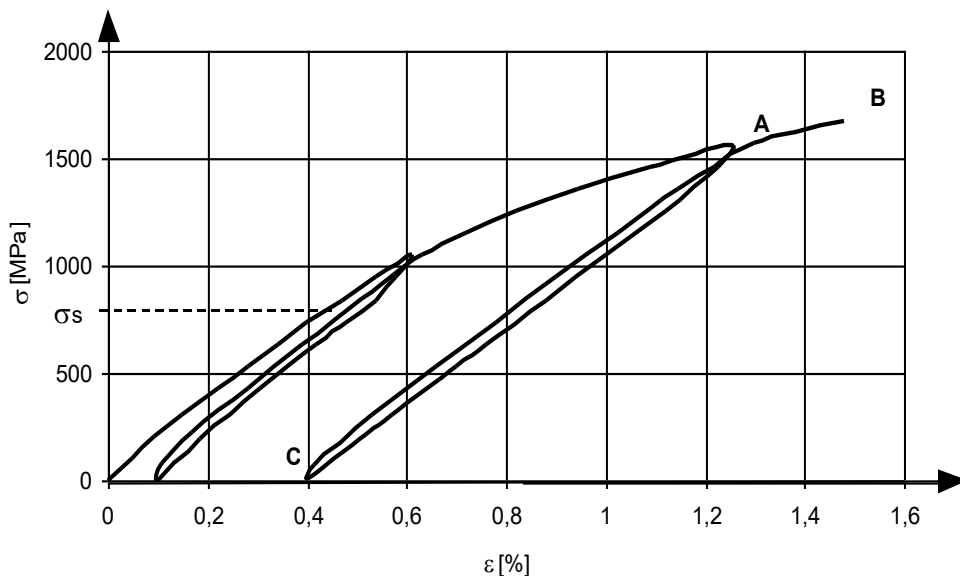


Rys . 2.3. Przekroje lin spiralnych wg [55]

2.2. Zależność $\sigma - \epsilon$ dla lin

Właściwości mechaniczne lin różnią się znacznie od właściwości pojedynczych drutów. Wynika to przede wszystkim z budowy liny, a więc z liczby drutów w linie oraz sposobu skręcenia drutów w splotach.

W linie nowej pod wpływem obciążenia zachodzą zmiany struktury liny, rozumianej przez wzajemne ułożenie się w niej drutów i splotek, wydłużenie skoku skręcenia, czy częściowy spadek naprężeń powstałych przy skręcaniu liny, co składa się na tzw. „wyciąganie się liny”. W efekcie mamy do czynienia ze znacznymi odkształceniami trwałymi. Na rys. 2.4. przedstawiono typową zależność $\sigma - \varepsilon$ dla pewnej liny spiralnej uzyskaną podczas statycznej próby na rozciąganie. Na wykresie widoczna jest cała historia obciążenia liny. Podczas wzrostu obciążenia jest ważną wypukłą krzywą OAB. Jeżeli np. w punkcie A nastąpi odciążenie liny, to po odciążeniu powstaną odkształcenia plastyczne (trwałe), równe odcinkowi OC. Zależność AC odciążenia i ponownego obciążenia jest praktycznie liniowa. Przy ponownym obciążaniu wykres pokrywa się prawie z wykresem końcowym odciążenia, aż do przekroczenia maksymalnego obciążenia osiągniętego poprzednio. Dalej ważną staje się znowu pierwotna charakterystyka nieliniowa. Zależność przedstawiona na rysunku 2.4. jest podobna do wykresów rozciągania materiałów nie wykazujących wyraźnej granicy plastyczności R_e . Nie można tu także wyznaczyć umownej granicy proporcjonalności $R_{0,005}$ i umownej granicy plastyczności $R_{0,2}$ ze względu na znaczne wydłużenie liny. Z wykresu można określić jedynie graniczne naprężenie σ_s , przy którym zachodzi jeszcze liniowa zależność $\sigma - \varepsilon$.



Rys. 2.4. Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla pewnej liny spiralnej

Zależność $\sigma - \varepsilon$ jest tym bardziej nieliniowa, im konstrukcja (budowa) liny jest bardziej złożona. Liny spiralne złożone np. tylko z 7 drutów (1+6) mają małą nieliniowość. Liny zaś złożone z większej liczby drutów – większą.

2.3. Pojęcie współczynnika sprężystości liny

Stan sił i przemieszczeń w ustrojach ciągnowych zależy od sztywności lin na rozciąganie. Miarą tej sztywności jest iloczyn przekroju i współczynnika sprężystości liny. Przyjęcie właściwego współczynnika sprężystości liny stwarza jednak w praktyce pewne trudności wynikające z nieliniowego charakteru zależności $\sigma - \varepsilon$ lin nowych (nie przeciągniętych). Współczynnik sprężystości liny, definiowany jako stosunek naprężenia σ do odkształcenia ε , jest w pewnym sensie pojęciem umownym. W przypadku liny można wyodrębnić trzy różne współczynniki sprężystości (rys. 2.5.) :

- styczny (zmienny) współczynnik sprężystości E_t ($E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$), przedstawiający

tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej $\sigma - \varepsilon$ (prosta 1),

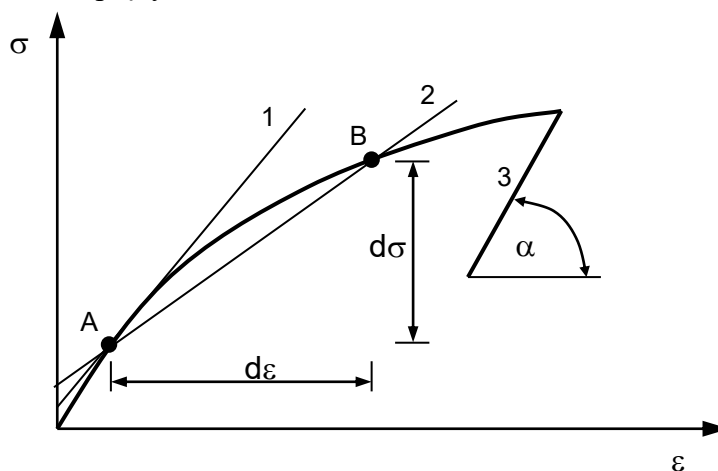
- sieczny (stały w pewnym przedziale) współczynnik sprężystości E_s

($E_s = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\varepsilon_B - \varepsilon_A}$), którego wartość zależy od przyjętej różnicy naprężeń (prosta

2),

- normowy (stały) współczynnik sprężystości E ($E = \text{tg}\alpha$), określany po wstępnym przeciągnięciu liny (prosta 3).

Wstępne przeciągnięcie liny, wywołujące jej odkształcenia trwałe, powoduje wzrost współczynnika sprężystości E nawet o 30% .



Rys.2.5. Interpretacja geometryczna współczynnika sprężystości liny (opis w tekście)

Według normy krajowej [63] dla drutów i dla lin wstępnie przeciągniętych można przyjmować :

- dla drutów i kabli wykonanych z drutów równoległych $E = 195 \text{ GPa}$,
- dla lin spiralnych zamkniętych $E = 165 \text{ GPa}$,
- dla lin spiralnych otwartych i lin splotowych z rdzeniem stalowym $E = 145 \text{ GPa}$,
- dla lin z rdzeniem niemetalowym $E = 125 \text{ GPa}$.

Wydaje się, że szczególnie w tym ostatnim przypadku wartość E wg [63] jest dość wyraźnie zawyżona. Według np. badań Wyssa [14] oraz wg [67] liny wielozwite z rdzeniem konopnym charakteryzują się znacznie mniejszym współczynnikiem E ($E < 100 \text{ GPa}$).

Norma [63] nie podaje wartości siły przyjmowanej do wstępnego przeciągania liny. Według poprzedniej edycji normy z 1980 r. siłę tę określano jako równą 40% nominalnej siły zrywającej linę. Aktualna norma niemiecka [67] podaje wartości współczynnika E wyznaczone po wielokrotnym przeciągnięciu liny siłą w zakresie $30 \div 40\%$ nominalnej siły zrywającej linę.

Uwzględnienie w obliczeniach konstrukcji ciągnowych stałego współczynnika sprężystości E wymagałoby (w celu uzyskania zgodności między stanem obliczonym a rzeczywistym) wstępnego przeciągnięcia wszystkich użytych lin, co jest w przypadku większości konstrukcji ciągnowych praktycznie niemożliwe. Aby uzyskać możliwie dobrą zbieżność między rzeczywistym a obliczonym stanem sił i przemieszczeń ustroju, należy w obliczeniach numerycznych uwzględnić realną zależność $\sigma - \varepsilon$ liny określoną na podstawie badań eksperymentalnych. Taki właśnie sposób postępowania przyjęto w przedkładanej rozprawie .

2.4. Badania doświadczalne liny

Przeprowadzone badania laboratoryjne wybranej liny spiralnej w statycznej próbie na zrywanie miały na celu określenie nieliniowej zależności $\sigma - \varepsilon$, którą następnie aproksymowano pewną funkcją. Tak określona funkcja posłużyła dalej do obliczania pojedynczych ciągien i ustrojów ciągnowych w zakresie sprężysto–plastycznym.

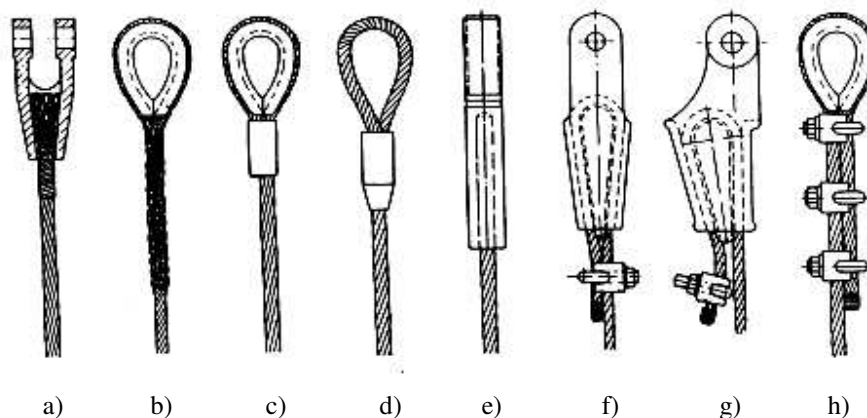
W Polsce nie ma jak dotąd opracowanych zaleceń dotyczących sposobu wyznaczania mechanicznych parametrów lin stosowanych w konstrukcjach wiszących. Ustalenia normy krajowej [62] dotyczą jedynie określenia rzeczywistej siły zrywającej linę w całości. Zgodnie z tymi ustaleniami badania należy przeprowadzać na zrywarce o zakresie nie przekraczającym 10-krotnej wartości nominalnej siły zrywającej linę dla lin o średnicy powyżej 10 mm i 5-krotnej – dla lin o średnicy do 10 mm . Odległości między uchwytami maszyny wytrzymałościowej powinny wynosić około 50 średnic nominalnych zrywanej liny lub nie mniej niż 300 mm . Zgodnie z zaleceniami RILEM [48] dla lin i splotów przestrzeń pomiędzy urządzeniami kotwiącymi powinna wynosić co najmniej 8h (h – skok spirali nawinięcia), długość bazy pomiarowej – co najmniej 4h, a odległość końców bazy pomiarowej od zakotwienia – co najmniej 2h . Zgodnie zaś z niemiecką normą [68] próbki lin na zrywanie powinny mieć długość $l \geq 30 d$ (d – średnica liny) oraz $l \geq 600$ mm .

Przy przyjmowaniu odpowiedniego rodzaju zakotwienia cięgien można się kierować zagranicznymi przepisami normalizacyjnymi lub krajowymi wytycznymi branżowymi, np. [21]. Na wybór określonego rozwiązania ma wpływ wiele czynników. Przede wszystkim należy mieć na uwadze warunki pracy cięgna i właściwości poszczególnych zakotwień. Podstawowa zasada, wg której trzeba się kierować przy wyborze danego rozwiązania, polega na przyjęciu takiego zakotwienia, aby jego nośność była co najmniej równa nośności kotwionej liny. Do najczęściej stosowanych rozwiązań należą :

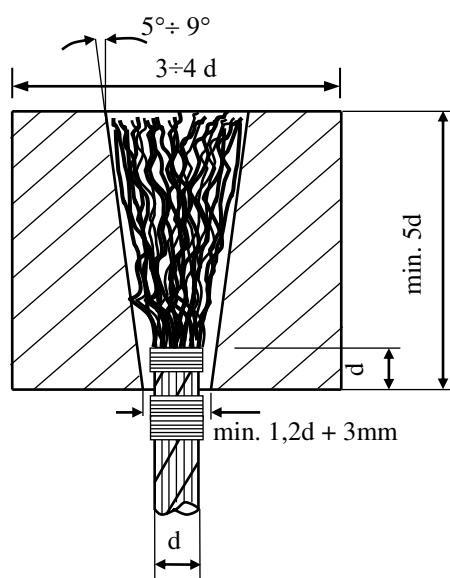
- a) zakotwienia pętlowe,
- b) zakotwienia zaciskowe,
- c) zakotwienia klinowe,
- d) zakotwienia zalewane.

Na rys. 2.6. pokazano różne typy zakotwień trwale wiążących cięgno (nierozbieralne : a ÷ e) oraz rozwiązania rozbieralne (f, g, h). W przypadku działania na cięgna znacznych obciążeń zalecane jest stosowanie zakotwień zalewanych. Takie też rozwiązanie zastosowano dla badanej doświadczalnie liny. Rozwiązanie to jest oparte na technice zalewania rozpleczonego końca liny w tulei stożkowej roztopionym metalem na gorąco lub tworzywem sztucznym na zimno. Wynika stąd odpowiednie przygotowanie mechaniczne i chemiczne tulei i drutów liny.

Wymiary tulei kotwiącej przyjęto zgodnie z zaleceniami normy niemieckiej [67]. Na rys. 2.7. pokazano przekrój takiej tulei z określonymi jej minimalnymi wymiarami.



Rys. 2.6. Zakotwienia ciągów [10]



Rys. 2.7. Wymiary stożka zalewowego [10]

Minimalna długość odcinka liny do rozplecenia i zalania wynosi $5d$, gdzie d – średnica liny w mm. Według zaleceń biuletynu branżowego Mostostalu [21], dla zabezpieczenia liny spiralnej przed odkręceniem, należy wykonać oploty z drutu o średnicy około $1/15 d$ liny na długości do $20 d$ liny. Cięcie liny wykonuje się przy użyciu noży mechanicznych, hydraulicznych lub tarczy bezzębnej o wysokiej prędkości obrotowej. Przed przystąpieniem do nasadzenia tulejek na liny należy je dokładnie oczyścić z rdzy, brudu i środków konserwujących. Po nawleczeniu końcówki stożkowej na linę można

przystąpić do wykonania rozplecenia końca liny. Kolejno wykonuje się rozkręcenie spletek aż do uzyskania wewnątrz tulei równomiernie rozłożonej miotły drutów. W przypadku lin wykonanych z drutów o średnicy większej niż 1 mm nie jest zalecane zaginanie drutów do środka tulei. Zaginanie tylko niektórych drutów jest niedopuszczalne. Doświadczenia autorki pracy wykazały, że działania tego typu prowadzą do nierównomiernej pracy drutów w linie i wcześniejszego zniszczenia niektórych z nich, a co za tym idzie – niemożności osiągnięcia pełnej nośności liny. Przed zalaniem tulei należy usunąć z powierzchni drutów warstwę smaru, a w przypadku zalewania lin wykonanych z drutów wysokostopowych należy po odłuszczeniu dokonać trawienia miotły w wodnym roztworze kwasu azotowego i solnego. Stanowisko robocze do wykonywania operacji zalewania zakotwienia powinno być tak zorganizowane, aby zapewnić sztywne umocowanie liny z uchwytem, na którym ustawia się końcówkę do zalania. Aby zapewnić osiowość liny i zakotwienia, uchwyt głowicy należy umieścić na wysokości umożliwiającej swobodny zwis liny. W celu niedopuszczenia do przedwczesnego zastygnięcia stopu zalewowego zaleca się rozgrzanie uchwytu do temperatury 200÷275 °C , w zależności od rodzaju stopu.

Stopy stosowane do zalewania końcówek lin można zaszeregować do dwóch podstawowych grup :

a) stopy na bazie cyny i bizmutu, np. :

- stop łożyskowy Lg Sn 80: Sn ok. 80 %, Cu 5 ÷ 7 %, Sb 11 ÷ 13 %, Pb 1 ÷ 3 %, - VG3: Pb ok. 80 %, Sn 9 ÷ 11 %, Sb 9 ÷ 11 %, Cd 1,7 ÷ 2,5 %, Cu i As 0,3 ÷ 0,7 %, - Pb Sn 10: Pb 73,5 %, Sn 10 %, Sb 15,5 %, Cd 0,2 %, Cu 1 %, As 0,2 % ,

b) stopy na bazie cynku, np. :

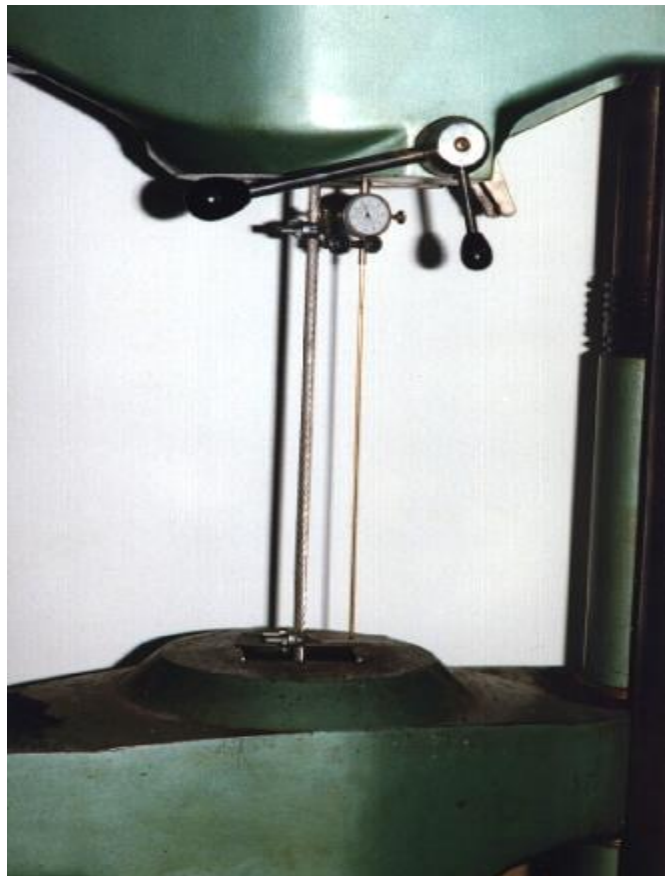
- Zn hutniczy : Zn 97,5 %, Pb 2,4 % ,
- Zn rafinowany : Zn 99,99 % ,
- Zamak : Zn 92,6 %, Al 6 %, Cu 1,4 % .

Obecnie znajdują zastosowanie również materiały zalewowe z tworzyw sztucznych w postaci poliestrów i żywic epoksydowych z dodatkiem pyłu kwarcowego lub stalowego śrutu. Wymienione tworzywa charakteryzują się dużą wytrzymałością i dobrą przyczepnością do stali, a jednocześnie mają dużą elastyczność, która przyczynia się do wyrównywania sił działających na poszczególne druty liny.

2.4.1. Opis przeprowadzonych badań

Do badań doświadczalnych przyjęto linę spiralną (T 1x19) do konstrukcji sprężonych według normy [61] o średnicy nominalnej $d = 12,8 \text{ mm}$ i przekroju $A = 0,946 \text{ cm}^2$, wyprodukowaną przez *Śląskie Zakłady Lin i Drutów „Linodrut” S.A.* w Zabrze. Nominalna normowa siła zrywająca linę wynosi $189,3 \text{ kN}$, a rzeczywista siła normowa zrywająca jest równa $176,6 \text{ kN}$. Badania doświadczalne przeprowadzono razem z mgr. inż. Grzegorzem Maliszewskim, asystentem Katedry Konstrukcji Metalowych.

Do statycznej próby na zrywanie liny przyjęto zgodnie z normą [62] odcinki lin o długości $l = 75 \text{ cm}$ ($l \geq 50 d$). Przygotowane do zrywania liny miały zakotwienia tulejowe wykonane zgodnie z normą [67]. Do zalania zakotwień użyto czystego cynku o temperaturze topnienia 495°C . Ogólny widok próbki liny w maszynie wytrzymałościowej przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Ogólny widok liny w maszynie wytrzymałościowej

Przeprowadzone badania obejmowały :

- 1) określenie zależności *siła - wydłużenie* liny podczas statycznej próby na rozciąganie siłą wzrastającą w sposób ciągły od wartości bliskiej zeru aż do wartości, przy której nastąpiło zerwanie liny ,
- 2) określenie zależności *siła - wydłużenie* liny podczas statycznej próby na rozciąganie, ale z uwzględnieniem kilkukrotnego odciążenia i powtórnego obciążenia liny ,
- 3) wyznaczenie normowego współczynnika sprężystości E po wstępnym przeciągnięciu liny .

Pierwotna zależność *siła – wydłużenie* liny ($S - \Delta l$), uzyskana na podstawie badań, jest dalej zastępowana otrzymaną z niej wtórną zależnością $\sigma - \varepsilon$, jako bardziej typową funkcję służącą do opisu niesprężystych właściwości materiału.

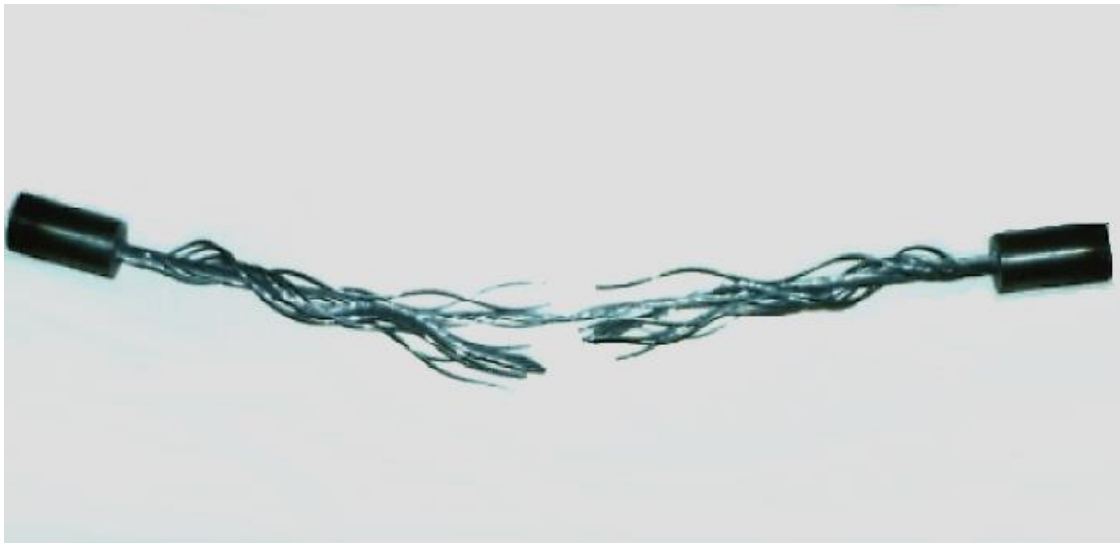
Biorąc pod uwagę wytyczne normy [67], przed wyznaczeniem współczynnika E , badaną linę trzykrotnie przeciągnięto siłą równą 70 kN .

W celu otrzymania powtarzalności wyników każdą serię badań wykonywano co najmniej dwukrotnie. Szybkość obciążenia próbki, zgodnie z [68] , była dla każdego rodzaju badań nie większa niż 1 kN/s (całkowity czas badania liny na zrywanie ≥ 3 min.). Niezależnie od uzyskiwanego z maszyny wytrzymałościowej dość dokładnego wykresu zależności $\sigma - \varepsilon$, wydłużenia liny mierzono dodatkowo za pomocą tensometru mechanicznego z czujnikiem zegarowym o dokładności do 0,001 mm. Do wyznaczenia wydłużeń liny przyjęto bazę pomiarową o długości 540 mm.

Wartości siły, dla której przeprowadzono odciążenie w celu określenia zależności $\sigma - \varepsilon$ liny podczas statycznej próby na rozciąganie, przyjęto na poziomie 50, 100 i 150 kN . Pomiary, z uwagi na możliwość zniszczenia czujnika, przerwano przy wartości siły równej 160 kN .

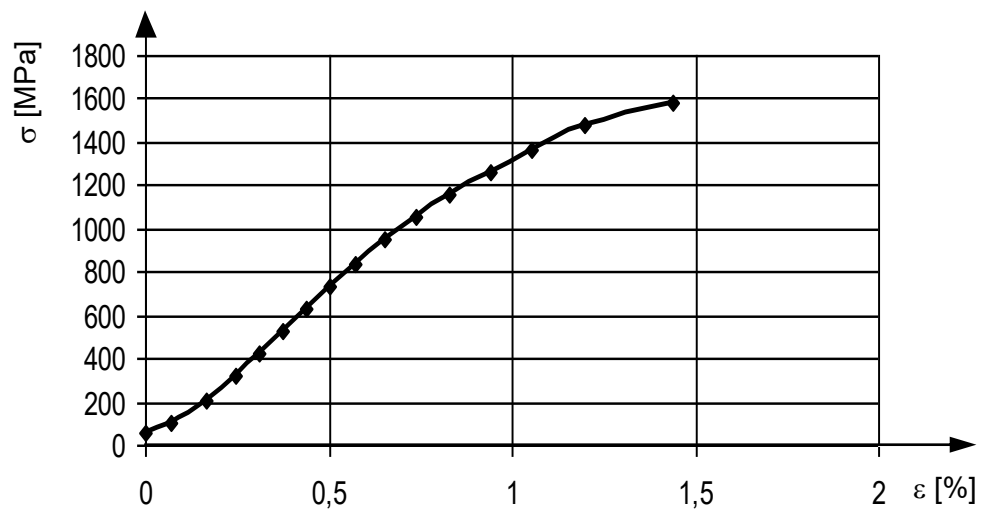
2.4.2. Wyniki badań

Rzeczywista, ustalona z badań, siła zrywająca linę wynosiła od 170 do 180 kN , co dobrze potwierdza nośność liny podaną w normie [61] , równą 176,6 kN . Uzyskanie normowej siły zrywającej linę wymaga jednak bardzo starannego wykonania zakotwień, przy czym oś tulei kotwiącej musi się dokładnie pokrywać z osią liny. Przy takim sposobie zakotwienia następuje nagle zerwanie się liny w przekroju poza tulejami kotwiącymi (rys. 2.9.) .

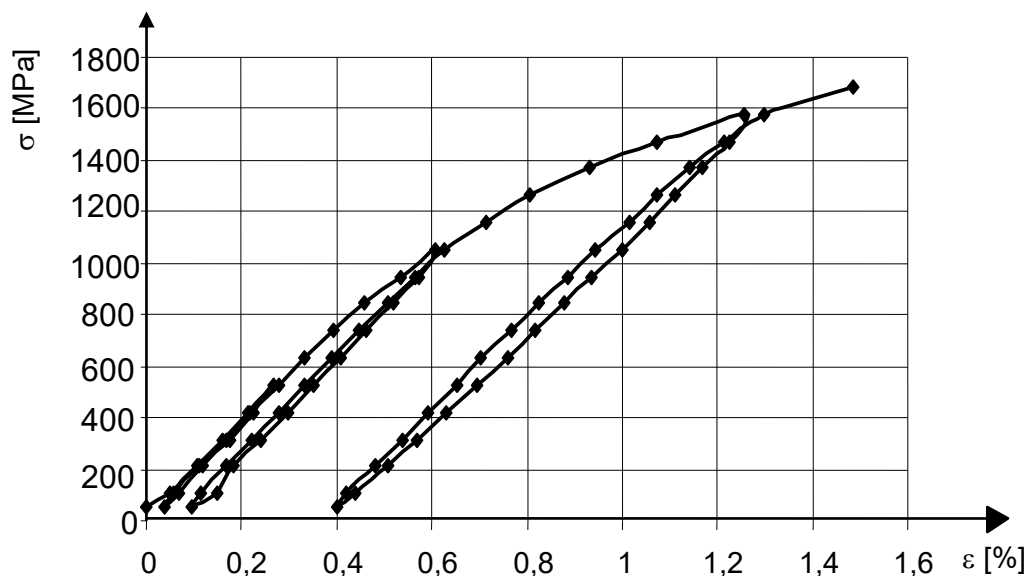


Rys. 2.9. Widok liny po zerwaniu

Otrzymaną z doświadczeń zależność $\sigma - \varepsilon$ liny przedstawiono na rys. 2.10. , a na rys. 2.11. pokazano tę zależność, lecz z uwzględnieniem także trzykrotnego odciążenia i powtórnego obciążenia liny.



Rys. 2.10. Zależność $\sigma - \varepsilon$ badanej liny



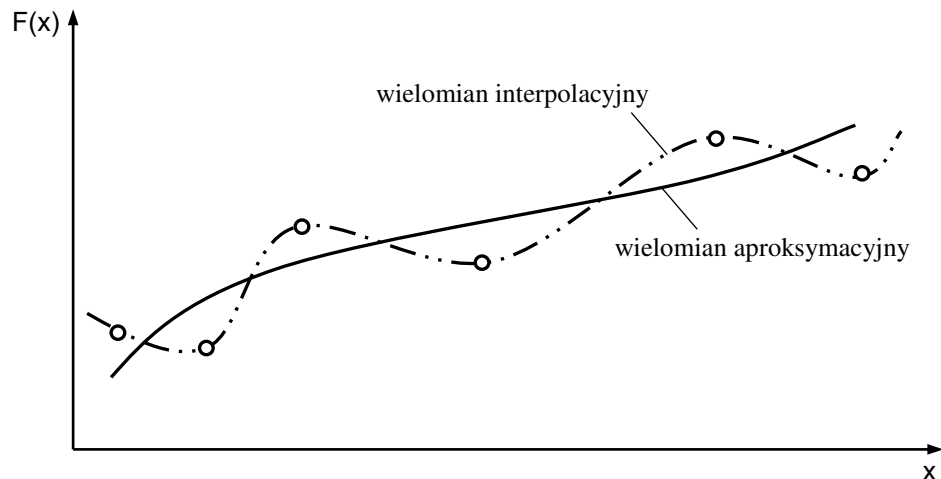
Rys. 2.11. Zależność $\sigma - \varepsilon$ badanej liny z uwzględnieniem kilku cykli obciążeń

Wyznaczona z badań doświadczalnych wartość współczynnika sprężystości liny po wstępnym jej przeciągnięciu (trzykrotnym) wyniosła około 170 GPa. Współczynnik ten, w przybliżeniu, charakteryzuje też pokazaną na rys. 2.11. zależność $\sigma - \varepsilon$ przy odciążeniu i powtórnym obciążeniu liny. Na stosunkowo dużą wartość E badanej liny (norma [63] dla tego typu lin podaje wartość E równą 145 GPa) ma wpływ mała liczba drutów w linie (19) o stosunkowo dużej średnicy drutów (2,5 mm). Na podstawie wyników badań opisanych w [10,15] można stwierdzić, że liny jednozwoite o większej liczbie drutów charakteryzują się mniejszym współczynnikiem sprężystości oraz większymi odkształceniami przy rozciąganiu. Można zatem uznać, że ścisła zależność $\sigma - \varepsilon$ jest cechą charakteryzującą pewną konkretną linę i nie obejmuje wszystkich lin danego typu (np. wszystkich lin spiralnych otwartych).

2.4.3. Określenie zależności $\sigma - \varepsilon$ na podstawie badań

Znany z badań zbiór punktów na doświadczalnej krzywej $\sigma - \varepsilon$ (rys. 2.10.) umożliwia znalezienie funkcji aproksymującej rzeczywistą zależność między odkształceniem a naprężeniem w linie. Zakłada się, że istnieje pewna funkcja $F(\varepsilon)$, której wartości σ są określone doświadczalnie dla n punktów. Należy znaleźć

wielomian stopnia $k \leq n - 1$, który najlepiej przybliży funkcję F . Jeżeli $k = n - 1$, to istnieje wtedy dokładnie jeden wielomian taki, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ jest $F(\varepsilon_i) = \sigma_i$, tzn. że wielomian przechodzi dokładnie przez wyznaczone wcześniej punkty. Wielomian taki nazywa się *wielomianem interpolacyjnym*, a problem jego wyznaczenia – *interpolacją*. Jeżeli $k < n - 1$, to mamy typowy problem *aproksymacji* (graficzną interpretację obu metod rozwiązania pokazano na rys. 2.12.).



Rys. 2.12. Graficzna interpretacja funkcji aproksymującej i interpolującej zbiór punktów doświadczalnych

W zagadnieniach praktycznych częściej korzysta się z aproksymacji funkcji, ponieważ żądanie aby funkcja wielomianu interpolacyjnego przechodziła dokładnie przez punkty uzyskane z pomiaru nie jest zbyt uzasadnione, gdyż punkty te są na ogół określone z pewnym błędem. Wielomian aproksymacyjny ma zaś tę zaletę, że jako wielomian znacznie niższego stopnia przyczynia się do „wygładzenia” wyników pomiarów.

W omawianym przypadku przyjęto funkcję aproksymującą w postaci wielomianu potęgowego

$$\sigma = 16,483 + 1346,283\varepsilon + 248,371\varepsilon^2 - 278,742\varepsilon^3 \quad [\text{MPa}] \quad . \quad (2.1)$$

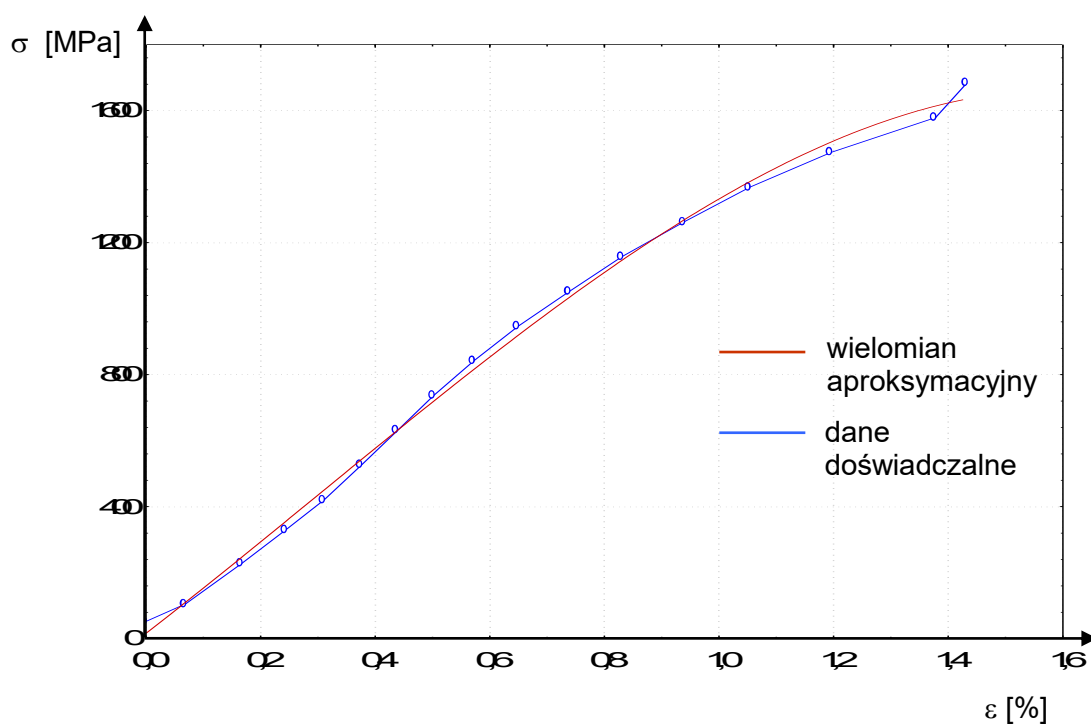
Wielomian ten określono za pomocą programu *Statistica*, wygodnego w zastosowaniu do tego typu analizy wyników doświadczalnych, ponieważ użytkownik sam może dobrać jedną z predefiniowanych funkcji w celu dopasowania jej do punktów pomiaru.

W programie funkcja wielomianowa ma ogólną postać

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n, \quad (2.2)$$

gdzie n określa stopień wielomianu (użytkownik ma możliwość wybrania stopnia wielomianu). W celu znalezienia wielomianu aproksymacyjnego (2.2) program wykorzystuje znaną *metodę najmniejszych kwadratów (metodę Gaussa)*.

Przyjęty wielomian dobrze opisuje krzywą doświadczalną przedstawioną na rys. 2.10. i 2.11. W przypadku $\varepsilon = 0$, z równania (2.1) otrzymuje się $\sigma = 16,483$ MPa. Jest to uzasadnione tym, że pomiar siły (naprężenia) w linie był rozpoczynany przy pewnym niewielkim napięciu, eliminującym początkowy brak prostoliniowości liny. Porównanie wyników doświadczalnych i krzywej $\sigma - \varepsilon$ opisanej przyjętym wielomianem pokazano na rys. 2.13.



Rys. 2.13. Porównanie wyników doświadczalnych i przyjętego wielomianu aproksymacyjnego opisującego zależność $\sigma - \varepsilon$ liny

3. Statyka pojedynczego cięgna

Statyka pojedynczego, nawet dowolnie obciążonego, cięgna jest obecnie dość dobrze znana i zagadnienie to nie jest bezpośrednim celem rozprawy. Z uwagi jednak na to, że pojedyncze cięgno jest traktowane w pracy (por. rozdz. 4) jako element złożonego ustroju cięgowego, to konieczne jest przedstawienie pewnych wybranych podstaw teoretycznych dotyczących pojedynczego cięgna.

3.1. Równanie cięgna

Jest dane cięgno o cięciwie ukośnej, na które działa dowolne obciążenie $q(x)$. Reakcje podporowe przyjęto w postaci pionowych sił R_A i R_B oraz ukośnej siły S działającej na kierunku cięciwy cięgna (rys. 3.1.). Łatwo zauważyć, że pionowe reakcje podporowe mają takie same wartości, jak reakcje belki swobodnie podpartej o rozpiętości l , poddanej obciążeniu $q(x)$. Problem polega tu więc na znalezieniu reakcji S (tzw. naciągu cięgna). Jeśli wartość S jest znana, to można łatwo wyznaczyć maksymalną siłę w cięgni, styczną do osi cięgna w punkcie B.

Do wyznaczenia wartości siły S wykorzystuje się w praktyce tzw. równanie cięgna, wyrażające zależność między początkową (cięgno nie obciążone) a końcową (cięgno obciążone) długością cięgna. W rozważanym przypadku równanie to ma postać [36]

$$\int_0^l \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{Q(x)}{S \cos \alpha} \right)^2} dx = s_0 (1 + \alpha_t \Delta T) + \frac{S \cos \alpha}{EA} \int_0^l \left[1 + \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{Q(x)}{S \cos \alpha} \right)^2 \right] dx . \quad (3.1)$$

gdzie : s_0 – początkowa długość cięgna w stanie początkowym,

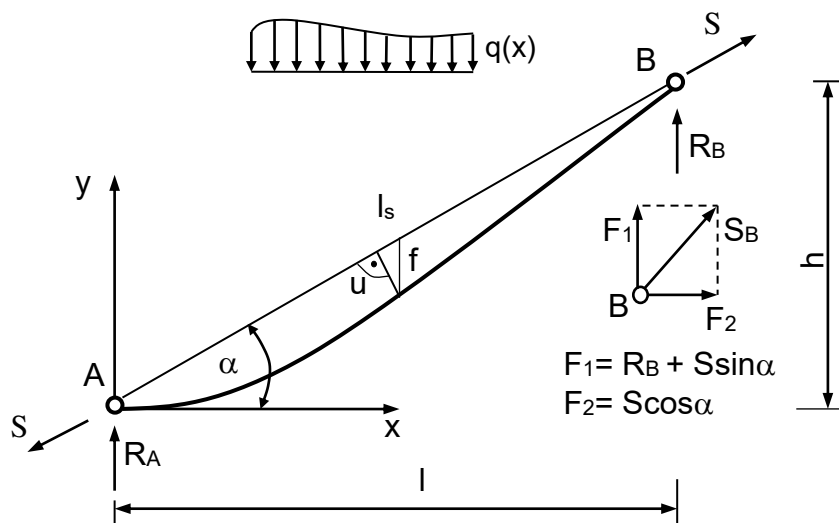
EA – sztywność cięgna na rozciąganie,

α_t – współczynnik wydłużalności liniowej (dla stali $\alpha_t = 0,000012$ 1/K),

ΔT – przyrost temperatury,

$Q(x)$ – równanie siły tnącej jak dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości l poddanej obciążeniu $q(x)$,

l_s – długość cięciwy cięgna.



Rys. 3.1. Ciężno ukośne pod wpływem obciążenia $q(x)$

Równanie (3.1) jest ścisłym równaniem ciężna, uwzględniającym zarówno dowolnie duże zwisy ciężna, jak i dowolnie duże kąty nachylenia ciężniwy ciężna do poziomu. Równanie to ma zawsze tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, który można wyznaczyć za pomocą całkowania numerycznego.

Znana wartość S pozwala na określenie linii zwisu ciężna. Korzystając mianowicie z warunku, że moment zginający w dowolnym punkcie osi ciężna przyjmuje wartość zerową, otrzymuje się równanie osi ciężna w postaci

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{M(x)}{S \cos \alpha}, \quad (3.2)$$

gdzie $M(x)$ – jest równaniem momentu zginającego jak dla belki swobodnie podpartej poddanej obciążeniu $q(x)$. Na podstawie równania (3.2) można też łatwo znaleźć długość ciężna odpowiadającą danemu obciążeniu $q(x)$.

3.2. Przybliżone równanie ciężna

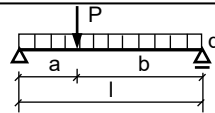
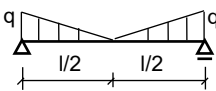
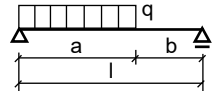
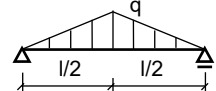
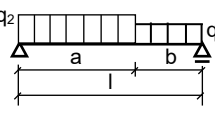
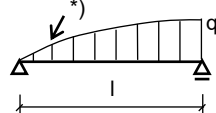
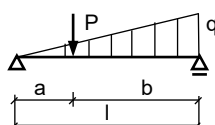
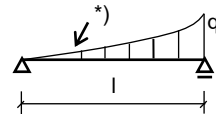
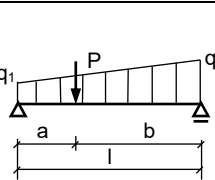
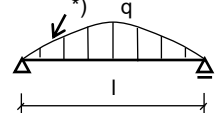
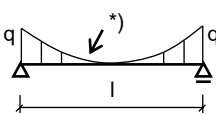
W wielu praktycznych przypadkach mają zastosowanie płaskie ciężna ($f/l < 0,1$), dla których obowiązuje tzw. techniczna teoria ciężna. Przybliżone w tym przypadku założenia dotyczą zarówno długości ciężna, jak i wartości sprężystego

wydłużenia cięga. Równanie cięga oparte na tych założeniach upraszczających ma postać [36]

$$S^3 + S^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_0} (l_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA \cos \alpha}{2s_0} \int_0^l [Q(x)]^2 dx. \quad (3.3)$$

W celu ułatwienia praktycznych obliczeń wartości $\int_0^l [Q(x)]^2 dx$, dla wybranych rodzajów obciążenia cięga, zestawiono w tabelicy 3.1.

Tablica 3.1. Wartości całek $\int_0^l [Q(x)]^2 dx$

NR	Rodzaj obciążenia	$\int_0^l [Q(x)]^2 dx$	NR	Rodzaj obciążenia	$\int_0^l [Q(x)]^2 dx$
1		$\frac{q^2 l^3}{12} + \frac{P^2 ab}{1} + Pqab$	6		$\frac{q^2 l^3}{80}$
2		$\frac{q^2 a^3}{12l} (4l - 3a)$	7		$\frac{q^2 l^3}{30}$
3		$\frac{q_1^2 l^3}{12} + \frac{(q_2 - q_1)^2}{12l} (4l - 3a)a^3 + (q_2 - q_1)q_1 a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3} \right)$	8		$\frac{q^2 l^3}{23,66}$
4		$\frac{q^2 l^3}{45} + \frac{P^2 ab}{1} + \frac{Pqal}{3} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$	9		$\frac{q^2 l^3}{112}$
5		$\frac{P^2 ab}{1} + \frac{q_1^2 l^3}{45} + \frac{q_2^2 l^3}{45} + \frac{q_1 q_2 l^3}{25,71} + 2q_1 P ab \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3l} - \frac{b}{6l} \right) + 2q_2 P ab \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3l} - \frac{a}{6l} \right)$	10		$\frac{q^2 l^3}{18,53}$
	*) Parabola 2. stopnia		11		$\frac{q^2 l^3}{252}$

W przypadku działania na cięgu obciążenia ciągłego równomiernie rozłożonego (jest to częsty przypadek praktyczny) równanie (3.3) przyjmuje postać

$$S^3 + S^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_0} (l_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA \cos \alpha q^2 l^3}{24 s_0}. \quad (3.4)$$

Równanie (3.3) zostało wyprowadzone przy założeniu, że początkowa długość s_0 odpowiada beznapięciowemu stanowi cięgna. Niekiedy (np. w przypadku uwzględnienia sprężysto-plastycznych właściwości cięgna) wygodną postać przedstawia też równanie, w którym początkowa długość s_0 odpowiada pewnej początkowej wartości siły S_0 w cięgnie. W takim przypadku równanie (3.3) można wyrazić w postaci [36]

$$S^3 + S^2 \left[EA - S_0 - \frac{EA}{s_0} (l_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA \cos \alpha}{2 s_0} \int_0^l [Q(x)]^2 dx. \quad (3.5)$$

Dla celów praktycznych ważna jest odpowiedź na pytanie, jaki błąd popełnia się w przypadku zastąpienia ścisłego równania (3.1) równaniem przybliżonym (3.3). W celu odpowiedzi na to pytanie przeprowadzono analizę parametryczną pewnego cięgna przedstawionego na rys. 3.2. Do rozwiązania tego cięgna, z uwzględnieniem zmiennych parametrów s_0 i α , wykorzystano równania (3.1) oraz (3.3).

Przyjęto następujące dane:

Obciążenie cięgna $q_x = 1,0 \text{ kN/m}$

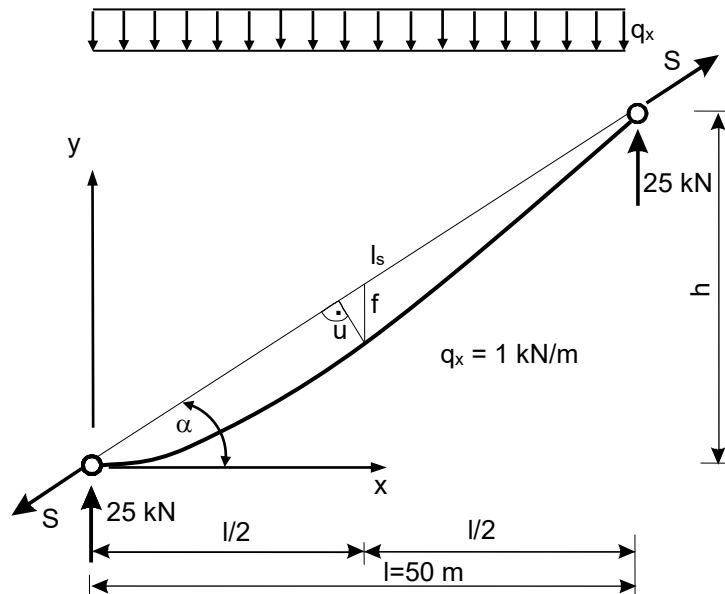
sztywność cięgna na rozciąganie $EA = 50000 \text{ kN}$,

początkowa długość cięgna $s_0 = l_s \div 1,05 l_s$,

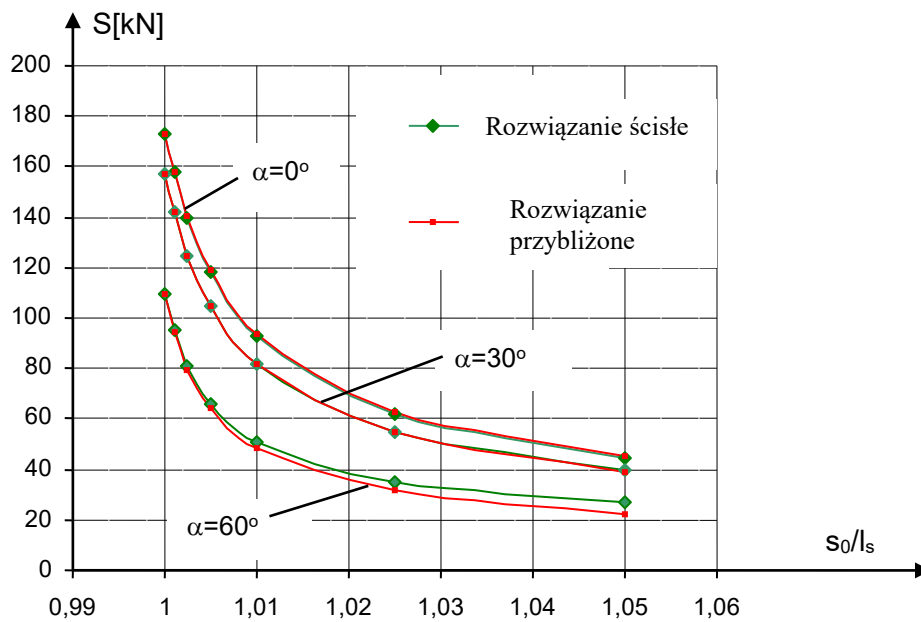
kąt nachylenia cięciwy cięgna do poziomu $\alpha = 0^\circ \div 60^\circ$.

Pozostałe dane pokazano na rysunku 3.2.

Naciąg S cięgna obliczono korzystając z równania ścisłego i przybliżonego dla zmiennej wartości kąta α i zmiennej początkowej długości cięgna s_0 . Otrzymane wyniki pokazano w formie graficznej na rys. 3.3.



Rys. 3.2. Ciężno pod obciążeniem q_x



Rys. 3.3. Porównanie rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem dokładnym

Na podstawie tej analizy można wyciągnąć kilka wniosków praktycznych .

1. Korzystanie z przybliżonego równania ciężna dla małych kątów nachylenia ciężniwa ciężna do poziomu prowadzi do określenia naciągu S ciężniwa z niewielkim nadmiarem, a

więc na korzyść bezpieczeństwa. Dla dużych zaś kątów α naciąg S jest obliczony z pewnym niedomiarem.

2. Dla cięgien płaskich, dla których wartość zwisu cięga $u/l_s \leq 0,05$, różnice między rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym nie mają praktycznie żadnego znaczenia, nawet wtedy gdy wartość kąta α jest duża.

3. W przypadku stromych cięgien ($\alpha > 60^\circ$) mających duże zwisy ($u/l_s > 0,1$) nie można korzystać z rozwiązań przybliżonych, ponieważ otrzymuje się wtedy wyniki obarczone zbyt dużym błędem.

W większości konstrukcji cięgowych nie występują jednak duże zwisy cięgien, (np. w przypadku odciągów masztów stosunek u/l_s waha się w granicach 0,02 do 0,05), dlatego też na ogół uzasadnione jest stosowanie w praktyce rozwiązania przybliżonego.

Należy zaznaczyć, że podobne wnioski dotyczą także innych rodzajów obciążeń cięga.

3.3. Metody obliczania cięgien w zakresie sprężysto–plastycznym

Podane wcześniej ścisłe i przybliżone równania cięga opierały się na założeniu stałego współczynnika sprężystości liny E . Stosowanie tego założenia do obliczeń cięgien jest tylko wtedy uzasadnione, gdy moduł sprężystości E jest określony po wstępnym przeciągnięciu liny. Spełnienie tego warunku wymagałoby wstępnego przeciągnięcia wszystkich lin użytych do budowy danej konstrukcji cięgowej, co jest zazwyczaj niewykonalne. W związku z tym, aby nie popełnić znaczących błędów merytorycznych, należałoby uwzględnić w obliczeniach numerycznych rzeczywistą zależność $\sigma - \varepsilon$, określoną na podstawie badań eksperymentalnych.

W przypadku lin stalowych zależność tę można przedstawić w formie wielomianu potęgowego

$$\sigma = E_0 \varepsilon (1 + C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^2 + \dots + C_n \varepsilon^n) , \quad (3.6)$$

gdzie E_0 jest początkowym współczynnikiem sprężystości (dla $\varepsilon = 0$), a C_i są pewnymi stałymi, które można wyznaczyć na podstawie badań (por. zależność 2.1).

Poniżej omówiono kilka wybranych metod rozwiązywania równania cięga w przypadku uwzględnienia nieliniowej zależności $\sigma - \varepsilon$ liny. Metody te mają ogólny charakter i są też wykorzystywane do rozwiązywania wielu innych nieliniowych

zagadnień mechaniki konstrukcji. W pracy omawia się je głównie z punktu widzenia możliwości zastosowań praktycznych w konstrukcjach ciągnowych.

3.3.1. Metoda oparta na odcinkowo liniowej zależności $\sigma - \varepsilon$

Istnieje wiele metod umożliwiających uwzględnienie sprężysto-plastycznych właściwości ciągną (nieliniowości fizycznej materiału). Jedną z nich, zastosowaną np. w [46], polega na zastąpieniu zależności (3.6) linią łamaną, złożoną z kilku odcinków prostych (rys. 3.4.). W zależności od zakresu obciążenia przyporządkowywany jest odpowiedni moduł sprężystości E . Pewną wadą tej metody jest konieczność śledzenia punktów załamania na krzywej $\sigma - \varepsilon$ w celu przyjęcia właściwego modułu sprężystości. Naprężenia w poszczególnych przedziałach odkształcenia ciągną można obliczyć z prostych zależności :

- przedział 1

$$\sigma = \varepsilon \cdot E_1 \quad ,$$

- przedział 2

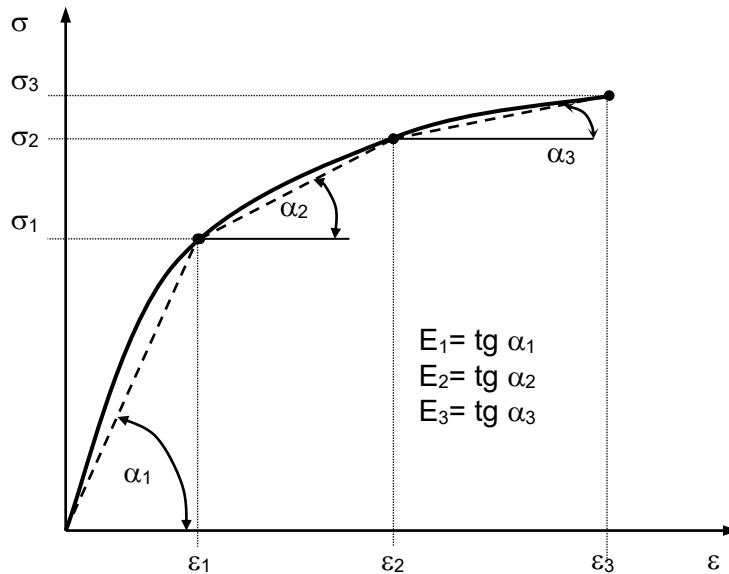
$$\sigma = \sigma_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1)E_2 \quad ,$$

- przedział 3

$$\sigma = \sigma_2 + (\varepsilon - \varepsilon_2)E_3 \quad ,$$

- przedział n-ty

$$\sigma = \sigma_{n-1} + (\varepsilon - \varepsilon_{n-1})E_n \quad .$$



Rys. 3.4. Odcinkowo liniowa zależność $\sigma - \varepsilon$

W najprostszym przypadku aproksymacji krzywej $\sigma - \varepsilon$ dwiema prostymi mówimy o bilinearnym prawie fizycznym.

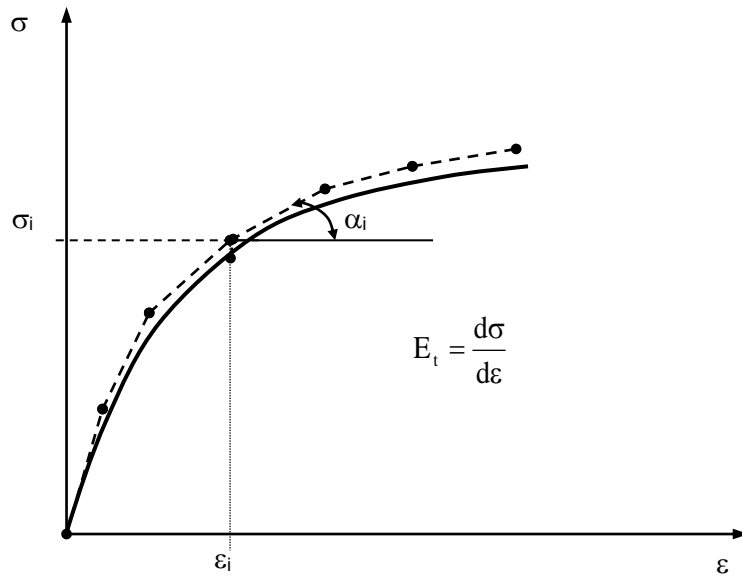
3.3.2. Metoda przyrostowa (sztywności stycznej)

Metoda ta polega na stosowaniu procedury przyrostowej oraz stycznego, aktualnego dla danego przyrostu obciążenia, modułu sprężystości

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (3.7)$$

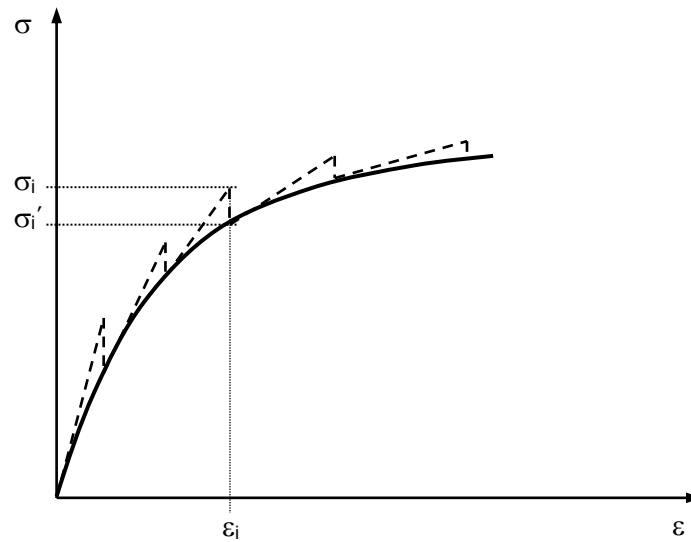
Obciążenie w tej metodzie jest przykładane jako ciąg niewielkich przyrostów, przy czym w zakresie danego przyrostu zakłada się, że ustrój zachowuje się liniowo (rys. 3.5.). W celu zmniejszenia różnicy między krzywą łamaną a rzeczywistą zależnością $\sigma - \varepsilon$, należy przyjąć odpowiednio dużą liczbę przyrostów obciążenia.

Wadą tej metody jest brak możliwości oszacowania dokładności rozwiązania. W celu poprawienia dokładności obliczeń można zastosować *zmodyfikowaną metodę przyrostową* (rys. 3.6.), w której po każdym przyroście obciążenia można skorygować wartość naprężeń σ_i , obliczając je dla danego ε_i z zależności (3.6).



Rys. 3.5. Graficzna interpretacja metody przyrostowej

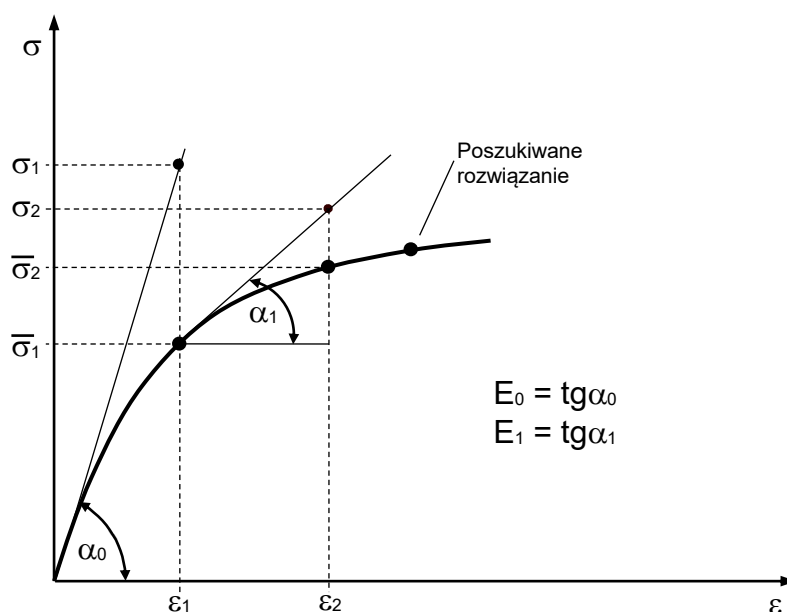
Postępowanie to polega na „zejściu” w każdym przyroście obciążenia na krzywą $\sigma - \varepsilon$, co znacznie poprawia dokładność rozwiązania.



Rys. 3.6. Zmodyfikowana metoda przyrostowa

3.3.3. Metoda Newtona

W pierwszym przybliżeniu obliczamy siłę S_1 w ciągu (np. z równania (3.5)) przy uwzględnieniu początkowego modułu sprężystości $E = E_0$ (rys. 3.7.). Siła ta pozwala na łatwe określenie zarówno naprężenia σ_1 jak i odkształcenia ε_1 w ciągu.



Rys. 3.7. Graficzna interpretacja metody Newtona

Otrzymaną wartość naprężenia σ_1 należy następnie skorygować, obliczając z równania $\sigma = f(\varepsilon)$ wartość $\bar{\sigma}_1$ (siłę \bar{S}_1) oraz nową wartość stycznego modułu sprężystości E_1 (rys. 3.7.).

W drugim przybliżeniu z równania ciągu (3.5) obliczamy siłę w ciągu S_2 przy uwzględnieniu modułu sprężystości E_1 oraz początkowej siły w ciągu $S_0 = \bar{S}_1$. Znajac wartość S_2 obliczamy kolejno: σ_2 , ε_2 oraz $\bar{\sigma}_2$ (\bar{S}_2).

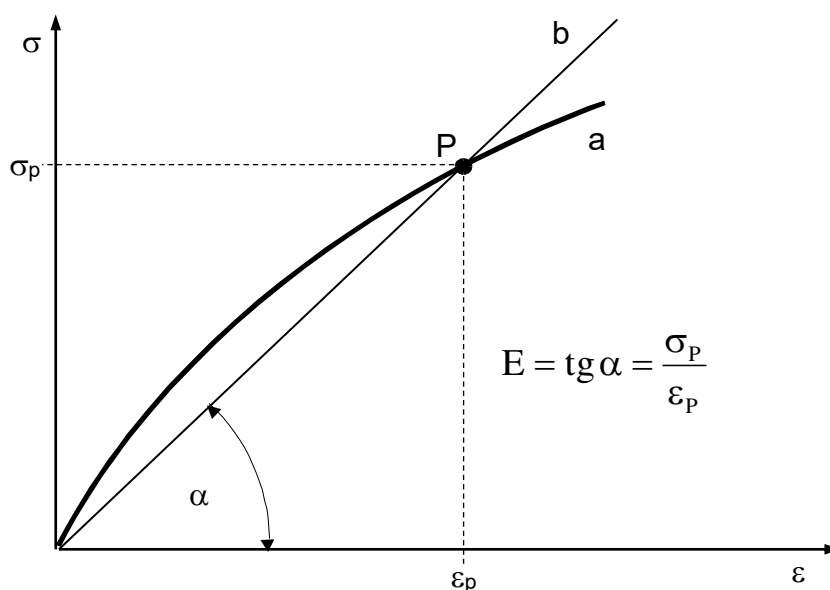
Powyższy proces iteracyjny cechuje się bardzo szybką zbieżnością, polegającą na zanikaniu różnicy między siłami S_i i S_{i-1} obliczonymi w dwu kolejnych iteracjach.

Dobre wyniki obliczeń można też uzyskać stosując pewną modyfikację tej metody, polegającą na przyjęciu w każdej iteracji stałej wartości modułu sprężystości E .

3.3.4. Metoda siecznych (kolejnych przybliżeń)

Metoda ta, wykorzystana np. w [39], jest chyba najprostsza w zastosowaniach praktycznych. Opiera się ona na nieliniowej zależności $\sigma = f(\varepsilon)$, wykorzystywanej bez żadnych uproszczeń. Ta metoda rozwiązania jest omawiana bardziej szczegółowo, ponieważ autorka stosuje ją w pracy do obliczeń ciągnien w zakresie sprężysto–plastycznym.

Niech punkt P na krzywej a opisanej równaniem $\sigma = f(\varepsilon)$ jest rozwiązaniem zagadnienia fizycznie nieliniowego (rys. 3.8.). Ten sam wynik można by uzyskać z liniowego rozwiązania przy zastosowaniu siecznego modułu sprężystości E (prosta b). Pewna trudność polega na tym, że punkt P jako rozwiązanie jest na początku obliczeń nieznanymi, a więc nie jest znany także sieczny moduł sprężystości.



Rys. 3.8. Geometryczna interpretacja rozwiązania liniowego i nieliniowego

Znalezienie rozwiązania jest tu jednak stosunkowo łatwe na drodze kolejnych przybliżeń.

W pierwszym przybliżeniu przyjmuje się dowolną wartość współczynnika sprężystości E_1 , któremu na rys. 3.9. odpowiada prosta l . Dla przyjętej wartości E_1 , z odpowiedniego równania ciągnia, znajduje się naciąg ciągnia S_1 , naprężenie $\sigma_1 = \frac{S_1}{A}$

oraz odkształcenie $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$. Współrzędne σ_1 i ε_1 wyznaczają na prostej 1 punkt P_1 ,

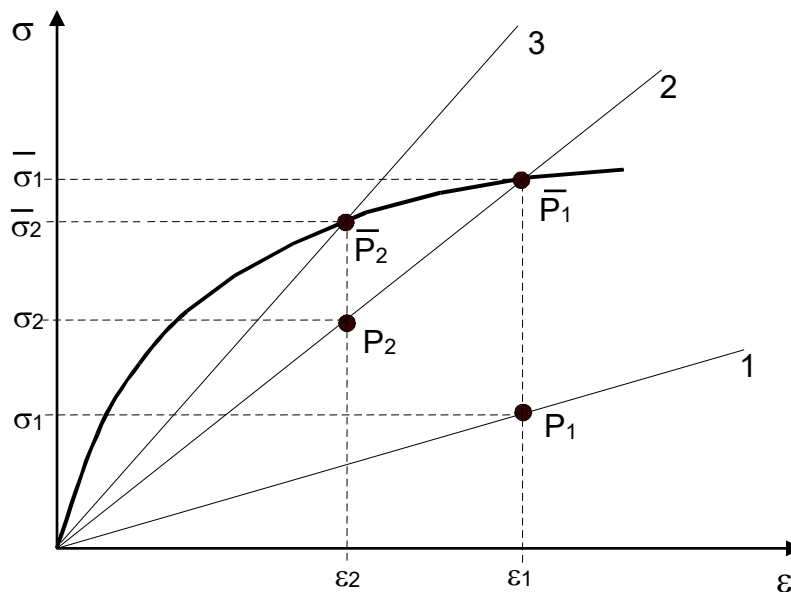
będący pierwszym przybliżeniem rozwiązania. Dla odciętej ε_1 należy następnie z równania krzywej $\sigma = f(\varepsilon)$ określić wartość $\bar{\sigma}_1$ (punkt \bar{P}_1).

W drugim przybliżeniu przyjmuje się do obliczeń $E_2 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\varepsilon_1}$ (prosta 2). Dla wartości E_2 z

równania cięga określa się naciąg S_2 , naprężenie σ_2 i odkształcenie ε_2 , które wyznaczają na prostej 2 punkt P_2 . Następnie z równania $\sigma = f(\varepsilon)$ znajduje się $\bar{\sigma}_2$ (\bar{P}_2) i wreszcie

$$E_3 = \frac{\bar{\sigma}_2}{\varepsilon_2}.$$

Ciąg iteracyjny jest bardzo szybko zbieżny. Do rozwiązania zadania (określenia położenia punktu P na krzywej) wystarcza na ogół kilka iteracji. Znaleziony na drodze iteracji punkt P ma tę właściwość, że – w przybliżeniu – leży zarówno na krzywej a , jak i na prostej b .



Rys. 3.9. Geometryczna interpretacja rozwiązania metodą siecznych

Pewnego wyjaśnienia wymaga tu sprawa odciążenia cięga. W tym przypadku określony dla danego rodzaju obciążenia końcowy stan cięga staje się jego stanem początkowym (wyjściowym), tzn. obliczona wartość siły S w cięgnie (oznaczona dalej

jako S_k) i odpowiadająca jej długość s_k ciągną są odpowiednio siłą początkową i długością początkową ciągną. W związku z tym równanie (3.5) przyjmuje teraz postać

$$S^3 + S^2 \left[EA - S_k - \frac{EA}{s_k} (l_s - \alpha_t \Delta T s_k) \right] = \frac{EA \cos \alpha}{2s_k} \int_0^l [Q(x)]^2 dx. \quad (3.6)$$

Do obliczenia długości ciągną s_k można natomiast wykorzystać bądź równanie (3.2), bądź też bezpośrednią zależność [36]

$$s_k = l_s + \frac{\cos \alpha}{2S_k^2} \int_0^l [Q(x)]^2 dx. \quad (3.7)$$

W przypadku odciążenia ciągną obowiązuje stała wartość współczynnika sprężystości E , a więc rozwiązanie równania (3.6) uzyskuje się w jednym kroku.

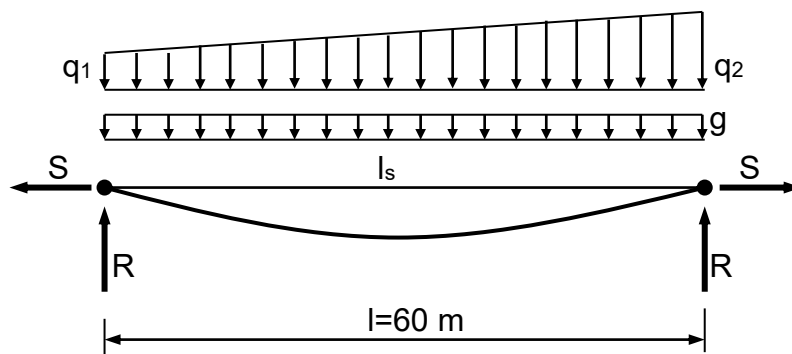
3.4. Przykłady obliczeń ciągną w zakresie sprężysto-plastycznym

W celu przeprowadzenia analizy statycznej ciągną w zakresie sprężysto-plastycznym autorka utworzyła odpowiedni program komputerowy umożliwiający rozwiązywanie ciągną poddanych dowolnemu obciążeniu leżącemu w płaszczyźnie ciągną. Obliczenia przeprowadzono przy wykorzystaniu przybliżonego równania ciągną (3.5), algorytm rozwiązania fizycznie nieliniowego oparto na metodzie sieciowych omówionej w p. 3.3.4.

W prezentowanych przykładach liczbowych uwzględniono zarówno nieliniową, jak i – dla porównania - liniową zależność $\sigma - \varepsilon$ ciągną. W pierwszym przypadku przyjęto rzeczywistą zależność $\sigma - \varepsilon$ wg (2.1) uzyskaną z badań doświadczalnych, a w drugim obliczenia oparto na stałym współczynniku sprężystości $E = 170 \text{ GPa}$ (określonym także podczas badań doświadczalnych liny).

Przykład 1

Przedmiotem analizy w tym przykładzie jest ciągną o rozpiętości $l = 60 \text{ m}$ poddane zmiennemu obciążeniu trapezowemu o wartościach $q_1 = 0,5 \text{ kN/m}$, $q_2 = 0,5 \div 1,75 \text{ kN/m}$ (rys. 3.10.). Początkowa długość ciągną wynosi $s_0 = 60,1 \text{ m}$, pole przekroju $A = 0,946 \text{ cm}^2$, a ciężar własny ciągną $g = 0,5 \text{ kN/m}$.



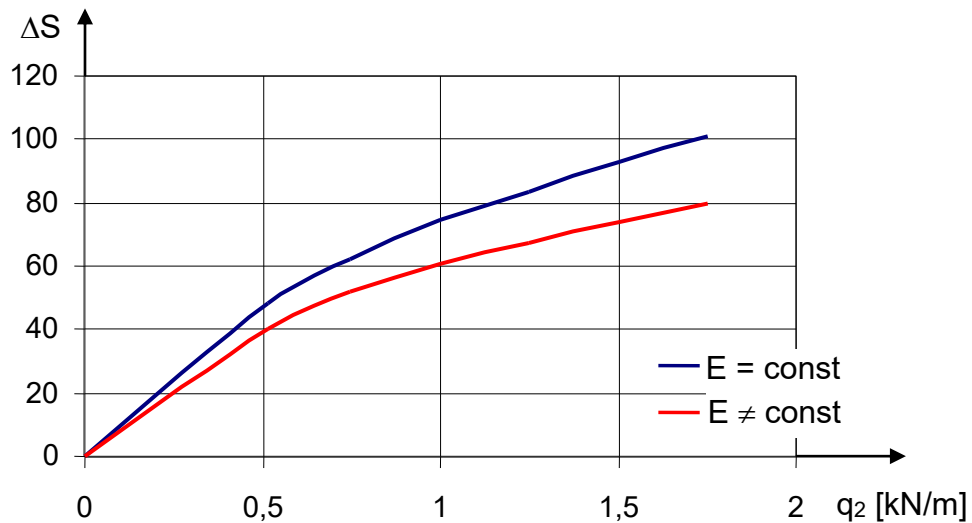
Rys. 3.10. Ciężno pod wpływem obciążenia g i q

Wyniki obliczeń zestawiono w tabelicy 3.2 , a ich graficzną interpretację przedstawiono na rys. 3.11.

W celach porównawczych naciąg S ciężna obliczono dla charakterystyki sprężysto–plastycznej i liniowo sprężystej, podając każdorazowo również wartość siły w ciężnie po odciążeniu. W przypadku $q_2 = 0$ uwzględniono tylko ciężar własny ciężna ; pozostałe wartości naciągu S wyznaczono dla obciążenia sumarycznego $g + q$. Odciążenie ciężna polega na “zdjęciu” z ciężna obciążenia q .

Tabela 3.2. Zestawienie wyników obliczeń dla przykładu 1

Wartość obciążenia q_2 [kN/m]	0	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
Naciąg S [kN] – zakres liniowo sprężysty	76,5	125,7	136,6	147,3	157,6	167,6	177,4
odciążenie	-	76,5	76,5	76,5	76,5	76,5	76,5
Naciąg S [kN] – zakres sprężysto-plastyczny	74,3	115,7	124,2	132,2	139,9	147,4	154,4
odciążenie	-	67,6	65,7	64,0	62,2	60,5	59,0



Rys. 3.11. Wpływ zmiany obciążenia na zmianę siły w cięgnię

Zestawione w tabelicy 3.2 wyniki obliczeń pozwalają na sformułowanie kilku wniosków praktycznych.

1. Rodzaj zależności $\sigma - \epsilon$ cięgnię ma znaczący wpływ na stan sił i odkształceń cięgnię. Cięgnię o charakterystyce sprężysto-plastycznej cechują się większymi odkształceniami i mniejszymi siłami niż cięgnię o charakterystyce liniowo sprężystej.

2. Cięgnię o charakterystyce sprężysto-plastycznej cechują odkształcenia trwałe, które powodują znaczne zwiększenie strzałki zwisu w porównaniu do cięgnię o charakterystyce liniowo sprężystej. Przykładowo, w przypadku obciążenia $q_1 = q_2 = 0,5$ kN/m, otrzymano wyniki :

- dla $E = \text{const}$ $f = 3,58$ m (po odciążeniu $f = 2,94$ m) ,

- dla $E \neq \text{const}$ $f = 3,89$ m (po odciążeniu $f = 3,32$ m) .

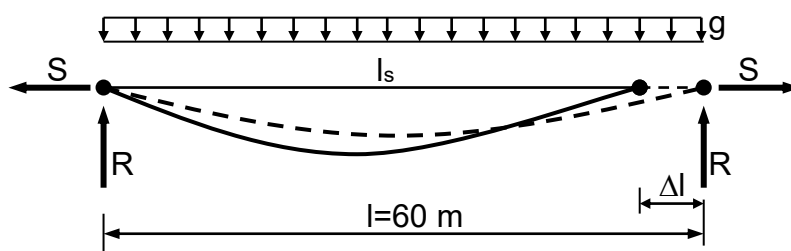
Tak więc po odciążeniu cięgnię zwiększenie strzałki zwisu w przypadku $E \neq \text{const}$ wynosi aż 0,38 m .

3. Powyższa cecha cięgien o charakterystyce sprężysto-plastycznej może mieć niekiedy ten pozytywny skutek, że daje możliwość zwiększenia obciążenia działającego na cięgnię w porównaniu z obciążeniem cięgnię o charakterystyce liniowo sprężystej.

4. Jeżeli zależy nam na tym, aby cięgnię powracało (po odciążeniu) do początkowego stanu sił i przemieszczeń, należy stosować liny po wstępnym ich przeciągnięciu.

Przykład 2

W tym przykładzie przeprowadzono analizę wpływu przemieszczeń podpór cięgna na zmianę siły w cięgnię (rys. 3.12.). Do obliczeń przyjęto cięgno o rozpiętości $l = 60 \text{ m}$, długości początkowej $s_0 = 60,1 \text{ m}$ i przekroju $A = 0,946 \text{ cm}^2$. Ciężar własny cięgna wynosi $g = 0,5 \text{ kN/m}$, zmiana długości cięciwy cięgna spowodowana przemieszczeniami podpór $\Delta l = -15 \text{ cm}$ do $\Delta l = 80 \text{ cm}$.



Rys. 3.12. Cięgno pod wpływem przemieszczeń podpór Δl

Wyniki obliczeń zestawiono w tabelicy 3.3, a ich graficzną interpretację przedstawiono na rys. 3.13.

W celach porównawczych naciąg S cięgna obliczono dla charakterystyki sprężysto–plastycznej i liniowo sprężystej. Dla dodatnich przemieszczeń podpór podano również wartość siły w cięgnię po odciążeniu. W przypadku $\Delta l = 0$ uwzględniono początkową długość cięciwy cięgna $l_s = l$; pozostałe wartości naciągu S wyznaczono dla zmiennych długości cięciwy $l_s = l \pm \Delta l$. Dla przypadku odciążenia długość cięciwy cięgna $l_s = l$.

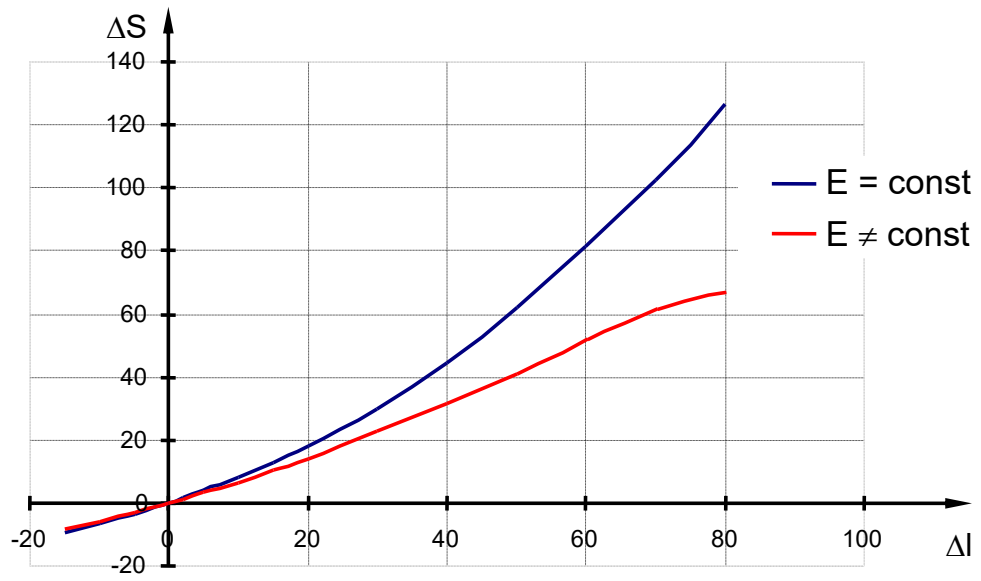
W nawiasach podano naciąg S cięgna po odciążeniu ($\Delta l = 0$).

Analiza uzyskanych wyników, szczególnie ich prezentacja graficzna na rys. 3.13., pozwala na zauważenie ciekawych zależności, które wynikają nie tylko z różnicy przyjętej charakterystyki $\sigma - \varepsilon$ cięgien, ale zależą także od znaku przemieszczeń. Można mianowicie stwierdzić, że na zmianę siły w cięgnię, zarówno w przypadku $E = \text{const}$, jak i $E \neq \text{const}$, większy wpływ mają dodatnie przemieszczenia podpór (powodujące wzrost długości cięciwy cięgna) niż przemieszczenia ujemne o takiej samej wartości. Ponadto porównując rozwiązania dla cięgna o charakterystyce liniowo sprężystej i sprężysto–plastycznej można zauważyć istotną różnicę w pracy obu cięgien.

Tablica 3.3. Zestawienie wyników obliczeń dla przykładu 2

Δl [m]	Naciąg S [kN] – zakres liniowo sprężysty	Naciąg S [kN] – zakres sprężysto-plastyczny
-15	67,11	66,14
-10	69,90	68,65
-5	72,98	71,37
-2	74,98	73,10
0	76,50	74,30
2	77,86 (76,50)	75,54 (74,16)
5	80,18 (76,50)	77,47 (73,94)
10	84,39 (76,50)	80,88 (73,51)
15	89,07 (76,50)	84,53 (73,03)
20	94,28 (76,50)	88,41 (72,47)
30	106,42 (76,50)	96,8 (71,14)
40	121,08 (76,50)	105,83 (69,50)
50	138,27 (76,50)	115,22 (67,57)
60	157,75 (76,50)	124,73 (65,49)
70	179,11 (76,50)	134,23 (63,29)
80	201,89 (76,50)	143,78 (61,12)

W pierwszym przypadku cięgno w trakcie rozciągania cechuje się tzw. *charakterystyką twardą*, a więc jego sztywność, określana jako $k = \Delta S / \Delta l$, rośnie wraz ze wzrostem przemieszczenia Δl . W drugim przypadku wraz ze wzrostem przemieszczenia Δl sztywność cięgna na rozciąganie maleje, co odpowiada tzw. *charakterystyce miękkiej*. Istotna dla teorii ustrojów cięgnowych jest uwaga, że niezależnie od przyjętej charakterystyki cięgna, sztywność cięgna na rozciąganie jest zmienna i zależy od takich czynników, jak kształt cięgna (stosunek f / l), wielkość obciążenia działającego na cięgno oraz wielkość przemieszczeń podpór cięgna, a więc różni się istotnie od stałej sztywności prostoliniowego pręta, podlegającego prawu *Hooke'a*.



Rys. 3.13. Wpływ zmiany długości cięgiwy ciągną na zmianę siły w ciągnie

4. Zagadnienia statyki przestrzennych ustrojów ciągnowych

4.1. Wprowadzenie

Badania teoretyczne zachowania się rzeczywistego obiektu (konstrukcji), wskutek oddziaływań zewnętrznych lub przemian wewnętrznych, wymagają stworzenia pewnego modelu obliczeniowego. Dla danego obiektu rzeczywistego można opracować różne modele obliczeniowe w zależności od przyjętych założeń, stosowanych uproszczeń oraz sposobu opisu zachodzących procesów fizycznych. Przyjęte uproszczenia ułatwiają opis modelu, ale mają wpływ na dokładność obliczeń. W odniesieniu do układów o skomplikowanej geometrii, czy różnych materiałach zastosowanych w jednej konstrukcji, najskuteczniejszą metodą jest obecnie *metoda przemieszczeń* w ujęciu *metody elementów skończonych*. Stosując MES do rozwiązania zadania, należy opracować model dyskretny odpowiadający matematycznemu modelowi ośrodka ciągłego. W procesie tworzenia tego modelu tok postępowania może być następujący.

W pierwszym etapie analizy należy dokonać dyskretyzacji układu, polegającej na zastąpieniu konstrukcji modelem zbudowanym ze skończonej liczby elementów połączonych między sobą w punktach, zwanych węzłami. Drugi etap analizy polega na ustaleniu zależności między uogólnionymi siłami a uogólnionymi przemieszczeniami węzłowymi. W rezultacie dla każdego elementu można utworzyć tzw. *macierz sztywności elementu*. Z macierzy tych buduje się następnie *globalną macierz sztywności układu*, co jest istotą etapu trzeciego. Czwarty etap polega na obliczeniu uogólnionych przemieszczeń węzłów, które stanowią podstawowe niewiadome w metodzie przemieszczeń. W piątym, ostatnim, etapie, na podstawie wyznaczonych wartości przemieszczeń, oblicza się siły przekrojowe w elementach układu.

4.2. Zastosowanie MES do analizy statycznej ustrojów ciągnowych

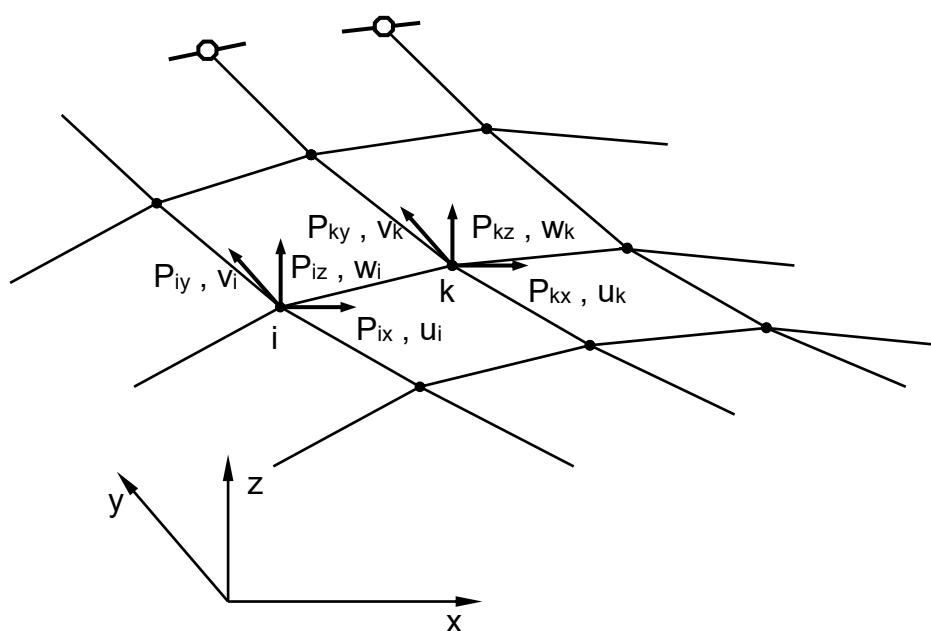
Niech dany będzie fragment siatki ciągnowej przedstawionej na rys. 4.1.

Do obliczeń tego typu ustrojów przyjmuje się na ogół następujące założenia :

- 1) siatka ciągnowa składa się z elementów prostoliniowych o stałym przekroju, połączonych ze sobą węzłami przegubowymi,
- 2) elementy siatki przenoszą wyłącznie osiowe siły rozciągające,

- 3) obciążenie zewnętrzne w postaci sił skupionych jest przekazywane na węzły siatki cięgnowej,
- 4) węzły ustroju cięgnowego pod obciążeniem mają swobodę przemieszczeń we wszystkich kierunkach,
- 5) materiał cięgien jest liniowo sprężysty .

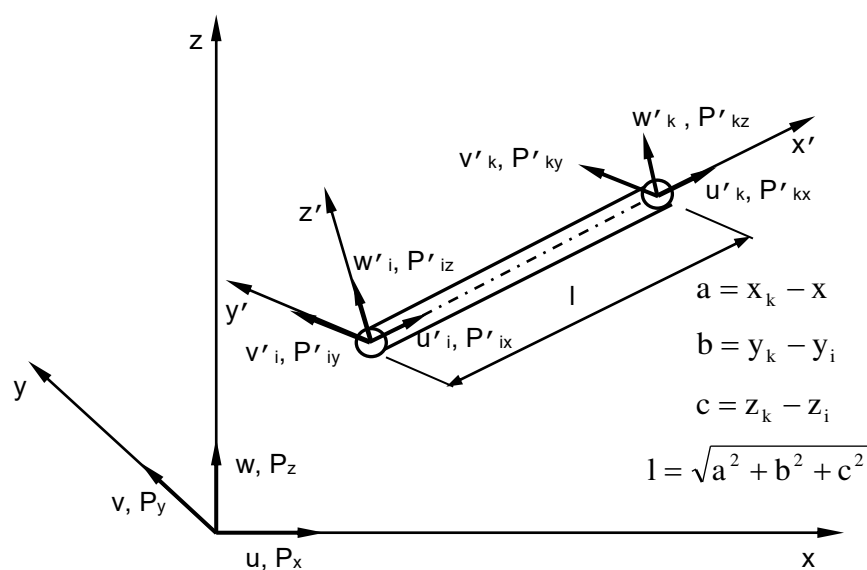
Pomimo tych założeń upraszczających rozwiązanie rozpatrywanego ustroju cięgnowego za pomocą elementarnych metod stosowanych w mechanice budowli nie jest możliwe, ponieważ jest on układem wielokrotnie geometrycznie zmiennym. Usunięcie geometrycznej zmienności i usztywnienie ustroju powodują dopiero siły rozciągające w elementach siatki. W praktyce oznacza to, że oprócz zwykłych macierzy sztywności elementów niezależnych od sił osiowych należy uwzględnić macierze sztywności zależne od osiowych sił rozciągających.



Rys. 4.1. Fragment siatki cięgnowej

4.2.1. Macierze sztywności prostoliniowych elementów cięgien

Niech będzie dany element $i - k$ siatki cięgnowej (rys. 4.2.), dowolnie zorientowany w przestrzeni, którego końce doznają przemieszczeń δ'_i i δ'_k .



Rys. 4.2. Element i – k siatki ciągnowej dowolnie położony w przestrzeni

Zależność między siłami a przemieszczeniami elementu i – k w lokalnym układzie współrzędnych x' , y' , z' można przedstawić w ogólnej postaci

$$\mathbf{k}' \boldsymbol{\delta}' = \mathbf{P}', \quad (4.1)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\delta}' = [u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad u'_k \quad v'_k \quad w'_k]^T, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{P}' = [P'_{ix} \quad P'_{iy} \quad P'_{iz} \quad P'_{kx} \quad P'_{ky} \quad P'_{kz}]^T. \quad (4.3)$$

Macierz sztywności elementu ciągnowego można przedstawić w postaci sumy macierzy sztywności sprężystej \mathbf{k}'_E i macierzy sztywności geometrycznej \mathbf{k}'_G [1,32,36] :

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}'_E + \mathbf{k}'_G. \quad (4.4)$$

Macierz sztywności sprężystej \mathbf{k}'_E , ma postać [32,36]

$$\mathbf{k}'_E = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.5)$$

Uwzględnia ona sztywność elementu na rozciąganie wg prawa Hooke'a , natomiast macierz sztywności geometrycznej \mathbf{k}'_G ma postać [32,36]

$$\mathbf{k}'_G = \frac{S}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

i jest funkcją aktualnej siły osiowej w elemencie (określa sztywność elementu na zmianę geometrii).

Znając macierze sztywności wszystkich elementów ustroju można zapisać typową dla metody elementów skończonych postać równania równowagi ustroju

$$\mathbf{K} \Delta = \mathbf{P} , \quad (4.7)$$

gdzie :

\mathbf{K} – globalna macierz sztywności ustroju,

Δ - uogólniony wektor przemieszczeń węzłowych ,

\mathbf{P} – uogólniony wektor sił węzłowych dla całego ustroju w globalnym układzie współrzędnych.

Uogólnione wektory przemieszczeń i sił węzłowych mają w globalnym układzie współrzędnych postać

$$\Delta = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad u_k \quad v_k \quad w_k]^T , \quad (4.8)$$

$$\mathbf{P} = [P_{ix} \quad P_{iy} \quad P_{iz} \quad P_{kx} \quad P_{ky} \quad P_{kz}]^T. \quad (4.9)$$

Macierze sztywności elementu siatki w globalnym układzie współrzędnych (x, y, z) , przyjmują postać [36, 54]

$$\mathbf{k}_E = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

oraz

$$\mathbf{k}_G = \frac{S}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

gdzie

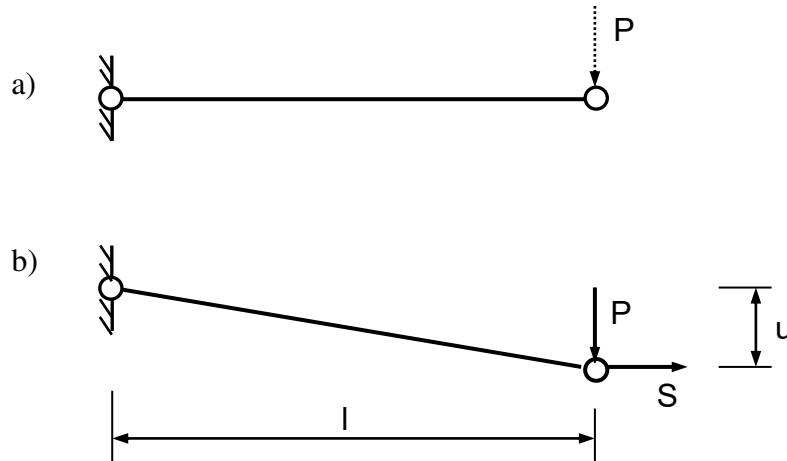
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 - \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta & 1 - \cos^2 \beta & -\cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & 1 - \cos^2 \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Kosinusy kierunkowe występujące w macierzach (4.11) i (4.13) są opisane zależnościami (rys. 4.2.) :

$$\cos \alpha = \frac{a}{l}, \quad \cos \beta = \frac{b}{l}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{l}. \quad (4.14)$$

Jeżeli siły osiowe w elementach siatki ciągnowej są równe zero, ustrój jest geometrycznie zmienny, a jego macierz sztywności jest macierzą osobliwą. Usunięcie geometrycznej zmienności i usztywnienie siatki następuje – jak wspomniano – wskutek pojawienia się sił rozciągających w elementach siatki. To ciekawe zjawisko można

wyjaśnić za pomocą prostego przykładu pojedynczego pręta. Przedstawiony na rys. 4.3.a pręt jest geometrycznie zmienny i nie może przenosić obciążenia P. Ten sam jednak pręt rozciągany siłą S (rys. 4.3.b) jest w stanie przenosić obciążenie prostopadłe do swojej osi.



Rys. 4.3. Pręt pod obciążeniem siłą P

W położeniu równowagi pręta jest spełnione równanie

$$P \cdot l = S \cdot u \quad , \quad (4.15)$$

z którego otrzymujemy

$$P = \frac{S}{l} \cdot u \quad . \quad (4.16)$$

Wyrażenie $\frac{S}{l}$, występujące także w równaniu (4.12), nosi nazwę *sztynności geometrycznej elementu*. Rozważane tu zjawisko sztywności geometrycznej pojedynczego elementu można odnieść do bardziej złożonych, tj. powierzchniowych ustrojów ciągnowych. Im wartości sił rozciągających w elementach siatki są większe (im np. siły wstępnego napięcia siatki są większe), tym siatka ma większą sztywność.

Pewne trudności obliczeniowe dotyczą ustrojów ciągnowych bez wstępnego napięcia. Wtedy siły rozciągające we wszystkich elementach są równe zero, co oznacza, że globalna macierz sztywności ustroju jest macierzą osobliwą. W celu umożliwienia

„startu” rozwiązania ustroju początkowo geometrycznie zmiennego możliwe są różne sposoby postępowania. Dwa szczególnie proste sposoby rozwiązania tego zagadnienia przedstawiono np. w [32,36]. Pierwszy z nich polega na wprowadzeniu w węzłach siatki cięgnowej dodatkowych więzów w postaci poziomych podpór sprężystych o sztywnościach k_x i k_y . Numerycznie przesztywnienie to realizowane jest przez wstawienie w odpowiednich miejscach na głównej przekątnej macierzy sztywności dodatkowych liczb k . W następnych iteracjach, gdy znane są już siły normalne w elementach cięgien, wprowadzone przesztywnienie należy usunąć. Drugi sposób, z którego korzysta autorka w utworzonych programach komputerowych, polega na wstępnym usztywnieniu ustroju cięgnowego poprzez obciążenie całego ustroju pewnym ujemnym polem temperatury, wywołującym osiowe siły rozciągające w elementach cięgien (przy założeniu, że węzły ustroju są chwilowo nieprzesuwne). W trakcie obliczeń to ujemne pole temperatury jest usuwane i nie ma wpływu na dokładność rozwiązania.

4.2.2. Metody rozwiązywania zagadnienia geometrycznie nieliniowego

Ze względu na nieliniowość geometryczną ustrojów cięgnowych, układ równań (4.7), wyrażający stan równowagi istniejącej między obciążeniem zewnętrznym a przemieszczeniami węzłowymi, ma w rzeczywistości postać

$$f(\delta) = P. \quad (4.17)$$

Do rozwiązania równania (4.17) stosuje się w praktyce metody iteracyjne, polegające na rozwiązywaniu ciągu odpowiednio sformułowanych zagadnień liniowych postaci (4.7). W najczęściej stosowanej *metodzie Newtona–Raphsona*, w procesie iteracyjnym doprowadza się do wyrównania niezrównoważonych sił w węzłach siatki cięgnowej ΔP_i do stanu $\Delta P_i \leq \varepsilon$, gdzie ε oznacza założoną dokładność obliczeń.

W pierwszej iteracji jest rozwiązywany układ równań

$$K_0 \Delta_1 = P, \quad (4.18)$$

gdzie

K_0 – początkowa macierz sztywności układu,

a w i-tej iteracji

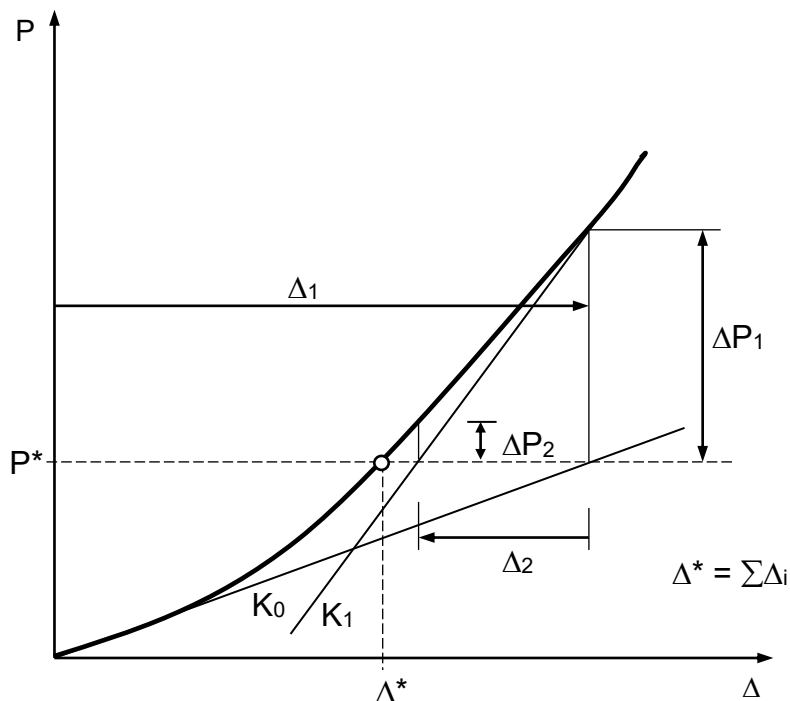
$$\mathbf{K}_{i-1} \Delta_i = \Delta \mathbf{P}_{i-1}, \quad (4.19)$$

gdzie :

\mathbf{K}_{i-1} – styczna macierz sztywności uwzględniająca zmiany w geometrii ustroju w poprzedniej iteracji ,

$\Delta \mathbf{P}_{i-1}$ – siły niezrównoważone (residualne) wynikające z niespełnienia równań równowagi ustroju w poprzedniej iteracji .

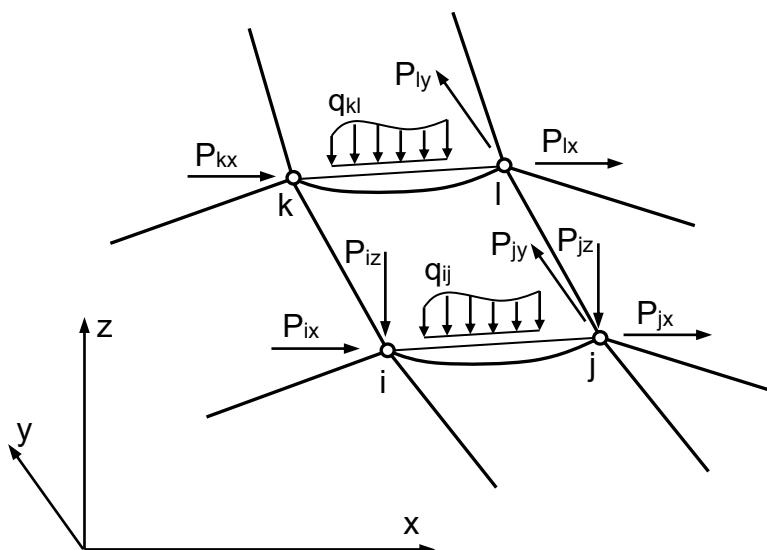
Na rys. (4.4.) pokazano interpretację geometryczną stosowanej w pracy *metody Newtona–Raphsona* dla układu o jednym stopniu swobody. Przemieszczenie węzłowe Δ^* odpowiadające pewnemu obciążeniu P^* jest sumą przemieszczeń uzyskanych w poszczególnych iteracjach, których liczba zależy od z góry założonej dokładności rozwiązania. Możliwe jest też nieco inne postępowanie, oparte na tzw. zmodyfikowanej metodzie Newtona-Raphsona, polegające na stosowaniu we wszystkich iteracjach stałej, np. początkowej sztywności ustroju. Jest to prostszy sposób postępowania, ale o gorszej zbieżności.



Rys. 4.4. Geometryczna interpretacja metody *Newtona-Raphsona*,

Znając globalny wektor przemieszczeń Δ , wyznacza się siły węzłowe we wszystkich elementach ustroju zgodnie ze znaną procedurą *MES*.

4.2.3. Zastosowanie elementów krzywoliniowych



Rys. 4.5. Ogólny widok siatki ściągowej z obciążonymi elementami ciągni

Jest dany fragment powierzchniowej siatki ściągowej, na którą działają obciążenia zarówno węzłowe, jak i międzywęzłowe (ciągłe) (rys. 4.5.).

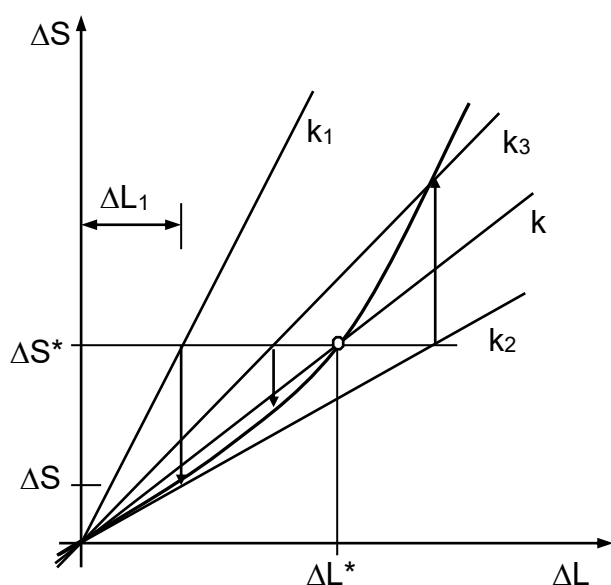
Analiza ustrojów ściągowych przy założeniu, że elementy łączące sąsiadnie węzły są prostoliniowe jest uzasadniona i nie budzi zastrzeżeń w przypadku obciążenia rzeczywiście działającego na węzły konstrukcji. W przypadku jednak bezpośredniego obciążenia ciągni (np. w masztach z odciągami, dachach wiszących), zastępowanie obciążenia międzywęzłowego równoważnym mu obciążeniem skupionym przyłożonym w węzłach może powodować istotne, nawet dla praktyki inżynierskiej, błędy.

Najprostszym sposobem uzyskania poprawnego rozwiązania w przypadku działania obciążenia międzywęzłowego jest podział krzywoliniowego elementu ciągni na kilka elementów prostoliniowych. Taki sposób postępowania ma jednak poważne wady, gdyż prowadzi do znacznego wzrostu liczby stopni swobody ustroju. Inna z metod rozwiązania tego zagadnienia, stosowana w pracach [33,36], polega na przyjęciu kształtu ciągni jako wyniku ich obciążenia międzywęzłowego. Nieliniowe zależności między przemieszczeniami węzłów a siłami w ciągnach są na każdym etapie obliczeń linearyzowane. Sposób postępowania sprowadza się w tej metodzie do obliczeń

elementów prostoliniowych, jednak o zmiennych, ciągle modyfikowanych sztywnościach na rozciąganie. Metodę tę (metodę siecznych) stosuje autorka w utworzonych programach komputerowych. Geometryczną interpretację rozwiązania przedstawia poglądowo rys. 4.6.

Nieliniową zależność między zmianą siły w cięgni ΔS , a zmianą długości cięciwy ΔL przy pewnej znanej funkcji obciążenia cięgni $q(x)$, można przedstawić w ogólnej postaci jako

$$f(\Delta L) = \Delta S \quad (4.20)$$



Rys. 4.6. Geometryczna interpretacja metody rozwiązania

Niech dla pewnego przyrostu długości cięciwy ΔL^* przyrost siły w cięgni wynosi ΔS^* (rys. 4.6.). Zakłada się, że znana jest wartość ΔS^* , a zadanie polega na znalezieniu wartości przemieszczenia ΔL^* . W pierwszym przybliżeniu przyjmuje się, że sztywność cięgni na kierunku cięciwy wynosi k_1 . Najwygodniej jest tu przyjąć wartość k_1 jak dla pręta prostoliniowego, tj. $k_1 = \frac{EA}{L_0}$, gdzie L_0 oznacza początkową długość cięgni. Wstępnie przyjęta sztywność k_1 umożliwia znalezienie zmiany długości cięciwy

$$\Delta L_1 = \frac{\Delta S^*}{k_1} \quad (4.21)$$

Korzystając teraz z odpowiedniego równania cięga (np. (3.5)) określa się siłę w cięgu przy uwzględnieniu wartości ΔL_1 , dalej zmianę siły w cięgu ΔS_1 , a w końcu zmodyfikowaną sztywność cięga:

$$k_2 = \frac{\Delta S_1}{\Delta L_1} . \quad (4.22)$$

Następne przybliżenie ΔL_2 określa zależność

$$\Delta L_2 = \frac{\Delta S^*}{k_2} . \quad (4.23)$$

Proces iteracyjny ulega zakończeniu, gdy zostanie znaleziona taka zastępcza sztywność k elementu cięga, że (w ramach przyjętej dokładności) wyniki rozwiązania liniowego i nieliniowego są sobie równe.

Przedstawiony sposób postępowania dla przypadku pojedynczego cięga można uogólnić na powierzchniowe i przestrzenne ustroje cięgnowe. Poniżej przedstawiono przebieg procesu iteracyjnego, zgodnie z którym autorka realizuje program komputerowy służący do obliczania siatek cięgowych złożonych z elementów krzywoliniowych.

Czynności wstępne

- 1) Obliczenie sił S_0 w cięgach od obciążenia międzywęzłowego z równania cięga (3.4), przy założeniu, że węzły ustroju cięgowego są nieprzesuwne .
- 2) Przyjęcie początkowych sztywności cięgien k_1 – jak dla elementów prostoliniowych.
- 3) Utworzenie globalnej macierzy sztywności – jak dla siatki cięgnowej złożonej z elementów prostoliniowych

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G(S_0) .$$

- 4) Obliczenie wektora uogólnionych przemieszczeń węzłowych z równania

$$\mathbf{K}_1 \Delta_1 = \mathbf{P} ,$$

w którym \mathbf{P} uwzględnia obciążenie węzłowe.

Czynności powtarzane w każdej iteracji

- 1) Obliczenie z równania ciągła (3.5) sił S w cięgnach na podstawie wyznaczonych długości cięciw cięgien.
- 2) Modyfikacja sztywności elementów cięgien w i -tej iteracji

$$k_i = \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta L_{i-1}},$$

gdzie $\Delta S_{i-1} = S_{i-1} - S_0$, $\Delta L_{i-1} = L_{i-1} - L_0$.

- 3) Utworzenie globalnej macierzy sztywności

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G(S_{i-1}).$$

- 4) Obliczenie następnego przybliżenia przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{K}_i \Delta_i = \Delta \mathbf{P}_{i-1}.$$

Obliczenia ulegają przerwaniu gdy różnice wartości sił w dwóch kolejnych iteracjach nie są większe od z góry założonej dokładności rozwiązania.

Na podstawie opisu tej metody rozwiązywania można zauważyć, że stosowane są w niej dwa poziomy iteracyjne:

- poziom zewnętrzny polegający na znajdowaniu przemieszczeń węzłowych ustroju, oparty na stycznej macierzy sztywności,
- poziom wewnętrzny polegający na poszukiwaniu zastępczych sztywności cięgien, oparty na ich sztywnościach siecznych.

Obliczenia na obydwu poziomach iteracyjnych można zaliczyć do obliczeń dokładnych, w ramach – oczywiście – przyjętej dokładności rozwiązania.

4.2.4. Uwzględnienie nieliniowości fizycznej cięgien

Nieliniowość fizyczną ustrojów cięgowych, wynikającą z niesprężystych właściwości cięgien, można uwzględnić wykorzystując do obliczeń omówione w p. 3.3. metody obliczania pojedynczych cięgien w zakresie sprężysto-plastycznym. Autorka stosuje do obliczeń numerycznych metodę siecznych szczegółowo omówioną w p.

3.3.4. Omówiony w p. 3.3.4 sposób analizy cięgien w zakresie niesprężystym w połączeniu z prezentowaną w p. 4.2.3 analizą ustrojów cięgnowych opartą na elementach krzywoliniowych, gdzie kształt cięgna przyjmuje się jako wynik przyłożonego obciążenia, pozwala na przeprowadzenie stosunkowo dokładnej analizy rzeczywistej pracy złożonych ustrojów cięgnowych.

W obliczeniach przyjmuje się, że na etapie obciążenia ustroju obowiązuje krzywoliniowa zależność $\sigma - \varepsilon$, a więc moduł sprężystości elementów cięgien zależy od aktualnego poziomu odkształceń i naprężeń, natomiast na etapie odciążenia ustroju i ponownego obciążenia stosuje się stałą wartość modułu sprężystości E .

Poniżej przedstawiono ogólny algorytm obliczeń z uwzględnieniem fizycznej nieliniowości cięgien.

Czynności wstępne (podobnie, jak w p. 4.2.3.)

- 1) Obliczenie sił S_0 w cięgnach od obciążenia międzywęzłowego z równania cięgna (3.4), przy założeniu, że węzły ustroju cięgnowego są nieprzesuwne.
- 2) Przyjęcie początkowych sztywności cięgien k_1 – jak dla elementów prostoliniowych.
- 3) Utworzenie globalnej macierzy sztywności – jak dla siatki cięgnowej złożonej z elementów prostoliniowych

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G(S_0).$$

- 4) Obliczenie wektora uogólnionych przemieszczeń węzłowych z równania

$$\mathbf{K}_1 \Delta_1 = \mathbf{P},$$

w którym \mathbf{P} uwzględnia obciążenie węzłowe.

Czynności powtarzane w każdej iteracji

- 1) Obliczenie z równania cięgna (3.5) siły S w cięgnie na podstawie wyznaczonych długości cięciw cięgien.

Ponieważ uwzględnia się tu cięgna o charakterystyce sprężysto-plastycznej, równanie (3.5) nie jest rozwiązywane w bezpośredni sposób, ale do jego rozwiązania stosuje się procedurę iteracyjną szczegółowo omówioną w p. 3.3.4. pracy.

- 2) Modyfikacja sztywności elementów cięgien w i -tej iteracji

$$k_i = \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta L_{i-1}},$$

gdzie $\Delta S_{i-1} = S_{i-1} - S_0$, $\Delta L_{i-1} = L_{i-1} - L_0$.

3) Utworzenie globalnej macierzy sztywności

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G(S_{i-1}).$$

4) Obliczenie następnego przybliżenia przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{K}_i \Delta_i = \Delta \mathbf{P}_{i-1}.$$

Ponieważ współczynnik sprężystości E jest stały, na etapie odciążenia i ponownego obciążenia ustroju, siła w cięgnie zostaje obliczona w jednym kroku. W przypadku odciążenia ustroju, analogicznie jak dla pojedynczego cięgna, konieczna jest znajomość wartości sił w cięgnach (końcowy stan obciążenia ustroju) oraz odpowiadających im długości cięgien (obliczonych np. z zależności (3.7)). Znajomość tych wartości pozwala określić stan początkowy (wyjściowy) dla etapu odciążenia. Do obliczenia natomiast sił w cięgnach po odciążeniu można wykorzystać równanie (3.6), w którym E jest stałym współczynnikiem sprężystości ($E = \text{const}$).

Można zauważyć, że między obliczaniem ustrojów cięgowych w zakresie sprężystym a sprężysto-plastycznym występują dwie zasadnicze różnice. Pierwsza z nich polega na konieczności stosowania dodatkowej iteracji wewnętrznej w celu wyznaczenia wartości sił w cięgnach, a druga różnica polega na konieczności obliczania aktualnych długości cięgien, których znajomość jest potrzebna na etapie odciążenia ustroju.

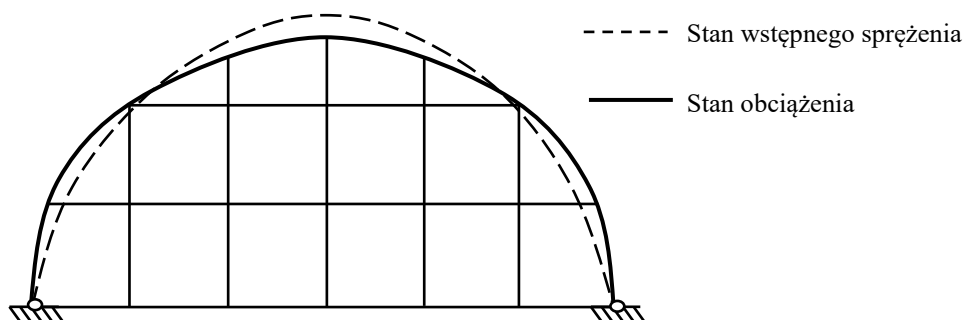
Ustroje cięgnowe obliczane przy uwzględnieniu fizycznej nieliniowości elementów cięgien charakteryzują się po odciążeniu odkształceniami plastycznymi (trwałymi), które powodują spadki sił sprężających. W masztach z odciągami zjawisko to powoduje dodatkowo utratę pionowego kierunku trzonu masztu. Szczegółową analizę statyczną pewnej siatki cięgnowej w zakresie sprężysto-plastycznym przedstawiono w p. 6.3. pracy, a analizę statyczną masztu z odciągami w 6.4.

4.2.5. Wpływ podatności konstrukcji wsporczej na stan sił i przemieszczeń ustrojów ciągnowych

W praktyce najczęściej występują ustroje ciągnowe złożone zarówno z elementów cięgien, jak i z typowych elementów belkowych. Można tu wymienić takie konstrukcje, jak kratownice *Jawertha* współpracujące z konstrukcją wsporczą, siatki ciągnowe podwieszane do dźwigara brzegowego lub np. maszty z odciągami. W każdym przypadku nieuwzględnienie wpływu podatności konstrukcji belkowej na siły i przemieszczenia cięgien jest poważnym błędem, który prowadzi do określenia nieprawdziwego obrazu pracy ustroju, a także do nieekonomicznego projektowania samej konstrukcji wsporczej.

Opierając się na analizie statycznej przekryć wiszących z odkształcalnym dźwigarem brzegowym przedstawionej w [5], [32] i [36], można stwierdzić, że sztywność dźwigara brzegowego bardzo istotnie wpływa na wartości sił wewnętrznych i przemieszczeń zarówno w siatce ciągnowej, jak i w samym dźwigarze brzegowym. Uwzględnienie rzeczywistej sztywności dźwigara brzegowego jest dla pracy ustroju bardzo korzystna.

Na rys. 4.7. przedstawiono typowy, w rzucie poziomym, sposób odkształcenia się dźwigara brzegowego na etapie wstępnego sprężenia ustroju i pod obciążeniem. Przemieszczenia punktów węzłowych dźwigara do wewnątrz powodują spadek sił w cięgnach, a przemieszczenia na zewnątrz powodują ich wzrost.



Rys. 4.7. Przykład deformacji dźwigara brzegowego

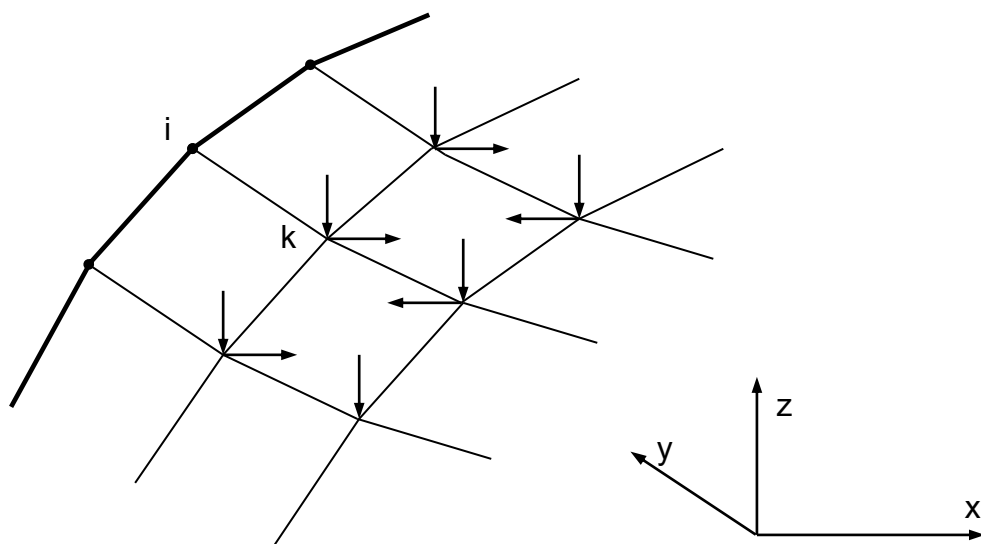
Występuje przy tym pewna zależność polegająca na tym, że spadek lub wzrost sił w cięgnach ogranicza przemieszczenia dźwigara brzegowego, co decydująco wpływa na

zmniejszenie wartości momentów zginających. Można zatem stwierdzić, że momenty zginające w dźwigarze brzegowym są tym mniejsze, im mniejsza jest sztywność dźwigara brzegowego. Obliczanie siatek cięgnowych przy założeniu nieodkształcalności dźwigara brzegowego lub założeniu nieprzesuwnego zamocowania końców cięgien prowadzi do projektowania dźwigara wielokrotnie sztywniejszego, z czym wiąże się znacznie większe zużycie materiału.

W celu obliczenia ustroju cięgnowo-belkowego z uwzględnieniem wzajemnej współpracy cięgien i konstrukcji wsporczej buduje się na ogół (np. [5],[32]) globalną macierz sztywności całego ustroju, która zawiera zarówno macierze sztywności elementów cięgien, jak i macierze sztywności elementów belkowych. Na podstawie iteracyjnego rozwiązania całego ustroju otrzymuje się globalny wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych, który umożliwia wyznaczenie sił wewnętrznych tak w elementach cięgien, jak i w elementach belkowych.

Autorka prezentuje inny sposób obliczania ustrojów cięgnowo-belkowych oparty na iteracyjnej *metodzie kolejnych przybliżeń*. W metodzie tej ustrój cięgnowy i ustrój belkowy są rozwiązywane oddzielnie tak długo, aż nastąpi zgodność sił i przemieszczeń brzegowych w obu ustrojach z założoną dokładnością obliczeń.

W celu objaśnienia tej metody rozpatrzmy ustrój składający się dźwigara brzegowego i podwieszanej do niego siatki cięgnowej (rys. 4.8.).



Rys. 4.8. Fragment siatki cięgnowej podwieszanej do dźwigara brzegowego

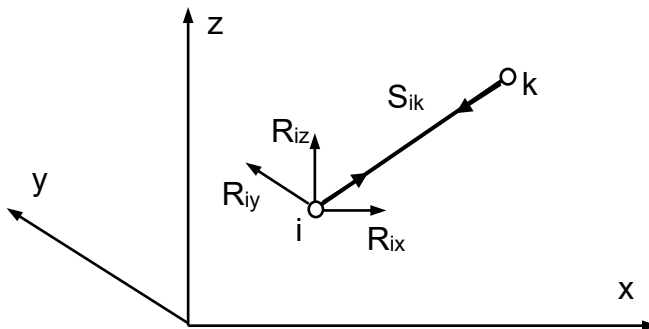
I. Etap początkowy (pierwsze przybliżenie)

Na początku oblicza się siły w siatce ciągnowej przy założeniu, że siatka jest zamocowana w konturze brzegowym nieprzesuwnie (dźwigar jest nieodkształcalny). Obliczenia przeprowadza się według ogólnych zasad omówionych w p. 4.2.1. i 4.2.2. Na podstawie tych obliczeń otrzymuje się siły i przemieszczenia w siatce ciągnowej, w tym także siły w elementach stykających się z dźwigarem brzegowym (konstrukcją wsporczą). Dowolny element $i - k$ siatki wywiera na dźwigar brzegowy siłę, której składowe wynoszą (rys. 4.9.):

$$\begin{aligned} R_{ix} &= S_{ik} \cos \alpha \\ R_{iy} &= S_{ik} \cos \beta \\ R_{iz} &= S_{ik} \cos \gamma \end{aligned} \quad (4.24)$$

gdzie

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - kosinusy kierunkowe .



Rys. 4.9. Oddziaływanie elementu $i - k$ siatki ciągnowej na dźwigar

W następnej kolejności należy obliczyć dźwigar brzegowy obciążony wyznaczonymi oddziaływaniami siatki ciągnowej. Można tu wykorzystać dowolny program służący do analizy statycznej ustrojów prętowych, za pomocą którego można wyznaczyć przemieszczenia i siły węzłowe dźwigara, a w tym przemieszczenia u_i, v_i, w_i dowolnego węzła „i”.

II. Przybliżenie

Siatka cięgnowa jest rozwiązywana ponownie, ale z uwzględnieniem obliczonych w pierwszym przybliżeniu przemieszczeń węzłowych dźwigara (przemieszczeń podpór). Po rozwiązaniu siatki jako ustroju z niezerowymi warunkami brzegowymi otrzymuje się nowe siły w elementach cięgien, określa nowe wartości reakcji wywierane na punkty węzłowe konturu i obciąża nimi znowu dźwigar brzegowy. Po ponownym obliczeniu dźwigara uzyskuje się nowe – aktualne wartości przemieszczeń węzłowych dźwigara.

III. Przybliżenie

Siatkę cięgnową oblicza się z uwzględnieniem przemieszczeń podpór obliczonych w drugim przybliżeniu, a dalej obowiązuje procedura obliczeń znana z drugiego przybliżenia.

Ciąg iteracyjny należy zakończyć, gdy np. różnica wartości przemieszczeń podpór w dwóch kolejnych iteracjach jest mniejsza od założonej dokładności rozwiązania.

Opisana wyżej metoda obliczeń ustrojów cięgnowo-belkowych jest bardzo prosta, ponieważ polega na kilkakrotnym rozwiązaniu siatki cięgnowej z uwzględnieniem przemieszczeń podpór (z uwzględnieniem niezerowych – poza pierwszą iteracją - warunków brzegowych).

5. Programy komputerowe

5.1. Program NET1

Przedstawiona w rozdziale 4.2.4. metoda rozwiązywania ustrojów ciągnowych w zakresie sprężysto-plastycznym posłużyła do utworzenia odpowiedniego programu komputerowego w języku QBASIC. Uproszczony schemat blokowy programu przedstawia rys. 5.1.

Program NET1 pozwala na obliczanie dosyć szerokiej klasy płaskich i przestrzennych ustrojów ciągnowych – zarówno wstępnie napiętych, jak i bez wstępnego napięcia. Istnieje tu także możliwość uwzględnienia konturu w postaci lin brzegowych. Program uwzględnia kształt cięgien jako wynik ich obciążenia zewnętrznego (elementy prostoliniowe w przypadku obciążenia węzłowego, elementy krzywoliniowe – w przypadku obciążenia ciągłego) i liniowo sprężystą lub sprężysto-plastyczną charakterystykę materiału. Obliczenia statyczne można przeprowadzać w trzech różnych stanach obciążenia ustroju :

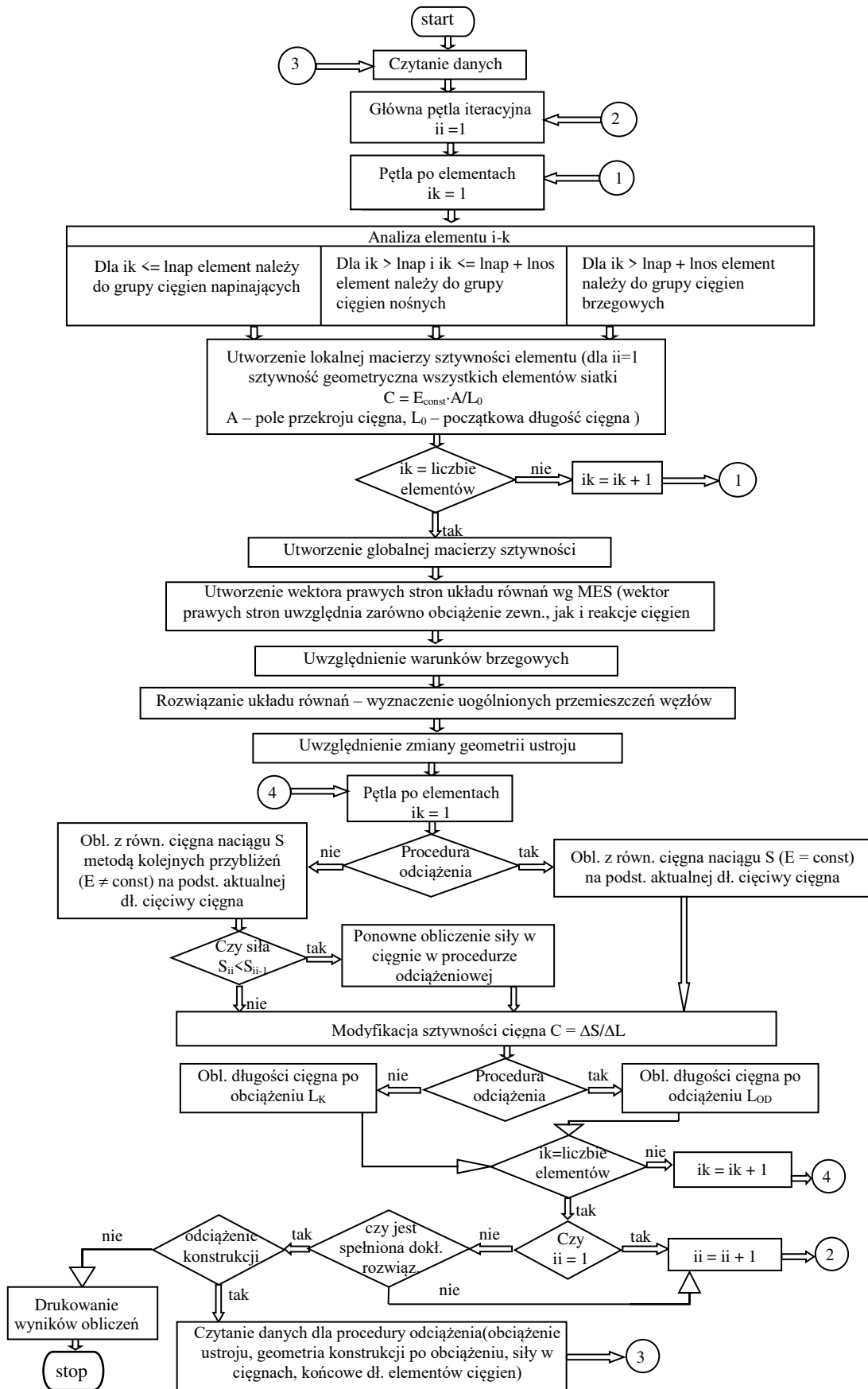
- montaż (stan początkowy : obciążenie ciężarem własnym, ewentualnie wstępne napięcie ustroju),
- eksploatacja (obciążenie całkowite),
- odciążenie (do stanu początkowego).

Możliwe jest także uwzględnienie wpływu zmian temperatury na stan sił i przemieszczeń analizowanych ustrojów.

Odpowiednio podane warunki brzegowe pozwalają na wykorzystanie symetrii ustroju, co znacznie zmniejsza rozmiar rozpatrywanego układu i ułatwia opis konstrukcji.

Problem nieliniowości geometrycznej ustrojów ciągnowych jest w pracy rozwiązywany iteracyjnie przy wykorzystaniu *metody Newtona–Raphsona*, z pominięciem przyrostowych iteracji obciążenia. Proces iteracyjny ulega zakończeniu, gdy wielkość sił niezrównoważonych (residualnych) jest mniejsza od założonej z góry dokładności rozwiązania.

Nieliniowość fizyczna jest w każdej iteracji uwzględniana poprzez obliczenie *metodą kolejnych przybliżeń* aktualnego modułu sprężystości ciągną, w zależności od poziomu naprężeń i odkształceń, zgodnie z p. 3.3.4.



Rys. 5.1. Schemat blokowy programu NET1

Początkowa zmienność geometryczna ustroju jest usuwana w programie automatycznie, podobnie jak w [36] , przez przyjęcie w pierwszej iteracji spadku temperatury we wszystkich elementach cięgien o wartość $\Delta T = 100^{\circ}\text{C}$. W następnej iteracji przeszywnienie to jest eliminowane i nie ma wpływu na dokładność obliczeń. Jeżeli w którejś iteracji siła w cięgnię spadnie do zera – element taki jest chwilowo wyłączany z pracy ustroju, co symuluje odpowiednio zmodyfikowana macierz sztywności, przy czym jeżeli układ sił się zmienia – cięgnię może ponownie przenosić obciążenie.

Wstępne napięcie ustroju może być w programie realizowane poprzez skrócenie dowolnych elementów cięgien lub przez przyjęcie spadku temperatury w cięgniach dla danej grupy elementów (ciągnię napinające, nośne, brzegowe).

Dane wejściowe do programu obejmują podanie m.in. :

- współrzędnych punktów dla początkowej konfiguracji ustroju,
- liczby węzłów, elementów,
- liczby i rodzaju warunków brzegowych,
- charakterystyk wytrzymałościowych,
- obciążenia ustroju .

Wydruk wyników obejmuje wartości przemieszczeń węzłowych w globalnym układzie współrzędnych, wartości sił wewnętrznych w elementach cięgien oraz końcowe długości cięgien po obciążeniu.

5.2. Program NET2

Program NET2, napisany w języku QBASIC, służy do obliczania ustrojów cięgniowo-belkowych *metodą kolejnych przybliżeń* (p. 4.2.5.). W obecnej wersji autorka wykorzystuje program do rozwiązywania płaskich i przestrzennych ustrojów obciążonych węzłowo lub z obciążeniem działającym bezpośrednio na elementy cięgien. Algorytm obliczeń oparto na *MES* , problem nieliniowości geometrycznej rozwiązano iteracyjnie za pomocą *metody Newtona-Raphsona*, z pominięciem przyrostowych iteracji obciążenia. W programie wykorzystano tylko macierze sztywności dla elementów cięgien – elementy belkowe są rozwiązywane przy użyciu dowolnego programu komputerowego służącego do analizy statycznej ustrojów prętowych (autorka wykorzystuje w tym celu program *RAMA/KRATA* Katedry

Konstrukcji Metalowych). Problem uwzględnienia w programie przemieszczeń podpór elementów ciągien (niezerowych warunków brzegowych) wskutek podatności konstrukcji wsporczej jest rozwiązywany według metody przedstawionej w [59].

W wierszu macierzy sztywności (półpasmo) odpowiadającemu niezerowemu warunkowi brzegowemu (u) należy wstawić bardzo dużą liczbę

$$\bar{\mathbf{K}}(i, 1) = \mathbf{K}(i, 1) \cdot N,$$

gdzie

i – wiersz odpowiadający warunkowi brzegowemu,

N – duża liczba (np. 10^6).

Prawe strony równania ulegają zaś modyfikacji

$$\mathbf{PR}(i) = \bar{\mathbf{K}}(i, 1) \cdot u.$$

Taki sposób postępowania jest też właściwy dla przypadku zerowych warunków brzegowych ($u = 0$), można go więc stosować w jednolity sposób zarówno dla zerowych, jak i niezerowych warunków brzegowych.

Dane wejściowe do programu, podobnie jak w NET1, obejmują m.in. podanie współrzędnych punktów, liczby węzłów, elementów, charakterystyk wytrzymałościowych i obciążenia ustroju. Istotna różnica w stosunku do NET1 polega na sposobie podawania warunków brzegowych. Dotychczasowe oznaczenia

1 – przeszywnienie,

0 – przesuw,

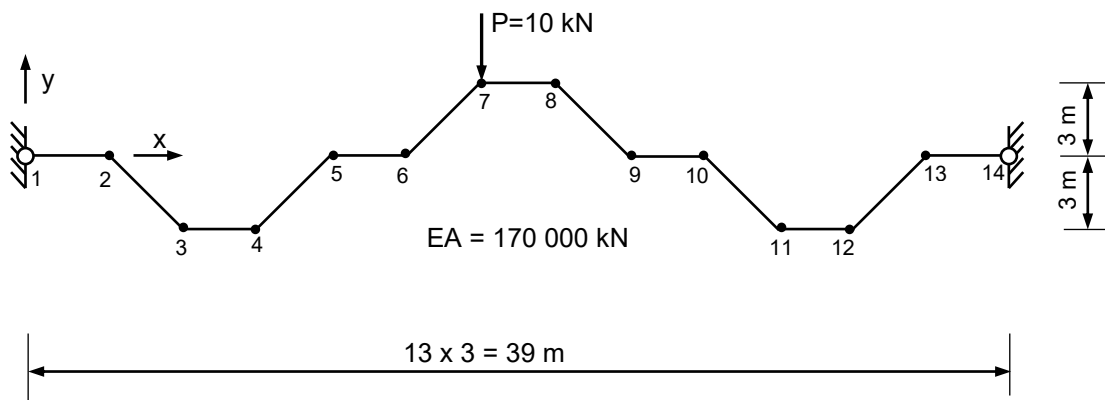
zastąpione są w NET2 konkretnymi wartościami przemieszczeń podpór na odpowiednich kierunkach, określonymi na podstawie obliczeń konstrukcji wsporczej obciążonej reakcjami elementów ciągien.

Wydruk wyników obliczeń obejmuje wielkości przemieszczeń węzłowych w globalnym układzie współrzędnych, wielkości sił wewnętrznych w elementach ciągien, końcowe długości ciągien oraz reakcje węzłowe ciągien na podporach.

6. Przykłady obliczeń numerycznych

6.1. Test programu NET1 – układ cięgnowy o dużej geometrycznej zmienności

Na wstępie przedstawiono jeden z przykładów testujących działanie programu NET1. Wybrany, pokazany na rys. 6.1., przykład cechuje duża geometryczna zmienność. Pod wpływem przyłożonego obciążenia w postaci siły skupionej P ustrój przechodzi w położenie równowagi, przy czym końcowa konfiguracja równowagi ustroju znacznie się różni od konfiguracji początkowej. Pomimo bardzo dużych przemieszczeń węzłowych ustroju udaje się za pomocą programu NET1 wyznaczyć jego położenie równowagi oraz siły normalne w elementach cięgien.



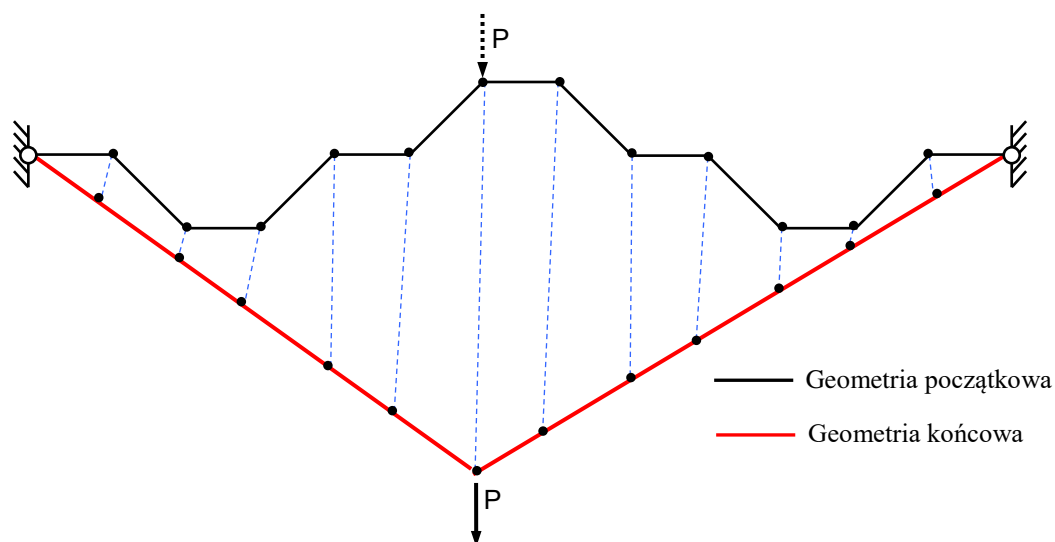
Rys. 6.1. Początkowa konfiguracja ustroju cięgnowego

Obliczenia ustroju przeprowadzono dla charakterystyki liniowo sprężystej, przyjmując, że początkowe siły w cięgnach (przed obciążeniem) są równe zero. Wyniki obliczeń (przemieszczenia węzłowe) zestawiono w tabelicy 6.1.

Tabela 6.1. Przemieszczenia węzłów ustroju pod wpływem obciążenia [m]

Nr węzła	u [m]	v [m]	Nr węzła	u [m]	v [m]
1	0	0	8	-0,704	-14,059
2	-0,554	-1,738	9	-0,052	-8,899
3	-0,096	-1,195	10	-0,470	-7,373
4	-0,650	-2,933	11	0,183	-2,213
5	-0,193	-8,390	12	-0,235	-0,686
6	-0,746	-10,128	13	0,417	-1,527
7	-0,287	-15,586	14	0	0

Siły normalne w elementach ciągien – mimo przemieszczeń przekraczających 15 m – są niewielkie i dla wszystkich elementów wynoszą, w przybliżeniu, 9 kN. Na rys. 6.2. pokazano początkową i końcową konfigurację ustroju .



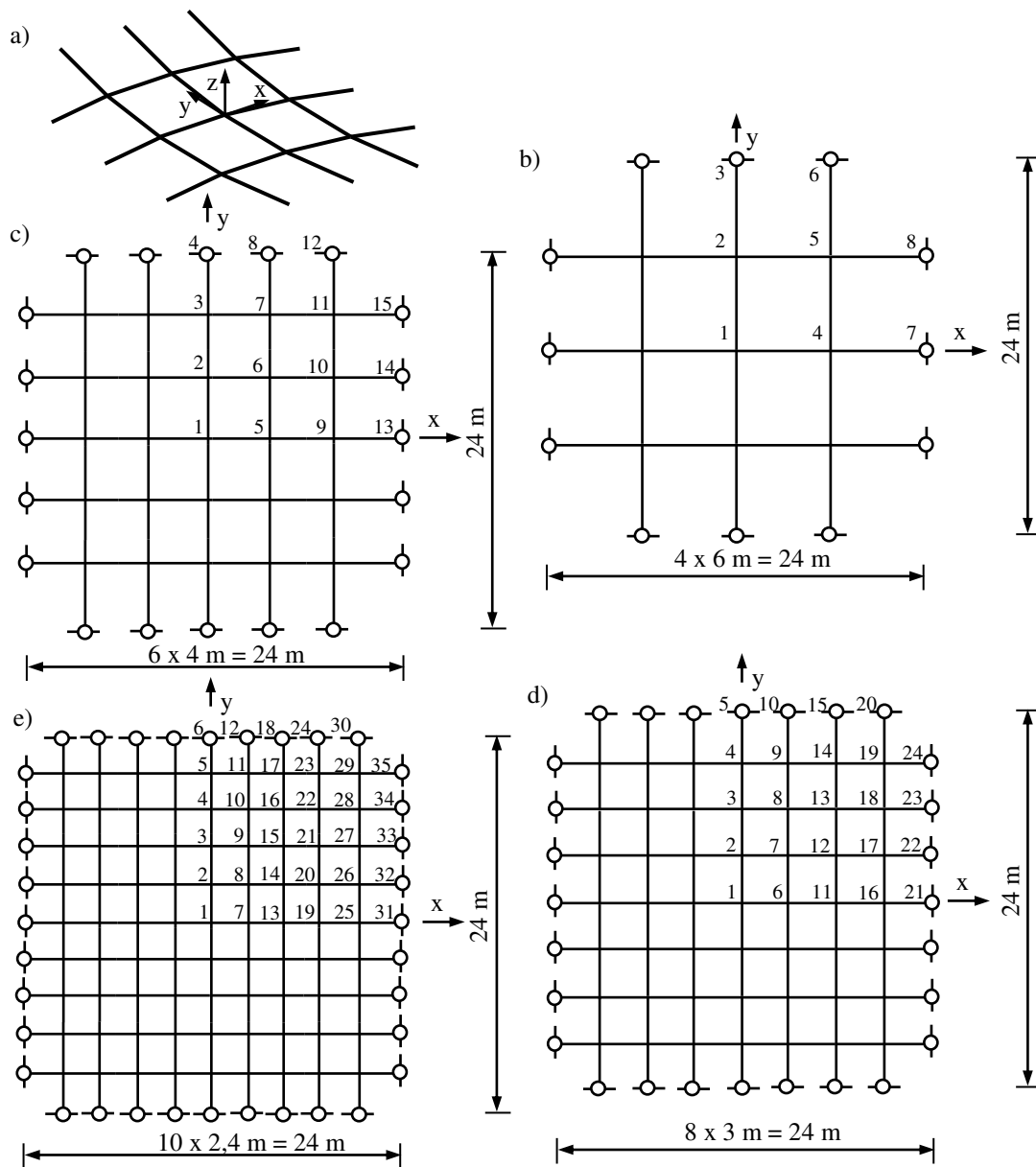
Rys. 6.2. widok odkształconego ustroju ciągowego

6.2. Siatka ciągnowa – zakres liniowo sprężysty

Przedstawione tu wyniki obliczeń dotyczą analizy siatki ciągnowej w zakresie liniowo sprężystym poddanej działaniu obciążenia w postaci pionowych sił skupionych przyłożonych w węzłach oraz obciążenia ciągłego działającego bezpośrednio na ciągną nośne lub napinające. Ogólny widok rozważanej siatki ciągnowej pokazano na rys. 6.3.a), a jej rzut poziomy (w czterech wariantach) na rys. 6.3.b÷e). Siatki ciągnowe w poszczególnych wariantach mają tę samą wyniosłość, a różnią się jedynie gęstością (odległością między węzłami siatki). Pionowe współrzędne węzłów leżą na powierzchni paraboloidy hiperbolicznej określonej równaniem $z = (-x^2 + y^2)/96$.

Do obliczeń przyjęto następujące założenia :

- sztywność na rozciąganie ciągien nośnych i napinających jest jednakowa i wynosi $EA = 100\ 000$ kN,
- materiał ciągien jest liniowo sprężysty,
- obciążenie odniesione do poziomego rzutu siatki wynosi $q = 1$ kN/m² .



Rys. 6.3. Siatka cięgnowa przyjęta do analizy : a) widok ogólny, b), c), d) i e) warianty rzutu poziomego siatki

Przyjęto, że na każdy rozpatrywany wariant siatki obciążenie to działa w postaci :

- skupionego obciążenia przyłożonego w węzłach $P = qa^2$ (a – pozioma odległość między węzłami),
- obciążenia ciągłego $p = qa$ działającego na elementy cięgien nośnych,
- obciążenia ciągłego $p = qa$ działającego na elementy cięgien napinających.

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku wstępnego napięcia siatek siłą o wartości $H_x = H_y = 150$ kN oraz dla przypadku siatek bez wstępnego napięcia (siatek wiotkich).

Wybrane wyniki obliczeń prezentowanych siatek ciągnowych zestawiono w tablicy 6.2 (siatki bez wstępnego napięcia) i w tablicy 6.3 (siatki wstępnie napięte). Wyniki te obejmują przemieszczenia pionowe środkowego węzła siatki w_1 oraz wartości sił w ciągnach napinających i nośnych przyległych do węzła środkowego.

Tablica 6.2. Przemieszczenia węzłowe [cm] i siły w elementach [kN] siatek bez wstępnego napięcia

Siatka ciągnowa	Obciążenie węzłowe		Obciążenie ciągnen nośn.		Obciążenie ciągnen nap.	
	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]
b) (4 x 6 m)	-19,0	$S_{1-2} = 255,5$ $S_{1-4} = 0,0$	-14,2	$S_{1-2} = 262,7$ $S_{1-4} = 0,0$	-24,7	$S_{1-2} = 341,9$ $S_{1-4} = 109,8$
c) (6 x 4 m)	-12,9	$S_{1-2} = 176,4$ $S_{1-5} = 0,0$	-10,7	$S_{1-2} = 178,4$ $S_{1-5} = 0,0$	-16,2	$S_{1-2} = 228,4$ $S_{1-5} = 58,6$
d) (8 x 3 m)	-9,7	$S_{1-2} = 134,6$ $S_{1-6} = 0,0$	-8,5	$S_{1-2} = 135,4$ $S_{1-6} = 0,0$	-12,0	$S_{1-2} = 170,2$ $S_{1-6} = 37,8$
e) (10 x 2,4 m)	-7,7	$S_{1-2} = 108,8$ $S_{1-7} = 0,0$	-7,0	$S_{1-2} = 109,2$ $S_{1-7} = 0,0$	-9,5	$S_{1-2} = 135,1$ $S_{1-7} = 27,0$

Tablica 6.3. Przemieszczenia węzłowe [cm] i siły [kN] w elementach siatek wstępnie napiętych
($H_x = H_y = 150$ kN)

Siatka ciągnowa	Obciążenie węzłowe		Obciążenie ciągnen nośn.		Obciążenie ciągnen nap.	
	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]	Przemieszczenie w_1 [cm]	Siły w ciągnach [kN]
b) (4 x 6 m)	-9,7	$S_{1-2} = 287,7$ $S_{1-4} = 8,5$	-8,0	$S_{1-2} = 313,9$ $S_{1-4} = 34,7$	-17,7	$S_{1-2} = 391,8$ $S_{1-4} = 148,6$
c) (6 x 4 m)	-6,1	$S_{1-2} = 241,8$ $S_{1-5} = 53,1$	-5,6	$S_{1-2} = 249,9$ $S_{1-5} = 61,5$	-9,3	$S_{1-2} = 282,9$ $S_{1-5} = 103,7$
d) (8 x 3 m)	-4,5	$S_{1-2} = 218,7$ $S_{1-6} = 76,6$	-4,3	$S_{1-2} = 222,0$ $S_{1-6} = 80,0$	-5,7	$S_{1-2} = 234,3$ $S_{1-6} = 94,8$
e) (10 x 2,4 m)	-3,5	$S_{1-2} = 204,8$ $S_{1-7} = 90,9$	-3,4	$S_{1-2} = 206,3$ $S_{1-7} = 92,5$	-4,0	$S_{1-2} = 210,9$ $S_{1-7} = 97,8$

Ze względu na równomierny rozkład obciążenia i niewielką krzywiznę powierzchni siatek, siły w pozostałych elementach ciągłych nośnych i napinających nie różnią się w sposób istotny od przedstawionych sił w wybranych środkowych elementach siatek.

Przedstawione w tablicach 6.2 i 6.3 wyniki obliczeń pozwalają na wyciągnięcie kilku wniosków praktycznych.

1. Na stan sił i przemieszczeń siatki ciągłowej bardzo istotny wpływ ma rodzaj przyłożonego obciążenia. W przypadku skupionego obciążenia węzłowego i obciążenia ciągłego działającego bezpośrednio na cięgna nośne różnice w wynikach obliczeń są nieduże. W związku z tym zastępowanie tego rodzaju obciążenia ciągłego równoważnym obciążeniem skupionym jest w praktyce dopuszczalne. W wypadku obciążenia ciągłego działającego bezpośrednio na cięgna napinające wyniki obliczeń różnią się istotnie od wyników pozostałych przypadków. Temu rodzajowi obciążenia odpowiadają zarówno większe przemieszczenia węzłów, jak i znacznie większe wartości sił w cięgnach nośnych i napinających i w związku z tym taki rodzaj obciążenia nie może być zastępowany obciążeniem węzłowym.

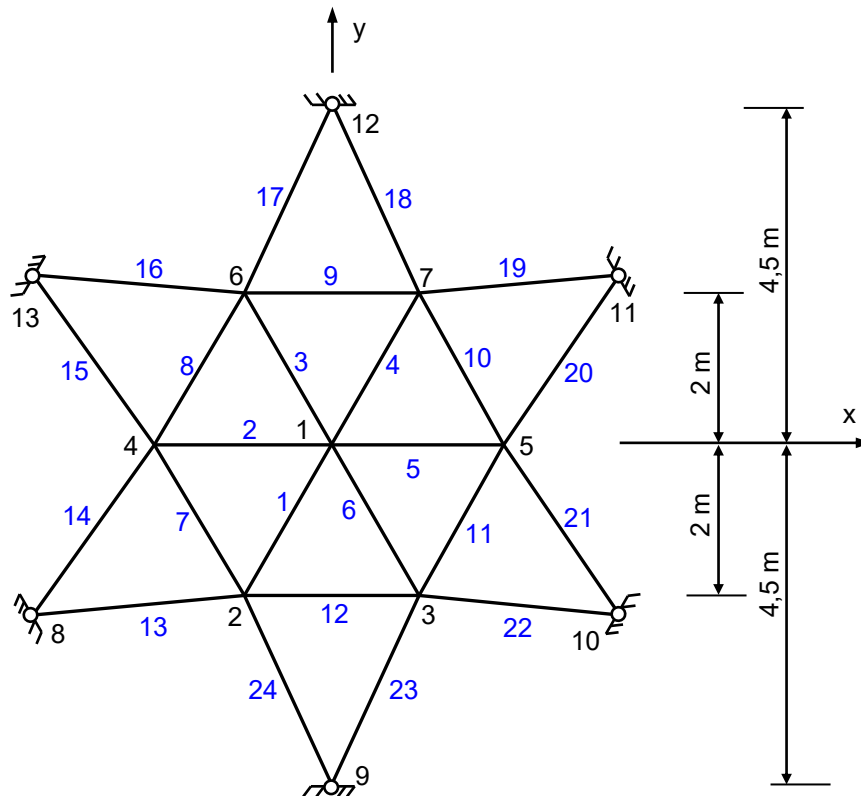
2. Bezpośrednie obciążenie ciągłych napinających może być korzystne ze względu na możliwość zastosowania znacznie mniejszego wstępnego napięcia ustroju. Dowolnie duże obciążenie będzie wywoływało wówczas w tych cięgnach siły rozciągające, natomiast w przypadku obciążenia węzłowego lub obciążenia działającego na cięgna nośne może nastąpić – przy odpowiednio dużym obciążeniu - „wyzerowanie” sił w cięgnach napinających. Potrzebę mniejszego wstępnego napięcia siatki w przypadku działania obciążenia na cięgna napinające można też uzasadnić tym, że tak obciążone cięgna mają mniejszą sztywność na rozciąganie niż np. prostoliniowe elementy napinające w przypadku obciążenia węzłowego. Mniejsza zaś sztywność ciągłych napinających powoduje mniejsze w nich spadki sił pod wpływem obciążenia zewnętrznego.

3. Wpływ rodzaju obciążenia na siły i przemieszczenia siatki ciągłowej zmniejsza się wraz z gęstością siatek i zwiększeniem wstępnego napięcia. W praktyce należy tak dobrać wstępne napięcie siatki, aby pod wpływem najbardziej niekorzystnego obciążenia nie doszło do „wyzerowania” sił w cięgnach napinających.

6.3. Siatka cięgnowa – zakres sprężysto-plastyczny

Przykład 1

W przykładzie tym przedstawiono wyniki obliczeń płaskiej siatki cięgnowej o układzie cięgien jak na rys. 6.4., obciążonej siłami skupionymi przyłożonymi we wszystkich węzłach (poza węzłami podporowymi). Obliczenia przeprowadzono z uwzględnieniem sprężysto-plastycznej i liniowo sprężystej zależności $\sigma - \varepsilon$ cięgien.



Rys. 6.4. Geometria rozważanej siatki cięgnowej

Początkowe współrzędne węzłów siatki zestawiono w tabelicy 6.4. Do obliczeń przyjęto następujące dane :

- pole przekroju cięgien brzegowych $3A = 2,838 \text{ cm}^2$,
- pole przekroju pozostałych cięgien $A = 0,946 \text{ cm}^2$ (przekrój badanej liny),
- początkowe siły w elementach cięgien są równe zero (siatka bez wstępnego napięcia).

Obliczenia przeprowadzono dla trzech różnych faz pracy ustroju :

- fazy montażu (obciążenie ciężarem własnym $P = 5 \text{ kN}$),
- fazy eksploatacji (obciążenie całkowite $P + Q = 50 \text{ kN}$),
- fazy odciążenia (obciążenie ciężarem własnym $P = 5 \text{ kN}$).

Nieliniową zależność $\sigma - \varepsilon$ dla sprężysto-plastycznego zakresu obliczeń określono na podstawie badań doświadczalnych (2.1). Stały współczynnik sprężystości $E = 170 \text{ GPa}$ obowiązuje w przypadku odciążenia i ponownego obciążenia ustroju oraz dla obliczeń w zakresie liniowo sprężystym.

Tablica 6.4. Początkowe współrzędne węzłów siatki [m]

Numer węzła	Współrzędne [m]		
	x	y	z
1	0	0	0
2	-1,1547	-2	0
3	1,1547	-2	0
4	-2,3094	0	0
5	2,3094	0	0
6	-1,1547	2	0
7	1,1547	2	0
8	-3,8971	-2,25	0
9	0	-4,5	0
10	3,8971	-2,25	0
11	3,8971	2,25	0
12	0	4,5	0
13	-3,8971	2,25	0

W tablicy 6.5. zestawiono wartości pionowych przemieszczeń węzłowych w różnych fazach pracy ustroju w zakresie sprężysto-plastycznym i liniowo sprężystym (liczby w nawiasach). Poziome przemieszczenia węzłów pominięto ze względu na niewielkie wartości .

Tablica 6.5. Pionowe przemieszczenia węzłów siatki [cm]

Numer węzła	Przemieszczenie w [cm]		
	Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia
1	-23,6 (-22,6)	-52,6 (-48,8)	-30,3 (-22,6)
2	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)
3	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)
4	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)
5	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)
6	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)
7	-17,1 (-16,4)	-37,7 (-35,3)	-21,4 (-16,4)

Wartości sił osiowych w elementach ciągów pokazano w tabelicy 6.6. Liczby w nawiasach dotyczą obliczeń w zakresie liniowo sprężystym.

Tablica 6.6. Siły osiowe w elementach siatki [kN]

Nr elementu	Siła S [kN]		
	Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia
1,2,3,4,5,6	29,6 (31,1)	131,5 (143,6)	21,6 (31,1)
7,8,9,10,11,12	24,4 (25,3)	111,2 (116,2)	21,5 (25,3)
13 ÷ 24	46,9 (49,0)	213,9 (228,5)	37,6 (49,0)

Na podstawie prezentowanych wyników tego przykładu liczbowego można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Maksymalne wartości pionowych przemieszczeń węzłowych obliczone w zakresie sprężystym i niesprężystym różnią się od siebie o około 7% (48,8 cm i 52,6 cm). Bardziej istotne różnice pojawiają się na etapie odciążenia ustroju; siatka obliczana w zakresie niesprężystym cechuje się odkształceniami trwałymi, przy czym największa wartość tego rodzaju odkształcenia (w węźle 1) wynosi 6,7 cm.
2. Maksymalne wartości sił w środkowych elementach siatki obliczane w zakresie sprężystym i niesprężystym różnią się od siebie o około 9% (143,6 kN i 131,5 kN). Większe różnice – podobnie jak w przypadku przemieszczeń węzłowych – występują na etapie odciążenia ustroju (31,1 kN i 21,6 kN). Sprężysto-plastyczne właściwości materiału i związane z nimi wydłużenia lin pod wpływem obciążenia przyczyniają się więc do dość istotnego spadku początkowych wartości sił w ciągach.

Przykład 2

Do rozważań przyjęto siatkę ciągnową leżącą w poziomej płaszczyźnie xy (rys. 6.5.). Obliczenia przeprowadzono dla następujących danych :

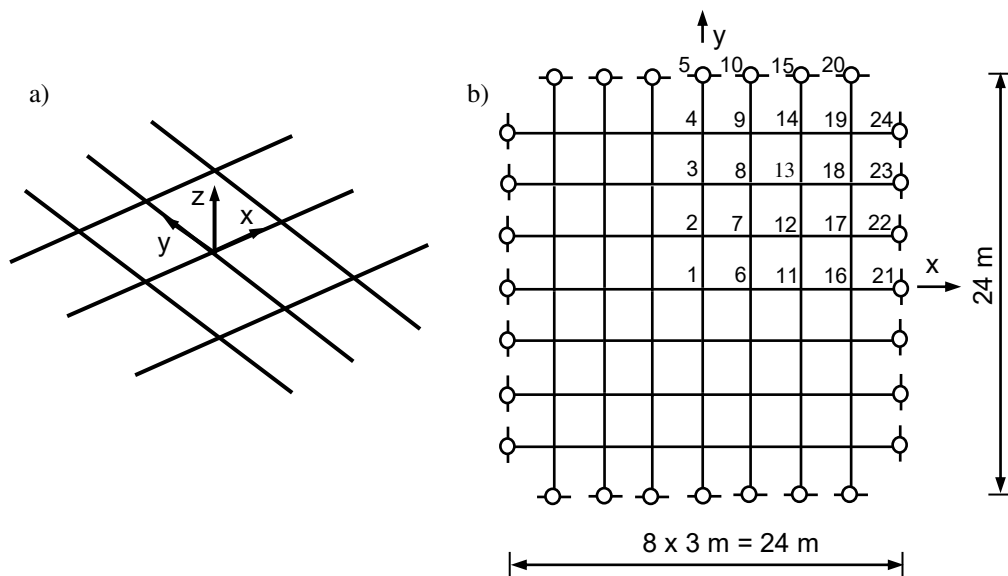
- przekrój elementów siatki $A = 0,946 \text{ cm}^2$ (przekrój badanej liny),
- obciążenie ciągłe działa bezpośrednio na ciągną równoległe do osi x ,
- siły w elementach siatki w stanie początkowym są równe zeru (siatka bez wstępnego napięcia).

Analizę przyjętej siatki ciągnowej przeprowadzono z uwzględnieniem sprężysto-plastycznej zależności $\sigma - \varepsilon$ ciągów. Obliczenia wykonano dla trzech różnych faz pracy siatki ciągnowej:

- fazy montażu (obciążenie ciężarem własnym $g = 0,1 \text{ kN/m}$),

- fazy eksploatacji (obciążenie całkowite $p = (g + q) = 3 \text{ kN/m}$),
- fazy odciążenia (obciążenie ciężarem własnym $g = 0,1 \text{ kN/m}$).

Nieliniową zależność $\sigma - \varepsilon$ materiału cięgien określono na podstawie badań laboratoryjnych (2.1), w wypadku odciążenia i ponownego obciążenia ustroju przyjęto stały współczynnik sprężystości $E = 170 \text{ GPa}$ (także określony na podstawie badań laboratoryjnych).



Rys. 6.5. Siatka cięgnowa przyjęta do analizy : a) widok ogólny, b) rzut poziomy siatki

Dla celów porównawczych przeprowadzono także obliczenia z uwzględnieniem liniowo sprężystej zależności $\sigma - \varepsilon$, przyjmując stały współczynnik sprężystości $E = 170 \text{ GPa}$ i całkowite obciążenie o wartości $p = 3 \text{ kN/m}$ (wydruki wyników tego przykładu uzyskane za pomocą programu NET1 zamieszczono w załączniku).

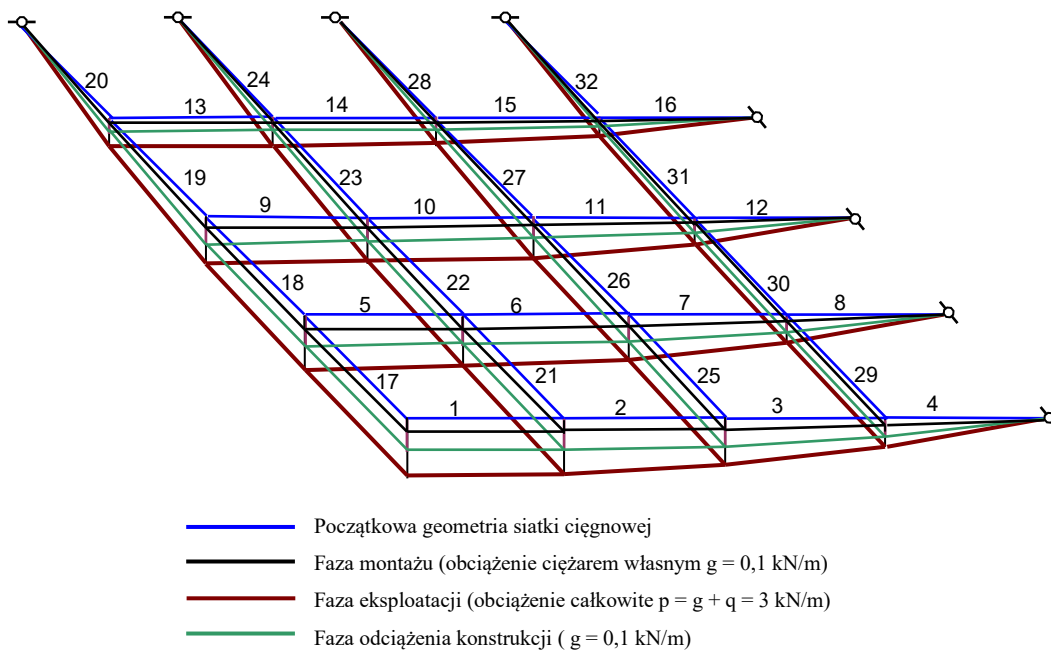
Uzyskane z rozwiązania wartości pionowych przemieszczeń węzłowych w różnych fazach pracy siatki w zakresie sprężysto-plastycznym przedstawiono w tabelicy 6.7, natomiast wartości sił w elementach cięgien – w tabelicy 6.8. Fragment odkształconej siatki cięgnowej pokazano na rys. 6.6. Pominięto poziome przemieszczenia węzłów ze względu na niewielkie wartości.

Tablica 6.7. Pionowe przemieszczenia węzłowe [cm]

Numer węzła	Przemieszczenie w [cm]			Numer węzła	Przemieszczenie w [cm]		
	Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia		Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia
1	-39,7	-129,1	-61,7	13	-26,3	-85,6	-40,4
2	-37,8	-122,9	-59,2	14	-17,3	-56,3	-26,3
3	-31,5	-102,3	-49,4	15	0,0	0,0	0,0
4	-19,4	-62,6	-30,5	16	-19,3	-62,4	-29,4
5	0,0	0,0	0,0	17	-18,9	-61,1	-29,3
6	-37,8	-122,8	-58,5	18	-17,3	-56,2	-26,3
7	-36,1	-117,3	-56,3	19	-12,7	-42,4	-19,4
8	-30,4	-98,6	-47,3	20	0,0	0,0	0,0
9	-18,9	-61,3	-29,5	21	0,0	0,0	0,0
10	0,0	0,0	0,0	22	0,0	0,0	0,0
11	-31,5	-102,2	-48,3	23	0,0	0,0	0,0
12	-30,4	-98,5	-47,0	24	0,0	0,0	0,0

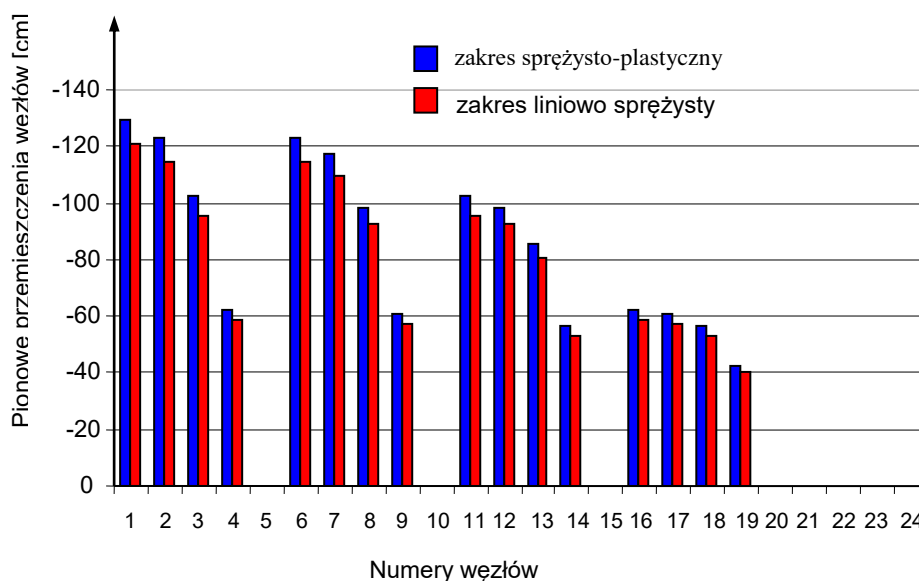
Tablica 6.8. Siły w elementach siatki [kN]

Numer elementu	Siła S [kN]			Numer elementu	Siła S [kN]		
	Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia		Faza montażu	Faza eksploatacji	Faza odciążenia
1	12,0	109,8	8,5	17	11,7	107,0	6,9
2	12,0	110,1	8,5	18	11,7	107,4	6,9
3	12,0	110,9	8,5	19	11,7	108,2	6,9
4	12,1	112,4	8,6	20	11,7	109,6	7,0
5	11,3	103,7	6,8	21	11,0	100,4	6,9
6	11,3	104,0	6,8	22	11,0	100,7	6,9
7	11,3	104,8	6,8	23	11,0	101,4	6,9
8	11,3	106,2	6,9	24	11,0	102,8	6,9
9	9,2	84,1	6,2	25	8,7	78,3	6,0
10	9,2	84,3	6,2	26	8,7	78,5	6,0
11	9,2	84,9	6,2	27	8,7	79,0	6,1
12	9,3	86,1	6,3	28	8,7	80,2	6,1
13	6,2	54,0	4,0	29	4,8	38,5	3,2
14	6,2	54,0	4,0	30	4,8	38,5	3,2
15	6,2	54,0	4,0	31	4,8	38,6	3,2
16	6,2	54,6	4,0	32	4,8	39,1	3,2

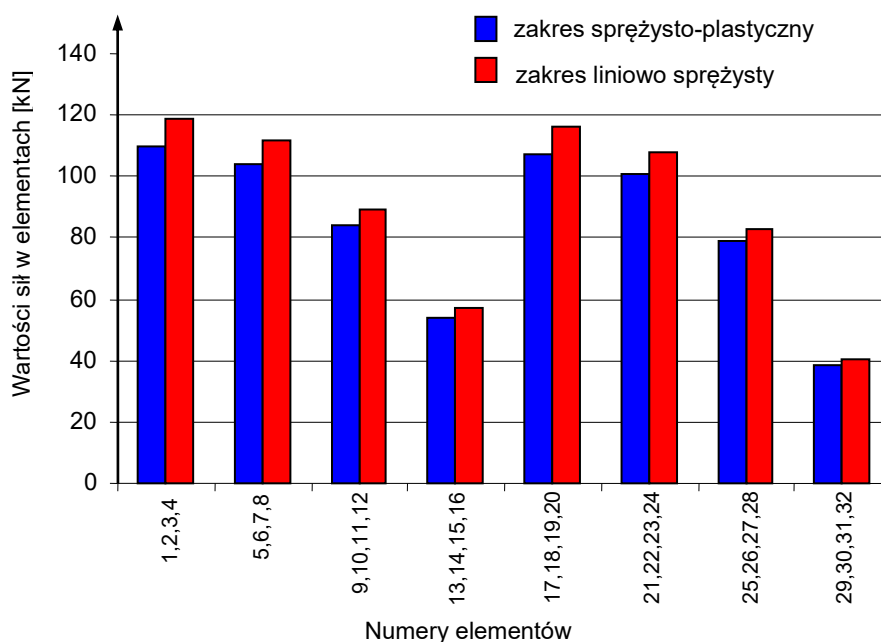


Rys. 6.6. Fragment odkształconej siatki cięgnowej

Różnice w pracy siatki cięgnowej w zakresie sprężystym i niesprężystym pokazano w sposób poglądowy na rys. 6.7. (pionowe przemieszczenia węzłów) i na rys. 6.8. (siły w elementach), przy czym z uwagi na niewielkie różnice w wartościach sił w poszczególnych elementach cięgien (np. w elementach 1, 2, 3, 4) ograniczono się na rys. 6.8. do analizy porównawczej dla całych cięgien.



Rys. 6.7. Pionowe przemieszczenia węzłów dla liniowo sprężystej i sprężysto-plastycznej pracy ustroju



Rys. 6.8. Wartości sił w elementach cięgien dla liniowo sprężystej i sprężysto-plastycznej pracy ustroju

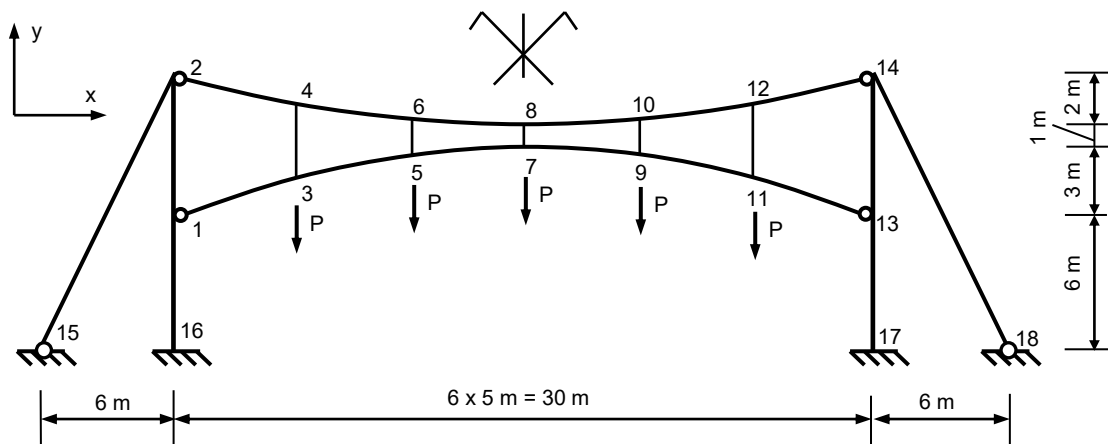
Prezentowane w obu przykładach wyniki wskazują na dość znaczące różnice między rozwiązaniami dla przypadku liniowo sprężystego a sprężysto-plastycznego prawa materiałowego. Pierwszy wariant cechują mniejsze przemieszczenia i większe siły w elementach cięgien, drugi zaś – większe przemieszczenia i mniejsze siły w cięgnach. Wariant sprężysto-plastyczny charakteryzuje się ponadto trwałymi (plastycznymi) przemieszczeniami węzłów, które nie znikają po usunięciu obciążenia. Fakt ten może w istotny sposób wpłynąć na końcową geometrię siatki cięgnowej, która może odbiegać od założeń projektowych. Oprócz większych przemieszczeń innym niekorzystnym zjawiskiem w przypadku sprężysto-plastycznych właściwości cięgien jest także spadek sił od wstępnego napięcia ustroju.

Na podstawie wyników prezentowanej analizy statycznej można wyciągnąć wniosek praktyczny, że przyjmowanie normowego, tj. stałego współczynnika sprężystości do obliczeń jest uzasadnione, gdy wszystkie liny w danej konstrukcji będą użyte po wstępnym ich przeciągnięciu. W przypadku użycia lin nowych, należy posługiwać się doświadczalną krzywą $\sigma - \varepsilon$, pozwalającą na stosunkowo dokładne odtworzenie rzeczywistego stanu sił i przemieszczeń ustroju cięgnowego.

6.4. Ustroje ciągnowo-belkowe

Przykład 1

W celu potwierdzenia przydatności praktycznej programu NET2 służącego do analizy statycznej układów ciągnowo-belkowych (siatek ciągnowych współpracujących z belką brzegową) obliczono płaski dźwigar ciągnowy (tzw. kratownicę *Jawertha*). Obliczenia, dla porównania, wykonano w dwóch wariantach: przy założeniu, że konstrukcja wsporcza jest nieodkształcalna oraz przy uwzględnieniu podatności konstrukcji wsporczej. Ogólny widok ustroju pokazano na rys. 6.9. ,a początkowe współrzędne węzłów dźwigara zestawiono w tabelicy 6.9.



Rys. 6.9. Dźwigar ciągnowy

Tablica 6.9. Początkowe współrzędne węzłów ustroju [m]

Numer węzła	x	y
1	0	0
2	0	6
3	5	1,667
4	5	4,889
5	10	2,667
6	10	4,222
7	15	3
8	15	4
15	-6	-6
16	0	-6

Obliczenia przeprowadzono przy założeniu stałego współczynnika sprężystości $E = 170$ GPa dla elementów dźwigara i $E = 205$ GPa dla konstrukcji wsporczej. Przyjęto następujące charakterystyki wytrzymałościowe elementów ustroju :

- ciągnio nośne $A = 10,58 \text{ cm}^2$,
- ciągnio napinające i wieszaki $A = 5,88 \text{ cm}^2$,
- odciągi $A = 14 \text{ cm}^2$,
- słupy : $A = 218 \text{ cm}^2$, $I_x = 79890 \text{ cm}^4$.

Wstępne napięcie ustroju jest realizowane poprzez skrócenie wszystkich wieszaków o 17 cm . Obciążenie w postaci sił skupionych $P = 8 \text{ kN}$ przyłożono w dolnych węzłach dźwigara.

Wyniki obliczeń z założoną dokładnością rozwiązania uzyskano w siódmym przybliżeniu. Siły wewnętrzne w elementach cięgien dźwigara dla dwóch wariantów obliczeń zestawiono w tabelicy 6.10, w tabelicy 6.11 pokazano analogicznie siły wewnętrzne w elementach konstrukcji wsporczej.

Tabela 6.10. Zestawienie sił osiowych w elementach cięgien dźwigara

element	Siła S [kN]	
	Konstrukcja wsporcza	Konstrukcja wsporcza
	niepodatna	podatna
3-4	26,8	10,3
5-6	23,8	9,8
7-8	23,8	9,8
9-10	23,8	9,8
11-12	26,8	10,3
1-3	128,5	15,5
3-5	123,4	14,8
5-7	121,4	14,6
7-9	121,4	14,6
9-11	123,4	14,8
11-13	128,5	15,5
2-4	268,3	105,8
4-6	263,4	103,8
6-8	261,3	102,9
8-10	261,3	102,9
10-12	263,4	103,8
12-14	268,3	105,8

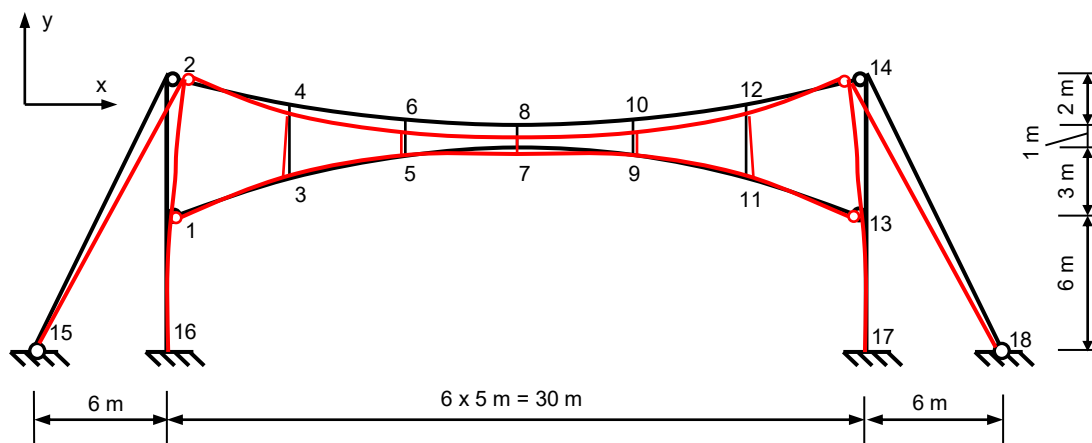
Tablica 6.11. Zestawienie sił wewnętrznych w elementach konstrukcji wsporczej

element	Siły normalne [kN]		Momenty zginające [kNm]	
	Konstr. wsporcza niepodatna	Konstr. wsporcza podatna	Konstr. wsporcza niepodatna	Konstr. wsporcza podatna
1-2	-622,0	-212,7	110,6	-18,9
1-16	-579,3	-208,9	-507,1	-103,9
2-15	625,3	211,2	-	-

Przemieszczenia węzłowe ustroju pokazano w tablicy 6.12, dodatkowo na rys. 6.10. przedstawiono odkształcony dźwigar dla podatnej konstrukcji wsporczej.

Tablica 6.12. Przemieszczenia węzłów [cm]

Numer węzła	Przemieszczenie poziome u [cm]		Przemieszczenie pionowe v [cm]	
	Konstr. wsporcza niepodatna	Konstr. wsporcza podatna	Konstr. wsporcza niepodatna	Konstr. wsporcza podatna
1	0,0	0,83	0,0	-0,03
2	0,0	2,32	0,0	-0,06
3	-1,96	-1,28	8,33	6,47
4	-1,20	0,20	-8,56	-10,49
5	-0,80	-0,20	6,55	1,46
6	-0,70	-0,21	-10,40	-15,52
7	0,0	0,0	5,93	-0,27
8	0,0	0,0	-11,04	-17,26
9	0,80	0,20	6,55	1,46
10	0,70	0,21	-10,40	-15,52
11	1,96	1,28	8,33	6,47
12	1,20	-0,20	-8,56	-10,49
13	0,0	-0,83	0,0	-0,03
14	0,0	-2,32	0,0	-0,06



Rys. 6.10. Widok odkształconego dźwigara ciągnowego z podatną konstrukcją wsporczą

Wyniki obliczeń potwierdzają wnioski sformułowane np. w pracach [5,12,32], że istnieją duże różnice w pracy ustroju w przypadku nieodkształcalnej lub odkształcalnej konstrukcji wsporczej. W rozpatrywanym tu przykładzie różnice wyników otrzymanych dla wariantu nieodkształcalnej konstrukcji wsporczej w stosunku do wyników dla wariantu konstrukcji wsporczej odkształcalnej są następujące:

- przemieszczenia węzłów dźwigara ciągnowego są około 50 % mniejsze,
- momenty zginające w konstrukcji wsporczej mają wartość przeszło 5-krotnie większą,
- siły w elementach ciągnię są większe o ponad 50 %.

Konstrukcje ciągnowe współpracujące z odkształcalną konstrukcją wsporczą należy więc zawsze obliczać z uwzględnieniem wpływu przemieszczeń podpór na wielkości sił wewnętrznych w ustroju. Nieuwzględnienie tego wpływu zmienia obraz pracy konstrukcji, ale przede wszystkim prowadzi do nieekonomicznego projektowania zarówno elementów ciągnię, jak i samej konstrukcji wsporczej.

Przykład 2

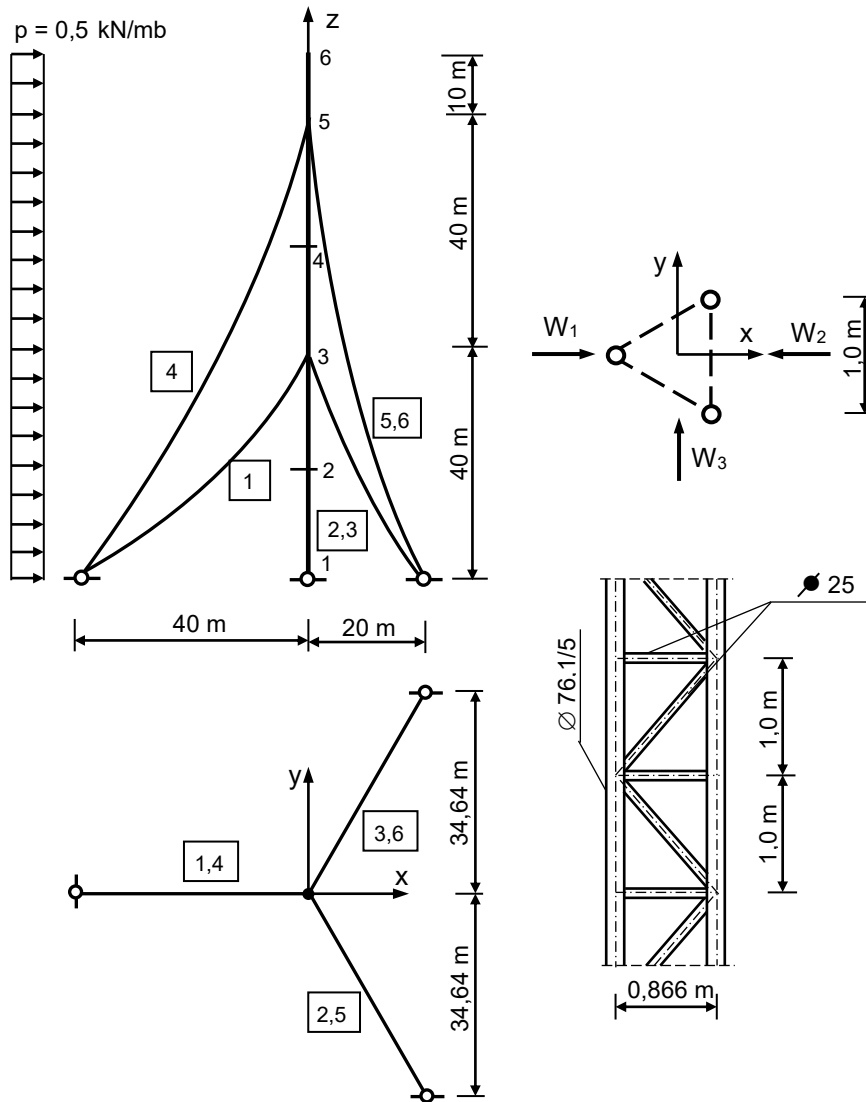
Przedmiotem analizy jest trójścienny maszt z dwoma poziomami odciągów przedstawiony na rys. 6.11. Wymiary tego masztu tak dobrano, żeby (dla przyjętego i zbliżonego do rzeczywistego obciążenia wiatrem) na jego odciągi można było zastosować badaną linę T 1x19 o średnicy nominalnej 12,8 mm i nośności rzeczywistej $N_{rz} = 176,6$ kN. Przyjęto więc, że w przypadku obciążenia odciągu ważna jest zależność

(2.1), a w przypadku jego odciażenia obowiązuje liniowo sprężysta zależność $\sigma - \varepsilon$ ze stałym współczynnikiem sprężystości $E = 170 \text{ GPa}$.

Skratowany trzon masztu jest aproksymowany belką (prętem) o sztywności na ściskanie, zginanie i ścinanie. Do analizy masztu przyjęto następujące dane liczbowe:

sztywność trzonu masztu na ściskanie $EA = 688800 \text{ kN}$,

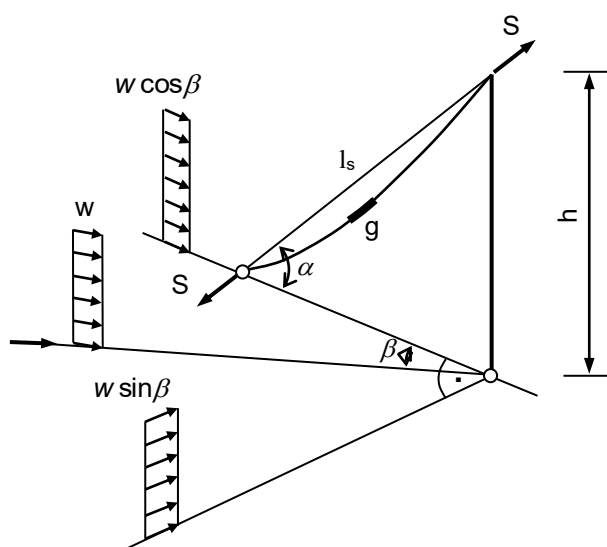
- sztywność na zginanie $EI_x = EI_y = 114800 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$,
- sztywność na ścinanie $GA_x = GA_y = 53505 \text{ kN}$,
- ciężar własny odciażu $g = 0,01 \text{ kN/m}$,
- parcie wiatru na trzon masztu $p = 0,5 \text{ kN/m}$,
- parcie wiatru na odciaży $w = 0,015 \text{ kN/m}$.



Rys. 6.11. Maszt trójścienny przyjęty do analizy

Bliższego wyjaśnienia wymaga sprawa obciążenia odciągów masztu. Zgodnie z projektem normy masztowej (*PrPN-B-03204: Konstrukcje stalowe. Wieże i maszty. Projektowanie i wykonanie*) różne rodzaje obciążeń działające na odciąg (ciężar własny, ciężar szadzi, obciążenie wiatrem) można zastąpić jednym rodzajem obciążenia równomiernie rozłożonego, prostopadłego do cięciwy odciążu. Obciążenie wiatrem jest szczególnie istotne w przypadku małej średnicy odciągów, ponieważ – jak można zauważyć – obciążenie to jest proporcjonalne do średnicy odciążu, a jego ciężar - do kwadratu średnicy.

Obciążenie wiatrem odciążu można szczególnie łatwo tylko wtedy uwzględnić, gdy kierunek parcia wiatru leży w płaszczyźnie początkowego zwisu odciążu, albo gdy jest do tej płaszczyzny prostopadły. W przypadku rozważanego odciążu trójściennego sytuacja taka nigdy jednak nie występuje. W celu określenia wartości parcia wiatru na cięciwę odciążu należy tu skorzystać z nieco bardziej złożonej transformacji.



Rys. 6.12. Odciąg masztu pod wpływem złożonego stanu obciążenia

Załóżmy, że kierunek parcia wiatru tworzy z początkową płaszczyzną zwisu odciążu kąt β i że wartość parcia wiatru na tym kierunku na odciąg usytuowany pionowo wynosi w (rys. 6.12). Rozkładając następnie obciążenie w na składowe w płaszczyźnie odciążu i w płaszczyźnie do niej prostopadłej można dość łatwo dodać te składowe do składowej od ciężaru własnego. Po wykonaniu odpowiedniego geometrycznego sumowania otrzymuje się wzór na wypadkowe obciążenie q działające prostopadle do cięciwy odciążu

$$q = \sqrt{(w \sin \beta)^2 + (g \cos \alpha + w \sin^2 \alpha \cos \beta)^2}. \quad (6.1)$$

Wzór (6.1) jest ważny dla dowolnego kąta $0 \leq \beta \leq 180^\circ$. Wartość zaś kąta α nie powinna być większa niż 60° . Ten drugi warunek jest praktycznie zawsze spełniony, gdyż w wypadku masztów zaleca się żeby $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$.

Na podstawie analizy wzoru (6.1) można wykazać, że obciążenie wiatrem odciągów jest bardzo zróżnicowane i na niektóre z nich wiatr działa dociążająco, na inne zaś odciążająco.

Równanie cięgna, z którego można wyznaczyć wartość siły S w odciągu ma w tym przypadku prostą postać (por. (3.4)).

$$S^3 + S^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_0} (l_s - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA q^2 l_s^3}{24 s_0}, \quad (6.2)$$

gdzie wartość q jest określona wzorem (6.1).

Obliczenia statyczne masztu wykonano z uwzględnieniem sprężysto-plastycznych i – dla porównania – liniowo sprężystych właściwości odciągów. Wstępne sprężenie masztu zrealizowano wskutek odpowiedniego skrócenia odciągów (wskutek przyjęcia we wzorze (6.2) odpowiedniej wartości s_0 mniejszej od cięciwy odciągu). W celu wykazania wpływu wstępnego sprężenia na statyczną pracę masztu przyjęto dwa różne stany wstępnego sprężenia. W pierwszym stanie wartości sił we wszystkich odciągach masztu były równe $S_0 = 10$ kN, a w drugim – $S_0 = 50$ kN. Podane wartości sił na etapie wstępnego sprężenia masztu dotyczyły obliczeń zarówno z uwzględnieniem sprężysto-plastycznych, jak i liniowo sprężystych właściwości materiału. Jest więc rzeczą oczywistą, że wartości te uzyskano przy różnych wartościach skróceń odciągów. Na przykład uzyskanie w przypadku sprężysto-plastycznych właściwości materiału siły wstępnego sprężenia w górnym odciągu równej 50 kN wymagało skrócenia g_0 o wartość 20,1 cm, a w przypadku liniowo sprężystych właściwości materiału wymagane skrócenie odciągu wynosiło tylko 16,5 cm

Wybrane wyniki obliczeń masztu poddanego przyjętemu obciążeniu zestawiono w tablicach 6.13 i 6.14. W tablicach tych uwzględniono tylko dwa kierunki obciążenia masztu. Kierunek W_1 (rys. 6.11), na którym rozpatrywany maszt ma największą

szywność oraz kierunek W_2 , na którym maszt ma szywność najmniejszą. W prezentowanych wynikach pominięto ponadto wartości sił wewnętrznych w trzonie masztu, ponieważ właściwości lin odciągowych nie mają istotnego wpływu na różnice w tych siłach (te same praktycznie wartości sił wewnętrznych występują w maszcie mniej lub nieco bardziej przechylonym).

Tablica 6.13. Wyniki analizy statycznej masztu (wstępne sprężenie $S_0 = 10$ kN)

Rodzaj obciążenia		Przemieszczenia poziome [cm]			Siły w odciągach [kN]			
		Nr węzła			Nr odciagu			
		3	5	6	1	2	4	5
$W_1 = 0,5$ kN/m	zakres sprężysty	15,1	37,7	41,6	41,8	6,1	42,2	8,6
	zakres spręż.-plast.	18,9	46,9	52,3	41,0	5,4	41,3	7,9
$W_2 = 0,5$ kN/m	zakres sprężysty	-24,9	-60,5	-67,9	0,8	36,3	3,4	36,5
	zakres spręż.-plast.	-37,2	-77,6	-87,5	0,7	36,2	3,1	36,3

Tablica 6.14. Wyniki analizy statycznej masztu (wstępne sprężenie $S_0 = 50$ kN)

Rodzaj obciążenia		Przemieszczenia poziome [cm]			Siły w odciągach [kN]			
		Nr węzła			Nr odciagu			
		3	5	6	1	2	4	5
$W_1 = 0,5$ kN/m	zakres sprężysty	11,3	26,8	28,7	73,7	38,0	72,5	39,1
	zakres spręż.-plast.	13,8	32,5	35,3	72,5	37,5	71,6	38,5
$W_2 = 0,5$ kN/m	zakres sprężysty	-11,4	-26,9	-28,8	26,0	68,6	27,8	61,2
	zakres spręż.-plast.	-13,5	-31,8	-34,5	26,5	62,0	28,8	62,0

Wybrane wyniki analizy cechujące maszt po każdorazowym odciążeniu parciem wiatru przedstawiono w tablicy 6.15. W tablicy tej uwzględniono tylko przypadek sprężysto-plastycznych właściwości odciągów, ponieważ zakres liniowo sprężysty cechuje się powrotem do stanu wyjściowego przed obciążeniem. Podane w tablicy wartości u dotyczą przemieszczeń trwałych węzła 5, a wartości S dotyczą sił w górnych odciągach masztu.

Tablica 6.15. Wartości u oraz S po odciążeniu

Kierunek odciążenia		Przemieszczenie u [cm]	Siła S [kN]
W_1	Sprężenie $S_0 = 10$ kN	8,0	4,7
	Sprężenie $S_0 = 50$ kN	4,3	45,5
W_2	Sprężenie $S_0 = 10$ kN	7,5	5,5
	Sprężenie $S_0 = 50$ kN	3,9	46,5

Na podstawie prezentowanych wyników można wyciągnąć kilka wniosków praktycznych.

1. Maszt z odciągami o charakterystyce sprężysto-plastycznej charakteryzuje się większymi przemieszczeniami węzłów niż maszt o charakterystyce liniowo sprężystej, przy czym im większe wstępne sprężenie masztu, tym różnice te są mniejsze. Wartości sił w odciągach masztu w małym jednak stopniu zależą od fizycznych cech odciągów i zarówno dla odciągów o charakterystyce sprężystej, jak i niesprężystej są praktycznie biorąc jednakowe.

2. Maszt z odciągami o charakterystyce sprężysto-plastycznej charakteryzuje się po odciążeniu przemieszczeniami trwałymi, których wartość jest tym większa, im wstępne sprężenie masztu jest mniejsze. Oznacza to, że maszt z odciągami o charakterystyce sprężysto-plastycznej nie powraca do pionu po usunięciu obciążenia, ale pozostaje w pozycji lekko przechylonej (por. tabl. 6.15). Zjawisko to jest w ogólności niekorzystne, ponieważ prowadzi do spadku sił w odciągach, tj. do zmniejszenia sztywności masztu, a więc do niekorzystnej zmiany warunków określających stateczność trzonu masztu. Zmniejszenie sztywności masztu może też wywołać niekorzystne zmiany w jego charakterystyce dynamicznej; może np. wpływać na częstotliwości drgań własnych masztu od których zależy wartość obciążenia wiatrem. To niekorzystne zjawisko trwałych odkształceń masztu można jednak w dużym stopniu zredukować poprzez zwiększenie wstępnego napięcia odciągów (por. tabl. 6.15).

3. Różnica między siłami w odciągach na etapie wstępnego sprężenia i na etapie obciążenia (dotyczy to zarówno stanu sprężystego, jak i niesprężystego) jest tym większa, im wstępne sprężenie masztu jest mniejsze. Większe wstępne sprężenie masztu jest więc w ogólności korzystne, ponieważ zwiększa jego sztywność, a tylko w niedużym stopniu wpływa na wzrost sił normalnych w trzonie masztu. To ciekawe zjawisko ma stosunkowo proste uzasadnienie. W wypadku małego wstępnego napięcia

odciągów obciążenie poziome działające na trzon masztu jest równoważone głównie siłami w odciągach od strony nawietrznej. Powoduje to znaczny przyrost sił w tych odciągach, a więc także znaczne przyrosty sił ściskających w trzonie masztu. W wypadku dużego wstępnego napięcia odciągów w przenoszeniu obciążenia poziomego biorą udział także odciągi od strony zawietrznej, a przyrosty i ubytki sił w odciągach, po obu stronach masztu, są w przybliżeniu jednakowe, co w efekcie nie powoduje istotnego zwiększenia sił normalnych w trzonie masztu.

4. W przypadku małego wstępnego sprężenia masztu jego sztywność w dużym stopniu zależy od kierunku obciążenia wiatrem, przy czym dla kierunku W_1 sztywność masztu jest wtedy największa, a dla kierunku W_2 najmniejsza. W przypadku zaś dużego wstępnego sprężenia masztu (por. tabl. 6.14) sztywność masztu na obu kierunkach obciążeń (ogólnie: na dowolnym kierunku obciążenia) jest praktycznie jednakowa.

7. Uwagi końcowe

W pracy zostały przedstawione wybrane zagadnienia dotyczące analizy statycznej ustrojów ciągnowych, ze szczególnym uwzględnieniem sprężysto-plastycznych właściwości cięgien. Wyniki przeprowadzonych obliczeń konstrukcji ciągnowych pozwoliły na sformułowanie wniosków i zaleceń, które mogą być przydatne w praktyce inżynierskiej.

1. Przeprowadzone przez autorkę badania doświadczalne wybranej liny spiralnej potwierdziły znany w ogólności fakt niesprężystego zachowania się lin podczas rozciągania. Stały (normowy) współczynnik sprężystości E można stosować dopiero po wstępnym (najlepiej kilkukrotnym) przeciągnięciu liny. Przyjmowanie do obliczeń normowego współczynnika E wymaga jednak pewnej ostrożności, ponieważ współczynnik ten – co wykazały przeprowadzone badania – w dość dużym stopniu zależy nie tylko od rodzaju liny, ale także od jej średnicy (od liczby drutów w linie), czego nie uwzględniają wytyczne normowe. Liny o niedużej liczbie drutów (badana lina składała się tylko z 19 drutów $\varnothing 2,5$ mm) mają współczynnik sprężystości większy, a liny o dużej liczbie drutów – mniejszy.

2. Najprostszy, dyskretny model obliczeniowy ustroju, oparty na założeniu, że elementy łączące sąsiednie węzły są odcinkami prostymi, jest ważny w przypadku rzeczywistego obciążenia węzłowego lub obciążenia ciągłego, ale działającego na ciągną nośną. Zastępowanie natomiast obciążenia działającego bezpośrednio na ciągną napinającą obciążeniem węzłowym może prowadzić do błędnych wyników i w związku z tym w ogólności nie powinno być stosowane. Zagadnienie sposobu przekazywania ciężaru pokrycia na elementy cięgien jest z praktycznego punktu widzenia ważne. W przypadku bezpośredniego obciążenia cięgien nośnych wymagane jest większe wstępne napięcie siatki ciągnowej, ale stan sił i przemieszczeń ustroju może być łatwo określony za pomocą prostoliniowych elementów dwuwęzłowych. Bezpośrednie obciążenie cięgien napinających jest natomiast korzystne z uwagi na możliwość zastosowania mniejszego napięcia siatki, ale przy takim obciążeniu wymagane jest uwzględnienie w obliczeniach elementów krzywoliniowych lub przyjęcie dodatkowych węzłów wewnątrz prostoliniowych elementów cięgien napinających.

3. Na stan sił i przemieszczeń ustrojów ciągnowych w dużym stopniu ma wpływ przyjęte prawo materiałowe. W wypadku przyjęcia liniowo sprężystej zależności $\sigma - \epsilon$

ciągów rozwiązywany ustrój charakteryzuje się mniejszymi przemieszczeniami i większymi siłami w cięgnach, natomiast w wypadku założenia sprężysto-plastycznej zależności $\sigma - \varepsilon$ występuje odwrotne zjawisko; ustrój charakteryzuje się większymi przemieszczeniami i mniejszymi siłami w cięgnach. Występują tu ponadto trwałe przemieszczenia węzłów, które nie znikają po usunięciu obciążenia. Przemieszczenia te są na ogół niekorzystne, szczególnie w przypadku wstępnego sprężenia ustroju, ponieważ powodują spadek sił w cięgnach i zmieniają konfigurację ustroju. Aby zapobiec temu zjawisku należy przyjąć większe siły wstępnego napięcia lub zastosować zakotwienia z możliwością regulacji sił w cięgnach.

4. W praktycznych obliczeniach konstrukcji cięgowych są możliwe dwa różne sposoby postępowania. Konwencjonalny sposób polega na przyjmowaniu do obliczeń stałego (normowego) współczynnika sprężystości E , ale poprawne rozwiązanie można na tej drodze uzyskać tylko w przypadku wstępnego przeciągnięcia wszystkich lin użytych w danej konstrukcji, co na ogół nie jest wykonywane. Drugi sposób postępowania, zaproponowany w pracy, polega na uwzględnieniu w obliczeniach fizycznej nieliniowości cięgien. Nieliniową zależność $\sigma - \varepsilon$ cięgna należy określić na podstawie badań doświadczalnych. W pracy, do obliczeń ustrojów cięgowych z wykorzystaniem doświadczalnej zależności $\sigma - \varepsilon$ cięgien, zastosowano iteracyjną metodę siecznych, za pomocą której można obliczać ustroje złożone z lin nowych (nie przeciągniętych). Należy wyraźnie zaznaczyć, że obliczenia konstrukcji cięgowych złożonych z lin nowych, oparte na przyjmowaniu stałego współczynnika sprężystości E mogą być obarczone poważnym błędem merytorycznym, szczególnie w wypadku stosowania lin wielozwitych, charakteryzujących się dużą wydłużalnością.

5. Ustroje cięgnowe współpracujące z odkształcalną konstrukcją wsporczą należy obliczać z uwzględnieniem wpływu podatności tej konstrukcji na wielkości sił i przemieszczeń w ustroju. Pominięcie tego wpływu jest poważnym błędem, który prowadzi do niewłaściwego określenia obrazu pracy ustroju i nieekonomicznego projektowania zarówno elementów cięgien, jak i samej konstrukcji wsporczej.

6. W przypadku konstrukcji cięgowo-belkowych (np. w masztach z odciągami) istotny problem stanowi uwzględnienie w projektowaniu utraty stateczności ściskanych elementów belkowych, ponieważ decydują one o nośności całej konstrukcji. Innym interesującym zagadnieniem związanym z projektowaniem konstrukcji cięgowych jest ich analiza dynamiczna. Autorka w najbliższej przyszłości ma zamiar czynnie

zaangażować się w rozwiązywanie wymienionych problemów w zakresie tak sprężystym, jak i sprężysto-plastycznym.

Załącznik

- Wydruki danych i wyników obliczeń dla przykładu 6.3. (siatka cięgnowa w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym z uwzględnieniem odciążenia – przykł. 2)

1. Dane wejściowe do obliczeń siatki w zakresie sprężysto-plastycznym obciążonej ciężarem własnym

24 32 16 16 0
1 6 6 11 11 16 16 21 2 7 7 12 12 17 17 22
3 8 8 13 13 18 18 23 4 9 9 14 14 19 19 24
1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8 8 9 9 10
11 12 12 13 13 14 14 15 16 17 17 18 18 19 19 20
0 0 0 0 0 3 3 3 3 3 6 6 6 6 6 9 9 9 9 12 12 12 12
0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9
0
15
1 1 1 0
2 1 0 0
3 1 0 0
4 1 0 0
5 1 1 1
6 0 1 0
10 1 1 1
11 0 1 0
15 1 1 1
16 0 1 0
20 1 1 1
21 1 1 1
22 1 1 1
23 1 1 1
24 1 1 1
0.946 0.946 0.946
0
0
16
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
-0.05 -0.05 -0.05 -0.05 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1 -0.1
-0.1 -0.1 -0.1 -0.1
0
0

0
0.1
8
1 2 3 4 17 18 19 20

2. Wyniki obliczeń

WYNIKI OBLICZEN

PROGRAM NET1

ZAGADNIENIE NIELINIOWE - ZAKRES SPREZYSTO-PLAST.

OBCIAZENIE KONSTRUKCJI CIEZAREM WLASNYM

PRZEMIESZCZENIA WEZLOWE [cm] :

NR WEZLA	U	V	W
1	0.000	0.000	-39.698
2	0.000	0.230	-37.814
3	0.000	0.400	-31.537
4	0.000	0.389	-19.374
5	0.000	0.000	0.000
6	0.229	0.000	-37.790
7	0.213	0.214	-36.108
8	0.164	0.379	-30.397
9	0.077	0.379	-18.946
10	0.000	0.000	0.000
11	0.397	0.000	-31.471
12	0.376	0.164	-30.355
13	0.302	0.303	-26.338
14	0.150	0.333	-17.300
15	0.000	0.000	0.000
16	0.385	0.000	-19.292
17	0.375	0.077	-18.879
18	0.330	0.150	-17.260
19	0.192	0.192	-12.720
20	0.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.000
22	0.000	0.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000
24	0.000	0.000	0.000

SILY WEWNETRZNE W ELEMENTACH CIEGIEN [kN] :

NR ELEMENTU	SILA
1	12.039
2	12.040
3	12.051
4	12.064
5	11.316
6	11.319
7	11.330
8	11.343
9	9.234
10	9.237
11	9.242
12	9.254
13	6.162
14	6.161
15	6.161
16	6.170
17	11.697
18	11.701
19	11.711
20	11.722
21	10.961
22	10.964
23	10.973
24	10.986
25	8.667
26	8.670
27	8.676
28	8.685
29	4.849
30	4.848
31	4.854
32	4.855

DLUGOSC CIEGIEN PO ODKSZTALCENIU [m] :

NR ELEMENTU	DLUGOSC
1	3.002
2	3.002
3	3.002
4	3.002
5	3.002

6	3.002
7	3.002
8	3.002
9	3.002
10	3.002
11	3.002
12	3.002
13	3.001
14	3.001
15	3.001
16	3.001
17	3.002
18	3.002
19	3.002
20	3.002
21	3.002
22	3.002
23	3.002
24	3.002
25	3.002
26	3.002
27	3.002
28	3.002
29	3.001
30	3.001
31	3.001
32	3.001

LICZBA ITERACJI : 9

DOKŁADNOSC ROZWIAZANIA [kN] : 8.845329E-02

3. Dane wejściowe do obliczeń siatki w zakresie sprężysto-plastycznym obciążonej obciążeniem całkowitym

24 32 16 16 0
1 6 6 11 11 16 16 21 2 7 7 12 12 17 17 22
3 8 8 13 13 18 18 23 4 9 9 14 14 19 19 24
1 2 2 3 3 4 4 5 6 7 7 8 8 9 9 10
11 12 12 13 13 14 14 15 16 17 17 18 18 19 19 20
0 0 0 0 3 3 3 3 3 6 6 6 6 6 9 9 9 9 12 12 12 12
0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9 12 0 3 6 9

000000000000000000000000000000

15

1 1 1 0

2 1 0 0

3 1 0 0

4 1 0 0

5 1 1 1

6 0 1 0

10 1 1 1

11 0 1 0

15 1 1 1

16 0 1 0

20 1 1 1

21 1 1 1

22 1 1 1

23 1 1 1

24 1 1 1

0.946 0.946 0.946

0

0

16

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

-1.5 -1.5 -1.5 -1.5 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3 -3

0

0

0

0.1

8

1 2 3 4 17 18 19 20

4. Wyniki obliczeń – obciążenie całkowite + odciążenie

WYNIKI OBLICZEN

PROGRAM NET1

ZAGADNIENIE NIELINIOWE - ZAKRES SPREZYSTO-PLAST.

OBCIAZENIE CALKOWITE KONSTRUKCJI

PRZEMIESZCZENIA WEZLOWE [cm] :

NR WEZLA U V W

1	0.000	0.000	-129.090
2	0.000	2.390	-122.880
3	0.000	4.151	-102.287
4	0.000	4.016	-62.561
5	0.000	0.000	0.000
6	2.378	0.000	-122.839
7	2.220	2.230	-117.310
8	1.713	3.941	-98.631
9	0.832	3.927	-61.251
10	0.000	0.000	0.000
11	4.124	0.000	-102.155
12	3.916	1.721	-98.534
13	3.173	3.191	-85.622
14	1.627	3.523	-56.346
15	0.000	0.000	0.000
16	3.978	0.000	-62.391
17	3.890	0.838	-61.091
18	3.493	1.639	-56.243
19	2.141	2.160	-42.419
20	0.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.000
22	0.000	0.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000
24	0.000	0.000	0.000

SILY WEWNETRZNE W ELEMENTACH CIEGIEN [kN] :

NR ELEMENTU	SILA
1	109.827
2	110.169
3	110.980
4	112.458
5	103.737
6	104.036
7	104.784
8	106.204
9	84.142
10	84.343
11	84.883
12	86.108
13	53.950
14	53.949

15	54.024
16	54.622
17	107.025
18	107.361
19	108.167
20	109.631
21	100.381
22	100.677
23	101.413
24	102.826
25	78.299
26	78.496
27	79.028
28	80.236
29	38.510
30	38.504
31	38.571
32	39.067

DLUGOSC CIEGIEN PO ODKSZTALCENIU [m] :

NR ELEMENTU	DLUGOSC
1	3.025
2	3.025
3	3.025
4	3.025
5	3.024
6	3.024
7	3.024
8	3.024
9	3.019
10	3.019
11	3.019
12	3.019
13	3.012
14	3.012
15	3.012
16	3.012
17	3.025
18	3.025
19	3.025
20	3.025

21	3.023
22	3.023
23	3.023
24	3.023
25	3.017
26	3.017
27	3.018
28	3.018
29	3.008
30	3.008
31	3.008
32	3.009

LICZBA ITERACJI : 10

DOKŁADNOSC ROZWIAZANIA [kN] : .0900116

WYNIKI OBLICZEN - ODCIAZENIE KONSTRUKCJI

PROGRAM NET1 -ZAGADNIENIE NIELINIOWE -ZAKRES SPREZ.-PLAST.

PRZEMIESZCZENIA WEZLOWE [cm] :

NR WEZLA	U	V	W
1	0.000	0.000	67.377
2	0.000	-1.829	63.690
3	0.000	-3.176	52.873
4	0.000	-3.053	32.021
5	0.000	0.000	0.000
6	-1.852	0.000	64.353
7	-1.713	-1.715	61.038
8	-1.332	-3.035	51.364
9	-0.654	-3.017	31.754
10	0.000	0.000	0.000
11	-3.223	0.000	53.872
12	-3.029	-1.337	51.518
13	-2.480	-2.492	45.226
14	-1.286	-2.763	30.013
15	0.000	0.000	0.000
16	-3.115	0.000	33.031
17	-2.994	-0.658	31.746
18	-2.736	-1.294	29.896
19	-1.700	-1.716	23.036
20	0.000	0.000	0.000

21	0.000	0.000	0.000
22	0.000	0.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000
24	0.000	0.000	0.000

PRZEMIESZCZENIA WEZLOWE W ODNIESIENIU DO STANU 'ZERO' [cm]:

NR WEZLA	U	V	W
1	0.000	0.000	-61.713
2	0.000	0.561	-59.190
3	0.000	0.976	-49.414
4	0.000	0.963	-30.540
5	0.000	0.000	0.000
6	0.527	0.000	-58.485
7	0.507	0.515	-56.272
8	0.381	0.906	-47.267
9	0.178	0.910	-29.496
10	0.000	0.000	0.000
11	0.901	0.000	-48.283
12	0.887	0.384	-47.016
13	0.693	0.699	-40.396
14	0.341	0.760	-26.333
15	0.000	0.000	0.000
16	0.862	0.000	-29.360
17	0.896	0.180	-29.346
18	0.757	0.345	-26.348
19	0.441	0.444	-19.383
20	0.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.000
22	0.000	0.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000
24	0.000	0.000	0.000

SILY WEWNĘTRZNE W ELEMENTACH CIĘGIEN PO ODCIAZENIU [kN] :

NR ELEMENTU	SILA
1	8.535
2	8.541
3	8.550
4	8.579
5	6.817
6	6.824
7	6.837
8	6.857

9	6.230
10	6.233
11	6.243
12	6.260
13	3.996
14	3.997
15	4.007
16	4.046
17	6.919
18	6.926
19	6.941
20	6.962
21	6.879
22	6.884
23	6.896
24	6.919
25	6.044
26	6.048
27	6.054
28	6.075
29	3.201
30	3.200
31	3.202
32	3.209

5. Wyniki obliczeń siatki w zakresie liniowo sprężystym obciążonej obciążeniem całkowitym

WYNIKI OBLICZEN

PROGRAM NET1

ELEMENTY KRZYWOLINIOWE W ZAKRESIE LINIOWO SPREZYSTYM

PRZEMIESZCZENIA WEZLOWE [cm] :

NR WEZLA	U	V	W
1	0.000	0.000	-120.626
2	0.000	2.099	-114.888
3	0.000	3.650	-95.726
4	0.000	3.531	-58.569

5	0.000	0.000	0.000
6	2.087	0.000	-114.831
7	1.953	1.963	-109.750
8	1.516	3.476	-92.419
9	0.743	3.468	-57.456
10	0.000	0.000	0.000
11	3.621	0.000	-95.545
12	3.449	1.523	-92.286
13	2.817	2.834	-80.448
14	1.457	3.141	-53.104
15	0.000	0.000	0.000
16	3.488	0.000	-58.340
17	3.427	0.747	-57.244
18	3.110	1.465	-52.969
19	1.924	1.939	-40.153
20	0.000	0.000	0.000
21	0.000	0.000	0.000
22	0.000	0.000	0.000
23	0.000	0.000	0.000
24	0.000	0.000	0.000

SILY WEWNETRZNE W ELEMENTACH CIEGIEN [kN] :

NR ELEMENTU	SILA
1	118.795
2	119.113
3	119.875
4	121.264
5	111.469
6	111.748
7	112.446
8	113.784
9	89.179
10	89.367
11	89.874
12	91.033
13	56.858
14	56.855
15	56.936
16	57.497
17	115.449
18	115.762

19	116.517
20	117.890
21	107.514
22	107.786
23	108.479
24	109.807
25	82.580
26	82.764
27	83.263
28	84.401
29	40.146
30	40.143
31	40.210
32	40.679

LICZBA ITERACJI : 10

DOKLADNOSC ROZWIAZANIA [kN] : 5.081177E-03

LITERATURA

- [1] Argyris J. H., Scharpf D. W. : *Large deflection analysis of prestressed networks*. J. Struct. Div., March (1972).
- [2] Bandel H. K. : *Das orthogonale Seilnetz hyperbolisch-parabolischer Form unter vertikalen Lastzuständen und Temperaturänderung*. Bauingenieur, 10/1959.
- [3] Bergermann R., Göppert K. : *Das Speichenrad – Ein Konstruktionsprinzip für weitgespannte Dachkonstruktionen*. Stahlbau, H. 8/2000.
- [4] Branicki Cz. : *Analiza numeryczna siatek wiszących o losowej geometrii i wstępnym napięciu*. IV Konf. MKMK, Koszalin 1979.
- [5] Branicki Cz., Sosnowski W. : *Studium parametryczne statyki przekrycia ciągnowo-prętowego*. II Konf. Naukowa – Konstrukcje ciągnowe i wiotkie powłoki – Rydzyna 1983.
- [6] Brinkmann G. i inni (praca zbiorowa) : *Leicht und Weit . Zur Konstruktion weitgespannter Flächentragwerke*. VCH 1990.
- [7] Cabaj J., Kowal Z. : *Przekrycia ciągnowe*. Prace Nauk. Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, nr 21, Wrocław 1977.
- [8] Ciesielski R. , Gomuliński A. , Kacprzyk Z. : *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*. T. 3. Arkady, Warszawa 1992.
- [9] Dacko M. , Borkowski W. , Dobrociński S. : *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1994.
- [10] Feyrer K. : *Drahtseile . Bemessung , Betrieb , Sicherheit* . Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1994.
- [11] Filipkowski J. : *Przekrycie amfiteatru w Koszalinie*. Inż. I Bud. , 7/1977.
- [12] Filipkowski J. , Filipow-Ciskowska E. , Pałkowski Sz. : *Numeryczno – modelowa analiza pewnego przekrycia wiszącego*. Arch. Inż. Łąd. , Z. 4/1977.
- [13] Hajduk J., Jendo S., Kączkowski Z. : *Podstawy teoretyczne statyki ustrojów ciągnowych*. Arch. Inż. Łąd. , Z. 4/1973.
- [14] Hajduk J., Osiecki J. : *Ustroje ciągnowe . Teoria i obliczanie* . WNT, Warszawa 1970.
- [15] Hankus J. : *Budowa i własności mechaniczne lin stalowych* . Główny Instytut Górnictwa, Katowice 1990.
- [16] Husiar B. , Świtka R. : *Quasistatyczne pełzanie cięgna lepkosprężystego w ujęciu dyskretnym* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 1/1979.

- [17] Husiar B. , Świtka R. : *Lepkosprężyste siatki ciągnowe* . II Konf. Naukowa – Konstrukcje ciągnowe i wiotkie powłoki – Rydzyna 1983.
- [18] Husiar B., Świtka R. : *Analiza reologiczna siatek wykonanych z lin stalowych* . *Mechanika Teoretyczna i Stosowana* , 1, 23/1985.
- [19] Husiar B., Świtka R. : *O możliwości stosowania współczynnika pełzania w obliczeniach wstępnie napiętych siatek ciągnowych* . Inż. I Bud., 7/1986.
- [20] Jendo S., Stachowicz A. : *Przekrycia wiszące* . *Obliczenia statyczne i kształtowanie* . Arkady 1974 , Biblioteka Inżynierii i Budownictwa.
- [21] Kozieł K., Włoczka B. : *Łączenie lin stalowych przez zaplatanie , zalewanie końców metalem i zaciskanie w tulejach oraz łączenie zaciskami szczękowymi* . Biuletyn branżowy „Mostostal” , nr 1, 2/1974.
- [22] Kuś S. : *Parasol nad dziedzińcem Sony Center*. Architektura, 5/2000.
- [23] Kuś S., Bujak J. : *Eksperymentalne badania dźwigara liniowego dwupasmowego*. Arch. Inż. Łąd., Z. 4/1973.
- [24] Kuś S., Rżysko J. : *Badania eksperymentalne i projektowanie konstrukcji ciągnowych*. Arch. Inż. Łąd., Z. 4/1973.
- [25] Kuśmirek B. : *Analiza numeryczna wielkości statycznych w dwukrzywiznowej małowyniosłej siatce ciągnowej* . IV Konf. MKMK , Koszalin 1979.
- [26] Legras J. : *Praktyczne metody analizy numerycznej* . WNT , Warszawa 1974.
- [27] Libura S., Segura A. : *Problemy technologiczne i materiałowe ciągów w układach belkowo – ciągnowych* . II Konf. Naukowa – Konstrukcje ciągnowe i wiotkie powłoki – Rydzyna 1983.
- [28] Michałak H., Pyrak S., Szulborski K. : *O współczesnych architektoniczno-konstrukcyjnych rozwiązaniach przekryć podwieszonych*. Inż. I Bud. , 12/1996.
- [29] Nowacki W. : *Mechanika budowli* . PWN , Warszawa 1975 .
- [30] Orkisz J., Stanuszek M. : *Zastosowanie elementów wyższego rzędu do analizy skończonych deformacji wiotkich układów ciągnowych*. Arch. Inż. Łąd., Z. 4/1985.
- [31] Pałkowski Sz. : *Zur statischen Berechnung von Seilen* . Bautechnik , H. 8/1989.
- [32] Pałkowski Sz. : *Obliczanie siatek ciągnowych metodą elementów skończonych* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 2/1979.
- [33] Pałkowski Sz. : *Zastosowanie elementów krzywoliniowych do analizy ustrojów ciągnowych* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 1/1984.
- [34] Pałkowski Sz. : *Zur statischen Berechnung von Seilkonstruktionen im elastisch – plastischen Bereich* . Bauingenieur , H. 7/1992.

- [35] Pałkowski Sz. : *Analiza statyczna ustrojów ciągnowych z uwzględnieniem sprężysto – plastycznych właściwości lin* . Inż. I Bud. , 3/1993.
- [36] Pałkowski Sz. : *Konstrukcje ciągnowe* . WNT , Warszawa 1994.
- [37] Pałkowski Sz. : *Uwagi dotyczące obliczania ciągów* . Inż. I Bud. , 2/1996.
- [38] Pałkowski Sz. : *Iterative Berechnung geneigter Seile* . Bauingenieur , 71/1996.
- [39] Pałkowski Sz., Maliszewski G., Matuszkiewicz M. : *Obliczanie ciągów w zakresie sprężysto-plastycznym metodą kolejnych przybliżeń* . Inż. I Bud. , 1/2000.
- [40] Pałkowski Sz., Matuszkiewicz M. : *Wpływ rodzaju obciążenia na stan sił i przemieszczeń siatek ciągnowych* . Inż. I Bud. , 3/1998.
- [41] Pałkowski Sz., Matuszkiewicz M. : *Wybrane problemy analizy statycznej konstrukcji ciągnowych* . Zesz. Nauk. Wydz. Bud. I Inż. Środ. Politechniki Koszalińskiej , nr 13/1998.
- [42] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K. : *Macierzowa analiza konstrukcji* . PWN Warszawa – Poznań , 1979.
- [43] Pietrzak J., Trafas R. : *Analiza statyczna przestrzennych układów ciągnowych* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 4/1983.
- [44] Pulikowski J., Rakowski J., Świtka R. : *Algorytm obliczeń statycznych konstrukcji ciągnowych* . IV Konf. MKMK , Koszalin 1979.
- [45] Pulikowski J., Rakowski J. : *Ocena nieliniowości geometrycznej pewnej klasy siatek ciągnowych* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 4/1983.
- [46] Rakowski J., Świtka R. : *Sprężysto – plastyczne odkształcenia i proces niszczenia siatek ciągnowych* . Arch. Inż. Łąd. , Z. 1/1989.
- [47] Ralston A. : *Wstęp do analizy numerycznej* . PWN , Warszawa 1975.
- [48] RILEM – *Matériaux et Constructions* , nr 32/1973 .
- [49] Scharpf D. W. : *Die Berechnung von vorgespannten Seilnetzkuhltürmen* . Bauingenieur, 54/1979.
- [50] Schlaich J., Plieninger S. : *Vier neue Hallen der Deutschen Messe AG in Hannover* . Stahlbau, H. 8/2000.
- [51] Skrzypek J. : *Plastyczność i pełzanie* . PWN , Warszawa 1986.
- [52] Stauske D. : *Drahtseile für Seilbauwerke* . Stahlbau, H. 8/2000.
- [53] Szulc J., Flaga A. : *Liny produkcji krajowej do mostów wiszących* . Inż. I Bud. , 9/1985.
- [54] Świtka R. : *Проблемы анализа вантовых конструкций* . Успехи Механики , том 11/4 , 1988.

- [55] Thyssen Draht AG - katalog .
- [56] Virola J. : *Die weltweitgrößten Spannweiten von Brücken*. Bauingenieur, 2/1998.
- [57] Walczak J. : *Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności* , Warszawa – Kraków 1978.
- [58] West H. H., Kar A. K. : *Discretized initial – value analysis of cable nets* . Int. J. Solids Structures , 9/1973.
- [59] Zienkiewicz O. C. : *Metoda elementów skończonych* . Arkady , Warszawa 1972.

Normy

- [60] PN - 68 / M – 80021 . Drut stalowy na liny .
- [61] PN – 71 / M - 80236 . Liny do konstrukcji sprężonych .
- [62] PN – 92 / M – 80201 . Liny stalowe z drutu okrągłego . Wymagania i badanie .
- [63] PN – 90 / B – 03200 . Konstrukcje stalowe . Obliczenia statyczne i projektowanie .
- [64] DIN 3092/1 . Drahtseil – Vergüsse in Seilhülsen ; Metallische Vergüsse ; Sicherheitstechnische Anforderungen und Prüfung , 1985.
- [65] DIN 17140/1 . Walzdraht zum Kaltziehen ; Technische Lieferbedingungen für Grundstahl und unlegierte Qualitätsstähle , 1983.
- [66] DIN 17440 . Nichtrostende Stähle ; Technische Lieferbedingungen für Blech, Warmband, Walzdraht, gezogener Draht, Stabstahl , Schmiedestücke und Halbzeug , 1985.
- [67] DIN 18800/1 . Stahlbauten ; Bemessung und Konstruktion , 1990.
- [68] DIN 51201 . Prüfung von Drahtseilen , 1961.