

**ZESZYTY NAUKOWE**

[26]

**WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA  
W KOSZALINIE**



**PRACE  
V KRAJOWEJ KONFERENCJI**

**„POLIOPTYMALIZACJA  
W PROJEKTOWANIU  
- Mielno '86 ”**

*pod redakcją*

*Wojciecha TARNOWSKIEGO*

**CZĘŚĆ I**



**Nr 8 / WM**

**1986  
KOSZALIN**

**Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie**

**Zespół Konstrukcji Maszyn Komitetu Budowy Maszyn PAN**

**Prace V Krajowej Konferencji**

**" POLIOPTIMALIZACJA W PROJEKTOWANIU-MIELNO-86"**

**Mielno, 9 - 13 sierpnia 1986**

**pod redakcją  
Wojciecha Tarnowskiego**

**część I**

**Koszalin 1986**

**ZESZYT NAUKOWY WYDZIAŁU MECHANICZNEGO**

**Wydane za zgodą Rektora  
Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie**

**Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie  
75-620 Koszalin, ul. Rasławska 15-17**

---

**Koszalin, 1986, wyd. 1, format A-5, ark. wyd. 14,3 nakład 175 +25 egz  
Cena 230, zł.**

**Druk: Dział Poligrafii WSInż. zam. 0/102/86 zgoda OUKPiW D-12**

SPIS TREŚCI

	strona
WSTĘP .....	5
AMELJAŃCZYK Andrzej: Zadania optymalizacji z relacją dominowania.....	9
BIL Tadeusz., TARNOŃSKI Wojciech: Polioptymalizacja mechanizmu ze względu na koszt i luz przy losowych odchyłkach wykonawczych .....	29
BOJARSKI Włodzimierz: Problemy optymalizacji i harmonizacji systemów socjo-techniczno-ekologicznych.....	38
FIALA P. Multicriteria dual simplex method.....	54
FIALA P., JABLONSKY J.: Multicriterial evaluation of biogas production alternatives.....	63
GOSIEŃSKI Zdzisław, BIL Tadeusz: Optymalna dyslokacja sił sterujących drganiami wirników giętych .....	77
JACQUET-LAGREZE E., SŁOWIŃSKI R: Mop with an interactive assessment of a piecewise-linear utility function.....	95
JEDRZEJEWSKI A: Zastosowanie korelacji kanonicznej w optymalizacji wielokryterialnej.....	114
KALISZEWSKI Ignacy: Wyznaczanie rozwiązań niezdominowanych w zadaniach wielokryterialnego programowania całkowitoliczbowego.....	124
KONARZEWSKA-GUBAŁA Ewa: O wykorzystaniu celów referencyjnych w wielokryterialnej analizie decyzji.....	136
KUSIDŁO K: O pewnym przykładzie wykorzystania polioptymalizacji w procesie projektowania elektromagnesu.....	165
NARECKI F: Hierarchizacja kryteriów w metodzie podziału i ograniczeń.....	183
MATUSZEK Józef: Polioptymalizacja przy probabilistycznych postaciach funkcji celu.....	191
MISIAKIEWICZ Jacek: Komputerowe wspomaganie wyboru w projektowaniu wstępnym.....	201
OSYCZKA A., MONTUSIEWICZ J.: Optymalizacja wielokryterialna tarczowych hamulców samochodowych.....	208
PALUS Henryk., TARNOŃSKI Wojciech: Wielokryterialny wybór metody heurystycznej w projektowaniu technicznym.....	220

PIASŁECKI Stanisław: Wielokryterialne projektowanie linii technologicznych na przykładzie procesów obróbki.....	230
POGORZELSKI Witold: Metoda wagowo-korelacyjna określania użyteczności kompromisowej wytworów przy wielu kryteriach.....	252
POGORZELSKI Andrzej., POGORZELSKI Witold: Wyznaczenie reprezentacji zbioru pareto algorytmem "Beta" Monte-Carlo...	269
POKOJSKI J., WRÓBEL J: Cechy, uwarunkowania i postać dużego zadania polioptymalizacji w dynamice maszyn.....	282
TARNOWSKI Wojciech: Polioptymalizacja w projektowaniu technicznym - próba syntezy.....	293
WACŁAWIEK Mariusz., Wrodarczyk Henryk: Próba polioptymalizacji szczeliny i światłości pola odczytowego czytnika kart testowych w warunkach niepewności.....	310
CABAŃSKI Jerzy., STYP-REKOWSKI Michał: Optymalizacja niejednorodnej płyty prostokątnej.....	328
KULAS Stanisław: Wybór wariantu konstrukcji łącznika elektrycznego.....	336

## WSTĘP

Niniejszy tom zawiera większość prac przedstawionych na V Krajowej Konferencji "Poliptymalizacja w Projektowaniu. Kielce - 86". Pozostałe referaty nie zostały zamieszczone ze względu na zbyt późne dostarczenie przez autorów. Niektóre wystąpienia zilustrowano demonstracją działania programu na mikrokomputerze, co nie zostało omówione w artykułach.

Problemy poliptymalizacji i optymalizacji wielokryterialnej /co chyba należy rozróżnić/ cieszą się stale rosnącym zainteresowaniem projektantów i innych osób zajmujących się wspomaganie procesów decyzyjnych w różnych dziedzinach. Także wielu badaczy przedstawia coraz nowe propozycje ujęć teoretycznych i nowe metody. Szczególnie cieszy znaczna liczba prac poświęconych zastosowaniom, dając z kolei nowy impuls pracom teoretycznym i metodologicznym.

W projekcie uchwały końcowej III Kongresu Nauki Polskiej w 1986 r. stwierdzono, że "W zakresie podstaw budowy maszyn na pierwszy plan wysuwają się prace prowadzące do wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji z wykorzystaniem wspomaganie komputerowego". Konferencja "Poliptymalizacja w Projektowaniu" może być uznana za bardzo dobrą realizację tego postulatu. Intencją Organizatorów jest umożliwienie prezentacji prac poświęconych optymalizacji i poliptymalizacji z różnych dziedzin projektowania inżynierskiego /z zakresu konstrukcji, technologii i organizacji/ i wspomaganie decyzji operatorskich i strategicznych w ujęciu inżynierskim i ekonomicznym /np. w transporcie, wojsku, medycynie, w sterowaniu dyspozytorskim w kombinatach itp./.

Zamieszczone artykuły mogą być podzielone na trzy grupy:

opracowania teoretyczne i ujęcia monograficzne, nowe metody oraz nowe zastosowania.

Rosnąca złożoność obliczeniowa metod /np. przy uwzględnianiu rozmytości informacji wejściowej/ oraz wielowymiarowość rozwiązywanych problemów, a także dialogowy sposób uzyskiwania informacji od użytkownika sprawiają, że wspomaganie komputerowe staje się koniecznością. Z drugiej strony obserwuje się postępujący stopień algorytmizacji metod. W połączeniu ze stale rosnącą popularnością mikrokomputerów sprawia to, że pożądanym kierunkiem rozwoju polioptymalizacji jest komputeryzacja jej metod. Ta tendencja znalazła swój wyraz w niniejszym zbiorze.

Drugą tendencją są takie zastosowania polioptymalizacji, które wnoszą do tradycyjnych dziedzin nową jakość, np. umożliwiają sformułowanie pewnych zasad postępowania, dotychczas niewykrytych lub znanych tylko w postaci heurystycznej.

Dotychczasowe cztery sesje "Polioptymalizacja w Mechanice" odbyły się w organizacyjnych ramach Sympozjonów Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział w Gliwicach: XXI-go Sympozjonu w 1982 r., XXII-go w 1983 r., XXIII-go w 1984 r. i XXIV-go w 1985 r. Referaty publikowane były w materiałach tych Sympozjonów, przy czym w 1983 r. podstawowe prace dotyczące polioptymalizacji wydane zostały jako Zeszyt Naukowy Politechniki Śląskiej, seria Automatyka, Nr 67, Gliwice 1983.

Patronat nad obecną 7-tą Krajową Konferencją "Polioptymalizacja w Projektowaniu. Mielno - 86" objął Zespół Konstrukcji Maszyn Komitetu Budowy Maszyn PAN, któremu przewodniczy prof. dr hab. inż. Henryk Hawrylak, a gospodarzem jest Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie, w osobie Jego Magnificencji Rektora, prof. dr hab. inż. Józefa Borkowskiego.

W skład Komitetu Naukowego zechcieli wejść:

- doc. dr hab. inż. Andrzej Ameljańczyk /Węskowa Akademia Techniczna, Warszawa/,
- prof. dr hab. inż. Henryk Hawrylak /Politechnika Wrocławska/,
- doc. dr hab. inż. Andrzej Osyczka /Politechnika Krakowska/,
- doc. dr hab. inż. Roman Słowiński /Politechnika Poznańska/,
- doc. dr inż. Wojciech Tarnowski /WSInż. Koszalin, Politechnika Śląska/,
- prof. dr hab. inż. Andrzej Wierzbicki /Politechnika Warszawska/,
- prof. dr hab. inż. Józef Wojnarowski /Politechnika Śląska/.

Komitet Organizacyjny działa w składzie: dr inż. Tadeusz Bil, mgr inż. Wojciech Majewski i doc. dr inż. Wojciech Tarnowski. Zamierzeniem Komitetu jest regularne organizowanie tej Konferencji także w przyszłości.

Składam serdeczne podziękowania P.T. Autorom i Recenzentom za ich trud w przygotowaniu materiałów tego zeszytu, a Wydawcy za sprawne powielenie i terminowy skład,

Wojciech Tarnowski



V KONFERENCJA "POLIOPTYMALIZACJI W PROJEKTOWANIU"

MIELNO 86

Andrzej Ameljańczyk  
Wydział Cybernetyki  
Wojskowa Akademia Techniczna

ZADANIA OPTIMALIZACJI Z RELACJĄ DOMINOWANIA

Streszczenie

W artykule przedstawiono ogólny schemat zadania optymalizacji, bazujący na relacji dominowania. Wykorzystując pojęcie elementów ekstremalnych zdefiniowano rozwiązanie zadania optymalizacji wielokryterialnej, optymalizacji kolektywnej oraz zadania optymalizacji przy wielu celach. Praca ma charakter monograficzny.

1. WPROWADZENIE

Pojęcie "rozwiązanie optymalne" /rozumiane jako decyzja lub też jako pewna strategia postępowania/ wiąże się nierozdzielnie z zagadnieniem "celowego wyboru". To z kolei pojęcie związane jest z kryterium wyboru. Co to znaczy, że wolimy z ustalonego zbioru  $X$  wybrać pewne rozwiązanie  $x$  niż  $y$ ? Jak zdefiniować rozwiązanie optymalne? Co to jest "kryterium wyboru"? Jaki aparat formalny należałoby zastosować ażeby otrzymać wyniki ogólne, umożliwiające analizę możliwie szerokiej klasy problemów decyzyjnych przy różnych modelach preferencji?

W ostatnich latach pojawiła się znaczna ilość publikacji na temat formułowania, modelowania i rozwiązania zadań optymalizacji, w których każde rozwiązanie  $x \in X$  "oceniane" jest wieloma skalarnymi wskaźnikami jakości. Zagadnienie porównywania między sobą rozwiązań w takiej sytuacji okazuje się jednak o wiele bardziej skomplikowane niż w przypadku jednego wskaźnika. Problem znalezienia rozwiązania najlepszego a nawet problem podania definicji rozwiązania najlepszego jest również zagadnieniem znacznie trudniejszym. Zagadnienie wyboru rozwiązania najlepszego nie

---

Praca jest własnością Wojskowej Akademii Technicznej, przed Wydziałem Mechanicznym  
Mielno 1986.

upraszcza się często nawet po ustaleniu „relacji porównywania” poszczególnych rozwiązań. W ogólnym bowiem przypadku relacja taka nie musi być relacją porządku. W bogatej literaturze tej problematyki pojawiło się mnóstwo różnych koncepcji i „podejść” do formułowania i rozwiązywania zadań optymalizacji wielokryterialnej. Najnowszą, aczkolwiek zapoczątkowaną już w roku 1936 przez V. Pareto koncepcją jest definiowanie tzw. relacji dominowania w zbiorze wektorowych wartości funkcji kryterium, a następnie w oparciu o nią definiowanie rozwiązań najlepszych.

W teorii tej fundamentalną rolę odgrywa teoria porządkowania zbiorów. Wynika to z faktu, że dość długo zakresem optymalizacji obejmowano wyłącznie przypadki, gdzie relacja dominowania wprowadzała porządek. Klasa takich zadań do niedawna w zupełności wystarczała. Obecnie jednak coraz częściej pojawia się konieczność rozwiązywania zadań wywodzących się z konkretnej praktyki w których relacja dominowania nie wnosi porządku. Uogólnienie pojęcia „rozwiązanie optymalne” stało się pilną potrzebą. Można tego dokonać następująco. Cechą charakterystyczną każdego zadania optymalizacji jest występowanie pewnego niepustego zbioru  $X$ , zwanego zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. O naturze (właściwościach) zbioru  $X$  jak też jego elementów nie będziemy nic zakładali za wyjątkiem, że jest to zbiór niepusty i jest podzbiorem zbioru  $A$  zwanego przestrzenią rozwiązań. Następną cechą charakterystyczną zadania optymalizacji jest występowanie tzw. funkcji kryterium (wskaznika jakości)  $F : A \rightarrow B$ , gdzie  $B$  nazywać będziemy przestrzenią ocen rozwiązań (najczęściej będziemy zakładać, że  $B = \mathcal{I}^N$ ). Funkcja  $F$ , którą w skrócie nazywać będziemy kryterium przyporządkowuje każdemu rozwiązaniu dopuszczalnemu  $x \in X$  jego „liczbową” oceną  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x), \dots, F_N(x)) \in \mathcal{R}^N$ .

Liczba  $F_n(x)$  jest wartością  $n$ -tego wskaźnika jakości rozwiązania  $x$ . W praktycznej interpretacji wskaźnik  $F_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ , to „liczbowe charakterystyki” rozwiązań dopuszczalnych, a więc wartości ich cech mierzalnych, uznanych za istotne z punktu widzenia wyboru rozwiązania (decyzji) najlepszego. Mogą to zatem być: koszt, czas, niezawodność itp. - a więc charakterystyki mierzone w różnych jednostkach miary.

Kolejnym pojęciem, które należałoby wprowadzić jest tzw. przestrzeń kryterialna  $Y$ . Jest nią zbiór wszystkich wartości funkcji  $F$  jakie przyjmuje ona na zbiorze  $X$ , czyli obraz zbioru  $X$

$$Y = F(X) = \{ y = F(x) \in B \mid x \in X \} \quad (1.1)$$

Porównywanie „jakości rozwiązań” można zatem obecnie realizować pośrednio porównując obrazy tych rozwiązań w przestrzeni ocen. Zasadniczym i bezpośrednim obiektem procesu wyboru będzie więc nie zbiór  $X$  lecz zbiór  $Y \subset B$ . Musimy wobec tego zdefiniować pewną relację  $R \subset B \times B$ , zwaną relacją dominowania, która „pozwoli” ustalać czy np.  $y \in Y$  jest elementem lepszym od innego elementu  $z \in Y$ , czy też nie.

Określenie 1.1.

Relację dwuczłonową  $R \subset B \times B$  stanowiącą zbiór par  $(y, z)$  takich, że  $y, z \in B$  oraz, że podejmujący decyzję uznaje iż „element  $y$  jest co najmniej tak dobry jak  $z$ ” nazywać będziemy relacją dominowania.

Zdanie ujęte w cudzysłów może być sformułowane również inaczej np. „element  $y$  jest lepszy niż  $z$ ” lub „element  $y$  nie gorszy niż  $z$ ” itp.

Przyjęta relacja dominowania  $R$  jest modelem preferencji decydenta i jej konstruowanie jest bardzo istotnym, a zarazem trudnym elementem modelowania całego problemu decyzyjnego.

Praktycznie łatwo jest zapisywać relację dominowania wykorzystując pojęcie funkcji zdaniowej  $\varphi: B \times B \rightarrow \{0,1\}$  postaci:

$\varphi(y,z) \equiv$  „y jest elementem lepszym od z”, np.

$$\varphi(y,z) \equiv \text{„} y_n \geq z_n \text{ dla każdego } n \in \mathcal{N} \text{”} \quad (1.2)$$

$$\varphi(y,z) \equiv \text{„} y_n \geq z_n \text{ dla każdego } n \in \mathcal{N} \text{ oraz istnieje } l \in \mathcal{N}, \text{ że } y_l > z_l \text{”} \quad (1.3)$$

$$\varphi(y,z) \equiv \text{„} \max\{y_n, n \in \mathcal{N}\} \geq \max\{z_n, n \in \mathcal{N}\} \text{”} \quad (1.4)$$

$$\varphi(y,z) \equiv \text{„} \min\{y_n, n \in \mathcal{N}\} \geq \min\{z_n, n \in \mathcal{N}\} \text{”} \quad (1.5)$$

$$\varphi(y,z) \equiv \text{„} y_n \geq z_n \text{ dla } n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{K} \text{ oraz } y_k \leq z_k \text{ dla } k \in \mathcal{K} \text{”} \\ \mathcal{K} \subset \mathcal{N} \quad (1.6)$$

Relację  $R_\varphi$  definiujemy jako zbiór  $\{(y,z) \in B \times B \mid \varphi(y,z)\}$  (1.7)

## 2. SFORMULOWANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI WIELOKRYTERIALNEJ

Bazując na pojęciach wprowadzonych poprzednio, opisujących zadanie optymalizacji możemy powiedzieć, że zadanie optymalizacji zostało formalnie określone, gdy zostały podane:  $X, F, R$ . Trójkę  $(X, F, R)$  nazywać będziemy zadaniem optymalizacji wielokryterialnej. Z punktu widzenia samego procesu wyboru, opierającego się na zastosowaniu przyjętej relacji  $R$  zadanie optymalizacji jest definiowane przez parę  $(Y, R)$ . Posługując się relacją dominowania  $R$  wyznaczamy zbiór „elementów najlepszych”  $\tilde{Y}(R)$ . Następnie możemy wyznaczyć zbiór decyzji najlepszych  $\tilde{X}(R)$ , odpowiadających  $\tilde{Y}(R)$ , jako przeciwobraz  $\tilde{Y}(R)$

$$\tilde{X}(R) = F^{-1}(\tilde{Y}(R)) = \{x \in X \mid F(x) \in \tilde{Y}(R)\} \quad (1.8)$$

- jest to już czynność tylko formalna.

Zajmując się dalej głównie istotą samego procesu wyboru, zadanie optymalizacji będziemy rozumieli jako parę  $(Y, R)$ , gdzie  $Y \subset B$ ,

zaś  $R \subset B \times B$  ( $B$  - zbiór elementów (przestrzeń ocen)),  
Rozwiązanie zadania optymalizacji  $(Y, R)$  będziemy utożsamiać z  
wyznaczeniem elementów ekstremalnych zbioru  $Y$  w przestrzeni  $B$   
z relacją  $R$  [1]. Zatem ogólnie mówiąc rozwiązaniem optymalne to  
elementy ekstremalne zbioru elementów dopuszczalnych  $Y$ . Pod po-  
jęciem elementów ekstremalnych zbioru  $Y$  rozumiemy bądź  
elementy największe i maksymalne bądź elementy najmniejsze i mini-  
malne zbioru. W pracy niniejszej i prawie w całej literaturze z  
tej dziedziny operuje się pojęciem elementu najmniejszego i mini-  
malnego. Z uwagi, że pojęcie element najmniejszy, minimalny ko-  
jarzą się głównie z relacjami porządku w ogólnej teorii optymalizacji  
stosuje się nazwy element dominujący i niezdominowany  
[1, 3, 4, 5, 7, 11]. Obowiązywać będą zatem następujące określenie:

Określenie (2.1)

Elementem (rozwiązaniem) dominującym w zadaniu  $(Y, R)$  nazywać  
będziemy taki element  $y \in Y$ , że  $(y, z) \in R$  dla każdego  $z \in Y \setminus \{y\}$ .  
Zbiór tych elementów oznaczać będziemy symbolem  $Y_D^R$ .

Określenie (2.2)

Elementem (rozwiązaniem) niezdominowanym w zadaniu  $(Y, R)$  nazywać  
będziemy taki element  $y \in Y$ , że nie istnieje  $z \in Y \setminus \{y\}$ , taki,  
że  $(z, y) \in R$ . Zbiór takich elementów oznaczać będziemy symbolem  
 $Y_N^R$ . W pracach [1 + 12] przedstawiono szereg metod wyznaczanie  
rozwiązań dominujących i niezdominowanych zadań różnych klas oraz  
omówiono ich własności. Z uwagi, że w wielu przypadkach rozwią-  
zania takie nie istnieją bądź też mają inne wady, które ze wzglę-  
dów praktycznych uniemożliwiają ich zastosowanie  
wprowadzono dodatkową koncepcję rozwiązania zadania optymalizacji  
wielokryterialnej, polegającą na określeniu celu - punktu ideal-  
nego, a następnie na wyznaczeniu spośród elementów dopuszczalnych

elementu najbliższego względem tego celu.

Pojęcie celu opiera się na idei kresu dolnego zbioru  $Y$  w sensie  $R[1]$ .

Określenie (2.3)

Celem (punktem idealnym), wynikającym z przyjętego modelu preferencji w postaci relacji  $R$ , do którego dąży decydent nazywamy kres dolny zbioru  $Y$  w sensie relacji  $R$ . Zbiór punktów idealnych oznaczać będziemy symbolem  $u(Y,R)$ . Zatem zapiszemy  $u(Y,R) = \inf_N Y [l_d(Y,R)]_{\text{sup}}^R$ , gdzie  $l_d(Y,R)$  - zbiór ograniczeń dolnych zbioru  $Y[1]$ .

### 3. OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA

Tym mianem określa się te zadania optymalizacyjne, w których przestrzeń ocen  $B$  jest przestrzenią  $\mathcal{R}^N$ . Oznacza to, że kryterium  $F$  przyporządkowuje każdemu rozwiązaniu optymalnemu wektorową ocenę  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x), \dots, F_N(x)) \in \mathcal{R}^N$ . Funkcje  $F_n(\cdot), n \in \mathcal{N}$  nazywamy cząstkowymi (skalarnymi) wskaźnikami jakości.

W niektórych publikacjach zakres pojęcia „Optymalizacja wielokryterialna” zawęża się dodatkowo poprzez żądanie aby stosowana relacja dominowania była relacją co najmniej relacją quasıporządku [4, 9 ÷ 13]. W ten sposób zadania optymalizacji wielokryterialnej utożsamia się z zadaniami z tzw. stożkową strukturą dominowania. Za takim poglądem przemawia również fakt, że zdecydowana większość zastosowań praktycznych i potrzeb nie wykracza poza relacje dominowania, które są przechodnie i zwrotne, a więc relacje quasıporządku. Wśród zadań tej klasy bardzo istotną grupę zadań stanowią tzw. zadania optymalizacji w sensie Pareto.

Formułowaniu zadań tej klasy, metodom ich rozwiązywania oraz analizie własności uzyskiwanych rozwiązań poświęcono do tej pory co najmniej 70% wszystkich publikacji z zakresu optymalizacji wielokryterialnej [3, 4, 5, 8 ÷ 13]. Relacja dominowania prowadząca

do tzw. zadań optymalizacji w sensie Pareto wyraża postulat maksymalizacji (bądź minimalizacji) poszczególnych wskaźników jakości  $F_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathcal{N}$ . Rozpatrzmy przypadek najbardziej typowy, który polegałby na jednoczesnej maksymalizacji wszystkich wskaźników jakości  $F_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathcal{N}$ . Relację dominowania generuje w tym przypadku stożek  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^N / \lambda \leq 0\}$ . Z uwagi, że bardzo często zbiór  $Y_D^{R\Lambda}$  elementów dominujących jest zbiorem pustym, w literaturze tego zagadnienia najwięcej miejsca zajmuje problematyka związana z istnieniem i metodami wyznaczania zbioru elementów niezdominowanych  $Y_N^{R\Lambda}$  czyli tzw. elementów optymalnych w sensie Pareto [4 - 6 i 8 - 13]. Mankamentem ze względu na zastosowania praktyczne zbioru  $Y_N^{R\Lambda}$  jest z kolei fakt, że często jest to zbiór bardzo „rozproszony”, co powoduje potrzebę stosowania dodatkowych przesłanek pozwalających wybrać rozwiązanie jedyne [3, 10].

Innym, często w praktyce spotykanym przypadkiem zadanie optymalizacji wielokryterialnej jest tzw. optymalizacja leksykograficzna (hierarchiczna). Relację  $\alpha_{\geq}$  dominowania leksykograficznego generuje stożek  $\Lambda_{\alpha_{\geq}} \subset \mathbb{R}^N$ , który dla  $N = 2$  można zapisać następująco:  $\Lambda_{\alpha_{\geq}} = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / \lambda_1 < 0$  lub  $(\lambda_1 \leq 0$  i  $\lambda_2 \leq 0)\}$ . Funkcja  $\varphi$  generująca relację  $\Lambda_{\alpha_{\geq}}$  ma postać następująca:  $\varphi(y, z) \equiv$  „istnieje  $l \in \mathcal{M}$ , że  $y_l > z_l$  oraz  $y_k = z_k$  dla  $k < l$  lub  $y = z$ ”. Zadanie optymalizacji z relacją  $\alpha_{\geq}$  nazywane jest często zadaniem optymalizacji hierarchicznej. Wynika to stąd zasada preferencji wyrażana relacją  $\alpha_{\geq}$  odpowiada przypadkowi, gdy kryteria cząstkowe są uporządkowane od najważniejszego do najmniej ważnego. W celu uzyskania rozwiązania optymalnego (dominującego) dokonuje się kolejnych kroków optymalizacyjnych (w postaci odpowiednich zadań programowania matematycznego), poczynając od zadania z kryterium najważniejszym. W ten sposób uzyskuje się bardzo prosty algorytm rekurencyjny wyznaczania

zbioru  $X_D^{\alpha}$  jako zbioru  $X_n$  dla  $n=N$ .

$$X_n = \left\{ \bar{x} \in X_{n-1} \mid F_n(\bar{x}) = \sup_{x \in X_{n-1}} F_n(x) \right\}, \quad n \in \mathcal{N}, \quad X_0 = X \quad (3.1)$$

Ogólnie, w przypadku  $N$  wskaźników jakości  $F_n$ ,  $n \in \mathcal{N}$  można otrzymać  $N!$  leksykografii (tzn. różnych sposobów uporządkowań kryteriów cząstkowych). Oznaczmy symbolem  $\Pi$  zbiór wszystkich funkcji następującej postaci:

$$\mathcal{F}: \mathcal{N} \xrightarrow{na} \mathcal{N}$$

Relację dominowania leksykograficznego o indeksie  $\pi \in \Pi$  oznaczać będziemy symbolem  $\alpha_{\geq}^{\pi}$ . Łatwo pokazać, że dla każdego  $\pi \in \Pi$  zachodzi  $\geq \subset \alpha_{\geq}^{\pi}$ , a zatem również  $Y_D^{\geq} \subset Y_D^{\alpha_{\geq}^{\pi}}$  oraz  $Y_D^{\alpha_{\geq}^{\pi}} \subset Y_N^{\geq}$ , gdyż  $Y_N^{\alpha_{\geq}^{\pi}} = Y_D^{\geq}$ . Z wniosku tego wynika bardzo praktyczna uwaga

co do metody wyznaczania rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Można bowiem je wyznaczać jako rozwiązanie leksykograficzne, korzystając  $N!$  razy z bardzo prostego algorytmu rekurencyjnego (patrz (3.1)). Łatwo można również wysnuć następujące wnioski:

- 1) Jeśli  $Y \subset \mathbb{R}^N$  - zbiór skończony, to dla każdego  $\pi \in \Pi$ ,  $Y_D^{\alpha_{\geq}^{\pi}} \neq \emptyset$
- 2) Jeśli  $Y \subset \mathbb{R}^N$  - zbiór skończony oraz istnieje  $\pi \in \Pi$ , że  $R \subset \alpha_{\geq}^{\pi}$  lub  $R \subset \alpha_{\geq}^{\pi}$  to  $Y_N^R \neq \emptyset$ .

Zatem dla każdego zadania ze skończonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych zawsze istnieje rozwiązanie optymalne w sensie Pareto.

Kolejną klasą zadań optymalizacji wielokryterialnej tworzą zadania optymalizacji w warunkach niepewności. Specyfika zadań tego typu polega na tym, że efekt podjętej decyzji  $x \in X$  zależy nie tylko od  $x$  lecz również od warunków w jakich decyzja ta będzie realizowana. Niech  $\mathcal{N}$  to zbiór numerów typów warunków w jakich może się odbywać realizacja wybranej decyzji  $x \in X$ .

Załóżmy, że nie jest znane prawdopodobieństwo  $p_n$  występowania poszczególnych warunków  $n \in \mathcal{N}$ . Załóżmy, że znane są wartości



warunkowe pewnej funkcji zysku  $g$  w zależności od wyboru  $x$  i realizacji warunków  $n$

$$g : X \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R} \quad (3.2)$$

gdzie  $g(x, n)$  oznacza wielkość zysku z podjętej decyzji o ile byłoby ona realizowana w warunkach typu  $n$ . Zamiast warunkowej oceny decyzji  $x \in X$  można wprowadzić wektorową ocenę  $F : X \rightarrow \mathcal{R}^N$  w postaci  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x), \dots, F_N(x))$ , gdzie  $F_n(x) = g(x, n)$ ,  $x \in X$ ,  $n \in \mathcal{N}$ . Powstała w ten sposób możliwość sformułowania zadania optymalizacji w warunkach niepewności jako zadania optymalizacji wielokryterialnej  $(X, F, R)$ .

W literaturze tego zagadnienia można spotkać bardzo wiele różnych propozycji modelu preferencji  $R$  w warunkach niepewności.

Poniżej zostanie przedstawiona jedna z propozycji relacji  $R$ , bazująca na funkcjach zdaniowych (44) i (45). Oceną każdej decyzji  $x$  jest  $y = F(x)$ . Decydent - optymistą może się spodziewać zysku w kwocie  $y_n = \max_{n \in \mathcal{N}} y_n$  (spodziewa się wystąpienia najkorzystniejszych dla siebie warunków  $n$ ) - zatem liczba  $y_n^o$  - będzie jego oceną decyzji  $x$ . Decydent - pesymista oceni tę samą decyzję  $x$  liczbą  $y_n^p = \min_{n \in \mathcal{N}} y_n$ , gdyż założy najgorsze warunki tzn.  $\hat{n}$  „Umiarkowany optymistą” (umiarkowany w stopniu  $\alpha, \alpha \in [0, 1]$ ) decyzję  $x$  oceni liczbą

$$\alpha \max_{n \in \mathcal{N}} y_n + (1 - \alpha) \min_{n \in \mathcal{N}} y_n \quad (3.3)$$

Określenie 3.1.

Relację Hurwicza  $R_{H_\alpha}$  nazwanej będziemy relacją postaci:

$$R_{H_\alpha} = \left\{ (y, z) \in \mathcal{R}^N \times \mathcal{R}^N / \alpha \max_{n \in \mathcal{N}} y_n + (1 - \alpha) \min_{n \in \mathcal{N}} y_n > \alpha \max_{n \in \mathcal{N}} z_n + (1 - \alpha) \min_{n \in \mathcal{N}} z_n \right\}$$

Zauważmy, że dla  $\alpha = 1$  otrzymujemy tzw. relację optymisty  $R_0$  (patrz (44)), zaś dla  $\alpha = 0$  - relację pesymisty (patrz (45)). Relacja  $R_{H_\alpha}$  dla każdego  $\alpha \in [0, 1]$  jest relacją quasiporządku.

Ponadto dla każdego  $\alpha \in [0,1]$  zachodzi:  $\geq \subset R_{H\alpha}$

oraz

$$a) Y_D^{\geq} \subset Y_D^{R_{H\alpha}}$$

$$b) Y_N^{\geq} \supset Y_N^{R_{H\alpha}}$$

Można łatwo pokazać, że zadanie wyznaczania elementów dominujących w sensie  $R_{H\alpha}$  sprowadza się w prosty sposób do zadania programowania matematycznego, którego rozwiązanie prawie zawsze istnieje. Wobec tych spostrzeżeń, praktycznie większą rolę w tym przypadku odgrywają rozwiązania dominujące niż zaś rozwiązania niezdominowane. W praktyce inżynierskiej i ekonomicznej niezwykle ważnym jest fakt czy otrzymane rozwiązanie jest optymalne w sensie Pareto. W przypadku rozważanej klasy zadań, przy założeniu, że  $Y$  jest zbiorem ograniczonym i domkniętym dla każdego  $\alpha \in [0,1]$  zachodzi  $Y_D^{R_{H\alpha}} \cap Y_N^{\geq} \neq \emptyset$ . Oznacza to wśród rozwiązań dominujących zadania uwarunkowanego z relacją  $R_{H\alpha}$  istnieje zawsze rozwiązanie optymalne w sensie Pareto i tylko takie rozwiązanie należałoby stosować w praktyce.

#### 4. KOLEKTYWNE PODEJMOWANIE DECYZJI OPTYMALNYCH

Sytuacja decyzyjna, która będzie rozpatrywana poniżej odpowiada zadaniu optymalizacyjnemu jakie ma do rozwiązania zespół ekspertów, który z pewnego zbioru rozwiązań dopuszczalnych ma wybrać „rozwiązanie najlepsze”. Dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień w zakresie oznaczeń, ekspertów (i odpowiednio ich modele preferencji - relacje dominowania) ponumerujemy indeksem  $k \in \mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ . Każdy z ekspertów (decydentów) dysponuje swoim, indywidualnym „sposobem wartościowania” elementów ze zbioru  $Y \subset B$ , czyli odpowiednią relacją dominowania  $R_k \subset B \times B$ . Mamy zatem daną przestrzeń  $B$  oraz  $\mathcal{K}$  zadań optymalizacji z relacją w postaci:

$$(Y, R_k), \quad k \in \mathcal{K} \quad (4.1)$$

#### Określenie 4.1.

Zadaniem optymalizacji grupowej (kolektywnej) nazywać będziemy zadanie  $(Y, R)$ , gdzie  $R = f(R_1, \dots, R_k, \dots, R_K) \subset B \times B$  - relacja dominowania kolektywnego (globalnego).

O funkcji  $f$ , którą nazywać będziemy funkcją agregacji relacji dominowania możemy powiedzieć, że jest to odwzorowanie typu

$f : \underbrace{2^{B \times B} \times \dots \times 2^{B \times B}}_{K \text{ - razy}} \rightarrow 2^{B \times B}$  W ten sposób zadanie optymalizacji kolek-

tywnej staje się typowym zadaniem optymalizacji w przestrzeni z relacją  $[1, 2]$ . Zagadnieniom optymalizacji kolektywnej w ostatnich latach poświęca się bardzo dużo uwagi  $[7, 13]$ . Pojawia się wiele prac niesących bądź to nowe propozycje w zakresie teoretycznym i podstawowym, bądź też w zakresie konkretnych zastosowań. Poniżej zostaną przedstawione pewne uwagi teoretyczne wskazujące na potrzebę traktowania tej klasy zadań w konwencji typowych zadań optymalizacji z możliwością pełnego wykorzystywania znanych podstawowych twierdzeń o własnościach rozwiązań optymalnych.

Bardzo ważnym zagadnieniem tej klasy zadań jest problem wyznaczania łącznego modelu preferencji czyli relacji dominowania kolektywnego  $R$ . Mogą tu wystąpić różne przypadki współzależności poszczególnych relacji dominowania oraz różnego rodzaju ich hierarchii. Konsekwencją tego będą odpowiednie związki między optymalnymi rozwiązaniami poszczególnych decydentów czyli zbiorami  $Y_D^{R_k}$ ,  $Y_M^{R_k}$ , a ponadto między celami poszczególnych decydentów czyli zbiorami  $\inf_{R_k} Y$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , a celem kolektywu  $\inf_R Y$ . Zagadnienie wyznaczania relacji dominowania kolektywnego (jak również dowolnej relacji dominowania  $R_k$ ) jest zagadnieniem modelowania matematycznego i nie można niestety podać ogólnej teorii wyznaczania takiej relacji w oparciu tylko o znajomości  $R_k$ ,  $k \in \mathcal{K}$ .

Poniżej zostaną omówione tylko niektóre, typowe schematy optymalizacji grupowej, prowadzące do znanych, klasycznych relacji domi-

wania [2,7]. W praktyce może wystąpić potrzeba znacznej ich modyfikacji, łączenia lub definiowania nowych.

Bardzo częstym przypadkiem jest tzw. uogólniony schemat Pareto. Przypadek ten odpowiada sytuacji gdy wszyscy decydenci (eksperti) są „jednakowo ważni”. O elemencie  $y$  powiemy, że jest lepszy od elementu  $z$ , co zapiszemy  $(y, z) \in R_{OP}$  wtedy i tylko wtedy gdy

$$(y, z) \in R_k \quad \text{dla każdego } k \in \mathcal{K}$$

czyli 
$$R_{OP} = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} R_k \quad (4.2)$$

Relację  $R_{OP}$  nazywać będziemy relacją Pareto. Opisany powyżej schemat zawiera prawo „vets”, gdyż o tym, czy jakąś parę elementów  $(y, z)$  wykluczamy z relacji  $R_{OP}$  może zdecydować jeden, dowolny decydent. Z twierdzeń ogólnych o własnościach elementów ekstremalnych wynikają następujące fakty:

1) dla każdego  $k \in \mathcal{K}$ :  $Y_D^{R_{OP}} \subset Y_D^{R_k}, Y_N^{R_k} \subset Y_N^{R_{OP}}$

2) jeśli  $\bar{Y} > 1$  oraz dla pewnego  $k \in \mathcal{K}$ :  $R_k \cap (Y \not\approx Y) = \emptyset$ , to  $Y_D^{R_{OP}} \neq \emptyset$

(symbol  $Y \not\approx Y$  oznacza zbiór  $\{(y, z) \in Y \times Y \mid y \neq z\}$ )

3) jeśli dla pewnego  $k \in \mathcal{K}$ :  $R_k \cap (Y \not\approx Y) = \emptyset$ , to  $Y_N^{R_{OP}} = Y$

4) jeśli dla każdego  $k \in \mathcal{K}$ :  $Y \not\approx Y \subset R_k$ , to  $Y_D^{R_{OP}} = Y$

5) jeśli  $\bar{Y} > 1$  oraz dla każdego  $k \in \mathcal{K}$ :  $Y \not\approx Y \subset R_k$ , to  $Y_N^{R_{OP}} = \emptyset$

6) jeśli w kolektywie istnieje taki członek  $k \in \mathcal{K}$ , że  $R_k \subset R_l$  dla każdego  $l \in \mathcal{K}$ , to zadanie optymalizacji kolektywnej  $(Y, R_{OP})$  można zredukować do równoważnego [1] zadania  $(Y, R_k)$

7)  $Y_D^{R_{OP}} = \bigcap_{k \in \mathcal{K}} Y_D^{R_k}$ , [2]

8)  $Y_N^{R_{OP}} = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} Y_N^{R_k}$ , [2]

Schemat Pareto jest jednym z najczęstszych schematów optymalizacji grupowej i często jest również pewnym odniesieniem porównawczym w trakcie analizy innych schematów optymalizacji grupowej. Podobnym schematem jest tzw. relacja większości głosów  $R_{WG}$  [2].

Określenie 4.2.

O parze elementów  $(y, z) \in B \times B$  powiemy, że należy do relacji  $R_{WG}$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taki podzbiór decydentów  $\bar{K} \subset K$  przy czym  $|\bar{K}| > \frac{1}{2}|K|$ , że  $(y, z) \in R_k$  dla każdego  $k \in \bar{K}$

$$R_{WG} = \left\{ (y, z) \in B \times B / (y, z) \in \bigcup_{\substack{\bar{K} \subset K \\ |\bar{K}| > \frac{1}{2}|K|}} \bigcap_{k \in \bar{K}} R_k \right\} \quad (4.3)$$

Latwo pokazać, że

- 1)  $R_{OP} \subset R_{WG}$ , a zatem :
- 2)  $Y_D^{R_{OP}} \subset Y_D^{R_{WG}}$  oraz  $Y_N^{R_{WG}} \subset Y_N^{R_{OP}}$

Wynika stąd, że optymalizacja kolektywna polegająca na stosowaniu relacji większości głosów zawsze prowadzi do rozwiązań optymalnych w sensie Pareto (o ile istnieją rozwiązania niezdominowane).

Kolejnym, elementarnym schematem jest relacja kolektywnej tolerancji  $R_{KT}$ . Można ją zdefiniować następująco

$$R_{KT} = \left\{ (y, z) \in B \times B / \text{istnieje } k \in K, \text{ że } (y, z) \in R_k \right\}. \quad (4.4)$$

Zatem  $R_{KT} = \bigcup_{k \in K} R_k$  (patrz (4.2))

Tu również łatwo pokazać, że ponieważ  $R_{OP} \subset R_{KT}$ , to

- 1)  $Y_D^{R_{OP}} \subset Y_D^{R_{KT}}$  oraz  $Y_D^{R_k} \subset Y_D^{R_{KT}}$ ,  $k \in K$
- 2)  $Y_N^{R_{KT}} \subset Y_N^{R_{OP}}$  oraz  $Y_N^{R_{KT}} \subset Y_N^{R_k}$ ,  $k \in K$

Odpowiednikiem optymalizacji hierarchicznej, o której była mowa w punkcie 3 pracy jest sytuacja gdy wśród członków kolektywu  $K$

ustalona jest hierarchia ważności (np. wg kompetencji merytorycznych itp.). Schematów hierarchicznych relacji dominowania  $R_{OH}$  może być wiele, <sup>oto</sup> niektóre z nich:

$$R_{OH}^1 = \left\{ (y, z) \in B \times B / \text{istnieje } k \in \mathcal{K}, \text{ że } (y, z) \in R_k \text{ oraz } (y, z) \in R_1 \text{ i } (z, y) \in R_1 \text{ dla } 1 < k \right\} \quad (4.5)$$

$$R_{OH}^2 = \left\{ (y, z) \in B \times B / \text{istnieje } k \in \mathcal{K}, \text{ że } (y, z) \in R_1 \text{ dla } 1 \leq k \right\}, \quad (4.6)$$

$$R_{OH}^3 = \left\{ (y, z) \in B \times B / \text{istnieje } k \in \mathcal{K}, \text{ że } (y, z) \in R_k \text{ oraz dla } 1 < k (z, y) \notin R_1 \right\}, \quad (4.7)$$

$$R_{OH}^4 = \left\{ (y, z) \in B \times B / \text{istnieje } k \in \mathcal{K}, \text{ że } (y, z) \in R_k \text{ oraz dla } 1 < k (y, z) \notin R_1 \text{ i } (z, y) \notin R_1 \right\}, \quad (4.8)$$

Powyższe schematy wiąże się ze schematem Pareto podobnymi zależnościami jak  $R_{WG}$  i  $R_{KT}$

## 5. OPTIMALIZACJA PRZY WIELU CELACH

Sformułowanie zadania wyboru elementu optymalnego w kategoriach przestrzeni z relacją umożliwia bardzo ogólne ujęcie optymalizacji, obejmując jej zakres dowolną „regułę wyboru”.

W praktyce bardzo częste „motywy przewodnie” na etapie formułowania zadania optymalizacji jest dążenie decydenta do wyznaczenia rozwiązania znajdującego się najbliżej pewnego znanego mu celu (wzorca). Metoda optymalizacji polegająca na wyznaczaniu rozwiązań o takiej własności, a mianowicie, że wyraża bardzo naturalny schemat postępowania optymalizacyjnego (dążenie do osiągnięcia pożądanego celu), znajduje bardzo wiele zastosowań.

Niech zatem  $Q \subset B$  - oznacza pożądaną cel w przestrzeni kryterialnej (bardzo często zakłada się, że  $Q = \{y^*\}$ ). Ze względów oczywistych dalsze rozważania ograniczymy do przypadku gdy:

$$Y \cap Q = \emptyset \quad (5.1)$$

Skoro zatem żaden z elementów  $Q$  nie jest osiągalny, to można poszukiwać takich elementów  $\bar{y} \in Y$ , które znajdują się najbliżej  $Q$ . Powstaje w tym miejscu zagadnienie określania pojęcia bliskości (odległości) elementów  $y \in Y$  względem  $Q$ . Pojęcie to można wprowadzić posługując się relacją bliskości  $R_Q \subset B \times B$  [1].

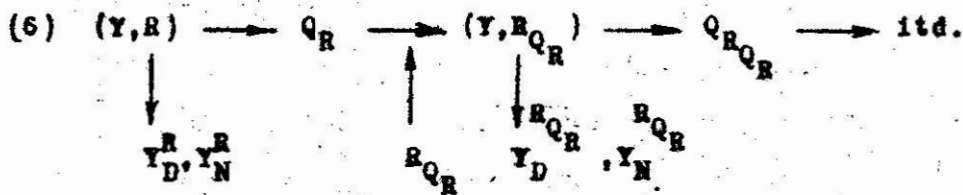
O elementach  $(y, z) \in R_Q$  powiemy, że element  $y$  znajduje się bliżej (nie dalej)  $Q$  niż element  $z$ . Relacja  $R_Q$  może być zdefiniowana w oparciu o pewną metrykę (normę) lub też w inny sposób (np. mnogociowy). Przy takiej interpretacji relacji  $R_Q$ , możemy sformułować zadanie optymalizacji w ogólnych kategoriach przestrzeni z relacją w postaci pary  $(Y, R_Q)$ . Rozwiązaniami takiego zadania będą odpowiednio:  $Y_D^{R_Q}$  - zbiór rozwiązań najbliższych względem celu  $Q$ ,  $Y_N^{R_Q}$  - zbiór elementów, od których nie ma bliższych względem celu  $Q$ . Można w tym miejscu zadać pytanie czym dla decydenta jest cel  $Q$ , i jaki związek łączy jego cel z przyjętym modelem preferencji, który może być wyrażony poprzez relacje dominowania  $R$ ? Otóż niewątpliwie cel  $Q$  powinien być pewną charakterystyką przyjętej zasady preferencji, a więc pewną funkcję relacji dominowania  $R$ . Bardzo częste w zagadnieniach „optymalizacji docelowej” cel  $Q$  jest z góry zadany. Gdy jednak tak nie jest, a znana jest relacja dominowania  $R$  - cel  $Q_R$  można wyznaczyć na jej podstawie. Analizując przestrzeń ocen  $B$  można wskazać zbiór elementów  $y$  takich, że każdy z nich jest lepszy w sensie  $R$  od dowolnego elementu  $z$  ze zbioru  $Y$ . Zbiór tych elementów nosi nazwę zbioru ograniczeń dolnych zbioru  $Y$  i jest oznaczany symbolem  $l_d(Y, R)$  [1].

Wyznaczając dla tego zbioru zbiór elementów największych otrzymujemy cel  $Q_R$ , generowany przez  $(Y, R)$ . Zatem

$$Q_R = \left[ l_d(Y, R) \right]_{\sup}^R \quad \text{i jest to kres dolny zbioru } Y$$

w przestrzeni  $B$  z relacją  $R$ , który najczęściej jest oznaczony w literaturze symbolem  $\text{inf}_R Y$ .

Możemy wobec tego powiedzieć, że każde zadanie optymalizacji  $(Y, R)$  generuje w sposób naturalny cel  $Q_R = \text{inf}_R Y$ , a tym samym stwarza przesłankę do sformułowania zadania optymalizacji „docelowej”, poprzez określenie odpowiedniej relacji bliskości  $R_{Q_R}$ . Schemat ten możemy ująć następująco:



Zagadnienia optymalizacji grupowej często są formułowane jako zagadnienia optymalizacji przy wielu relacjach dominowania. W naturalny sposób powstaje w takiej sytuacji zagadnienie optymalizacji z wieloma celami. Cele te mogą być określone jako kresy dolne zbioru  $Y$  przy poszczególnych relacjach dominowania  $R_k, k \in \mathcal{K}$ . Może to też wystąpić przypadek, że z góry jest a priori ustalony jeden cel a zbiór celów, w stosunku do których należy wyznaczyć rozwiązania najbliższe. Poniżej rozpatrzmy zadanie optymalizacji, polegające na wyborze ze zbioru  $Y \subset B$  elementów najbliższych wielu celom. Niech  $S \subset 2^B$  - zbiór zadanych (wygenerowanych) celów  $Q_k$  w przestrzeni  $B$ . W szczególnym przypadku może to być zbiór punktów idealnych  $\bar{y}^k, k \in \mathcal{K}$  ( $Q_k = \{\bar{y}^k\}$ ) [1, 10]. Rozpatrywana sytuacja decyzyjna, może odpowiadać rozważanemu w [2] zadaniu optymalizacji grupowej (kolektywnej), w którym każdy ekspert dysponuje własnym modelem preferencji w postaci relacji  $R_k, k \in \mathcal{K}$  (a zatem i celom  $Q_k$ ). Zadaniem całego zespołu jest wybranie elementu  $y \in Y$  (lub pewnego podzbioru takich elementów), który znajduje się najbliżej celów  $Q_k, k \in \mathcal{K}$  wszystkich ekspertów.  $K$  zadań  $(Y, R_k), k \in \mathcal{K}$  optymalizacji z relacją generuje zatem  $K$  cząstkowych zadań



$(Y, R_{Q_k})$  optymalizacji docelowej dla  $k \in \mathcal{K}$ .

Określenie 5.1.

Zadaniem optymalizacji przy wielu celach nazywamy zadanie  $(Y, R)$ , gdzie

$$R = f(R_Q ; Q \in S), \text{ zaś}$$

$$f : 2^{B \times B} \times \dots \times 2^{B \times B} \rightarrow 2^{B \times B} - \text{funkcja agregacji}$$

relacji dominowania.

$S$  - zbiór celów (np.  $Q_k \in S$ )

Tak sformułowane zadanie jest więc zadaniem optymalizacji przy wielu relacjach dominowania.

Na szczególną uwagę zasługuje tu schemat agregacji Pareto, który równoprawnie traktuje wszystkie cząstkowe relacje bliskości. Rozwiązania dominujące zadania  $(Y, R)$  mają przy tym interpretację rozwiązań znajdujących się najbliżej wszystkich celów jednocześnie, zaś rozwiązania niezdominowane tego zadania mają interpretację rozwiązań od których nie ma bliższych względem wszystkich celów jednocześnie.

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W prezentowanej pracy przedstawiono pewne aspekty teoretyczne formułowania zadań optymalizacji z wieloma wskaźnikami jakości jak też badanie własności rozwiązań tak sformułowanych zadań. Pominięto zupełnie metody wyznaczania zdefiniowanych rozwiązań. Naturalną konsekwencją zadań optymalizacji z wieloma wskaźnikami jakości są zadania z wieloma relacjami dominowania czyli zadania tzw. optymalizacji kolektywnej. Te zaś zadania generują w naturalny sposób zadania z wieloma celami.

Klamrą spinającą omawiane wyżej grupy zadań jest ta sama koncepcja definicji „rozwiązania najlepszego” czyli tzw. rozwiązania optymalnego, a co za tym idzie możliwość korzystania z ogólnych pod-

stawowych twierdzeń w trakcie konstruowania algorytmów obliczeniowych i badania własności wszystkich rozwiązań.

#### Literatura

- [1] Ameljanczyk A.: Optymalizacja w przestrzeniach z relacją, Biul., WAT, XXXI, 7, (1982)
- [2] Ameljanczyk A.: Optimal solution of collective decision problems, Systems Science, vol.9, No.4, (1983)
- [3] Ameljanczyk A.: Metoda redukcji zbioru elementów optymalnych w sensie Pareto, Biul. WAT, XXXIII, 12, (1984)
- [4] Bergstressen K.; Charnes A.; Yu P.L.: Generalization of Domination Structures and Nondominated Solutions in Multi-criteria Decision Making, JOTA, vol. 18, No.1, (1976)
- [5] Keeney R.L., Raiffa M.: Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs, J.Wiley and Sons, New York, (1976)
- [6] Nykowski I.: Rozwiązania kompromisowe w wielokryteriowym programowaniu liniowym, Przegląd Statystyczny, k.24, Nr 1, (1977)
- [7] Stanoulov N.: Common Theory for Individual and Group Decision Making, Procc. 9<sup>th</sup> IFAC World Congress, vol.5, Budapest, (1984)
- [8] Wierzbicki A.P.: Metody optymalizacji przy wektorowych wskaźnikach jakości - w pracy zb., Modelowanie społeczno-ekonomicznego rozwoju kraju<sup>2</sup> pod red. R. Kulikowskiego, PWN, (1979)
- [9] Wierzbicki A.P.: Critical Essay on the Methodology of Multi-objective Analysis, Regional and Urban Economics, No.13 (1983)
- [10] Zeleny M.: A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal, Computers and Operations Research, vol.1, No.4, (1974)
- [11] Zeleny M.: Compromise Programming in Multiple Criteria Decision Making, Univ. of South Carolina Press, (1976)

- [12] Yu P.L., Leitsmann G.: **Compromise Solutions, Domination Structures and Salukwadze's Solution**, JOTA, vol.13, No.3 (1974)
- [13] Yu P.L., Freimer M.: **Some New Results on Compromise Solutions for Group Decision Problems**, Management Science, vol.22, No.6 (1976)

## ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ОТНОШЕНИЕМ ДОМИНИРОВАНИЯ

### Резюме

В работе рассматривается общая схема задачи оптимизации базирующая на отношении доминирования. Применяя понятие экстремальных элементов, сформулировано решение задачи многокритериальной оптимизации, коллективной оптимизации и задачи оптимизации с множеством целей. Работа имеет монографический вид.

## OPTIMIZATION PROBLEMS WITH DOMINATION RELATION

### Summary

In the paper a general schema of an optimisation problem based on domination relation is presented. The solution of multicriterial optimization problem, the collective optimisation problem and the optimisation problem with multiple goals are defined by using the concept of extremal elements. The paper has a monographic character.

Praca została przesłana dnia 10.02.1986r.

## V KONFERENCJA „POLIOPTYMALIZACJA W PROJEKTOWANIU”

MIELNO 86

Tadeusz Bil

Wydział Mechaniczny

Wyższa Szkoła Inżynierska

Wojciech Tarnowski

Instytut Automatyki

Politechnika Śląska w Gliwicach

POLIOPTYMALIZACJA MECHANIZMU ZE WZGLĘDU NA KOSZT  
I LUZ PRZY LGSOWYCH ODCHYLEKACH WYKONAWCZYCH

W pracy przedstawiono polioptymalizację mechanizmu korbowego ze względu na dwa kryteria: koszt wykonania elementów i wariację luzu wynikowego przy dwunastu zmiennych decyzyjnych w postaci tolerancji wykonania wymiarów i współczynników zmienności w ujęciu probabilistycznym.

Optymalizację przeprowadzono metodą funkcji kary wykorzystując algorytm zmiennej metryki.

Wykazano możliwość zastosowania mikrokomputerów klasy Spectrum do rozwiązania złożonych zadań konstrukcyjnych.

## 1. Wstęp

Podstawowym celem procesu konstrukcyjnego jest ustalenie wartości cech konstrukcyjnych /tzn. wymiarów, tworzyw i stanów początkowych/, a właściwie pożądanych rozkładów statystycznych tych wartości. Powinny być one optymalne ze względu na określone kryteria np. wytrzymałościowe, dokładnościowe. Kryteria te określane są przez konstruktora [1].

Najbardziej ogólnym kryterium optymalizacji jest kryterium ekonomiczne wyrażające się przez minimum kosztów produkcji i eksploatacji maszyn i urządzeń. Podstawowym składnikiem kosztów społecznych najczęściej jest koszt produkcji, zależny w znacznym stopniu od tolerancji wymiarów i innych cech konstrukcyjnych a także od ich rozkładów w obrębie pola tolerancji. Praktyka przemysłowa dowodzi, że zmniejszenie wartości tolerancji powoduje szybki wzrost kosztów wytwarzania. Wpływ rozkładów gęstości występowania wymiarów w obrębie pola tolerancji jest trudny do określenia i z tego powodu z reguły nie jest

brany pod uwagę.

Drugim nie mniej ważnym składnikiem społecznych kosztów wytwarzania jest koszt eksploatacji urządzenia, który na etapie konstruowania jest bardzo trudny do określenia. Można jednak przyjąć, że w przypadku mechanizmów pomiarowych luzy w połączeniach ruchowych mają wielki wpływ na jakość i koszt eksploatacji urządzeń. W praktyce konstrukcyjnej robi się co najwyżej analizę przedziałową luzów, tzn. określa się graniczne wartości luzów. Nie pozwala to na racjonalny dobór tolerancji oraz rozkładów wymiarów w ramach tolerancji.

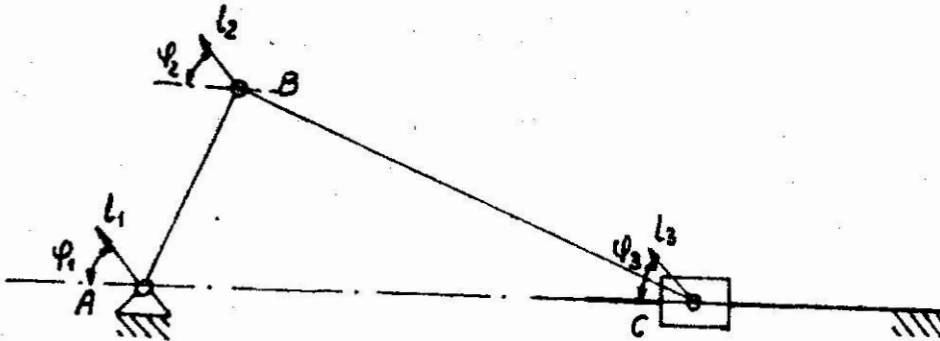
W pracy niniejszej przedstawiono próbę określenia cech konstrukcyjnych w ujęciu probabilistycznym na przykładzie mechanizmu korbowego.

## 2. Wybór zmiennych decyzyjnych dla wybranego przykładu.

Zadaniem jest skonstruowanie najtańszego ze względu na koszt wykonania mechanizmu /rys.1/, tak aby wariancja luzu wynikowego mierzonego w p. C była minimalna. Zakładamy przy tym, że wymiary nominalne elementów zostały określone wcześniej na podstawie innych wymagań /np. funkcjonalnych/. Zmiennymi od których najsilniej zależy koszt wykonania są więc tolerancje wykonania elementów połączeń ruchomych w punktach A, B, C mechanizmu. Jeżeli założyc seryjną produkcję elementów to można przyjąć, że rozkłady prawdopodobieństwa występowania wymiarów w obrębie pola tolerancji będą dostatecznie zgodne z rozkładem normalnym /Gausa/. Parametrami, które podlegają określeniu dla rozkładów są wartości tolerancji  $T_i$  i wariancja zmienności wymiarów  $\sigma_i^2$  lub współczynnik zmienności  $k_i$ , które są powiązane zależnością [2]:

$$k_i = \frac{6\sigma_i}{T_i}$$

(1)



Rys.1. Schemat optymalizowanego mechanizmu korbowego.

Zmiennymi decyzyjnymi mogą więc być:

a/ tolerancje  $T_i$  wymiarów charakteryzująca proces technologiczny wytwarzania elementów, posiadająca bezpośredni wpływ na koszt wytwarzania;

b/ współczynnik zmienności  $k_i$ , określający wielkość szerokości pola tolerancji, czyli odchyłki jako część wymiaru elementu przy danej tolerancji  $G_i$ ; może być wykorzystane do rantażu i jako część praktycznej, zostanie jako  $k_i$ , współczynnikiem zmienności na koszt całkowity wyrażeniami, które będzie poprzez prawdopodobieństwo odrzucenia elementów o odchyłkach przekraczających odchyłki dopuszczalne.

### 3. Określenie funkcji celu

Najczęściej spotykaną funkcją kosztów wykonania w zależności od wariancji wymiarów jest zależność:

$$K_i = K_{0i} \left( a_i + \frac{b_i}{G_i^c} \right) \quad /2/$$

gdzie  $K_{0i}$  - stała wartość kosztów wykonania  $i$ -tego elementu /koszt materiałów, narzuty i tp./,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  - parametry zależne od warunków produkcyjnych danego zakładu.

Koszt całkowity wykonania trzech rozpatrywanych elementów mechanizmu będzie się więc przedstawiał w postaci następującej funkcji:

$$K = \sum_{i=1}^3 (K_{i0} + K_{iu}) \cdot (1 + P_{i0} + P_{iu} - P_{i0} \cdot P_{iu}) \quad /3/$$

gdzie symbole "o", "x" określają odpowiednio otwór i wałek,  $P_i$  prawdopodobieństwo, że wymiar znajduje się poza polem tolerancji, a czynnik  $P_o \cdot P_w$  uwzględnia sytuację jednoczesnego wykonania braku otworu i wałka w tym samym elemencie. Prawdopodobieństwo  $P_i$  może być określone na podstawie znormalizowanej funkcji Laplace'a:

$$1 - P_i = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_i} e^{-\frac{z_i^2}{2}} dz \quad /4/$$

gdzie  $z_i = \frac{z}{k_i}$ ,  $k_i$  - współczynnik zmienności.

Jako drugie kryterium optymalności konstrukcji przyjmujemy wartość wariancji luzu wynikowego mierzonego w p. C mechanizmu. Luz ten można obliczyć na podstawie różnicy położenia punktu C przy uwzględnieniu luzu i bez. Najbardziej niekorzystnym przypadkiem wpływu luzów będzie taki, przy którym wszystkie wektory luzów będą równoległe do siebie. Możemy wtedy zapisać:

$$s_l^2 = \sum_{i=1}^3 (G_{i_o}^2 + G_{i_w}^2) \cdot \alpha_i \quad /5/$$

gdzie  $s_l^2$  - wariancja luzu,  $\alpha_i$  - współczynnik wpływu poszczególnych luzów na luz wynikowy  $0 \leq \alpha_i = |\cos \varphi_i| \leq 1$ ,  $\varphi_i$  - kąt między wektorem luzu i osią na której luz wynikowy jest mierzony.

#### 4. Sformułowanie zadania polioptymalizacji

Wektor zmiennych decyzyjnych:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{12}]^T \quad /6/$$

z których pierwsze sześć to wartości tolerancji  $T_i$ , a następne to wartości 6 współczynników zmienności.

Wektor kryteriów:

$$[K_1, K_2]^T \quad /7/$$

gdzie:  $K_1$  przedstawia koszt wykonania wg wzoru /2/ a  $K_2$  - jest wariancją luzu wynikowego.



Zadanie polioptymalizacji jest: należy znaleźć taki wektor  $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_{ii}^*]^T$  dla którego uzyskamy jednocześnie minimalne wartości obu funkcji kryterialnych. Ponieważ kryteria te są przeciwstawne /zmniejszenie kosztów jest możliwe tylko poprzez wzrost luzu/, sformułujemy więc funkcję celu jako minimum kosztów wykonania /3/ z ograniczeniem:

$$sl^2 - sl_0^2 \leq 0 \quad /8/$$

gdzie  $sl_0^2$  - dopuszczalna wartość wariancji luzu wynikowego.

Zmieniając dopuszczalne wartości  $sl_0$  uzyskamy zbiór rozwiązań optymalnych w sensie Pareto.

Funkcja celu w rozpatrywanym przypadku składa się z dwu części: kryterium właściwego w postaci zależności /3/ i funkcji kary

$$f_k = \frac{(sl^2 - sl_0^2)^2}{\delta} \quad /9/$$

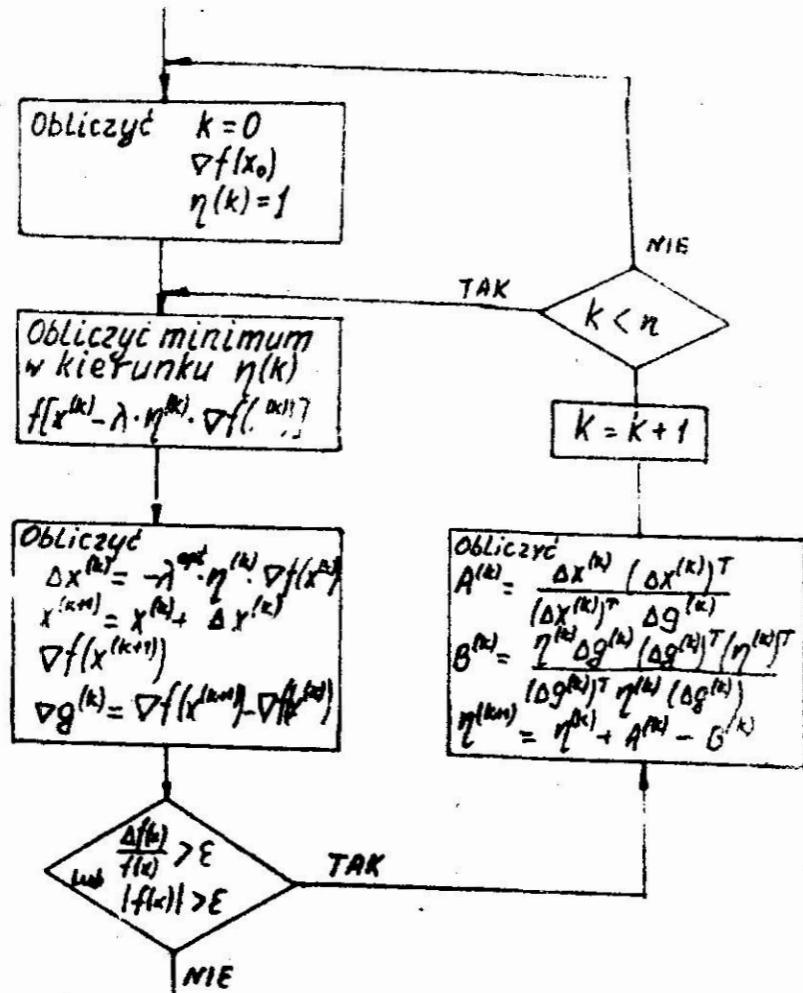
dozwolonej do zależności /3/ w przypadku niespełnienia nierówności /8/. Współczynnik  $\delta$  określa przy tym wpływ funkcji kary. Współczynnik ten maleje wraz z postępem optymalizacji tak aby nierówność /8/ była bezwzględnie spełniona dla całego zbioru rozwiązań optymalnych.

##### 5. Proces i algorytm optymalizacji

Rozwój techniki mikroprocesorowej w ostatnich latach dał inżynierom konstruktorom do ręki wielce użyteczne narzędzie w postaci mikrokomputerów. Jednak utarło się przekonanie, że nie nadaje się ono do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień. W pracy niniejszej pokazano próbę wykorzystania tych właśnie prostych narzędzi do realizacji dość skomplikowanego zadania jakim jest polioptymalizacja.

Jako procedurę optymalizacji wykorzystano algorytm zmiennej metryki Davidona - Fletchera - Powella /DFP/ [3], którego sieć działań przedstawiono na rys. 2 .

Algorytm ten wykorzystuje dla celów aproksymacji macierzy odwrotności drugich pochodnych n-krotne obliczanie pierwszych pochodnych funkcji celu; n - liczba zmiennych decyzyjnych.



Rys.2. Sieć działań algorytmu DFP

W wielu zadaniach optymalizacji funkcje celu albo nie posiadają analitycznych postaci pochodnych cząstkowych, albo ich wyprowadzenie wiąże się ze znacznymi trudnościami. Dlatego też przyjęto obliczanie numeryczne pochodnych funkcji celu z zależności:

$$\nabla f(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i - \Delta x_i)}{2 \Delta x_i} \quad /10/$$

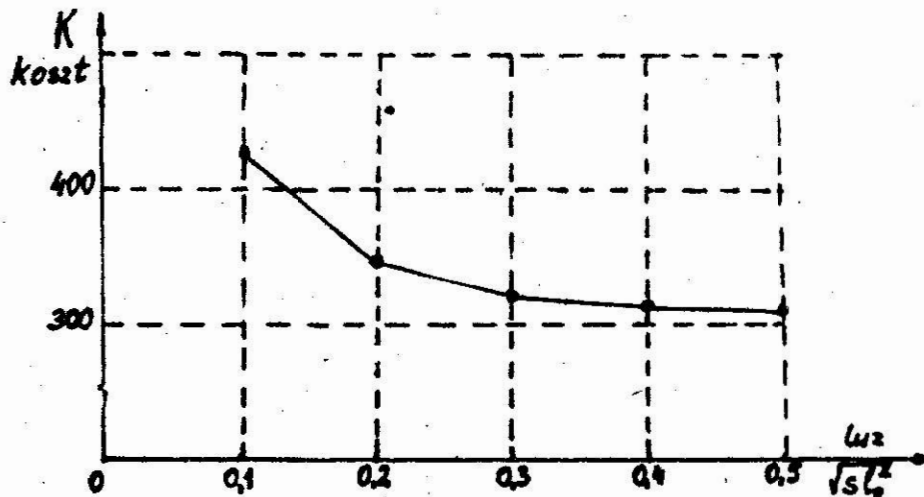
co prowadzi jednak do znacznego zwiększenia czasochłonności obliczeń w porównaniu z zależnością:

$$\nabla f(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)}{\Delta x_i} \quad /11/$$

TABLICA

Luz	$sl_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
tolerancje	$T_1$	0.048477	0.096338	0.144642	0.188529	0.223397
	$T_2$	0.056412	0.114617	0.169728	0.233453	0.271558
	$T_3$	0.029337	0.057561	0.087351	0.114305	0.152391
	$T_4$	0.03264	0.066144	0.099121	0.132944	0.183451
	$T_5$	0.033478	0.065883	0.098767	0.131205	0.168116
	$T_6$	0.037143	0.074519	0.114281	0.148329	0.202999
współczynniki zmienności	$k_1$	1.827958	1.360545	1.205661	1.110682	1.070000
	$k_2$	2.076124	1.447469	1.268502	1.178842	1.184895
	$k_3$	2.813142	1.755669	1.414925	1.287100	1.115525
	$k_4$	3.108820	1.873000	1.628255	1.407343	1.183996
	$k_5$	2.594653	1.630562	1.308275	1.222323	1.119638
	$k_6$	3.030612	1.843727	1.433444	1.331298	1.197204
Koszt		421.20	350.75	328.59	318.74	313.49

Wartości tolerancji są funkcją zależną od parametrów  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $C_i$  /2/ jakie zostały przyjęte dla poszczególnych elementów. W rozpatrywanym przykładzie przyjęto następujące wartości parametrów:  $K_{01}=100$ ,  $K_{02}=30$ ,  $K_{03}=20$ ,  $a_{01}=1$ ,  $a_{02}=1$ ,  $b_{01}=0.013$ ,  $b_{02}=0.044$ ,  $C_{01}=2$ ,  $C_{02}=1.81$ . Wartości współczynników zmienności szybko rosną wraz ze zmniejszaniem się tolerancji co świadczy o rosnącym wpływie kosztów braków w ogólnym koszcie produkcji.



Rys. 3. Zbiór rozwiązań polioptymalnych

która jest mniej czasochłonna, jednakże może prowadzić do zmniejszenia się zbieżności procesu w wyniku kumulowania się błędów obliczeniowych. Może to prowadzić do przedwczesnego zakończenia procesu optymalizacji.

Algorytm DFF jest również czuły na dokładność minimalizacji w kierunku. W pracy niniejszej zastosowano minimalizację w kierunku metodą aproksymacji kwadratowej na podstawie trzech punktów, z których środkowy odpowiada najmniejszej wartości funkcji celu.

Program optymalizacji napisano w języku BASIC i zrealizowano na mikrokomputerze ZX Spectrum.

Czas obliczeń dla poszczególnych punktów wahał się od 2 do 8 godzin, z tym, że optymalizacja początkowa była bardzo efektywna a wartości uzyskane po kilkudziesięciu minutach nieznacznie odbiegały od rozwiązań optymalnych.

## 6. Uzyskane rezultaty i wnioski

Wyniki obliczeń wyżej omówionego procesu optymalizacji przedstawiono w tabelicy. Na rys. 3 przedstawiono zbiór uzyskanych rozwiązań.

Wykreślne przedstawienie zbioru rozwiązań polioptymalnych /rys.3/ pozwala konstruktorowi na wgląd w naturę konfliktu między kryteriami i ułatwia podjęcie racjonalnej decyzji [4].

Wykazano, że możliwe jest wykorzystanie taniego 8-bitowego mikrokomputera o małej pamięci /48 kB/ do optymalizacji dość złożonych zadań konstrukcyjnych /12 zmiennych decyzyjnych, część w ujęciu probabilistycznym/, choć trzeba przyznać, że trwało to bardzo długo /około 30 godzin/.

### Literatura

1. Tarnowski W.: Model procesu wyboru w projektowaniu technicznym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria „Automatyka”, s.72. Gliwice, 1984.
2. Jezierski J.: Analiza tolerancji i niedokładności pomiarów w budowie maszyn. WNT Warszawa, 1983.
3. Himmelblau D.M.: Applied nonlinear programming. McGraw - Hill Book Company, 1972.
4. Tarnowski W.: Polioptymalizacja w projektowaniu-próba syntezy. Zeszyty Naukowe WS Inż., Koszalin 1986.

ПОЛИОПТИМИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ  
СТОИМОСТИ ПРОИЗВОДСТВА И РАЗОРА ПРИ НАЛИЧИИ  
СЛУЧАЙНЫХ ПРОИЗВОЛСТВЕННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Резюме

В работе представлено полиоптимизация механизма при условии учета двух критериев: стоимости производства элементов и разброса величины результирующего зазора в механизме при использовании двенадцати варьируемых параметров в виде попусков и коэффициентов влияния попусков при их случайном характере появления.

Оптимизация выполнена методом штрафных функции используя алгоритм переменной метрики. Показано возможность использования 8-битовых микро-ЭВМ для решения сложных конструкторских задач.

POLYOPTIMIZATION OF A MECHANISM ON THE MANUFACTURING  
COST AND ON THE BACKLASH OF THE MECHANISM, WITH RAN-  
DOM DEFINITION OF DIMENSIONS DEVIATIONS

Summary

Polyoptimization of the sliding-block mechanism is presented. Two criteria of optimality are adapted: the manufacturing cost of elements and the variance of the total backlash effect in the mechanism. As much as twelve decision variables are used, these are six tolerances and six variances of manufacturing errors of dimensions, with a probabilistic definition.

Optimization is done by a method with the penalty function and a variable metrics algorithm.

Besides, it is confirmed the usefulness of small 8-bits micro-computers to fairly complex design tasks.

V KONFERENCJA "POLIOPTIMALIZACJA W PROJEKTOWANIU"

MIELNO 86

Włodzimierz W. Bojarski  
Inst. Podstaw. Probl. Techn. PAN  
Zakład Problemów Energetyki

PROBLEMY OPTIMALIZACJI I HARMONIZACJI  
SYSTEMÓW SOCJO-TECHNICZNO-EKOLOGICZNYCH.

Rozróżnia się ocenę i optymalizację wewnętrzną i zewnętrzną danego systemu. W wielkich systemach o hierarchicznej strukturze przynależności i realizacji celu /zadania/ głębokość i szerokość optymalizacji, a także jej dalekowzroczność, może być różna, co wymaga dodatkowego określenia. Stosowane procedury formalne optymalizacji wielokryterialnej nie uwzględniają doświadczeń, preferencji i intuicji decydenta i użytkownika systemu, a także licznych istotnych czynników trudnomyślnych.

Pomocne może być wykorzystanie pojęć uporządkowania i dostosowania oraz klasycznych idei harmonizacji. Istnieje bowiem związek pomiędzy uporządkowaniem i dostosowaniem, a skutecznością, nakładami, efektami, stratami i efektywnością działania systemu w otoczeniu. Istotne jest właściwe sformułowanie problemu harmonizacji danego systemu. Drogi poszukiwania rozwiązania mogą być różne. Nie są one dostatecznie opracowane.

1. Istotne problemy cywilizacji technicznej

Dotychczas brak jest dostatecznej wiedzy i umiejętności do tworzenia dużych, dobrze zorganizowanych całości systemowych, złożonych z różnych rodzajów grup elementów. Każdym rodzajem elementów i podsystemów rządzą odrębne prawa i zajmują się inne dyscypliny naukowe. Elementy przynależne do różnych grup są sobie "obce" i częstokroć oddziałują na siebie destrukcyjnie. Zarówno nowożytna nauka jak i administracja są wyspecjalizowane w wąskich zagadnieniach sektorowych, dotyczących pojedynczych rodzajów elementów i podsystemów. Nie są one dostatecznie kompetentne do rozwiązywania dużych, kompleksowych i wielodyscyplinarnych zagadnień współczesnej praktyki. Z tego powodu w licznych przypadkach związanych z potrzebą tworzenia, przebudowy czy właściwego eksploataowania złożonego systemu socjo-techniczno-ekologicznego powtarzają się dwa rodzaje błęd-

dów:

- 1/ Istotnie kompleksowy problem socjo-techniczno-ekologiczny fałszywie redukuje się tylko do jednego monodyscyplinarnego podproblemu, najczęściej technicznego.
- 2/ Istotnie kompleksowy problem, jak wyżej, fałszywie się rozwiązuje w oparciu o umiejętności i doświadczenia dotyczące tylko jednego rodzaju elementów, najczęściej technicznych. Szczególnie nieadekwatna do współczesnych problemów jest tzw. mentalność technokratyczna - [1], [4]. Nie ma ona zrozumienia dla złożoności i autonomizacji procesów biologicznych i nie chce respektować podmiotowego charakteru jednostek ludzkich. Ta ignorancja prowadzi do współczesnego kryzysu cywilizacji technicznej.

## 2. Rozpatrywana klasa systemów

W referacie rozpatruje się wielki system socjo-techniczno-ekologiczny S-T-E o złożonej, hierarchicznej strukturze obejmowania /przejrzystości/. Ze względu na zasadniczą odmienność cech i zjawisk oraz dostępny typ wiedzy /i mentalności fachowców/ w systemie tym wyróżnia się następujące rodzaje czynników /pierwiastków/ - [2], [4]:

1. ludzi /kierowników, pracowników, klientów, użytkowników/,
2. środowisko żywe /zespoły innych organizmów i ich środowisko, ekosystemy/,
3. urządzenia /maszyny, aparaty, konstrukcje, budowle/,
4. materiały /także surowce, odpady, zasoby mineralne/,
5. energię /różne formy, a także oddziaływanie sił i pól/,
6. informację /także wrażenia i uczucia/.

Systemy typu S-T-E organizowane są celowo przez człowieka do realizacji określonych zadań. Do tego typu systemów należy dom rodzinny, szkoła, gospodarstwo rolne i zakład komunalny, bank, fabryka, całe miasto czy region gospodarczy. Najprostszym /elementarnym/ systemem S-T-E jest stanowisko pracy, czy użytkownika, obejmujące jednego człowieka, użytkowane przez niego środki techniczne, niezbędny do działania zasób energii i informacji oraz obejmującą to wszystko przestrzeń ekologiczną. W prostym systemie S-T-E, przeznaczonym do realizacji jednej funkcji, czynniki każdego rodzaju, zależnie od pełnionej przez nie roli w systemie, można jeszcze myślowo podzielić na

dwie grupy:

- grupę pasywną czynników, celowo przetwarzanych w systemie,
- grupę aktywną czynników, realizujących celowy proces przetwarzania w systemie.

Wszystkie grupy czynników pasywnych stanowią przetwarzany podsystem przedmiotów pracy. Na modelowym rys. 1 oznaczono przepływ tych czynników przez system w kierunku poziomym. Czynniki aktywne tworzą razem podsystem przetwarzający. Ponieważ jednak i one ulegają zużyciu w systemie, muszą być okresowo wymieniane, i ten przepływ zaznaczono na rys. 1 w kierunku pionowym.

Z ważniejszych cech systemu S-T-E warto jeszcze zważyć, że:

- system ten nie daje się ściśle wydzielić z otoczenia, gdyż jest istotnie skojarzony z innymi szerszymi systemami: środowiskiem, społeczeństwem, systemami infrastruktury technicznej /energetycznej, informacyjnej, transportowej/,
- system S-T-E w pewien sposób integruje wymienione wyżej systemy w ramach nadsystemu,
- w dłuższym okresie czasu system S-T-E funkcjonuje tylko dzięki procesom wymiany swoich elementów /czynników/ z otoczeniem,
- trzeba się także liczyć z istotną nieoznaczonością tego typu systemu i jego otoczenia - [3], [4].

### 3. Różne zakresy i poziomy doboru rozwiązania i oceny systemu

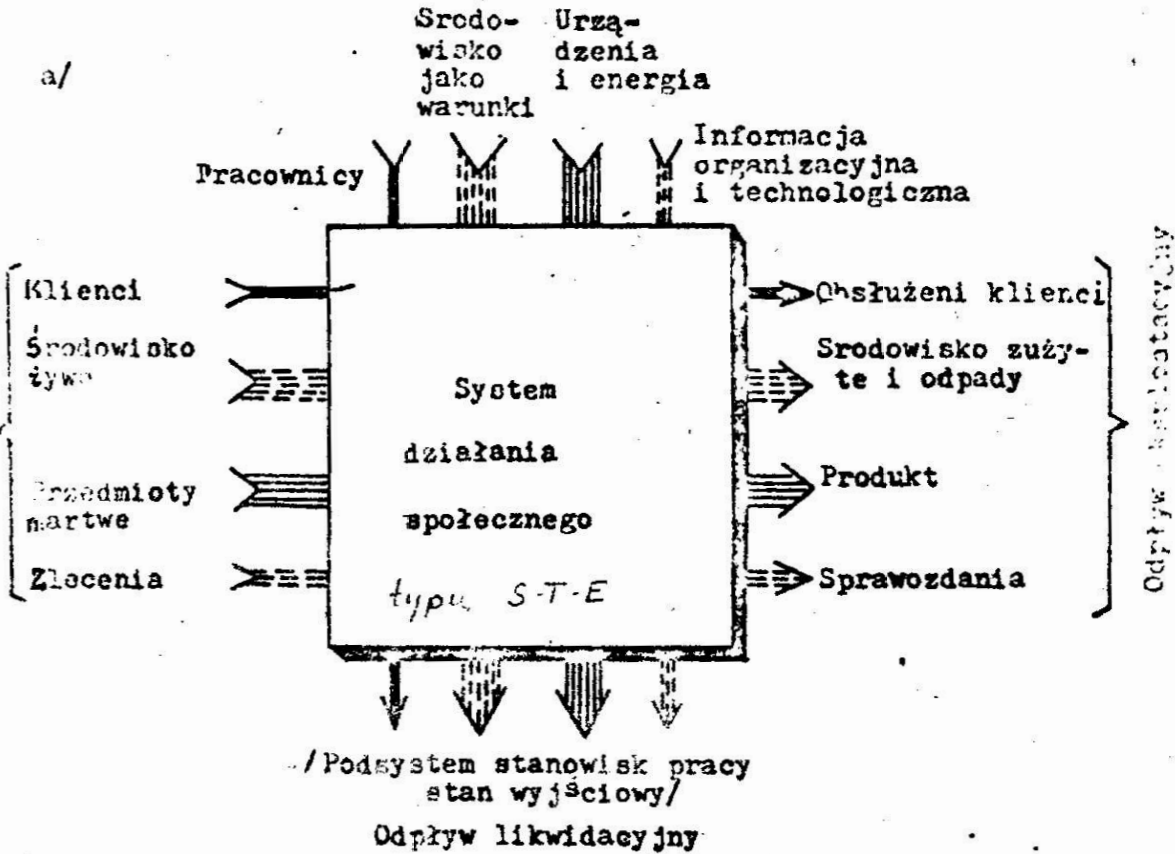
Podstawowe obiekty systemowe rozważanego typu S-T-E, jak np. dzielnica miasta, fabryka, szkoła, składają się zwykle z pewnej liczby podsystemów podobnego typu: budynków, oddziałów produkcyjnych czy klas szkolnych. Z drugiej strony każdy z tych obiektów musi być traktowany sam jako podsystem pewnego szerszego systemu także typu S-T-E np. miasta, przemysłu, nauczania. W hierarchii tych systemów istotne są związki funkcjonalne oraz zakresowej i terytorialnej przynależności /obejmowania, integracji/, które mogą, ale nie muszą, łączyć się z hierarchią zarządzania.

W tej sytuacji również każdy system /znajdujący się na dowolnym poziomie hierarchii/ musi być rozpatrywany, rozwiązywany i oceniany z punktu widzenia dwu różnych poziomów:



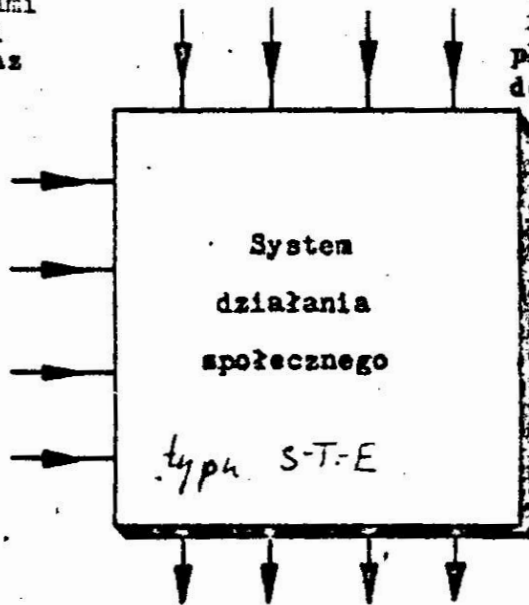
Dopływ inwestycyjno-remontowy  
/ Podsystem stanowisk pracy  
styn wejściowy/

a/



b/

Energia i informacja wnoszone do systemu wraz z przepływami oznaczonymi powyżej oraz ponierane odrębnie



Rys. 1. System typu S-T-E jako skrzyżowanie odgrywających różne role, skierowanych przepływów ludzi, żywego środowiska, materiałów i urządzeń oraz energii i informacji

Energia i informacja wnoszone wraz z przepływami lub rozpraszane

1. Jako podsystem pewnego szerszego systemu /z wyższego poziomu hierarchii/, do którego powinien on być odpowiednio dostosowany, aby odgrywać w nim właściwą rolę. Dostosowanie to musi uwzględniać role innych podsystemów w nadsystemie, istniejącą tam organizację oraz ogólne ograniczenia, preferencje itp.
2. Jako system, który sam jest złożony z prostszych podsystemów /z niższego poziomu hierarchii/ i powinien posiadać właściwą strukturę wewnętrzną związaną z odpowiednim podziałem funkcji, aby system ten jako całość funkcjonował z wymaganym poziomem niezawodności i efektywności.

Z pierwszym punktem widzenia łączy się ocena zewnętrzna danego systemu, a z drugim punktem widzenia - ocena wewnętrzna systemu. Podobnie można mówić o optymalizacji zewnętrznej i optymalizacji wewnętrznej rozwiązania systemu. Uwzględniając dalsze poziomy hierarchii systemowej można ocenę i optymalizację zewnętrzną systemu dalej poszerzać, a ocenę i optymalizację wewnętrzną systemu dalej pogłębiać.

Nieco podobnie można wyróżnić hierarchię problemów systemowych ze względu na uwzględniany horyzont czasu /przedział czasu/. Wreszcie trzeba rozróżniać rozwiązania systemowe i ich oceny ze względu na uwzględniany stopień indeterminizmu. Tabl. 1 podaje ogólną klasyfikację rozwiązań i ocen systemowych, z uwzględnieniem wymienionych aspektów.

4. Niedostatki /braki/ stosowanych procedur optymalizacyjnych

Procedury optymalizacyjne święcą niewątpliwe sukcesy w rozwiązywaniu urządzeń technicznych dobieranych do szerszego systemu technicznego przetwarzającego martwe przedmioty. Optymalizacja stanowi dobre narzędzie metodyczne do doboru i oceny rozwiązań wewnętrznych w systemach technicznych - T.

Poprawność tego podejścia załamuje się jednak już przy przejściu do oceny zewnętrznej systemu technicznego - T w tych przypadkach, gdy istotnym nadsystemem jest rozważany przez nas system socjo-techniczno-ekologiczny typu S-T-E. Uwzględnienie elementów socjo-ekologicznych prowadzi bowiem od razu do wieloaspektowości, niewymierności i niepewności. Ponadto uwzględnienie wielopodmiotowości wymaga liczenia się z różnymi skalami wartości i preferencji - [4].

T a b l i c a 1

Wartościowa klasyfikacja rozwiązań, ocen i optymalizacji systemu w ramach hierarchii systemowej

Cechy ujęcia systemu podlegające klasyfikacji			
1. Głębokość /ujęcia wewnętrzne/	2. Szerokość /ujęcia zewnętrzne/	3. Uwzględniany horyzont czasu	4. Uwzględniany stopień indeterminizmu
1.0 Zerowa /brak ujęcia wewnętrznego/	2.0 Zerowa /brak ujęcia zewnętrznego/	-	-
1.1 Płytka /jednopoziomowa	2.1 Lokalna /w ramach najbliższego nadsystemu/	3.1 Krótkoterminowa	4.1 Deterministyczna
1.2 Średnia /dwupoziomowa/	2.2 Krajowa /w ramach nad-systemu kraju/	3.2 Średnioterminowa	4.2 Probabilistyczna
1.3 Głęboka /wielopoziomowa/	2.3 Globalna /w skali światowej/	3.3 Długoterminowa	4.3 Strategiczna

Pomijanie tych wszystkich istotnych cech i aspektów systemów S-T-E, oraz stosowanie do nich rutynowych optymalizacji, przyjętych dla systemów technicznych - T, dało złe rezultaty i zraziło wielu badaczy. Pokonywanie występujących trudności przy właściwej ocenie rozwiązań systemów S-T-E rozwijało się w dwu kierunkach:

- ujawniania możliwie wszystkich bezpośrednich i pośrednich skutków fizycznych, ekologicznych i socjologicznych danego rozwiązania /każdego wariantu/ - w ramach tzw. wartościowania techniki /technology assessment/,
- rozwijania matematycznych metod klasyfikowania, porządkowania i oceny wielowartościowej rozwiązań - w ramach tzw. optymalizacji wielokryterialnej.

Pierwszy kierunek wnosi wiele istotnych nowych informacji do oceny systemów S-T-E i jego znaczenie jest bardzo duże. W praktyce rozwija się jednak dosyć powoli ze względu na brak zainteresowania wielu decydentów i menadżerów dla pełnej, obiektywnej oceny forsowanych przez nich rozwiązań.

Rozwój drugiego kierunku doprowadził do znacznego skomplikowania narzędzi matematycznych i uzależnienia wyników od wielu dosyć subiektywnie przyjmowanych założeń. Dla praktyków odstraszająca jest wyrafinowana forma matematyczna, złożona procedura przygotowania danych, pewna dowolność założeń i niejednoznaczność wyników. Często towarzyszy temu niepełne wykorzystanie trudnych do sformalizowania doświadczeń, przypuszczeń i intuicji, którymi praktycy chętnie i dosyć trafnie się kierują - [1], [5].

W praktyce podejścia te posiadają także szereg dalszych słabych punktów:

- trudność i niepewność oceny dotyczącej skutków realizacji wariantów rozwiązania,
- trudność uwzględnienia aspektów jakościowych i niemierzalnych,
- niepełność i niepewność ujęć ilościowych,
- niepewność i wielość ocen wartościujących,
- niejednoznaczność wyników i trudność interpretacji,
- trudność weryfikacji poprawności całego postępowania.

Ostatnio pojawiają się próby przeswyciężenia tych trudności - np. w [6]. Istnieje jednak potrzeba dalszego poszukiwania

prostych i bardziej efektywnych metod doboru i oceny rozwiązań systemów S-T-E.

#### 5. Uporządkowanie i zorganizowanie w systemie

Wśród badaczy istnieje przekonanie o związku pomiędzy uporządkowaniem i zorganizowaniem systemu, a jego efektywnością. Wydaje się oczywiste, że efekt czyli oczekiwane i oceniane pozytywnie zmiany rzeczywistości realizowane przez system, są tym większe im dany system jest lepiej wewnętrznie uporządkowany i zorganizowany oraz lepiej dostosowany do roli w nadsystemie. Natomiast związane z tą realizacją, oceniane negatywnie zmiany rzeczywistości /nakłady, koszty, straty/ są tym większe im system jest mniej uporządkowany oraz gorzej zorganizowany i dostosowany do nadsystemu.

Ład jest specyficzną ogólną cechą dobrze zorganizowanego systemu, złożonego z wielu różnorodnych elementów, wynikającą z relacji pomiędzy cechami tych elementów. Ład przejawia się w takim ułożeniu i uporządkowaniu elementów, które daje obraz prostoty, przejrzystości, a często także powtarzalności, symetrii, lub rytmu - [ 4 ]. W ocenie Ładu rozpatrywać trzeba różne struktury systemu, rozumiejąc przez strukturę określony rodzaj relacji pomiędzy odpowiednimi cechami elementów i systemem /tych elementów, które posiadają cechy wchodzące w określony rodzaj relacji/.

W celowo zorganizowanym systemie typu S-T-E podstawowe znaczenie mają następujące struktury dynamizujące system, to jest te, które uruchamiają i kierunkują działania i procesy:

- podmiotowa /podmiotów działania/, z uwzględnieniem również autonomiczności i swoistej podmiotowości ekosystemów,
- aksjologiczna /wartości i preferencji/,
- teleologiczna /celów, potrzeb, zmierzania, przesnaczenia/,
- genealogiczna /wywodzenia się, pochodzenia/,
- motoryczna /energetyczno-zasileniowa, wprowadzająca w ruch cały system i nadająca mu dynamikę/.

Właściwy porządek w każdej z tych struktur i pomiędzy nimi stwarza podstawę dla Ładu dynamicznego, osiąganego bieżąco w trakcie działania /funkcjonowania/ systemu. Dodatkowym jednak warunkiem jest wcześniejsze zaprowadzenie Ładu kinetycznego, który wynika z właściwych zasad ruchu elementów /czynników/ w

systemie, a więc z odpowiedniego ustalenia struktur kinetycznych systemu:

- zadaniowej /określającej podział zadań, obszary działania, role i funkcje/,
- technologicznej /pragmatycznej, dotyczącej sposobu i kolejności realizacji poszczególnych zadań i funkcji/,
- czasowej /rozłożenia i współwystępowania w czasie, harmonogramów funkcjonowania itp. - w cyklu kalendarzowym i kompanijnym, z uwzględnieniem cykli biologicznych, obsługowych, resursów, urlopów itd./,
- kierowania i sterowania,
- informacyjnej /przekazywania sygnałów i danych, obiegu dokumentów, zasad rozliczeń i oceny wyników/.

Z kolei ład dynamiczny i kinetyczny uwarunkowane są przez ład statyczny, będący owocem właściwego ustalenia następujących struktur statycznych systemu:

- rodzajowo-ilościowej elementów w systemie,
- przynależności /zawierania, obejmowania/,
- połączenia /przylegania, kontaktu, sąsiedztwa/,
- przestrzennej /rozmieszczenia i położenia/,
- materiałowej,
- form zewnętrznych /kształtów, barw/.

Powstanie optymalnego i scharmonizowanego systemu wymaga takiego doboru elementów i ich zorganizowania, który prowadzi do ustalenia:

- optymalnego ładu statycznego i związanych z nim właściwych struktur statycznych systemu,
- optymalnego ładu kinetycznego i związanych z nim właściwych struktur kinetycznych systemu,
- właściwych struktur dynamizujących i przetrenowania systemu w osiągnięciu ładu dynamicznego.

Niedostateczny ład statyczny i kinetyczny nie stwarza dobrej organizacji i skazuje system na ciągłą improwizację, a wyraźną stratą dla wydajności, skuteczności i oszczędności. Ale również nadmierne usztywnienie i zdeterminowanie systemu, wynikające ze zbyt daleko posuniętego uporządkowania statycznego i kinetycznego, w zmiennych warunkach funkcjonowania, obniża efektywność systemu, a przy dużej zmienności i niepew-

ności może uczynić go nawet całkowicie bezakutecznym.

Wszystkie omówione powyżej rodzaje ładu powinny być osiągnięte pomiędzy elementami w relacjach wewnętrznych danego systemu, jak też pomiędzy danym systemem a innymi systemami otoczenia, w relacjach zewnętrznych w ramach szerszych nadsystemów.

#### 6. Idea harmonizacji systemów

Harmonizacja elementów w ramach szerszej całości systemowej jest działaniem zmierzającym do osiągnięcia dwu grup cech: uporządkowania /tworzenia ładu, - w sensie omówionym poprzednio/ i dostosowania wzajemnego, /jednych elementów do drugich, jednego systemu do innych w nadsystemie oraz elementów do systemu/. Można też uważać, że łączna realizacja uporządkowania i dostosowania pozwala osiągnąć ład wyższego rzędu.

Dostosowanie jednych elementów do drugich, to przede wszystkim wymóg, aby nie szkodzić, nie oddziaływać negatywnie, destrukcyjnie, nie zakłócać funkcji, nie pogarszać warunków istnienia. To wymóg, aby tam, gdzie nie można uniknąć negatywnych wpływów, realizować dodatkowo oddziaływania kompensujące lub przynajmniej inne zastępcze. Ale idąc dalej, dostosowanie systemowe wymaga także, aby wzajemne oddziaływania miały możliwie pozytywne znaczenie, aby poprawiały warunki sąsiednich elementów i systemów, utrzymywały ich egzystencję, sprzyjały funkcjonowaniu i rozwojowi.

Uporządkowanie i dostosowanie to istotne procesy dobrego organizowania czy projektowania systemów, które powinny prowadzić do nowych, "wyższych" jakości. Takie harmonizowanie wymaga wielkiej znajomości wszystkich wchodzących w rachubę elementów i ich związków oraz analiz i badań warunków wzajemnej "współpracy". Wymaga także uzgodnień pomiędzy zainteresowanymi podmiotami w systemie i otoczeniu, a więc negocjacji i osiągnięcia konsensusu.

Dodatkowo doświadczenia różnych epok i dziedzin zdaje się wskazywać, że przy większym wyrobieniu zawodowym i odpowiednim wyczuciu można dokonywać stosunkowo prawidłowych ocen uporządkowania i dostosowania, nawet bez rozwiniętych miar ilościowych, a tym bardziej - wartościowych, poszczególnych relacji. Wydaje się też, że w procesie porządkowania i dostosowywania łatwiej spotykać i wykorzystać różne doświadczenia, przewidywania i

intuicje fachowców, niż przy innych, bardziej sformalizowanych podejściach. Nieuchronny przy tym, duży subiektywizm projektantów systemu być może nie jest większy niż suma subiektywności i dowolności w licznych krokach kwantyfikowania, mierzenia, kojarzenia, wartościowania ekonomicznego i wnioskowania w procedurach optymalizacji wielokryterialnej.

Na ogół każde istotne nieuporządkowanie i niedostosowanie w systemie powoduje złe skutki, straty i dodatkowe koszty. Nasze umiejętności przewidywania, ujmowania ilościowego i wartościowania tych skutków i strat, w systemach typu S-T-E, są stale niedostateczne. Tam jednak, gdzie udało się je rozwinąć, okazuje się, że nakłady na większe uporządkowanie i dostosowanie, są na ogół mniejsze, niż wartość strat z tytułu uszczuplenia efektów i wzrostu negatywnych skutków powodowanych niedostosowaniem i nieuporządkowaniem.

W licznych praktycznych sytuacjach brak pełnych i dostatecznie pewnych danych do optymalizacji, także wielokryterialnej, a przy tym widać, że często wyszukane rozwiązania nie są dostatecznie scharmonizowane i mogłyby zapewne zostać udoskonalone na innej drodze. W tych sytuacjach szczególnie celowe wydaje się nawiązanie do klasycznych pojęć i idei harmonii, które ukształtowały wiele obiektów o nieprzemijającej wartości.

Istota sztuki wprowadzania ładu polega na tym, aby został on osiągnięty nie ze względu na jedną wybraną relację i cechę elementów /np. materiał, formę czy funkcję/, ale jednocześnie ze względu na możliwie wszystkie istotne ich relacje i cechy. Taki ład opiera się na odpowiednim dostosowaniu wzajemnym elementów do siebie i realizuje takie dostosowanie, które zachowuje właściwą trwałość elementu, jego stabilność, funkcjonalność i efektywność w systemie. Jest to wymaganie daleko idące, z którego wynikają niektóre dawne zasady konstrukcji /np. jedności funkcji, materiału i formy/, czy greckiej tragedii /jedności akcji, miejsca i czasu/. Tego typu zasady można by dziś rozwinąć i wzbogacić uwzględniając wszystkie istotne, w.w. relacje i struktury w systemach typu S-T-E.

W tradycyjnych problemach optymalizacji systemu zainteresowanie koncentruje się zazwyczaj na wnętrzu systemu i na wybranych powiązaniach z otoczeniem. Harmonizacja zaś dotyczy zarów-



no wnętrza systemu, jak i pełnego otoczenia przereorganizowywanego w nadsystem /wszystkich rodzaj nadsystemów związanych z wszystkimi rodzajami elementów w systemie/. W problemie harmonizacji bierze się też pod uwagę nie tylko pojedynczą decyzję o rozwiązaniu pojedynczego obiektu, ale cały system decyzji dotyczących systemu obiektów, a także uwzględnia szereg różnych systemów pośredniczących w przygotowaniu i realizacji tych decyzji, pokazany w uproszczeniu na rys. 2.

Tak rozumiana harmonizacja nie stoi w sprzeczności z zasadami optymalizacji, powinna być jednak znacznie szerszym podejściem metodycznym, włączającym w siebie i wykorzystującym sformalizowane procedury optymalizacyjne - tam gdzie to jest możliwe. W poszczególnych przypadkach, gdy stosując równoległe obydwa podejścia okaże się poważniejsza niezgodność pomiędzy rozwiązaniami: sharmonizowanym a optymalnym, trzeba wyjaśnić, czy pochodzi ona z błędnych ocen i intuicji harmonizacji, czy też z niewłaściwych danych, zbyt dużych uproszczeń lub nieadekwatnych danych przedłożonych do optymalizacji. Taka konfrontacja prowadzi zazwyczaj do porównania i uzgodnienia ocen oraz udoskonalenia wypracowanego rozwiązania.

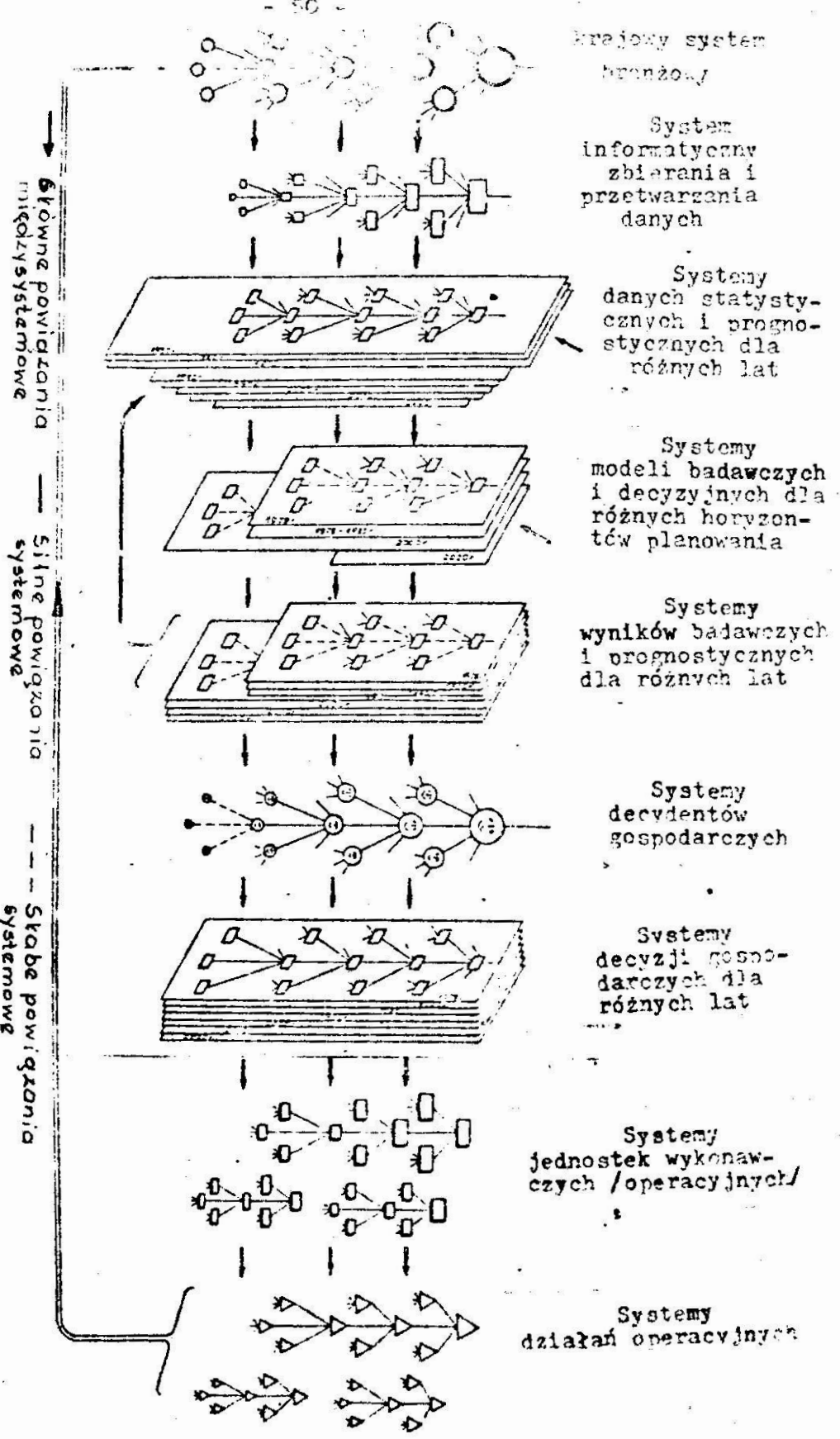
### 3. Sformułowanie problemu harmonizacji

Fundamentowym warunkiem rozwiązania nawet najtrudniejszego problemu jest tego wyraźne postawienie i możliwie dokładne sformułowanie. Podobnie jak przy każdym problemie, sformułowanie to powinno obejmować dwie części:

- Datum: wyraźne określenie tego wszystkiego co jest dane, wiadome i wymagane, lub co się za takie uznaje w stosunku do wszystkich elementów systemu /zbiorów elementów z których elementy mogą być dobierane do systemu/ oraz wszystkich elementów i systemów w nadsystemie.
- Novum: wyraźne wskazanie tego, co się uznaje za nieznanne /nie wiadome/ i co powinno być wyjaśnione i określone /ustalone/ w wyniku rozwiązania problemu.

Przypuśćmy, że nasz problem harmonizacji dotyczy zorganizowania nowego obiektu systemowego potrzebnego do pełnienia określonej funkcji, czy zadań. W części danej /datum/ problemu, oprócz zadań wymaganych do realizacji przez ten system w kolejnych przedziałach czasu, muszą być określone prognozy dotyczące

rys. 2 Związki pomiędzy różnymi systemami uzeszczelniającymi w przygotowaniu i realizacji decyzji.



stanu istotnych cech i relacji wszystkich zbiorów elementów /zasobów/, z których może być tworzony dany obiekt oraz dobierane jego otoczenie dla stworzenia właściwego nadsystemu.

W części szukanej /novum/ problemu harmonizacji trzeba w rozpatrywanym przypadku wskazać, że:

- Poszukując się obiektu zapewniającego realizację zadanej funkcji w potrzebnym czasie, możliwego do wybudowania i zorganizowania w przewidywanej, konkretnej i ograniczonej rzeczywistości.
- Należy dobrać odpowiednie elementy do tego obiektu i określić jego struktury wewnętrzne, przy czym odpowiadające tym strukturom systemy formalne powinny być jak najbardziej efektywne.
- Należy dobrać warunki i elementy /systemy/ w otoczeniu tworzonego obiektu systemowego, przy czym otoczenie to wraz z tym obiektem mają tworzyć efektywny nadsystem.
- Struktury wewnętrzne i zewnętrzne tworzonego obiektu muszą zapewniać i umożliwiać im systemach formalnych spełnienie wszystkich wymagań i warunków harmonizacji obiektu /zobacz poprzednim podrozdziale/.
- Poszukując się takiego systemu budowy i organizacji tworzonego obiektu systemowego, który również spełnia wymagania i warunki harmonizacji z tym obiektem i otoczeniem.

Jest zrozumiałe, że dla pełnego sformułowania takiego problemu /w szczególności w części danej, a także w zakresie różnych wymagań stawianych poszukiwanemu rozwiązaniu /konieczna jest praca zespołu co najmniej kilku różnych specjalistów: socjologów, technologów, ekonomistów, ekologów, budowniczych, organizatorów, energetyków i ewentualnie innych. W zasadzie wiedza specjalistów jest dziś dostateczna dla zespołowego formułowania problemów harmonizacji, brak natomiast zazwyczaj dostatecznego zrozumienia i właściwego współdziałania między nimi.

#### 8. Poszukiwanie procedury rozwiązania problemu harmonizacji

Określenie i wskazanie poprawnego rozwiązania problemu harmonizacji jest sprawą trudną i złożoną. Proces poszukiwania rozwiązania powinien być bowiem spójny, a jest on jednocześnie istotnie interdyscyplinarny i wielodyscyplinarny. Niestety, do takiej działalności obecnie nie ma fachowców i zupełnie się ich w Polsce nie szkoli. Sama nauka jest tu w znacznym stopniu bez-

ralna, gdyż cały nowożytny jej rozwój szedł w kierunku dzielenia /analizowania/, a nie łączenia /syntezowania/. Właściwie nie bardzo wiadomo jak systematycznie, konsekwentnie i w pełni poprawnie łączyć, uspoźniać i syntezować stwierdzenia i zjawiska z różnych dziedzin i dyscyplin. Pewne idee takich działań podsuwa architektura i urbanistyka oraz współczesna inżynieria systemów, lecz brak tu jeszcze ogólniejszych metod i dużych pozytywnych przykładów poszukiwania i wskazania kompleksowego rozwiązania.

Wydaje się też potrzebne włączenie w proces formułowania i rozwiązywania problemów harmonizacji wielkich obiektów, oprócz profesjonalnego zespołu fachowców odpowiedzialnego za całość, również szeregu innych zespołów: możliwie autentycznej reprezentacji społeczności lokalnej, różnych branżowych i specjalistycznych stowarzyszeń naukowych, kulturalnych i ekologicznych, rzeczników interesu użytkowników czy odbiorców, przedstawicieli zainteresowanych instytucji oraz systemów z otoczenia.

Pełne rozwinięcie i opracowanie metodycznej procedury harmonizacji dla potrzeb projektowania i organizacji różnych typów systemów wymaga jeszcze wielkiej pracy i wyjaśnienia wielu trudnych kwestii. Wydaje się, że metodyka rozwiązywania problemów harmonizacji będzie stanowiła pewne powiązanie różnych metod i technik stosowanych już obecnie w projektowaniu wielkich obiektów i przy przygotowywaniu dużych operacji militarnych, metod twórczego poszukiwania rozwiązań w warunkach niepewności oraz pewnych idei i metod ocen wieloaspektowych i optymalizacji wielokryterialnej.

Trzeba również znacznie poszerzyć i rozwinąć metody i techniki dopracowywania wariantowych rozwiązań, ich adaptacji i "dogrywania" dla spełnienia przez nie coraz liczniejszych i bardziej różnorodnych wymagań harmonizacji. Same te wymagania uda się też zapewne ująć w pewne standardy, co ułatwi myślenie o nich i ich respektowanie. Celowe jest też znacznie pełniejsze wykorzystanie dorobku metodycznego i organizacyjnego uzyskanego za granicą w dziedzinie kompleksowej oceny rozwiązań technicznych /Technology Assessment/ oraz rozwinięcie krajowych prac nad wyznaczaniem kosztów społecznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Alison G.: Essence of Decision: Explaining the Cuban Missile Crisis; Little Brown and Co, Boston 1971.
2. Bojarski W.W.: Praxiological Model of Technical Systems; Design Methods and Theories - Journal of DMG and DRS. vol.10, No 2, 1976.
3. Bojarski W.W.: Problem of Indefiniteness of Large Systems, in: Progress in Cybernetics and Systems Research - Third European Meeting on Cybernetics and Systems Research, London 1977.
4. Bojarski W.W.: Podstawy analizy i inżynierii systemów; PWN, Warszawa 1984.
5. Linstone H.A. et al.: The Multiple Perspective Concept. Future Research Institute.
6. Tarnowski W.: Model procesu wyboru w projektowaniu technicznym; Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Automatyka z. 72, Gliwice 1984.

THE PROBLEMS OF OPTIMIZATION AND HARMONIZATION  
OF THE SOCIO-TECHNOLOGICAL-ENVIRONMENTAL SYSTEMS

Summary

For a given system we can distinguish inner and outer optimization. In hierarchical systems the domain of optimization, its range and far-sightedness can be various. Hence this domain needs furthermore qualification. Applied formal procedures of multicriterial optimization do not regard sufficiently experience, preferences and intuition of system's users /experts, decision-makers etc./ . It is also difficult to take into account other hardly quantified factors.

It may be helpful to utilize the concept of order, adaptation and the classical notion of harmonization. There is relationship between order and adaptation - on the one hand, and costs, effects, losses and effectiveness of the system operation - on the other. The appropriate formulation of the harmonization problem is essential. There are numerous ways to accomplish this goal, however they are not sufficiently elaborated. Paper presents general suggestions how to solve this problem.

## ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ГАРМОНИЗАЦИИ СОЦИО-ТЕХНИЧЕСКО-ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Резюме

и внешний

Различается внутренний анализ оптимальных решений данной системы. В системах с иерархической структурой принадлежности и реализации цели /задачи/ - точность и пределы оптимизации, а также её дальновидность - бывают различные, что требует дополнительного определения. Применяемые, формальные процедуры многокритериальной оптимизации не учитывают опытов, предпочтения и интуиции управляющих и пользующихся системой, а также других действительных - трудноизмеримых факторов.

Полезным кажется использование понятия упорядоченности и приспособления а также классических идей гармонизации. Существует обо отношение между упорядочением и приспособлением с одной стороны, а действительностью, капиталовложениями и результатами а также потерями и эффективностью действия системы и её окружающей среды с другой стороны.

В основном, главное это свойственное сформулирование проблемы гармонизации рассматриваемой системы.

Пути поисков решения могут быть разные, пока они ещё в полности не разработаны. В статье заключено направления общего разрешения рассужданной проблемы.

P. Fiala

Institute of Econometrics

Prague School of Economics

### MULTICRITERIA DUAL SIMPLEX METHOD

The paper presents a method for direct solution of the dual problem to linear vector maximization problem. It is also described how the multicriteria dual simplex method can be used for finding the nondominated set of a linear vector maximization problem.

#### 1. Introduction

Consider the linear vector optimization problem

$$\begin{aligned} & \text{"maximize" } Cx \\ /1/ \quad & x \in X = \{x; Ax \leq b, x \geq 0\}, \end{aligned}$$

where  $X$  is the feasible set of decision vectors  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $A$  is an  $(m, n)$  matrix,  $b$  is an  $m$ -vector,  $C$  is a  $(k, n)$  matrix of objective functions coefficients and "maximize" means finding all nondominated solutions of /1/.

Definition 1. A vector  $x^0 \in X$  is called nondominated solution of /1/ if there is no  $x \in X$  such that  $Cx \geq Cx^0$ .

The set of all nondominated solutions  $X_N$  is always connected and it can be expressed as a union of the nondominated faces

$$X_N = \bigcup_{i=1}^S F_i.$$

In case the face  $F_i$  is a bounded set it can be expressed as a convex hull of its nondominated extreme points

$$F_i = \left[ x_{(i)}^{(1)}, \dots, x_{(i)}^{(r_i)} \right].$$

There exists a relationship between the solution of the problem /1/ and the solution of the multiparametric linear programming problem

$$\begin{aligned} & \text{maximize } t^T Cx \\ /2/ \quad & x \in X = \{x; Ax \leq b, x \geq 0\}, t \in T. \end{aligned}$$

$T = \{t; t > 0, \sum_{i=1}^k t_i = 1\}$  is a parametric set.

By solution of problem /2/ we mean a  $\delta$ -composition of the parametric set into indifference regions  $F^{(1)}$  and finding the corresponding basic optimal solutions  $x^{(1)}$ .

**Theorem 1.** A vector  $x^0 \in X$  is a nondominated solution of /1/ if and only if there exists a vector  $t \in T$  such that  $x^0$  is an optimal solution of /2/.

This theorem can be used to find the nondominated set  $I_Y$  (see [2]).

The dual of problem /2/ is a multiparametric linear programming problem with the parameters on the right-hand sides:

$$/3/ \quad \begin{aligned} & \text{minimize } u^T b \\ & u \in \{u; u^T A \geq t^T C, u \geq 0\}, t \in T, \end{aligned}$$

where  $u$  is an  $n$ -vector of dual variables.

The solution of problem /3/ in a parametric form is  $u^T = t^T U$ , where  $U$  is a  $(k, n)$  matrix of the dual variables. Substituting  $u^T = t^T U$  into the problem /3/ we obtain

$$/4/ \quad \begin{aligned} & \text{minimize } t^T U b \\ & U \in U(t) = \{U; t^T U A \geq t^T C, t^T U \geq 0\}, t \in T. \end{aligned}$$

A theorem analogous to Theorem 1 holds also for problem /4/ and the multicriteria problem

$$/5/ \quad \begin{aligned} & \text{"minimize" } U b \\ & U \in U(t) = \{U; t^T U A \geq t^T C, t^T U \geq 0\}, t \in T. \end{aligned}$$

The linear vector minimization problem /5/ is called the dual problem to problem /1/.

**Definition 2.** A matrix  $U^0 \in U(t)$  is called nondominated solution of /5/ if there is no  $U \in U(t)$  such that  $U b \leq U^0 b$ .

For linear vector optimization problems /1/ and /5/ there hold several duality theorems (see [1]). The nondominated set  $U_Y$  has a structure analogous to the structure of the nondominated set  $I_Y$ . The set  $U_Y$  is connected set and it can be expressed as a union of the nondominated faces  $F_1$ .

In case of primal and dual nondegeneracy the number of faces  $F_1$  is the same as the number of faces  $F_1$  of set  $I_Y$ :

$$U_Y = \bigcup_{i=1}^s F_1$$



where  $V_1 = [U_{i_1}^{(1)} \dots, U_{i_1}^{(r_1)}]$ .

Then  $x_{i_1}^{(1)} \leftrightarrow U_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_1}^{(r_1)} \leftrightarrow U_{i_1}^{(r_1)}$  are pairs of corresponding nondominated extreme points.

**2. Representation of  $U_D$  by NDSM**

The multicriteria dual simplex method (NDSM) uses a parametric search over the parametric set  $T$  and consists in three basic steps:

1. Find an initial nondominated extreme point.
2. Find all nondominated extreme points.
3. Find the nondominated set  $U_D$  for the dual problem.

Step 1. By solution of problem /3/ as a linear programming problem with variables  $(u, t)$  we obtain a feasible value of the parameter  $t_0$ . For the parameter  $t_0$  we solve the problem /3/ by the dual simplex method and we obtain a nondominated solution of the dual problem /5/.

Step 2. The problem /3/ can be written down into the initial simplex tableau:

$-A^T$	I	$-C^T$
$-b^T$	$0^T$	$0^T$

The general step tableau has the form :

/6/

$B^{-1}A^T$	$-B^{-1}$	$B^{-1}C^T$
$b_B^T B^{-1}A^T - b^T$	$-b_B^T B^{-1}$	$b_B^T B^{-1}C^T$

where  $B$  is basis matrix.

Using a theorem analogous to Theorem 1 and the rules of the dual simplex method we can show that if there is a  $t \in T$  such that

/7/  $B^{-1}C^T t \geq 0$

then there is a nondominated solution of /5/ in the tableau /6/. If we set  $U_B^T = B^{-1}C^T$ , then it holds  $U_B^T t \geq 0$ , where  $U_B$  is a matrix of the basic dual variables.

To find a solution to the last inequality we solve a system of problems

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } v_j, \quad j \in J_N \\
 /8/ \quad & -U_B^T t + v = 0 \\
 & e^T t = 1 \\
 & t > 0, v \geq 0,
 \end{aligned}$$

where  $v$  is a vector of slack variables and  $J_N$  is the index-set of non-basis variables.

If  $\min v_j = 0$  for certain index  $j^0$  then this index determines an adjacent nondominated extreme point, which can be found by making one step of the dual simplex method. In this way we can determine all nondominated extreme points. To each nondominated extreme point we can attach a list of values of  $t$ , which we obtain as solutions of problems /8/.

Step 3. From the list of values of  $t$  for all nondominated extreme points we select the extreme points to which corresponds the equal parametr values. The convex hull of extreme points chosen in this way forms the nondominated face  $F_1$ . The union of faces  $F_1$  forms the nondominated set  $U_N$ .

### 3. Representation of $X_N$ by MDSM

Simplex tableau /6/ provides the nondominated solution of primal problem /1/. In case of primal and dual nondegeneracy we obtain from this tableau all pairs of corresponding nondominated extreme points for primal and dual problems.  $U_B^T = B^{-1}C^T$  is a nondominated solution of the dual problem /5/ if fulfil the condition /7/. In any dual simplex tableau /6/ it holds

$$b_B^T B^{-1} A^T - b^T \leq 0, \quad -b_B^T B^{-1} \leq 0.$$

By denoting  $x^T = b_B^T B^{-1}$  we obtain  $Ax \leq b, x \geq 0$ . This implies that  $x$  is a feasible solution of the primal problem /1/. From  $b_B^T B^{-1} C^T = x^T C^T = b_B^T U_B^T$ , we can see that the values of the objective functions for primal and dual problems are equal and from the duality theorem it follows that  $x$  is a nondominated solution of the primal problem /1/.

Knowing the list of extreme points of  $U_N$ , structured according to the faces  $F_1$ , we can determine the analogous list of extreme point of  $X_N$ , structured according to  $F_1$ , by

a backward inspection of the simplex tableaux generated during the computational procedure.

4. Numerical example

Consider the following maximization problem

$$\begin{aligned} \text{"maximize"} \quad & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

The dual problem to this primal

$$\begin{aligned} \text{"minimize"} \quad & \begin{bmatrix} 60u_{11} + 30u_{12} \\ 60u_{21} + 30u_{22} \end{bmatrix} \\ & t_1(3u_{11} + u_{12}) + t_2(3u_{21} + u_{22}) \geq t_1 + t_2 \\ & t_1(4u_{11} + 3u_{12}) + t_2(4u_{21} + 3u_{22}) \geq t_1 + 4t_2 \\ & t_1u_{11} + t_2u_{21} \geq 0, t_1u_{12} + t_2u_{22} \geq 0, t \in T. \end{aligned}$$

The problem of form /3/

$$\begin{aligned} \text{minimize } f &= 60u_1 + 30u_2 \\ & 3u_1 + u_2 \geq t_1 + t_2 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq t_1 + 4t_2 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, t \in T. \end{aligned}$$

Step 1. We obtain  $t_0 = (8/9, 1/9)$ . The initial nondominated solution is obtained in the simplex tableaux :

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$t_1$	$t_2$
$u_1$	1	1/3	-1/3	0	1/3	1/3
$u_4$	0	-5/3	-4/3	1	1/3	-8/3
f	0	-10	-20	0	20	20

## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

### Резюме

В статье представлен метод прямого решения двойственной задачи многокритериального линейного программирования. Также показано как использовать многокритериальный двойственный симплексный метод для нахождения эффективного множества задачи многокритериального линейного программирования.

## MULTICRITERIA DUAL SIMPLEX METHOD

### Summary

The paper presents a method for direct solution of the dual problem to linear vector maximization problem. It is also described how the multicriteria dual simplex method can be used for finding the nondominated set of linear vector maximization problem.

## WIELOKRYTERIALNA DUALNA METODA SIMPLEKSÓW

### Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę bezpośredniego rozwiązania dualnego zadania liniowego programowania wielokryterialnego. Pokazano także jak wykorzystać wielokryterialną dualną metodę simpleksów dla znalezienia zbioru rozwiązań liniowego programowania wielokryterialnego.

V KONFERENCJA "POLIOPTYMALIZACJA W PROJEKTOWANIU"

MIELNO 86

P. Fiala, J. Jablonský  
Institute of Econometrics  
Prague School of Economics

MULTICRITERIAL EVALUATION OF BIOGAS PRODUCTION ALTERNATIVES

This paper describes an example of a practical application of multicriterial optimization methods. The application in question consists in a multicriterial evaluation of alternatives of the biotechnological development in the agricultural production.

1. Introduction

The main point is to evaluate the effectiveness of production as well as the utilization of biogas, produced by the anaerobic fermentation of the excrements of farm animals. The production of biogas represents only one of the yields offered by the process of the anaerobic fermentation. Other advantages of this process are: reduction of the contamination of the environment by using these excrements as fertilizers, etc.

The evaluation includes six alternatives, which are judged from the viewpoint of seven criteria. In first part we describe a number of selected methods of multicriterial optimization used later for the evaluation. The second part included a detailed analysis of alternatives and criteria. The final part of the paper provides a survey of results. We should like to acknowledge that the data used for the calculations were kindly made available by Hydroprojekt Praha. These data were obtained from the Water Waste Plant Třeboň, which, for a number of years, applies the process of anaerobic fermentation.

## 2. Multicriterial evaluation of the alternatives

The multicriterial decision problem is given by a set of all alternatives and by a list of criteria. The set of alternatives has final number of elements  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$  each of which is characterized by the criteria values  $\bar{x}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$ .

The multicriterial decision problem is then completely described by means of the so called criteria matrix, where individual columns correspond to the criteria ( $R_1, R_2, \dots, R_k$ ) and the rows to the alternatives ( $X_1, X_2, \dots, X_p$ ). The elements of the matrix  $y_{ij}$ ,  $i=1, 2, \dots, p$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ , give the value of criterion  $j$  for the alternative  $i$ .

	$R_1$	$R_2$	...	$R_k$
$X_1$	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1k}$
$X_2$	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2k}$
...	...	...	...	...
$X_p$	$y_{p1}$	$y_{p2}$	...	$y_{pk}$

Every multicriterial decision problem can be easily transferred to the problem, where all criteria are maximizational. The values of the criteria are in different units and in different scales. The elements  $y_{ij}$  can be normalized using the transformation,

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad (2)$$

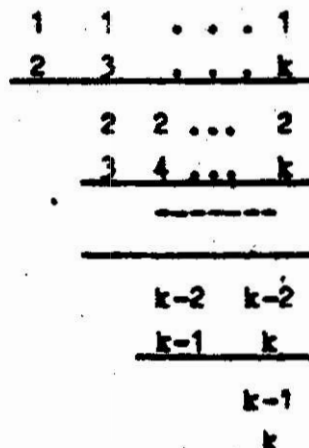
where the value  $y_j^{\max}$  and  $y_j^{\min}$  are the highest and lowest value of the criteria  $j$ , respectively. After the transformation (2), the values  $r_{ij}$  are in the scale from 0 to 1;  $r_{ij}=0$  corresponds to the lowest value of criterion  $j$  and  $r_{ij}=1$  corresponds to the highest value of criterion  $j$ .

As we have transferred all criteria to the maximizational ones, it is clear that the more the value  $r_{1j}$  approaches the value 1, the more advantageous is the alternative 1 from the viewpoint of the criterion  $j$ .

When solving the problem we concentrate ourselves on the so called nondominated alternatives which are those alternatives for which no alternative exists which would be better at least in one value of the criterion with equal values for the remaining criteria. The final objective is to find so called optimal alternative from among the nondominated alternatives. For the determination of the optimal alternative it is necessary to have information about decision maker's preferences.

A number of multicriterial decision methods requires cardinal information about the relative importance of the individual criteria which can be expressed by means of the weight vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ ,  $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 1$ ,  $v_i \geq 0$ . In some cases it is difficult to obtain the values of the weights directly. However, there are methods which construct estimations of the weights on the basis of more simple subjective information.

Method of pair comparisons of criteria uses for the estimations of the weights the information which criteria are more important in pair comparisons. The comparison may be done in the so called Fuller triangle. The criteria are numbered with natural numbers 1, 2, ..., k. We confront the decision maker with a triangle scheme, whose rows are formed by pairs of natural numbers arranged as follows:



The decision maker is requested to mark in each pair that criterion which is more important. Let us denote number of marks at criterion  $i$  by  $u_i$  and the number of all comparisons by  $N = \frac{k(k-1)}{2}$ . The weights of the criteria are then  $v_i = \frac{u_i}{N}$ ,  $i=1,2,\dots,k$ .

Saaty's method is based on the quantitative pair comparisons of the criteria. The decision maker is asked to express in a point scale to what extent one criterion is more important than the other. The data can be arranged into the so called Saaty's matrix for whose element  $s_{ij}$  applies the following:

$$s_{ii} = 1, \quad i=1,2,\dots,k,$$

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}, \quad i,j=1,2,\dots,k.$$

The estimate of the weights  $v$  is equal to the eigenvector corresponding to the greatest eigennumber  $\lambda_{\max}$  of matrix  $S$  for which it holds the following

$$S \cdot v = \lambda_{\max} \cdot v$$

If the values of the weights are known we can use some of the methods for the determination of the optimal alternative.

Additive weighting method is based on the knowledge of weights and values of the criteria matrix (1) whose elements we will normalize according to the formula(2). The alternative  $I_i$  will be chosen as optimal alternative if it maximizes

$$\sum_{j=1}^k v_j r_{ij}.$$

Permutation method assumes that the criteria are ordered according to its importance and it seeks the optimal order of the alternatives. It examines all permutations of  $p$  alternatives whose number amounts to  $p!$  and therefore, the



method is not suitable for cases with a large number of alternatives. For each ordered pair of alternatives  $X_i, X_j$  the criteria will be determined that prefer alternative  $X_i$  to alternative  $X_j$  or are indifferent towards them (the set of those indexes will be denoted by  $I_{ij}$ ).

We define the values

$$c_{ij} = \sum_{h \in I_{ij}} v_h,$$

where  $v_h$  are the weights of the individual criteria. As optimal permutation we then choose such one for which

$$\sum_{i \leq j} c_{ij} - \sum_{i > j} c_{ij} \rightarrow \max.$$

In this method it is assumed that we do not know the concrete values of the weights. But, if we assume that the criteria are numbered according to their ordering, for the weights apply the following:

$$v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k, \quad \sum_{i=1}^k v_i = 1, \quad v_i \geq 0.$$

The optimal order of alternatives can be found through the evaluation of the orders obtained on the bases of  $k$  weight vectors  $(1, 0, \dots, 0), (1/2, 1/2, 0, \dots, 0), (1/3, 1/3, 1/3, \dots, 0), \dots, (1/k, 1/k, 1/k, \dots, 1/k)$ .

AGREPREF method belongs to the methods which require the expression of the relative importance of the criteria in the form of weights  $v_h, h=1, 2, \dots, k$ . It further use the so called threshold of indifference  $\alpha$  and the threshold of preference  $\pi$ .

The threshold of indifference  $\alpha$  indicates how large should be the sum of weights of those criteria from whose viewpoint the examined alternatives  $X_i$  and  $X_j$  are indifferent.

The threshold of preference  $\pi$  indicates how large must be the difference between the sum of weights of those criteria from whose viewpoint the alternative  $X_i$  is preferred to the alternative  $X_j$  and the sum of weights of the criteria which prefer the alternative  $X_j$  to the alternative  $X_i$ . The values of both thresholds lie in the interval between 0 and 1,

$\alpha, \pi \in \langle 0, 1 \rangle$ .

The relation of indifference  $I(\alpha)$  depends on the threshold  $\alpha$ . The relation of preference  $P(\alpha, \pi)$  depends of both thresholds  $\alpha, \pi$ .

For each pair of alternatives  $X_1$  and  $X_j$  we shall group the criteria which:

1. prefer the alternative  $X_1$  to the alternative  $X_j$ , the set of their indexes will be indicated as  $I_{1j}$ ,
2. prefer the alternative  $X_j$  to the alternative  $X_1$ , the set of their indexes will be indicated as  $I_{ji}$ ,
3. have for both alternatives  $X_1$  and  $X_j$  the same values and from the viewpoint of these criteria both alternatives are indifferent, the set of their indexes will be indicated as  $I_{1\sim j}$ .

We define the grade of preference of the alternative  $X_1$  to the alternative  $X_j$  as

$$S_{1j} = \sum_{h \in I_{1j}} v_h .$$

The grade of preference of the alternative  $X_j$  to the alternative  $X_1$  will be defined as

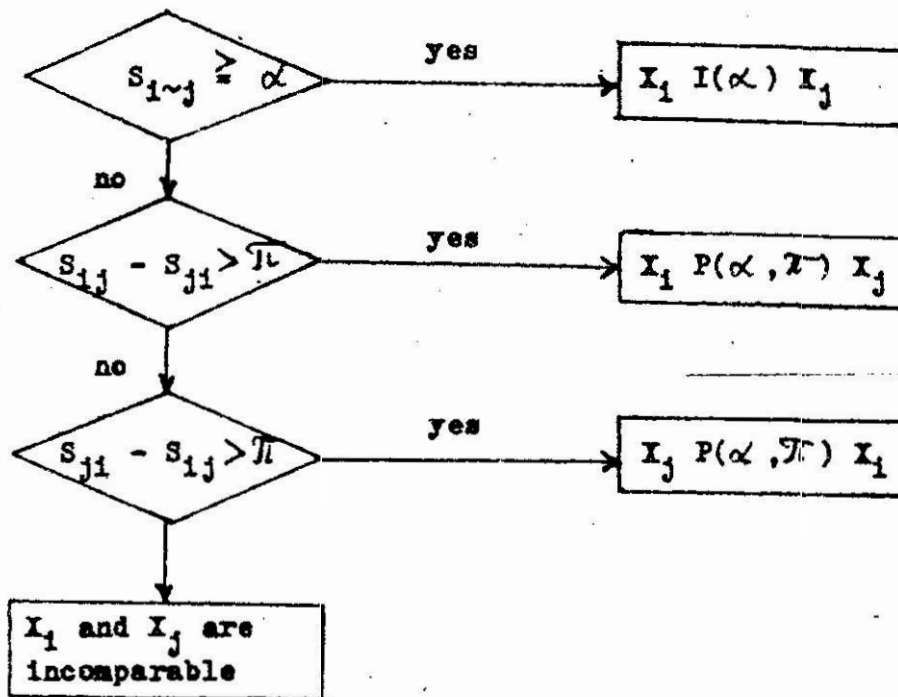
$$S_{ji} = \sum_{h \in I_{ji}} v_h .$$

Similarly, the grade of indifference of alternatives  $X_1$  and  $X_j$  will be defined as

$$S_{1\sim j} = \sum_{h \in I_{1\sim j}} v_h .$$

By comparing all pairs of the alternatives we can proceed according to the scheme 1.

The resulting relation  $R(\alpha, \pi) = (I(\alpha), P(\alpha, \pi))$  which we obtain by comparing the pairs of the alternatives according to the scheme 1 is an uncomplete preference relation that need not be transitive. Therefore, it is necessary to approximate the relation by a semiorder which at least is quasitransitive. (We do not specify the details of the approximation here.)



Scheme 1.

### 3. Description of alternatives and criteria - biogas production case

For multicriterial evaluation of the effectiveness of biogas production six alternatives were formed which were further evaluated according to the set of seven criteria. In view of the fact that the process of evaluation of alternatives is only the first stage of the research in this sphere the overall proposal of the set of alternatives and criteria is not definitive but it is assumed that it will be by degrees completed.

The determined alternatives are divided in to two groups. In the first group (alternatives of the A-type) there are the alternatives which do not assume the functioning of the process of anaerobic fermentation i.e. the classical procedure of utilizing of excrements is involved

here. The alternatives of the B-type represent the process of anaerobic fermentation with different stages of utilization the biogas. The following is the description of individual alternatives:

- A1 - the process without fermentation with assumed losses of organic components to the extent of 60% and with distribution of raw excrements,
- A2 - similarly as A1 but with losses of organic components amounting to 70%,
- B0 - hypothetical alternative when the biogas is produced but is not made use of; all unutilized gas is prohibitively included in the costs,
- B1 - the biogas is produced and utilized for heating water and buildings,
- B2 - in addition to B1, the biogas is utilized for drying of agricultural products,
- B3 - in addition to B2, the biogas is utilized for production of electric power.

The used evaluation criteria will be divided into four groups.

#### 1. Cost criteria

- K1 - investment costs in thousands of Kčs,
- K2 - operational costs in thousands of Kčs comprising prohibitively included rates for unutilized biogas in alternatives B0, B1, B2.

#### 2. Natural criteria

- K3 - the degree of utilization of organic components for fertilizing in tons,
- K4 - the degree of utilization of nitrogenous components for fertilizing in tons,

#### 3. Power criterion

- K5 - balance of consumption, production and utilization of the power; the negative value of this criterion indicates that consumption exceeds the production; the values of the criterion are given in kWh.

#### 4. Ecological criteria

- K6 - the degree of pollution of the environment (water plus air); the criterion is expressed by coefficients lying in the interval  $\langle 0,1 \rangle$ . Reducing of these coefficients in the alternatives of B-type is expressed by the positive impact of the operation of the biogas stations against classical procedures,
- K7 - the quantity of pathogenic germs in one unit of excrements; due to the fermentation this index is reduced to 0,001.

It ensues from the brief description of the criteria that the criteria K1, K2, K6, K7 are minimization ones, i.e. the lower is the value the better is the alternative. The criteria K3, K4, K5 are of the maximization type. The whole model is characterized by the criteria matrix whose values  $y_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots,6$ ,  $j=1,2,\dots,7$ , indicate the value of the criterion  $j$  for alternative  $i$ . The criteria matrix is indicated in the following table. All values of criteria were gained from the already operational biogas station of the Water Waste Plant in Třebon.

<u>Criteria</u> <u>Alter-</u> <u>natives</u>	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
A1	10849	4196	1520	97	-6754	1,00	1,000
A2	13019	4229	923	97	-6754	1,00	1,000
B0	27526	5498	1833	226	-125	0,50	0,001
B1	27989	5192	1833	226	3407	0,45	0,001
B2	28889	4570	1833	226	5850	0,40	0,001
B3	29449	4638	1833	226	8662	0,35	0,001

Table 1.

#### 4. Numerical results

The individual criterial values in Table 1 are mutually incomparable because they are expressed in different units. Therefore, the elements  $y_{ij}$  are normalized according to the relation (2). After normalization, the criterial values acquire the value  $r_{ij}$  from the interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . The normalized criteria matrix R with the elements  $r_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots,6$ ,  $j=1,2,\dots,7$ , is shown in Table 2.

<u>Criteria</u> Alternatives	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
A1	1,000	1,000	0,656	0,0	0,000	0,000	0,0
A2	0,883	0,974	0,000	0,0	0,000	0,000	0,0
B0	0,103	0,000	1,000	1,0	0,430	0,769	1,0
B1	0,078	0,235	1,000	1,0	0,659	0,846	1,0
B2	0,030	0,712	1,000	1,0	0,818	0,923	1,0
B3	0,000	0,661	1,000	1,0	1,000	1,000	1,0

Table 2.

Some conclusions as to the relations between different alternatives can be drawn directly from Table 2. In comparing A1 and A2 alternatives, the A1 alternative is found to be better or at least the same with respect to all factors. The alternative A2 is therefore dominated by the alternative A1. Further, for the cost criteria the A1 alternative is best evaluated, for all other criteria the best alternative is B3. Thus the core of the multicriterial decision problem consists in the comparison of the costs with the other criteria.

With respect to the fact that in formulating the problem no information on the relations between different criteria was known, a group of experts had been formed with the following tasks:

1. to order different criteria as to their importance,
2. to determine for each pair of the criteria, which of them is more important,
3. to evaluate for each pair of criteria, using the 1-9 scale, how many times one criterion is more important than the other.

The following information was obtained from the group of experts:

1. the order of the criteria according to their importance is  
K1, K2, K5, K6, K4, K3, K7,
2. the relations between each pair of criteria, which are given in the Saaty's matrix.

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
K1	1	1	6	3	2	2	7
K2	1	1	5	2	2	2	6
K3	1/6	1/5	1	1/3	1/4	1/3	1
K4	1/3	1/2	3	1	1/2	1	3
K5	1/2	1/2	4	2	1	2	4
K6	1/2	1/2	3	1	1/2	1	3
K7	1/7	1/6	1	1/3	1/4	1/3	1

Table 3.

According to the information obtained in this way the importance of different criteria could be evaluated through the weights  $v_i$ ,  $i=1,2,\dots,7$ . The weight vector was obtained by means of Saaty's method and by means of the Fuller's triangle method. (The data for the methods were obtained from experts for both cases independently.) In the first and second case the weight vectors

$$v^1 = (0,276; 0,248; 0,042; 0,109; 0,169; 0,116; 0,040)$$

$$v^2 = (0,25; 0,25; 0,042; 0,125; 0,166; 0,125; 0,042)$$

were obtained respectively. It is obvious, that in both

cases the weight vectors differ only slightly. In the actual solution of the problem these differences did not markedly affect the result.

For the multicriterial evaluation of the alternatives a number of methods were used from which only the permutation and AGREPREF methods will be mentioned here. As the input information for the permutation method only the order of criteria according to the importance stated by the experts is necessary. The optimal permutation of the alternatives for different sets of weights is given at Table 4.

vector of weights $v = (v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7)$	the optimal order of alternatives
(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	A1, A2, B0, B1, B2, B3
(1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0)	A1, A2, B0, B1, B2, B3
(1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0, 0)	A1, A2, B2, B3, B1
(1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 0, 0, 0)	B3, B2, B1, B0, A1, A2
(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 0, 0)	B3, B2, B1, B0, A1, A2
(1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 0)	B3, B2, B1, B0, A1, A2
(1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)	B3, B2, B1, B0, A1, A2

Table 4.

For actual sets of weights  $v^1$ ,  $v^2$  the optimal order of the alternatives through the permutation method is:

B2, B3, B1, B0, A1, A2 .

In the AGREPREF method we started from the weight vectors  $v^1$ ,  $v^2$ , the threshold of preferences and the threshold of indifference being varied in the intervals  $\langle 0; 0,25 \rangle$ ,  $\langle 0,5; 1 \rangle$  respectively. In all cases we obtained as markedly good the alternatives B2 and B3 and, on the contrary, as markedly bad ones the alternatives A1 and A2.



During further experiments with the model we examined the dependence of the order of alternatives on the variation of the weight vector. It was found that if the sum of weights of cost criteria is less than 0,6 then as the optimal alternative is the alternative B3 or B2. On the contrary (if the sum of weights of cost criteria is at least 0,6), the best variants are found to be the alternatives of the type A. This fact confirms also the results obtained with the permutation method mentioned in Table 4.

All calculations were done in the Computing Centre of School of Economics on the WANG 2200 MVP computer.

#### References

- [1] Čeray, M., Glůckařov, D., Toms, M.: Methods of complex evaluation of variants. (in Czech), Academia, Prague 1980.
- [2] Fiala, P., Jablonsk, J., Mařas, M.: Multicriterial optimization. (in Czech), SPN, Prague 1985.
- [3] Hwang, C.L., Yoon, K.: Multiple attribute decision making - methods and applications. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981.
- [4] Zavoral, J., Fiala, P., Jablonsk, J.: Study on methodics of multicriterial evaluation of the anaerobic fermentation of the excrements of farm animals. (in Czech), School of Economics, Prague 1984.

Dr.ing.Petr Fiala,CSc., ing.Josef Jablonsk,CSc.,  
School of Economics, Department of Econometrics,  
A.Zpotockho 4, 130 67 Prague 3, Czechoslovakia.

## МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВАРИАНТОВ ПРОИЗВОДСТВА БИОГАЗА

### Резюме

В статье представлен пример практической аппликации методов многокритериальной оптимизации. Эта аппликация посвящена многокритериальной оценке вариантов биотехнологического развития в сельскохозяйственной продукции.

## MULTICRITERIAL EVALUATION OF BIOGAS PRODUCTION ALTERNATIVES

### Summary

This paper describes an example of a practical application of multicriterial optimization methods. The application in question consists in a multicriterial evaluation of alternatives of the biotechnological development in the agricultural production.

## WIELOKRYTERIALNA OCENA WARIANTÓW PRODUKCJI BIOGAZU

### Streszczenie

W pracy przedstawiono praktyczny przykład aplikacji metody optymalizacji wielokryterialnej. Aplikacja ta poświęcona jest wielokryterialnej ocenie wariantów wdrożeń technik biotechnologicznych w produkcji rolniczej.

Władysław Gosiewski, Tadeusz Bil  
Wydział Mechaniczny  
Wyższa Szkoła Inżynierska  
w Koszalinie

## OPTYMALNA DYSLOKACJA SIŁ STERUJĄCYCH DRGANIAMI

### WIRNIKÓW GIĘTNYCH

W artykule przedstawiono modalną metodę sterowania drganiami wirników giętnych. Wyznaczono modalne siły stabilizujące i tłumiące ruch drgający wirnika. Na podstawie sił modalnych obliczono optymalne punkty przyłożenia fizycznych sił sterujących. Jako kryteria przyjęto minimalną sumę sił fizycznych oraz minimalny wpływ sił sterujących na postacie niesterowane.

#### 1. Wstęp

Ostatecznym celem sterowania drganiami wirników jest przeciwdziałanie wymuszeniom oraz taki wzrost tłumienia i sztywności, aby drgania wirnika były stabilne i miały pożądane przebiegi. Sterowanie to realizuje się przez przyłożenie do wirnika sił sterujących. Jakość sterowania drganiami wirnika zależy nie tylko od metody regulacji i struktury regulatora, ale również od liczby elementów pomiarowych /czujników/ i elementów wykonawczych /sił sterujących/ oraz ich rozmieszczenia na długości wirnika.

Problematyka optymalnej dyslokacji sił sterujących drganiami wirników jest przedmiotem pracy [1]. W pracy tej minimalizuje się drgania dowolnego układu wirnik-łożyska metodą najmniejszej sumy kwadratów. Do optymalizacji rozmieszczenia sił sterujących zastosowano koncepcję D-optymalizacji. Metoda ta wymaga nie tylko identyfikacji parametrów wirnika, ale również identyfikacji rozkładu niewyważenia. Przeprowadzone w pracy [1] rozważania teoretyczne nie uwzględniają uwypuklonego w artykule [2] faktu, że siły sterujące drganiami swobodnymi i siły sterujące drganiami wymuszonymi niewyważeniem różnią się znacznie amplitudami i częstotliwościami. Wymagają więc zwykle różnych rozwiązań technicznych.

W pracach [3,4] zajmowano się optymalną dyslokacją czujników i sił sterujących dla innych, niż wirnik, konstrukcji sprężystych. W artykule [3] poszukiwano optymalnego obserwatora minimalizując macierz sterowania i macierz obserwacji, a tym samym określając optymalne rozmieszczenie czujników i sił sterujących. Jednakże rozważania teoretyczne zostały poparte przykładem, w którym zastosowano jeden czujnik i jedną siłę sterującą. Wielowymiarowy układ sprawiałby wiele kłopotów ze względu na zastosowaną metodę sterowania - metodę przesuwania biegunów. Metodę maksymalizacji energii rozproszenia zastosowano w pracy [4] otrzymując w wyniku optymalne rozmieszczenie czujników i sił sterujących oraz optymalną macierz wzmocnienia układu regulacji. Metoda ta wymaga, aby obiekt był stabilny, a jednoczesna optymalizacja wielu wielkości zaciemnia sens fizyczny rozwiązania.

Przy optymalizacji rozmieszczenia sił sterujących, punktem wyjścia jest przyjęta metoda sterowania. Sterowanie postaciami drgań nazwane jest sterowaniem modalnym. Metoda sterowania modalnego jest najczęściej stosowana do sterowania drganiami. Ze względu na ograniczoną liczbę elementów pomiarowych i elementów wykonawczych ogranicza się sterowanie do kilku - zwykle najniższych - postaci drgań. Wybranie niewłaściwej wersji sterowania modalnego prowadzić może do rozlewania się efektów pomiaru i sterowania na postaci niesterowane, a więc na pompowanie do tych postaci energii sterowania. Wynikiem będzie pogorszenie się dynamiki układu, a nawet jego destabilizacja. Sposób wyeliminowania tego zjawiska przy sterowaniu drganiami wirników przedstawiono w pracy [5]. Jednakże zastosowana tam metoda wymaga, aby czujniki i siły sterujące leżały w tych samych płaszczyznach, oraz aby wirnik był obiektem stabilnym. Praca [2] przedstawia rozwiązanie będące modyfikacją metody z pracy [6], które nie ma powyższych ograniczeń i pozwala sterować każdą z postaci oddzielnie, stosując modalne filtry pomiarowe oraz modalne siły sterujące. Metoda ta zostanie przedstawiona w rozdziale drugim.

Na podstawie wynikających ze sterowania sił modalnych, można obliczyć fizyczne /rzeczywiste/ siły sterujące. Wartości tych sił można znacznie zmniejszyć przez odpowiedni dobór punktów ich przyłożenia na długości wirnika. W niniejszym artykule przed-

stawi się metodę minimalizacji tych sił. Rozdział trzeci będzie zawierał opis tej metody, natomiast rozdział czwarty przestawi przykład numeryczny ilustrujący tą metodę. Podsumowanie i wnioski są treścią rozdziału piątego.

## 2. Model i sterowanie drganiami wirnika

Przyjęto, że dwustronnie podparty, kołowsymetryczny wirnik ma następujące parametry: długość -  $l$ , masa jednostki długości -  $\rho A$ , sztywność giętna -  $EJ$ ,  $b$  - współczynnik tłumienia zewnętrznego,  $h$  - współczynnik tłumienia wewnętrznego. Pole przekroju poprzecznego -  $A$  oraz moment bezwładności -  $J$  mogą zmieniać się na długości wirnika. Prędkość obrotowa wirnika -  $\Omega$ . Przyjęto inercjalny układ współrzędnych OXYZ, którego środek  $O$  pokrywa się z lewym końcem wału, a oś  $Z$  jest osią idealnie sztywnych podpór kołowych. Siły sterujące /fizyczne/  $F_j$  przyłożone są w  $m$  płaszczyznach sterowania, których położenie określają współrzędne  $z_j$  / $j=1, 2, \dots, m$ /. Ruch takiego wirnika opisany jest następującym cząstkowym równaniem różniczkowym

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (b - h) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m F_j \delta(z - z_j) \quad /1/$$

gdzie:

$$\begin{aligned} w(z, t) &= w_x(z, t) + i w_y(z, t) \\ F_j(t) &= F_{xj}(t) + i F_{yj}(t) \quad \epsilon = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad /2/$$

są odpowiednio: współrzędną zespoloną opisującą wychylenie wirnika z położenia równowagi oraz zespolonymi siłami sterującymi, natomiast  $\delta(z - z_j)$  są funkcjami delta Diraca pozwalającymi siły przyłożone punktowo traktować jako rozłożone wzdłuż wirnika.

Założmy, że istnieje kompletny zbiór liniowo niezależnych funkcji kształtu  $\phi_k(z)$  i, że znamy te funkcje. Można wówczas przemieszczenie  $w(z, t)$  zapisać w postaci

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \phi_k(z) \quad /3/$$

gdzie

$$p_k(t) = \int_0^l w(z, t) \phi_k(z) dz \quad /4/$$

przy założeniu, że funkcje kształtu  $\phi_k(z)$  są znormalizowane

zgodnie z równaniem

$$\int_0^l \rho A \phi_i(z) \phi_j(z) dz = \delta_{ij} Z_p \quad /5/$$

przy czym  $\delta_{ij}$  - jest deltą Kroneckera. Powyższe założenia pozwalają zastąpić cząstkowe równanie /1/ zbiorem rozprężonych zwyczajnych równań różniczkowych

$$\ddot{p}_k + 2(\mu_k + \nu_k) \omega_k \dot{p}_k - 2i\Omega \nu_k \omega_k p_k + \omega_k^2 p_k = \sum_{j=1}^m \frac{1}{Z_k} \phi_k(z_j) F_j, \quad /6/$$

$k=1,2,3,\dots,$

przy czym:  $\omega_k$  - jest częstotliwością drgań własnych,

$\mu_k = \frac{1}{2\omega_k Z_k} \int_0^l b \phi_k(z) dz$  - jest k-tym modalnym tłumieniem zewnętrznym,

$\nu_k = \frac{1}{2\omega_k Z_k} \int_0^l h \phi_k(z) dz$  - jest k-tym modalnym tłumieniem wewnętrznym.

Równania /6/ można zapisać w postaci macierzowej

$$\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = -\Phi F, \quad /7/$$

gdzie:  $C = \text{diag}[2/\mu_k + \nu_k/\omega_k]$  - macierz tłumienia,  $K = \text{diag}[\omega_k^2 - 2i\Omega \nu_k \omega_k]$  - macierz sprężystości, a  $q = [p_1, p_2, \dots]^T$  - wektor przemieszczeń modalnych. Macierze  $C, K$  oraz wektor  $q$  mają nieskończone wymiary, natomiast  $\Phi = [\frac{1}{Z_k} \phi_k(z_j)]$  jest macierzą o wymiarze  $[\infty \times m]$ , ponieważ wektor sił fizycznych  $F = [F_1, \dots, F_m]^T$ . Należy zauważyć, że macierz  $K$  ma elementy zespolone. Część urojona tej macierzy przy spełnieniu warunku [2]

$$\Omega > \omega_k \frac{\mu_k + \nu_k}{\nu_k} \quad /8/$$

prowadzi do niestateczności. W naszym przypadku przyczyną niestateczności jest tłumienie wewnętrzne. Mogą istnieć inne przyczyny pojawiania się części urojonej macierzy sztywności, np. według [7] : ocieranie się czopa o panewkę lub wirnika o stator, siły dynamiczne generowane przez ciecz lub gaz smarujący w łożysku, niewyważone siły elektrodynamiczne w maszynach elektrycznych, główny przepływ w maszynach przepływowych powodujący tzw. "zmienny luz koniuszkowy", itd. Jednym z celów sterowania jest zneutralizowanie części urojonej macierzy sztywności.

Układy mechaniczne charakteryzuje niski poziom tłumienia /suma  $\mu_k + \nu_k$  nie przekracza 2-5%/. Prowadzi to do osiągnięcia

czasu zanikania ruchu oscylacyjnego wirnika. Stąd wynika potrzeba wykorzystania sił sterujących do podniesienia poziomu tłumienia.

Jak wynika z nierówności /8/ niestabilność może pojawiać się jedynie w postaciach, których częstość drgań własnych  $\omega_k$  leży poniżej prędkości obrotowej wirnika  $\Omega$ . Czas zanikania ruchu oscylacyjnego wirnika również jest dłuższy dla niższych postaci drgań. Dlatego też tymi postaciami będziemy sterować. W związku z powyższym postacie drgań podzielimy na postacie sterowane i postacie niesterowane, a równanie /7/ zapiszemy w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_s \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_s \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_s \\ \Phi_n \end{bmatrix} [F] \quad /9/$$

Układ równań rozpadł się na dwa podukłady i część sterowaną reprezentować będzie następujący model matematyczny

$$\ddot{q}_s + C_s \dot{q}_s + K_s q_s = P_s \quad /10/$$

gdzie

$$P_s = \Phi_s F \quad /11/$$

jest wektorem modalnych sił sterujących.

W celu stabilizacji i podniesienia poziomu tłumienia drgań wirnika wprowadza się prawo sterowania w postaci

$$P_s = G_1 q_s + G_2 \dot{q}_s \quad /12/$$

gdzie:

$$G_1 = Jm[K_s], \quad /13/$$

$$G_2 = -(d-1)C_s.$$

Po wstawieniu równania /12/ do równania ruchu /10/ otrzymany

$$\ddot{q}_s + C_r \dot{q}_s + K_r q_s = 0, \quad /14/$$

gdzie macierze  $C_r$  i  $K_r$  wynoszą odpowiednio:

$$C_r = d C_s, \quad /15/$$

$$K_r = Re[K_s];$$

tak więc macierz  $G_1$  rekompensuje część urojonej macierzy  $K_s$ , natomiast macierz  $G_2$  d-krotnie zwiększa tłumienie w układzie.

Równanie /4/ oraz równanie

$$\dot{q}_{s,k} = \dot{p}_k(t) = \int_0^L p(z,t) \phi_k(z) dz \quad /16/$$

są równaniami filtrów modalnych. Przemieszczenia i prędkości rozłożone na długości wirnika  $p/z,t/$  i  $\dot{p}/z,t/$  aproksymuje się wielomianami Lagrange'a lub Hermite'a w sposób znany z metody elementów skończonych. Filtry modalne pozwalają na uniknięcie stosowania obserwatorów przy oszacowaniu całego wektora stanu. Przy podziale wirnika na odpowiednio dużą liczbę elementów skończonych, filtry modalne prawie całkowicie eliminują zjawisko rozlewania się efektów pomiaru [8].

### 3. Minimalizacja fizycznych sił sterujących

Przyjęto, że liczba  $n$  fizycznych sił sterujących  $F_j$  równa jest liczbie  $n$  sterowanych postaci drgań. Na podstawie wzoru /11/ fizyczne siły sterujące wynoszą

$$F = \Phi_s^{-1} P_s \quad /17/$$

Do wyznaczenia sił fizycznych konieczna jest więc znajomość funkcji kształtu oraz sił modalnych. Siły modalne obliczamy ze wzoru /12/ i w tym celu należy określić przemieszczenia i prędkości modalne, a więc rozwiązać układ równań /14/ przy następujących warunkach początkowych

$$\begin{aligned} q(t=0) &= q_c = \text{col}[q_{c_j}], \\ \dot{q}(t=0) &= \dot{q}_c = \text{col}[\dot{q}_{c_j}]. \end{aligned} \quad /18/$$

Wprowadzając wektor stanu  $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$  otrzyma się z równania /14/ macierzowe równanie pierwszego stopnia

$$\dot{x} = Ax, \quad /19/$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k & -c \end{bmatrix}. \quad /20/$$

Rozwiązanie równania /19/ przy warunkach początkowych  $x_0 = [q_0^T, \dot{q}_0^T]^T$  jest następujące

$$\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} q_c \\ \dot{q}_c \end{bmatrix}. \quad /21/$$



Przemieszczenia i prędkości modalne zależą więc nie tylko od parametrów wirnika, ale również od warunków początkowych, a tym samym modalne i fizyczne siły sterujące zależą od warunków początkowych.

Siły modalne są wielkościami zespolonymi, gdyż macierz  $G_2$  jest zespolona, a także warunki początkowe są zazwyczaj zespolone. Macierz  $\dot{\phi}_s$  jest macierzą rzeczywistą i jest funkcją poszukiwanych współrzędnych  $z_j$  / $j=1,2,\dots,m$ / określających optymalne położenia płaszczyzn sił sterujących  $F_j$ . Załóżmy, że dla zadanych warunków początkowych oraz zadanych parametrów wirnika i układu regulacji obliczono przemieszczenia i prędkości modalne. Na podstawie wzoru /12/ wyznaczono siły modalne. Można teraz, korzystając ze wzoru /17/ sformułować problem optymalizacji.

Konstruujemy funkcję celu w postaci

$$D_1 = \sum_{j=1}^m [|\operatorname{Re}(F_j)| + |\operatorname{Im}(F_j)|] \quad /22/$$

Funkcja celu jest sumą bezwzględnych wartości części rzeczywistych i części urojonych wszystkich sił fizycznych. Kryterium to wynika z faktu, że sterującą siłą zespoloną realizuje się praktycznie przez przyłożenie dwóch sił odpowiednio wzdłuż osi X i osi Y układu współrzędnych OXYZ. W oparciu o wzór /17/ funkcję celu wyrazimy jako funkcję parametrów  $z_j$ . Zadanie optymalizacji będzie następujące.

$$\min_{z_1, z_2, \dots, z_m} D_1(z_1, z_2, \dots, z_m) \rightarrow z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^* \quad /23/$$

przy ograniczeniach

$$0 > z_1 > z_2 > z_3 \dots z_m > L, \quad /24/$$

gdzie:  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*$  są poszukiwanymi optymalnymi położeniami sił sterujących. Ograniczenia te uwzględniono przez wprowadzenie do funkcji celu funkcji kary postaci

$$D_d = \frac{(z_j - z_i)^2}{\gamma}, \quad i \neq j. \quad /25/$$

gdzie:  $z_i, z_j$  - bieżące parametry określające położenia sił sterujących,  $\gamma$  - współczynnik wpływu kary przy naruszeniu ograniczenia /24/. Można również nałożyć ograniczenia na wielkości

poszczególnych sił sterujących

$$F_j \in [F_{jp}, F_{jk}], \quad /26/$$

przy czym:  $F_{jp}$  - najmniejsza i  $F_{jk}$  - największa dopuszczalna wartość siły  $F_j$ .

Zastosowanie filtru modalnego pozwala znacznie zredukować zjawisko rozlewania się efektów pomiaru. Jednakże w dalszym ciągu mogą rozlewać się efekty sterowania tzn. fizyczne siły sterujące mogą wymuszać drgania postaci niesterowanych. Zjawiska tego nie da się całkowicie wyeliminować, lecz można je zminimalizować, przynajmniej w wybranych postaciach drgań. Jak już wspomniano, dla dynamiki wzmocników decydujące znaczenie mają najniższe postacie drgań, a tym samym najważniejsze z postaci niesterowanych są te, które posiadają najniższe częstotliwości własne. W tych też postaciach dążyć się będzie do minimalizacji zjawiska rozlewania się efektów sterowania.

Przyjmijemy, że jest  $m$  postaci sterowanych oraz chcemy uniknąć wpływu sterowania na dalsze  $n-m$  postaci drgań. Rozpatrzmy obecnie układ  $n$  równań różniczkowych typu /10/, których prawa strona czyli wektor sił modalnych ma postać

$$p = [p_s^T; 0^T]^T, \quad /27/$$

gdzie: wektor  $p_s$  określony jest wzorem /11/, a wektor zerowy ma wymiar  $n-m$ , natomiast macierz  $\Phi$  jest obecnie tablicą prostokątną  $[nm]$ . Zauważmy, że jeżeli w miejsce wektora zerowego wprowadzi się wektor sił modalnych sterujących postaciami od  $n-m+1$  do  $n$ , to otrzyma się przypadek sterowania  $n$  postaciami przy pomocy  $m$  sił fizycznych, gdzie  $m < n$ . Będziemy więc obecnie wszystkie  $n$  postaci nazywali postaciami sterowanymi.

Wektor fizycznych sił sterujących wyznaczmy obecnie ze wzoru

$$F = \Phi^+ p, \quad /28/$$

gdzie  $\Phi^+$  jest pseudoodwrotnością macierzy  $\Phi$ . Pseudoodwrotność wyznacza się ze związku

$$\Phi^+ = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T, \quad /29/$$

który reprezentuje rozwiązanie optymalne w sensie najmniejszej sumy kwadratów.

Zoptymalizowane według kryterium /23/ z uwzględnieniem równania /28/ siły sterujące  $F^*$  wprowadzimy do wzoru /11/ i otrzymamy siły modalne

$$P^* = \Phi F^* \quad /30/$$

Otrzymane w ten sposób siły modalne  $P^*$  różnią się od sił modalnych  $P$  określonych wzorem /27/ i wynikających ze sterowania. Nie jest więc realizowane w pełni sterowanie. Aby zminimalizować różnicę pomiędzy siłami  $P^*$  i  $P$  należy przeprowadzić optymalizację położzeń fizycznych sił sterujących według drugiego kryterium

$$\min_{z_1, z_2, \dots, z_m} D_2(z_1, z_2, \dots, z_m) \rightarrow z_1^A, z_2^A, \dots, z_m^A \quad /31/$$

przy ograniczeniach podanych wzorem /24/, przy czym  $D_2$  jest następującą funkcją celu

$$D_2 = \sum_{j=1}^m [|\operatorname{Re} p_j - \operatorname{Re} P^*| + |\operatorname{Im} p_j - \operatorname{Im} P^*|] \quad /32/$$

Należy zwrócić uwagę, że w funkcji celu /32/ uwzględniono jedynie pierwsze  $m$  postaci, tzn. tyle postaci ile jest fizycznych sił sterujących. Minimalizację różnicy sił  $P$  i  $P^*$  dla postaci  $n-m+1, \dots, n$  osiąga się dzięki temu, że macierz pseudoodwrotna  $\Phi^+$  reprezentuje rozwiązanie optymalne w sensie najmniejszej sumy kwadratów.

Powyżej przeprowadzono optymalizację przy dwóch różnych kryteriach. Powiąże się obecnie oba te kryteria następującą funkcją celu

$$D = \delta D_1 + (1-\delta) D_2 \quad /33/$$

gdzie  $\delta \in [0, 1]$  jest współczynnikiem wagi uwzględniającym udział poszczególnych składowych funkcji celu. W zależności od hierarchii celów, współczynnik wagi może przyjmować różne wartości. Wpływ współczynnika wagowego na rozwiązanie, zostanie przedstawiony w następnym rozdziale.

Optymalizację przeprowadzono przy pomocy algorytmu Davidona-Fletchera-Rowella /DFR/ należącego do rodziny gradientowych metod minimalizacji zmiennej metryki. Ideą tej metody jest generowanie kierunku poprawy na podstawie przybliżenia macierzy odwrotności drugich pochodnych funkcji celu. Dowód zbieżności tego algorytmu może być dokonany tylko dla wypukłych kwadrato-

wych funkcji celu, jednakże można go stosować w zadaniach bardziej złożonych. Algorytm DFR wykorzystuje pochodne funkcji celu, które powinny być obliczone w sposób analityczny, ze względu na dużą czułość na błędy obliczeniowe. W niniejszej pracy zastosowano obliczanie pochodnych metodami numerycznymi.

Zbieżność procesu optymalizacji zależy również od metody minimalizacji w kierunku. W pracy zastosowano metodę interpolacji kwadratowych z poszukiwaniem przedziału, w którym znajduje się wartość minimalna, metodą podwajania /połowienia/ kroku. Wszystko to znacznie zwiększyło czasochłonność obliczeń w stosunku do algorytmu źródłowego [9]. Ze względu na błędy obliczeniowe po każdym  $n$  krokach optymalizacji przeprowadzono odnowę algorytmu polegającą na powrocie do kroku gradientowego.

#### 4. Przykład numeryczny

Metoda optymalizacji z poprzedniego rozdziału zostanie zastosowana do wirnika o stałym przekroju poprzecznym. Z teorii drgań wiadomo, że funkcje kształtu takiego wirnika mają postać

$$\phi_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{l} \quad /34/$$

Długość wirnika jest znormalizowana  $l=1$ . Przyjęto, że sterować się będzie drganiami pierwszych trzech postaci. W celu określenia rozlewania się efektów sterowania siły modalne /30/ będą obliczane dla pierwszych sześciu postaci drgań celem porównania ich z siłami modalnymi wynikającymi ze sterowania. Unikać się będzie zjawiska rozlewania w czwartej i ewentualnie piątej postaci drgań. Do sterowania drganiami zastosuje się trzy zespolone siły fizyczne. Na punkty przyłożenia tych sił nałożono ograniczenia /24/. Aby zapobiec pokrywaniu się tych punktów, nałożono na rozwiązania dodatkowe funkcje kary /25/.

Wyniki przeprowadzonej w oparciu o wzór /17/ optymalizacji przedstawiono w tabelicy 1 dla różnych zestawów sił modalnych. W pierwszym przypadku założono, że siły modalne są jednakowe i działają jedynie na kierunku osi  $X$  /części rzeczywiste sił modalnych/. W drugim przypadku siły modalne są różne i przyłożone jedynie na kierunku osi  $Y$  /części urojone sił modalnych/. W trzecim przypadku działają jednocześnie obie powyższe grupy sił.

Jak wynika z przypadków I i II, symetria sił modalnych powoduje symetrię optymalnej dyslokacji sił fizycznych, a ponadto

gdy siły modalne są jednakowe, to wystarczają dwie siły fizyczne do sterowania trzema postaciami drgań. Wynika to z faktu, że optymalnymi są te wartości  $z_j$ , dla których wyznacznik z macierzy  $\Phi$  osiąga wartości maksymalne.

T a b l i c a 1

Lp	Siły modalne				Siły fizyczne				
	k	wg /11/		wg /30/		dyslokacja		wartości	
	k	ReP <sub>k</sub>	ImP <sub>k</sub>	ReP <sub>k</sub>	ImP <sub>k</sub>	j	z <sub>j</sub>	ReF <sub>j</sub>	ImF <sub>j</sub>
I	1	5		5		1	0.2479	6.0355	
	2	5		5		2	0.5206	0.0	
	3	5		5		3	0.7485	1.0356	
	4			0.0378		} Postacie niesterowane			
	5			-4.9997					
	6			-5.0003					
II	1		1		1	1	0.1666		5.9761
	2		5		5	2	0.4999		-2.6666
	3		9		9	3	0.8333		1.3572
	4				3.9996	} Postacie niesterowane			
	5				0.9996				
	6				-0.0008				
III	1	5	1	5	1	1	0.1959	5.3997	5.8983
	2	5	5	5	5	2	0.5001	1.2496	-2.7500
	3	5	9	5	9	3	0.8039	0.5954	0.5969
	4			3.3362	3.3289	} Postacie niesterowane			
	5			1.6642	-2.3361				
	6			-2.7800	-2.7700				

Jak wynika z tablicy I dla liczby sił sterujących równej liczbie postaci sterowanych otrzymujemy pełne wystrojenie tymi postaciami. Jednakże otrzymane w ten sposób siły fizyczne wymuszają drgania następujących postaci /postaci niesterowanych/. Aby tego uniknąć do optymalizacji zastosowano I kryterium z wykorzystaniem wzoru /28/, a wyniki dla różnych wartości  $n$  przedstawiono w tablicy 2. W pierwszym przypadku zakładamy zerowe siły modalne w czwartej postaci, a w II przypadku w postaci czwartej i piątej. W tych też postaciach chcemy uniknąć

zjawiska rozlewania się sterowania.

T a b l i c a 2

Lp	Siły modalne				Siły fizyczne				
	wg /27/		wg /30/		dyslokacja		wartości		
	k	ReP <sub>k</sub>	ImP <sub>k</sub>	ReP <sub>k</sub> <sup>*</sup>	ImP <sub>k</sub> <sup>*</sup>	j	z <sub>j</sub> <sup>*</sup>	ReF <sub>j</sub> <sup>*</sup>	ImF <sub>j</sub> <sup>*</sup>
I	1	5	1	5.5753	2.1723	1	0.1471	4.7996	4.8713
	2	5	5	4.4546	3.8887	2	0.4243	2.9758	-0.0
	3	5	9	2.9335	4.789	3	0.7416	0.7416	0.0
	4	0	0	2.2987	4.6842	Postacie niesterowane			
	5			4.0416	3.5962				
	6			5.3973	1.7536				
II	1	5	1	0.9107	2.8404	1	0.1037	2.8460	3.6916
	2	5	5	1.7255	3.0037	2	0.4783	0.0	-2.7732
	3	5	9	2.3590	5.9905	3	0.6504	0.0	-1.4093
	4	0	0	2.7445	2.9685	Postać niesterowana			
	5	0	0	2.2840	2.0746				
	6			2.6393	2.7460				

T a b l i c a 3

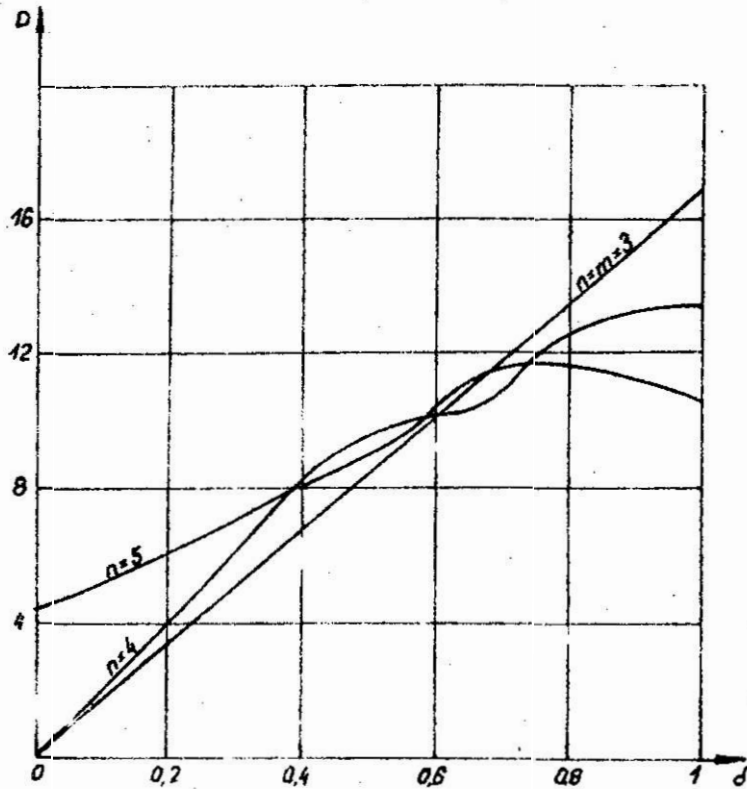
Lp	Siły modalne				Siły fizyczne				
	wg/27/		wg /30/		dyslokacja		wartości		
	k	ReP <sub>k</sub>	ImP <sub>k</sub>	ReP <sub>k</sub> <sup>Δ</sup>	ImP <sub>k</sub> <sup>Δ</sup>	j	z <sub>j</sub> <sup>Δ</sup>	ReF <sub>j</sub> <sup>Δ</sup>	ImF <sub>j</sub> <sup>Δ</sup>
I	1	5	1	5	1	1	0.2501	6.0368	6.0393
	2	5	5	5	5	2	0.4998	-0.0036	-4.0036
	3	5	9	5	9	3	0.75	1.0368	1.0342
	4	0	0	0.0102	0.0	Postacie niesterowane			
	5			-5.0143	-9.0143				
	6			-5.0	-5.0204				
II	1	5	1	4.6457	1	1	0.2063	3.8749	5.7643
	2	5	5	5.5030	5	2	0.2689	1.8071	-0.5951
	3	5	9	3.6830	7.0616	3	0.5034	0.9555	-2.0340
	4	0	0	1.6381	3.0663	Postać niesterowana			
	5	0	0	-1.0222	-2.0703				
	6			-4.3834	-3.2252				

Zastosowanie I-go kryterium powoduje jednakże, że pomiędzy siłami modalnymi wynikającymi z optymalizacji, a siłami modalnymi wynikającymi ze sterowania istnieją duże różnice i to tym większe, im więcej postaci chcemy uchronić od rozlewania się efektów sterowania. Aby wyeliminować te niekorzystne cechy zastosowano II-gie kryterium optymalizacji /32/. Dla parametrów z tablicy 2 przeprowadzono optymalizację według tego kryterium, a wyniki przedstawiono w tablicy 3. Wyniki otrzymane dla I-go przypadku są prawie idealne. Pierwsze trzy postaci są całkowicie wysterowane, a siły sterujące nie oddziałują prawie wcale na postać czwartą. Natomiast w następnych postaciach zauważalne jest duże oddziaływanie sił sterujących i w wyniku tego występuje zjawisko rozlewania się efektów sterowania. Dla II-go przypadku, gdy  $n=5$ , nie uzyskujemy już tak idealnych wyników. Dotyczy to szczególnie wyższych postaci drgań. Jednocześnie jednak znacznie mniejsze jest zjawisko rozlewania się efektów sterowania w niekontrolowanej postaci szóstej.

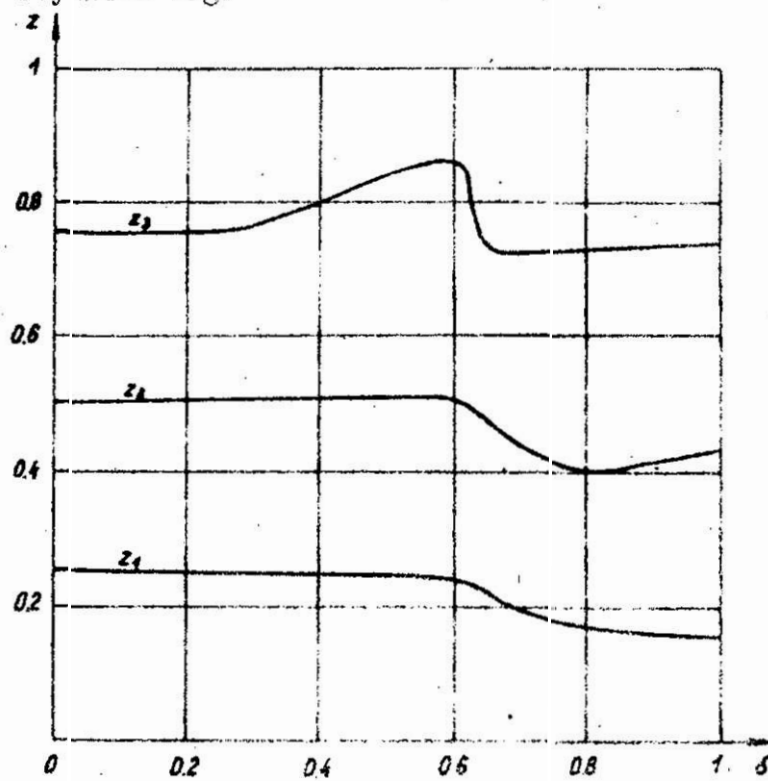
T a b l i c a 4

I-p	Siły modalne				Siły fizyczne					
	k	wg /27/		wg /30/		j	z <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	ReF <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	ImF <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	
	k	ReP <sub>k</sub>	ImP <sub>k</sub>	ReP <sub>k</sub> <sup>ra</sup>	ImP <sub>k</sub> <sup>ra</sup>	j	z <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	ReF <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	ImF <sub>j</sub> <sup>*4</sup>	
I	1	5	1	5	0.9888	1	0.2380	5.8482	5.8409	
	2	5	5	5	15.0229	2	0.5009	0.5485	-3.4538	
	3	5	9	5	8.9882	3	0.8389	0.9725	0.9692	
	4	0	0	0.0	-0.0406					
	5				-2.1849	-6.1873				
	6				-5.9139	-5.7353				
							Postacie niesterowane			
II	1	5	1	4.0464	1.1181	1	0.2016	5.0473	5.2705	
	2	5	5	3.9490	4.9999	2	0.5220	0.5151	-2.2374	
	3	5	9	4.8875	7.4377	3	0.7602	0.7972	0.3376	
	4	0	0	2.9236	2.3584					
	5	0	0	-0.1031	-2.4344					
	6				-2.5126	-1.9912				
							Postać niesterowana			

Stosowanie II-go kryterium powoduje zwiększenie poziomu sił fizycznych w stosunku do poziomu tych sił wynikających z I-go



Rys. 1. Wartości polinomicznej funkcji celu  $D$  w funkcji współczynnika wagi



Rys. 2. Wartości optymalnych punktów przyłożenia sił sterujących w funkcji współczynnika wagi



kryterium /porównaj tablice 2 i 3/. Aby je zmniejszyć, a jednocześnie zapewnić dobre sterowanie, zaproponowano polioptymalne kryterium /33/. Dla współczynnika wagi  $\delta=0.5$  wyniki optymalizacji według tego kryterium przedstawiono w tablicy 4.

Porównanie wyników z tablic 3 i 4 pozwala wnioskować, że otrzymane w wyniku polioptymalizacji siły modalne uległy minimalnemu pogorszeniu, natomiast w większym stopniu zmniejszył się poziom sił sterujących. Wartości funkcji celu w funkcji współczynnika wagowego przedstawia rys. 1, natomiast optymalne punkty przyłożenia sił sterujących w funkcji współczynnika wagowego, daje rys. 2. Wartości optymalnych funkcji celu są zależnościami prawie liniowymi dla zakresu współczynnika wagi od 0 do 0.5. Optymalne położenia sił sterujących też prawie nie zmieniają swych wartości dla tego samego zakresu zmian wartości współczynnika wagi. Wynika to z faktu, że dla wartości współczynnika  $\delta$  od 0 do 0.5 wartość drugiego kryterium nie ulega prawie zmianie i dla  $n=3$  oraz  $n=4$  jest równa w przybliżeniu zero. Dopiero dla większych wartości współczynnika wagi dominować zaczyna I kryterium i wprowadza ono nieliniową zależność polioptymalnego kryterium od współczynnika wagi.

### 5. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono modalną metodę rozprzęgającą wielowymiarowy układ sterowania organami wirników na proste podukłady. Zamiast z podukładów jest układem sterowania jedną z postaci organ. W procesie syntezy sterowania określa się siłę modalną, mającą na celu stabilizację i tłumienie ruchu drgającego danej postaci. Na bazie sił modalnych oblicza się rzeczywiste /fizyczne/ siły sterujące. Metody techniczne realizacji tych sił przedstawia praca [10]. Ze względu na ograniczoną liczbę sił fizycznych ogranicza się liczbę postaci sterowanych. Jednakże siły sterujące /fizyczne/ wymuszają również drgania postaci niesterowanych. Przez odpowiedni dobór punktów przyłożenia sił sterujących można nie tylko zminimalizować te siły, ale również zmniejszyć rozlewanie się efektów sterowania na postacie niesterowane. Z od tym kątem zaproponowano w niniejszej pracy metodę polioptymalizacji punktów przyłożenia sił sterujących. Otrzymane w przykładzie numerycznym wyniki potwierdza-

ją efektywność tej metody. W dynamice wirników decydujące znaczenie mają najniższe postacie drgań, dlatego ta metoda jest szczególnie efektywna w zastosowaniu do sterowania drganiami wirników. Częstota wymuszeń sił fizycznych odpowiadać będzie częstościom własnym postaci sterowanych. Dlatego drgania wyższych postaci /postaci niesterowanych/ wymuszane przez te siły będą odstrojone od rezonansów, a tym samym o stosunkowo niskim poziomie amplitud.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Burrows C.R., Sahinkaya M.N.: Vibration control of multi-mode rotor-bearing systems. Proceedings Royal Soc. Lond., 1983, Vol.A386, pp77-94.
2. Gosiewski Z.: Metoda automatycznego sterowania drganiami wirników giętkich. Zgłoszono do Archiwum Budowy Maszyn.
3. Mohamed Abdel-Roman: Design of optimal observers for structural control. IEE Proceedings, Part D, 1984, Vol131, No.4.
4. Schulz G., Heimbold G.: Dislocated Actuator/Sensor Positioning and Feedback Design for Flexible Structures. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1983, Vol.6, No.5.
5. Salm J., Schweitzer G.: Modelling and control of a flexible rotor with magnetic bearings. Proceedings of Third International Conference on "Vibrations in Rotating Machinery", 1984, C 277/84, York, England. Editor: The Institution of Mechanical Engineers.
6. Meirovitch L., Baruh H., Oz H.: A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1983, Vol.6, pp302-310.
7. Muszynska A.: Rotor instability. Proceedings of Senior Mechanical Engineering Seminar, 1984, Carson City, Nevada, USA.
8. Meirovitch L., Baruh H.: On the Problem of Observation Spillover in Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems. Journal of Optimization Theory and Applications, 1983, Vol.39, pp269-291.
9. Himmelblau D.M.: Applied Nonlinear Programming. McGraw-Hill Book Company, 1972.

Nikolajsen J.L., Holmes R., Gondhalekar V.: Investigation of an Electromagnetic Damper for Vibration Control of a Transmission Shaft. The Institution of Mech. Engineers, 1979, Vol.139, No.31.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СИЛ УПРАВЛЕНИЯ  
КОЛЕБАНИЯМИ ГИБКОГО РОТОРА

Резюме

В статье представлено модальный метод управления колебаниями гибких роторов. Определены модальные силы стабилизирующие и подавляющие колебательное движение ротора. На основании модальных сил определены оптимальные точки приложения физических управляющих сил. В качестве критериев приняты минимум суммы физических сил а также минимальное влияние управляющих сил на неуправляемые вилы колебаний.

OPTIMAL DISLOCATION OF FORCES CONTROLLING  
A FLEXIBLE ROTOR VIBRATION

Summary

A modal method for vibration control of flexible rotors is presented in the paper. Modal forces stabilizing and damping rotor vibration are fixed. On the ground of the modal forces optimal points of application physical control forces are calculated. The minimal sum of the physical control forces and the minimal "spillover" control effects are criteria of the optimization.

V KONFERENCJA "POLIOPTYMALIZACJA W PROJEKTOWANIU"

MIELNO 86

E. Jacquet-Lagrèze

LAMSADE, Université de Paris Dauphine, France

R. Słowiński

Institute of Control Engrg., Technical University  
of Poznań, Poland

MOLP WITH AN INTERACTIVE ASSESSMENT OF A PIECEWISE -  
- LINEAR UTILITY FUNCTION

The paper presents a methodology for MultiObjective  
Linear Programming (MOLP) problems. It relies on three steps:

- (1) Generation of a subset of feasible efficient solutions  
(from 10 to 50) as representative as possible of the  
efficient set.
- (2) Assessment of an additive utility function using an  
interactive method (PREFCALC).
- (3) Optimization of the additive utility function on the  
original set of feasible solutions.

Following this methodology enables the user to find compromise  
solutions which can be different from the vertices. It is par-  
ticularly adapted for large scale linear programs where tradi-  
tional multiobjective methods would be too costly to use,  
since the interactive phase is limited to step (2), using  
PREFCALC on a micro-computer.

1. OUTLINE OF THE METHOD

This paper presents a new method to support Decision  
Makers (DM) in solving MultiObjective Linear Programming  
(MOLP) problems:

$$\begin{aligned} \max \quad & \left[ \begin{array}{l} g_1(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\ \dots\dots\dots \\ g_K(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{Kj} x_j \end{array} \right] \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

Why a new method ? Many have been proposed, most of them are interactive, many are operational under the form of computer programs (see for instance SŁOWIŃSKI [13], VINCKE [15], ...).

Most of the previous methods, when they are interactive, use the concept of "local preferences". The consequence is that one has to solve one or more optimisations of the initial linear program at each iteration. This can be costly and time consuming, preventing quick answers in the process and making the method less interactive.

The method proposed here relies on a completely different principle. It consists in three steps.

- (1) Generation of a subset of efficient solutions.

We suggest to use the first step of the method by CHOO and ATKINS [2] which enables to generate a few efficient solutions not confined to the vertices of the feasible set (i.e. in the middle of facets). This step is not interactive and does not involve the DM.

- (2) Interactive assessment of an overall utility function.

We propose to use the PREFCALC Method (see JACQUET-LAGRÈZE and SHAKUN (3), JACQUET-LAGRÈZE [4]). The DM works with a rather small subset of efficient solutions generated in step 1 using a micro-computer, and the output of this process is an additive piecewise-linear utility function.

- (3) Optimization of the utility function on the original set of feasible solutions.

This is again a non interactive step. We use procedures developed in the context of separable convex programming to solve the problem. Briefly speaking, it is possible to transform the problem into a new linear program.

Although this method is fully operational on a micro-computer, whenever the utility assessed in step 2 is concave for each marginal utility function, it seems particularly adapted as a part of a DSS (Decision Support System) for large problems which would require the power of a mainframe as suggested in fig.1

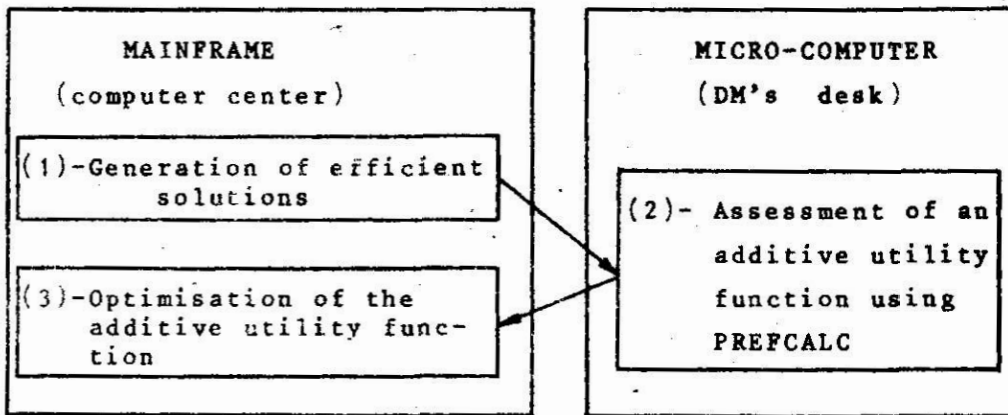


Fig.1 The method, in 3 steps

Steps 1 and 3 which are not interactive could be solved on a mainframe (or mini) in a computer center, or even on a system which is at a long distance from the DM using telecommunication to transmit intermediary data files.

Step 2 is to take place on the DM's desk, in his office, using his personal computer. It is the subjective part of the method which requires his presence, far from the technical problems he thinks in a quiet and familiar environment to the pros. and cons. of the problem he has to solve, having a clear idea of what is feasible and interesting (the efficient solutions).

In the next 3 sections (2 to 4) we present in detail each step, using a simple illustrative example proposed by GOICOECHEA, HANSEN and DUCKSTEIN [5].

## 2. STEP 1 - GENERATION OF EFFICIENT POINTS

### 2.1. The method

There are several possible ways of generating efficient points of a multiobjective linear program. Let us only mention the possibility of combining the multiparametric linear programming methods [6],[16],[17], with filtering techniques presented in [3],[11]. In this paper we shall use, however, another method which is particularly tractable and permits, an easy control of dispersion of the generated efficient points, not confined to vertices of the efficient region only; moreover it uses linear programming as a main computational procedure. This is the first step of the interactive algorithm for multicriteria programming by CHOO and ATKINS [2]. Let us start with an informal description of the method.

Let us define some "ideal" point  $G = (G_1, G_2, \dots, G_K)$

Where  $G_k = \max_{\underline{x} \in S} g_k(\underline{x})$  ( $k=1, \dots, K$ ), and an efficient point

$\underline{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0)$  closest to  $G$  in the sense of the weighted Chebyshev norm in the criterion space:

$$\max_k \beta_k (G_k - y_k^0) = \min_{\underline{x} \in S} \max_k \beta_k (G_k - g_k(\underline{x})).$$

$G$  is defined by the diagonal of the pay-off table calculated for the MOLP problem, and  $\underline{y}^0$  results from an optimal solution to the following LP problem:

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad & \min z \\ & \text{s.t. } z \geq \beta_k (G_k - g_k(\underline{x})) \quad (k=1, \dots, K) \\ & \underline{x} \in S \end{aligned}$$



The weights  $\beta_k > 0$  are chosen a priori so as to keep  $\underline{y}^0$  in the "central" area of the feasible region.  $\beta_k$  can be calculated as follows:

$$\beta_k = (G_k - F_k)^{-1} \quad (k=1, \dots, K) \quad (1)$$

where  $F_k$  is a minimum of  $g_k(\underline{x})$  over  $\underline{x}$  maximizing each objective function individually; in other words,  $F_k$  is a smallest element in the  $k$ -th column of the pay-off table. Of course, the DM may wish to define  $F_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) himself.

$F$  may be understood as an "anti-ideal" point and let us observe that  $1/\beta_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) are direction coefficients of the straight line passing through the ideal and the anti-ideal points, and that  $\underline{y}^0$  lies on this direction too. Point  $\underline{y}^0$  becomes a starting point for generating other efficient points using the search direction from  $G$  to  $F$ .

To this end, let us mark some  $s$  extra points  $\underline{y}^1, \underline{y}^2, \dots, \underline{y}^s$ , regularly distributed on the search direction between  $\underline{y}^0$  and  $F$ . Then taking each criterion in turn, say  $g_1$  first, we maximize  $g_1$  subject to all other criteria being at least equal to their value at  $\underline{y}^1$ , then  $\underline{y}^2$ , all the way to  $\underline{y}^s$ . This will give a sequence of trial efficient points  $\underline{y}^{11}, \underline{y}^{12}, \dots, \underline{y}^{1s}$  for criterion 1,  $\underline{y}^{21}, \underline{y}^{22}, \dots, \underline{y}^{2s}$  for criterion 2, etc. ..., until  $\underline{y}^{K1}, \underline{y}^{K2}, \dots, \underline{y}^{Ks}$  for criterion  $K$ . The procedure is illustrated in fig. 2 for a two criteria case.

Let us remark that both the definition of  $F$  and the use of the Chebyshev norm do not guarantee the generated points to be efficient in a strong sense. So, strictly speaking, we obtain in general weakly efficient points.

Let us recall after [9], that a point  $\underline{x} \in S$  is said to be weakly efficient iff there does not exist another  $\underline{x}' \in S$  such that  $g_k(\underline{x}') > g_k(\underline{x})$  for all  $k$ . In other words, weak efficiency means that the obtained point can be dominated only by another feasible point lying on the boundary of the positive orthant with the origin at the obtained point. This feature does not decrease, however, the usefulness of the generation method

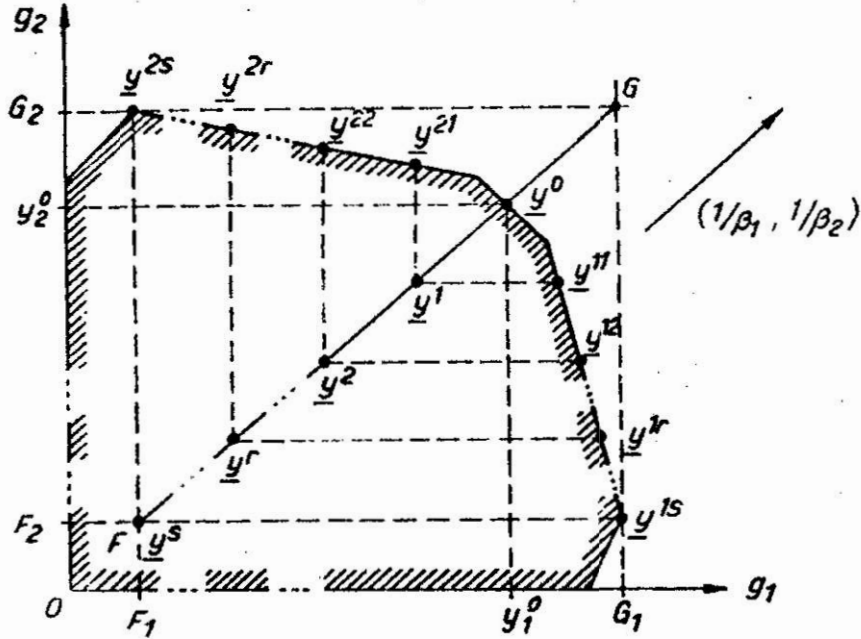


Fig. 2 Generation of efficient solutions

since the efficiency of solutions belonging to the reference set is not necessary requirement of our approach.

A detailed description of the generation method is presented in the following steps:

- Step 0. Calculate the pay-off table of the MOLP problem and define the ideal and the anti-ideal points,  $G$  and  $F$ , respectively.
- Step 1. Calculate  $\beta_k$  ( $k=1, \dots, K$ ) according to (1).
- Step 2. Solve problem (P1). We obtain  $\underline{x}^*$  and the first (weakly) efficient point  $\underline{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0)$ , where  $y_k^0 = g_k(\underline{x}^*)$  ( $k=1, \dots, K$ ).
- Step 3. For a given  $s, r=1, \dots, s$  and  $k=1, \dots, K$ , solve the following LP problem:

$$\begin{aligned}
 \text{(P2)} \quad & \max \quad g_k(\underline{x}) \\
 \text{s. t.} \quad & g_j(\underline{x}) \geq y_j^0 - r/s (y_j^0 - F_j) \quad (j=1, \dots, K; j \neq k) \\
 & \underline{x} \in S
 \end{aligned}$$

We obtain (weakly) efficient points  $\underline{y}^{kr}$  ( $k=1, \dots, K$ ;  $r=1, \dots, s$ ).

If the values taken by different objective functions differ a lot for the same  $\underline{x}$ , it is worth normalizing them by multiplying each objective  $k$  by  $\alpha_k = (\sum_{j=1}^n c_{kj}^2)^{-2}$ , where  $c_{kj}$  are cost coefficients of  $g_k$  ( $k=1, \dots, K$ ;  $j=1, \dots, n$ ).

## 2.2. Example

To illustrate the above generation method, consider the following two-criteria LP problem, taken from [[5], example 2.3-1]:

$$\begin{aligned}
 & \text{(EX)} \quad \max \quad \left[ \begin{array}{l} g_1(\underline{x}) = x_1 - 3x_2 \\ g_2(\underline{x}) = -4x_1 + x_2 \end{array} \right] \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 3.5 \\ x_1 + x_2 \leq 5.5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}
 \end{aligned}$$

The feasible region in criterion space is shown in fig. 3. The thickened border of the feasible region can be identified as the set of all efficient points. The results of particular steps of the algorithm are as follows:

Step 0. The pay-off table:

\	$g_1$	$g_2$
$g_1$	4.0	-16
$g_2$	-10.5	3.5

Hence, the ideal point  $G = (4.0, 3.5)$ , and the anti-ideal point  $F = (-10.5, -16)$

Step 1.  $\beta_1 = 0.069, \beta_2 = 0.051$

Step 2.  $\underline{x}^* = (0.35, 0.0)$

$\underline{y}^0 = (0.35, -1.4)$

Step 3. For  $s=5$  we obtain the efficient points given in table 1 and shown in fig.3.

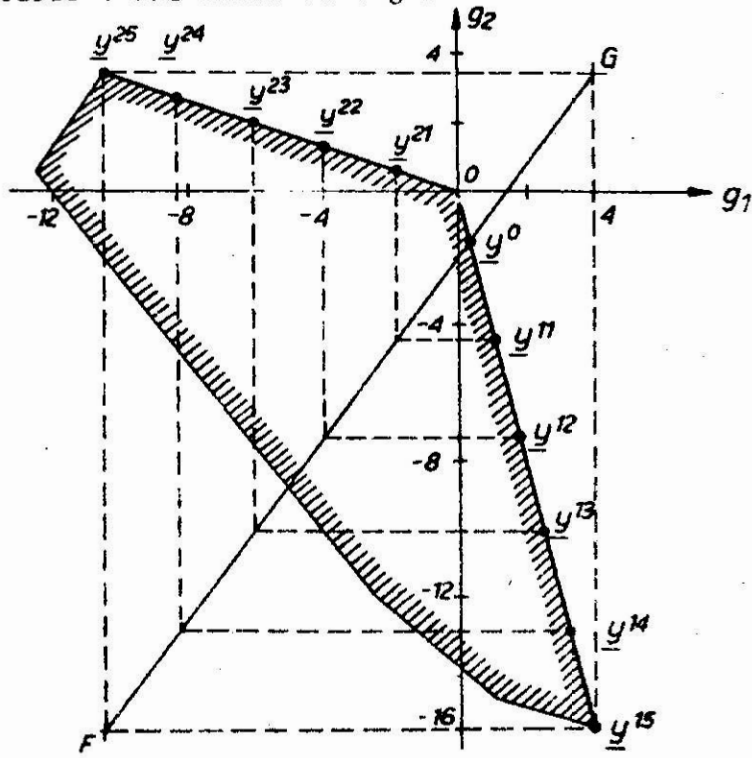


Fig. 3. Illustration on the example

Trial eff. point	$R_1$	$R_2$
$\underline{y}^0$	0.35	-1.4
$\underline{y}^{11}$	1.08	-4.33
$\underline{y}^{21}$	-1.83	0.61
$\underline{y}^{12}$	1.81	-7.25
$\underline{y}^{22}$	-4.0	1.33
$\underline{y}^{13}$	2.54	-10.17
$\underline{y}^{23}$	-6.17	2.06
$\underline{y}^{14}$	3.27	-13.09
$\underline{y}^{24}$	-8.34	2.78
$\underline{y}^{15}$	4.0	-16.0
$\underline{y}^{25}$	-10.5	1.5

TABLE 1

3. STEP 2 - ASSESSING AN ADDITIVE PIECEWISE-LINEAR UTILITY FUNCTION

3.1. Brief presentation of PREFCALC

As said before, we use Prefcalc method and micro-computer package to support the DM in the task.

The data we need to use PREFCALC is a file containing a list of discrete alternatives (i.e. the efficient solutions) and their values on each criterion. Formally speaking, we know set A, and  $g_k(a)$  for all  $a \in A, k=1, \dots, K$ .

We assume that the preference is a non-decreasing or non-increasing function of each criterion (i.e.  $u_k(g_k)$  is monotone), and the overall preference can be represented by an additive piecewise-linear function (see [12]):

$$u(g) = \sum_{k=1}^K u_k(g_k); \quad u_k(g_k) \geq 0$$

$$u_k(g_{k*}) = 0, \quad \sum_{k=1}^K u_k(g_k^*) = 1$$

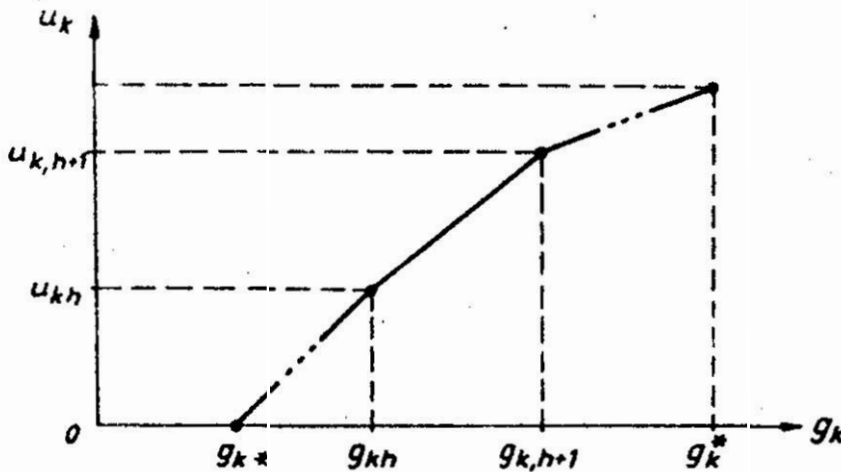


Fig.4. Piecewise-linear marginal utility function

where  $g_{k*}$  and  $g_k^*$  represent the least and the most preferred value on criterion  $g_k$ , respectively.

Using PREFCALC, the DM can perform the following tasks:

- Modify  $g_{k*}$  or  $g_k^*$  (the constraints and aspiration levels).
- Weight the criteria (give value for  $u_k(g_k^*)$ ).
- Draw marginal utility function (give a certain number of linear pieces  $g_{kh}$ ,  $h=1, \dots, a_k$ ) and give the values of  $u_k(g_{kh})$ .
- Estimate indirectly the values  $u_k(g_{kh})$  so that the utility function is as consistent as possible with a wholistic preference on some alternatives (ordinal regression).

The last option has been described in detail in [14]

### 3.2. Application to the example

- The DM examine 11 efficient solutions. He does not want to modify the values of  $g_k^*$  and  $g_k^*$ .
- Instead of giving weights to the criteria, he prefers to start the interactive procedure in ordering the 5 following alternatives.

	$G_1$	$G_2$	PREFERENCE
$y^{12} = S 4$	1.8	-7.3	1
$y^{22} = S 10$	4.0	-16	2
$y^0 = S 0$	0.4	-1.5	3
$y^{23} = S 7$	-6.2	2.1	4
$y^{25} = S 11$	-10.5	3.5	5

Table 2

With one linear piece for each marginal utility function, it is not possible to estimate a function. As suggested by the program, the DM increases the number of linear pieces. Actually he uses 2 linear pieces for the 2nd criterion feeling that his preference does not increase in a linear way with this criterion.

- As a result, the preference order becomes consistent, giving the solution in fig. 5.

Note the 3 curves for each marginal function; these curves represent the stability (imprecision) in the estimation procedure (post-optimal analysis in the ordinal regression phase of PREFCALC). The utility function proposed by PREFCALC is an average one (giving weights 0.80 and 0.20).

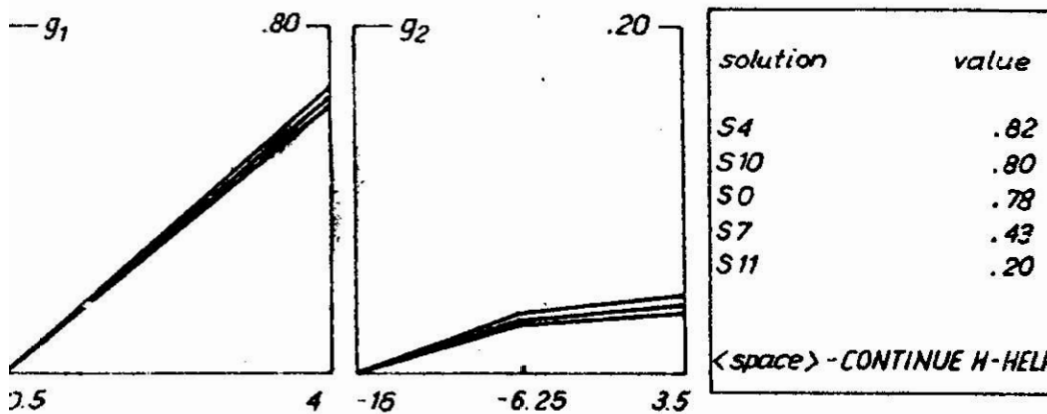


Fig. 5 Estimated utility function with PREFCALC

- DM agrees with the marginal utility function on criterion  $g_2$  which becomes almost flat above value  $-6.25$  and actually he decides to use the utility function shown in fig. 6 with weights 0.8 and 0.2. He saves that function and sends it back for optimisation in step 3.

#### 4. STEP 3 - SOLUTION OF THE PIECEWISE-LINEAR PROGRAM

##### 4.1. Problem formulation and the algorithm

As the result of using PREFCALC, we obtain an additive utility function and each marginal utility function  $u_1(g_1)$ ,  $u_2(g_2), \dots, u_K(g_K)$  having a piecewise-linear form. Let  $(g_{kh}, u_{kh})$  be the breakpoints of  $u_k(g_k)$  ( $h=1, \dots, a_k$ ;  $k=1, \dots, K$ ) which are known (see fig. 4). Then each objective function  $g_k$  and each partial utility  $u_k(g_k)$  can be expressed as a combination of the breakpoints:

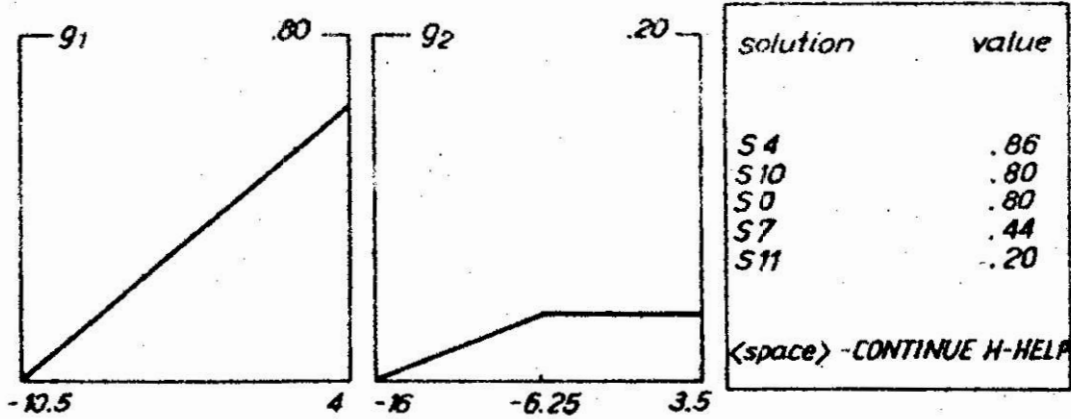


Fig. 6 Utility function chosen by the DM

$$g_k = \sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} g_{kh}$$

$$u_k(g_k) = \sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} u_{kh}$$

$$\sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} = 1$$

$$\lambda_{kh} \geq 0 \text{ for } h=1, \dots, \alpha_k; k=1, \dots, K$$

where, at most, two adjacent  $\lambda_{kh}$ 's are positive for each  $k$ . Since the overall utility function  $U$  is the sum of partial utility functions, and  $g_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j$  ( $k=1, \dots, K$ ), the problem of finding  $\underline{x}$  maximizing  $U$  can be formulated as follows:

$$(P3) \quad \max \quad U = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} u_{kh}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{kj} x_j - \sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} g_{kh} = 0 \quad (k=1, \dots, K)$$

$$\sum_{h=1}^{\alpha_k} \lambda_{kh} = 1 \quad (k=1, \dots, K)$$



$$\lambda_{kh} \geq 0 \quad (k=1, \dots, K; h=1, \dots, \alpha_k)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

and, at most, two adjacent  $\lambda_{kh}$ 's are positive for each k.

With the exception of the constraint that, at most two adjacent  $\lambda_{kh}$ 's are positive for each k, problem (P3) is a linear program. For solving problem (P3) one can use the simplex method with the following restricted-basis-entry rule. A non-basic variable  $\lambda_{kh}$  is introduced into the basis only if it improves the objective function and if the new basis has no more than two adjacent  $\lambda_{kh}$ 's that are positive for each k.

It can easily be proved ([1], theorem 11.3.1) that if all partial utility functions are concave, we can discard the restricted basis entry rule and adopt the ordinary simplex algorithm. Recently, a particularly efficient version of the simplex algorithm that can maximize any concave separable piecewise-linear objective, subject to linear constraints, has been suggested by FOURER [4], along with a comprehensive unified treatment of both theory and algorithms for piecewise linear programming. Fourer extends the linear bounded-variable simplex algorithm to handle arbitrary concave separable piecewise-linear objectives. The steps of the algorithm are found to require about the same work as their counterparts in common linear simplex algorithms.

To end with the concave case, let us remark that an optimal solution of (P3) is either an efficient vertex of the feasible set or another point of the efficient border of the MOLP problem; the first case occurs if in the optimal solution exactly two  $\lambda_{kh}$  are positive for each k, and the second, if for at least one k, there exists h such that  $\lambda_{kh} = 1$ . In the latter case, the optimal solution is a tangential point of the efficient border and an isopreference curve in its breakpoint (case of the example, see fig. 7).

For non-concave partial utility functions, the solution obtained using the simplex algorithm with the restricted-basis-entry rule is an optimal solution of problem (P3) in a local sense only; if the problem possesses more than one local optimum, there is no guarantee that the best from among them will be found [10].

#### 4.2. Example

Let us continue with example (EX). As result of using PREFCALC, we have:

$$g_1 = -10.5 \lambda_{11} + 4 \lambda_{12}$$

$$g_2 = -16 \lambda_{21} - 6.25 \lambda_{22} + 3.5 \lambda_{23}$$

$$u_1(g_1) = 0 \lambda_{11} + 0.8 \lambda_{12}$$

$$u_2(g_2) = 0 \lambda_{21} + 0.2 \lambda_{22} + 0.2 \lambda_{23}$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = 1$$

$$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} = 1$$

$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \geq 0$$

and, at most, two adjacent  $\lambda_{2h}$ 's are positive.

Thus, problem (P3) takes the form:

$$\max \quad U = 0.8\lambda_{12} + 0.2 \lambda_{22} + 0.2 \lambda_{23}$$

$$\text{s. t.} \quad -x_1 + x_2 \leq 3.5$$

$$x_1 + x_2 \leq 5.5$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1 - 3x_2 + 10.5 \lambda_{11} - 4 \lambda_{12} = 0$$

$$-4x_1 + x_2 + 16 \lambda_{21} + 6.25 \lambda_{22} - 3.5 \lambda_{23} = 0$$

$$\lambda_{11} + \lambda_{12} = 1$$

$$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} = 1$$

$$x_1, x_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \geq 0$$

Since partial utility functions are concave, we can discard the constraint that, at most, two adjacent  $\lambda_{kh}$ 's are positive. The optimal solution of the above LP problem is the following:

$$U^* = 0.8655$$

$$g_1 = 1.5625, \quad g_2 = -6.25$$

$$x_1^* = 1.5625, \quad x_2^* = 0$$

$$\lambda_{11}^* = 0.1681, \quad \lambda_{12}^* = 0.8319$$

$$\lambda_{21}^* = 0, \quad \lambda_{22}^* = 1, \quad \lambda_{23}^* = 0$$

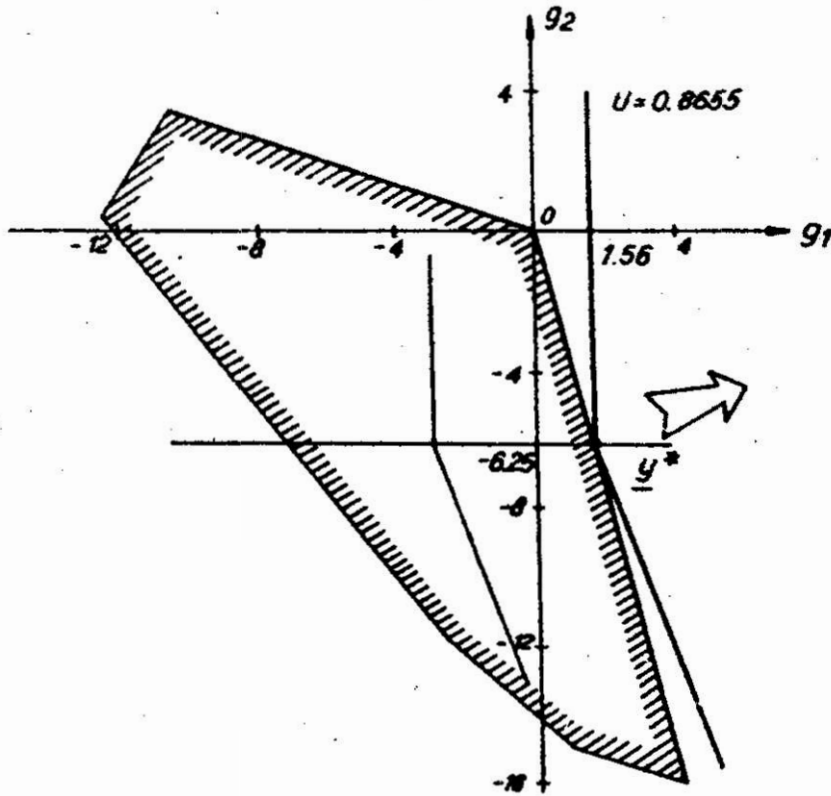


Fig. 7 Optimal solution of the piecewise-linear utility function

This solution is represented in fig.7. Let us remark that in the criterion space of problem (EX), the utility function  $U$  defines a family of isopreference curves in the form of parallel piecewise-linear curves; two of them are shown in fig.7 and the direction of the growth of utility is marked with an arrow. The optimal solution is a tangential point, of the efficient border and an isopreference curve in its breakpoint. It is worth stressing that it is an efficient point which is not a vertex of the feasible set.

#### REFERENCES

1. B a z a r r a M.S., S h e t t y C.M., "Nonlinear programming", J.Wiley, New York 1979.
2. C h o o E.U., A t k i n s D.R., "An interactive algorithm for multicriteria programming", Comput. & Ops. Res. 7 (1980) p.81-87.
3. T ó r a A., "A sampling-search-clustering approach for exploring the feasible/efficient solutions of MCDM problems", Comput. & Ops. Res. 7 (1980) p.67-80.
4. F o u r e r R., "Piecewise Linear Programming", Report, Dept. of Industrial Engrg. and Management Sci., Northwestern University, Evanston, Ill., March 1983.
5. G o i c o a c h e a A., H a n s e n Eon R., D u c k s t e i n L., "Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications", J.Wiley, New York 1982.
6. I s e r m a n H., "The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program", Operational Res. Quarterly 28 (1977) no. 3.
7. J a c q u e t - L a g r è z e E., S h a k u n M., "Decision support systems for semi-structured buying decisions", Cahier du Lamsade no. 43 (fev. 1983).

8. J a c q u e t - L a g r è z e E., "PREFCALC - Evaluation et Decision Multicritères", Euro-Decision 1983.
9. K o r n b l u t h J.S., S t e u e r R.E., "Multiple objective linear fractionnal programming", Management Sci. 27 (1981) p. 1024-1039.
10. M i l l e r C.E., "The simplex method for local separable programming", (in) R.L. Graves, P. Wolfe (eds.), Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, New York 1963, p.89-100.
11. M o r s e J.N., "Reducing the size of the nondominated set: pruning and clustering", Comput. & Ops. Res. 7 (1980) p.55-66.
12. S ł o w i ń s k i R., "Modelowanie preferencji w wielokryterialnych problemach decyzyjnych", ZN Pol. Śl. Automatyka 67 (1983) p.95-111.
13. S ł o w i ń s k i R., "Przegląd metod wielokryterialnego programowania liniowego, Przegląd Statystyczny 31 (1984) Część I - nr 1/2, p.47-64, Część II - nr 3/4, p.303-318.
14. S ł o w i ń s k i R., "Metoda konstrukcji addytywnej funkcji użyteczności i jej zastosowanie do wielokryterialnego programowania liniowego", Postępy Cybernetyki 8 (1985), nr 4.
15. V i n c k e Ph., "Présentation et analyse de neuf méthodes multicritères interactives", Cahier du LAMSADE no. 42 (dec. 1982).
16. W i n k e l s H.-M., "Complete Efficiency Analysis for Linear Vector Maximum Systems: Theoretical Background and an Algorithm". Document du LAMSADE no. 13, Université de Paris Dauphine, Paris 1980.
17. Y u P.L., Z e l e n y M., "Linear multiparametric programming by multicriteria simplex method". Management Sci. 23 (1976) no. 2.

- 112 -

WIELOKRYTERIALNE PROGRAMOWANIE LINIOWE Z DIALOGOWĄ  
KONSTRUKCJĄ ADDYTYWNEJ FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI

Streszczenie

W artykule przedstawia się metodę rozwiązywania problemów Wielokryterialnego Programowania Linijnego (WPL), składającą się o trzech faz:

- (1) Generowanie reprezentatywnego podzbioru dopuszczalnych rozwiązań sprawnych /od 10 do 50/.
- (2) Konstrukcja addytywnej funkcji użyteczności odwzorowującej preferencje decydenta na podzbiore rozwiązań sprawnych (PREFCALC).
- (3) Optymalizacja addytywnej funkcji użyteczności na oryginalnym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Stosowanie tej metody wspomaga decydenta w znajdowaniu rozwiązania kompromisowego, które może być różne od wierzchołka sprawnego. Jest ona szczególnie przydatna dla zadań WPL o dużych rozmiarach, dla których tradycyjne metody wielokryterialne są zbyt kosztowne, gdyż część dialogowa jest ograniczona do fazy (2) wykorzystującej mikrokomputerowy program PREFCALC.

Многокритериальное линейное программирование  
с диалоговой конструкцией аддитивной функции  
полезности

Резюме

В статье представлен метод решения проблем Многокритериального Линейного Программирования (МЛП), состоящий из трёх фаз:

- (1) Генерирование показательного подмножества допустимых недоминированных решений (от 10 до 50).
- (2) Конструкция аддитивной функции полезности отображающей полный предпорядок определённый децидентом на подмножестве недоминированных решений (PREFCALC).
- (3) Оптимизация аддитивной функции полезности на первоначальном множестве допустимых решений.

Применение представленного метода помогает децидента в процессе поиска компромиссного решения, которое может не совпадать с недоминированной вершиной. Этот метод особенно пригоден для больших задач МЛП, для которых традиционные многокритериальные методы характеризуются высокой стоимостью, так как диалог ограничивается фазой (2) использующей программу PREFCALC.

Praca została przesłana dnia 28 października 1985 r.

M. Jędrzejewski  
Katedra Metrologii i Systemów Pomiarowych  
Politechnika Warszawska

## ZASTOSOWANIE KORELACJI KANONICZNEJ W OPTYMALIZACJI WIELOKRYTERIALNEJ

Na przykładzie optymalizacji konstrukcji czujnika mechanicznego zaprezentowano wykorzystanie statystycznej metody korelacji kanonicznej.

### 1. Wstęp

Metody statystyczne stosowane są w optymalizacji konstrukcji w celu wyznaczenia empirycznej zależności funkcji decyzyjnej od parametrów konstrukcyjnych gdy zależność teoretyczna nie jest znana. W przypadku optymalizacji jednokryterialnej znana jest postać tej zależności, a przynajmniej jej lewa strona, tzn. kryterium optymalizacji. Stosowane metody statystyczne, np. wielowymiarowa regresja, mają na celu uszczelnienie prawej strony zależności wiążącej parametry konstrukcyjne. W optymalizacji wykorzystuje się często analizę regresji jedynie w celu wyznaczenia gradientu w przestrzeni parametrów konstrukcyjnych wyznaczającego kierunek najszybszych zmian kryterium - funkcji decyzyjnej.

Zagadnienie istotnie komplikuje się w przypadku, gdy mamy jedną funkcję decyzyjną, istnieje wielowymiarowa przestrzeń decyzyjna rozpięta na kilku kryteriach optymalizacji i kryteria te są ze sobą skorelowane. Wówczas niezależne uzależnianie poszczególnych kryteriów od parametrów konstrukcyjnych nie daje informacji jak zmiana jednego kryterium wpływa na zmiany innych. Wygodnym rozwiązaniem jest wyznaczenie łącznej funkcji decyzyjnej - globalnego kryterium, które jest związane z określonymi wagami kryteriów. Wówczas optymalizacja jest to możliwe.



Fewnym rozwiązaniem może być wyznaczenie nowego, nieskorelowanego zbioru kryteriów np. metoda składowych głównych [1./str.586/] /porusza omawiany poniżej rys.3a/ i obliczenie odpowiadających im funkcji regresji, a poprzez nie gradientów w przestrzeni parametrów, wyznaczających kierunki najszybszych zmian kryteriów. Wadą rozwiązania jest fakt, że nieskorelowanie czyli ortogonalność kryteriów, nie gwarantuje ortogonalności odpowiadających im gradientów. Wynika stąd, że zmiana konstrukcji w kierunku gradientu minimalizującego jedno kryterium może jednocześnie zmieniać inne kryteria, i to w nieznanym kierunku.

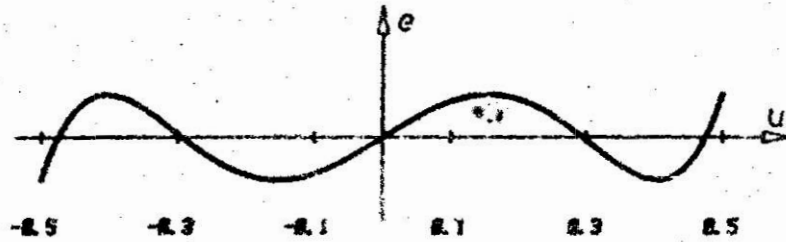
Od wad tych wolna jest metoda korelacji kanonicznej umożliwiająca wyznaczenie nieskorelowanego zbioru kryteriów w przestrzeni decyzyjnej i ortogonalnego zbioru ich gradientów w przestrzeni parametrów konstrukcyjnych [1./str.579/]. W pracy przedstawiono metodę oraz przykład jej zastosowania dla przypadku trójwymiarowej przestrzeni decyzyjnej i siedmiu optymalizowanych parametrów konstrukcyjnych, tzn. siedmiowymiarowej przestrzeni parametrów.

## 2. Optymalizowany obiekt

Optymalizacji poddano konstrukcję czujnika dźwigniowo-zębatego do pomiaru długości.

Kryterium optymalizacji w przypadku przyrządów pomiarowych takich jak np. czujnik o schemacie kinematycznym przedstawionym na rys.4, jest zawsze błąd pomiaru wnoszony przez przyrząd. Błąd przyrządu ma dwojaki charakter: systematyczny składnik błędu, wnoszony np. przez nieliniowość przekładni, nosi nazwę błędu poprawności wskazań i optymalizacji czujników ze względu na ten składnik błędu poświęcono dotychczas wiele prac [2]; Przypadkowy składnik błędu, wnoszony przez luzy, odkształcenia i zmienność obciążeń statycznych i dynamicznych, nosi nazwę błędu wierności wskazań i optymalizacji, a wręcz i opisowi tego błędu poświęcono znacznie mniej prac [3].

Błąd poprawności wskazań czujników dźwigniowo-zębatych sprowadza się w procesie optymalizacji konstrukcji /zawsze optymalizacji jednokryterialnej/ do jednostajnej aproksymacji zera wielomianem o niezerowych współczynnikach. W efekcie

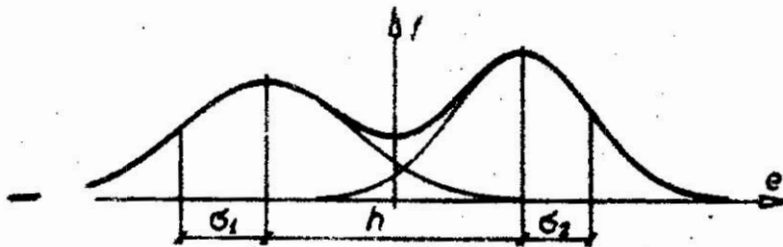


Rys.1. Charakter błędu poprawności wskazań zoptymalizowanego czujnika /np. przedstawionego na rys.4/.

proceeds to the construction, for which the error of the accuracy of the indicators nominally describes a Chebyshev polynomial [4] of degree 3 or 5, and the correction elements provided in the construction serve to compensate deviations from the nominal scheme.

### 2.1. Charakter błędu wierności wskazań

The distribution and description of the error of the accuracy of the indicators of the sensors is different in different applications. For the purposes of optimization it is assumed, that the direction of the approach of the measuring point to the measured value, as it is the case, for example, in the measurement of deviations of shape. Then the error of the accuracy of the indicators has a distribution close to that shown in Fig. 2; it can be described by two parameters: the hysteresis of the indicators  $h$  and two standard deviations, when increasing the indicators  $s_1$  and when decreasing the indicators  $s_2$ . The description can be changed to the hysteresis  $h$ , the standard deviation  $s = \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)/2}$  and one of the measures of asymmetry of the distribution, for example,  $a = |s_1 - s_2|$ .



Rys.2. Teoretyczny rozkład błędu wierności wskazań czujnika przy nieokreślonym kierunku podejścia trzpienia pomiarowego do mierzonej wartości.

The optimal construction should be characterized by minimal values of all three parameters, but with regard to the uncertainty of future applications of the sensor

nie można określić wspólnego kryterium optymalizacji w postaci funkcji decyzyjnej uwzględniającej z określonymi wagami trzy parametry rozkładu. Trzeba je jednocześnie uwzględniać jako zależne kryteria optymalizacji. Ze znanych autorowi metod tylko korelacje kanoniczne pozwalają na kompleksowe uzależnienie parametrów rozkładu od parametrów konstrukcyjnych czujnika.

### 3. Metoda korelacji kanonicznej

Metoda opiera się na liniowym przekształceniu dwóch zbiorów zmiennych losowych  $\{x_1, \dots, x_s\}$  i  $\{y_1, \dots, y_t\}$  w tzw. kanoniczne zmienne losowe odpowiednio  $\{u_1, \dots, u_s\}$  i  $\{v_1, \dots, v_t\}$  w taki sposób, że:

- wszystkie  $u_i$  i  $v_j$  mają zerową wartość oczekiwaną i jednostkową wariancję,
- $u_i$  między sobą i  $v_j$  między sobą są nieskorelowane,
- każda z  $u_i$  jest skorelowana co najwyżej z jedną  $v_j$  i odwrotnie, a współczynnik korelacji ma wartość maksymalną.

Przekształcenie zmiennych losowych dokonywane jest poprzez przekształcenie ich macierzy korelacji. W tym przypadku macierz korelacji podzielić można na cztery podmacierze:

- $R_{11}$  - podmacierz korelacji zmiennych losowych  $x$ ,
- $R_{22}$  - podmacierz korelacji zmiennych losowych  $y$ ,
- $R_{12} = R_{21}^T$  - podmacierze korelacji międzygrupowych.

Taka macierz /np.tab.2/ sprowadzana jest do postaci kanonicznej /np.tab.3/ drogą rozwiązania dwóch równań wyznacznikowych:

$$|R_{21} \cdot R_{11}^{-1} \cdot R_{12} - r^2 R_{22}| = 0$$

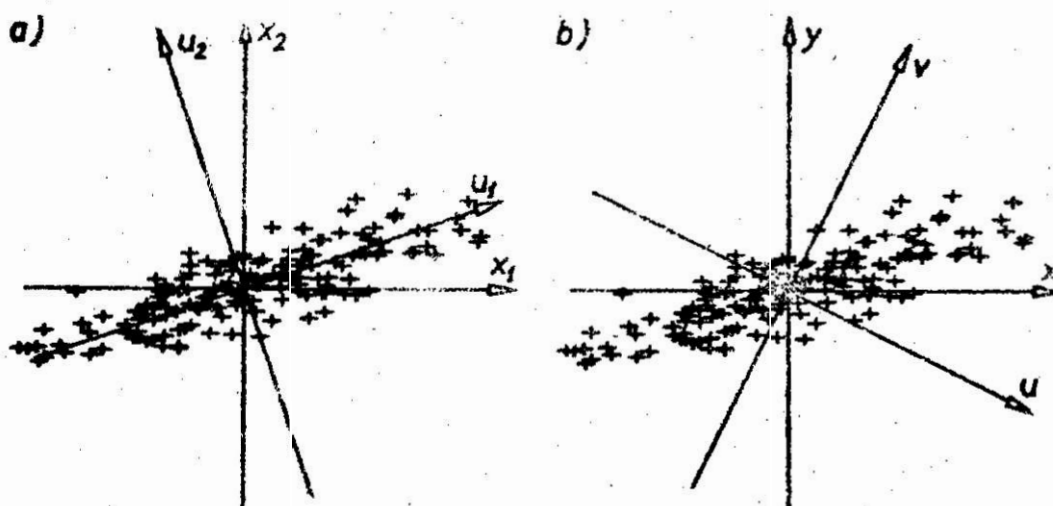
$$|R_{12} \cdot R_{22}^{-1} \cdot R_{21} - r^2 R_{11}| = 0$$

przy czym niezerowe rozwiązania  $r_i$  obu równań są identyczne i są korelacjami odpowiadających im kanonicznych zmiennych losowych  $u_i$  i  $v_i$ . Kanoniczne zmienne losowe są określane w trakcie rozwiązywania powyższych równań wyznacznikowych. Szczegóły dotyczące tego zagadnienia znaleźć można u Rao [1].

Na rys.3 podjęto próbę interpretacji geometrycznej powyższych przekształceń dla cząstkowych dwuwymiarowych przekrojów. Jednak przy jej analizie pamiętać należy, że zagadnienie rozwiązywane jest w przestrzeni wielowymiarowej i dane przykłady mają jedynie poglądowy charakter. Dodatkowo, by nie zaciem-

nieś rysunków, całkowicie pominięto zagadnienie normalizacji wyników mającej na celu uzyskanie jednostkowej wariancji kanonicznych zmiennych losowych.

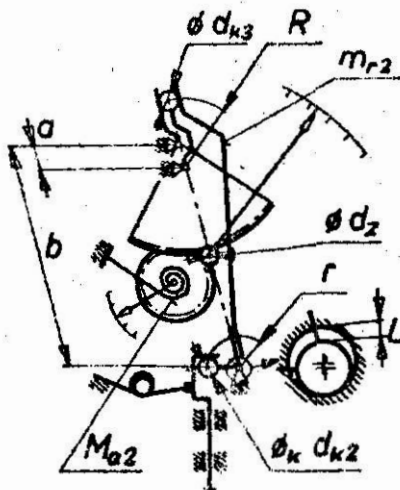
Na rys.3a przedstawiono dwie zmienne losowe wewnątrz jednej z podprzestrzeni, np.  $X_1$  i  $X_2$ , o współczynniku korelacji  $r=0.8$ . Kanoniczne zmienne losowe  $U_1$  i  $U_2$  są nieskorelowane i powstały przez obrót współrzędnych /analogicznie jak w metodzie składowych głównych [1, str.886]/. Uzyskany układ kanonicznych zmiennych  $U_1$  i  $U_2$  jest jednoznaczny w przestrzeni wyznaczonej przez zmienne  $X_1$  i  $X_2$ , ale nie jest jednoznaczny w przestrzeni wyznaczonej jednocześnie przez zmienne  $X_1$ ,  $X_2$  i  $y$ . Wśród możliwych rozwiązań poszukiwano jest takie, które spełnia warunek przedstawiony na rys.3b. Zobrazowano tu zmienne obu grup  $x$  i  $y$  o współczynniku korelacji  $r=0.8$ . Kanoniczne zmienne losowe  $u$  i  $v$  maksymalizują współczynnik korelacji i wynosi on tu  $r=0.925$ .



Rys.3. Wpływ usytuowania osi współrzędnych na współczynnik korelacji:  $r_{x_1x_2} = r_{xy} = 0.8$ ,  $r_{u_1u_2} = 0$  i  $r_{uv} = 0.925$ .

#### 4. Przykładowe zastosowanie metody

Optymalizowano konstrukcję czujnika przedstawionego w postaci schematu kinematycznego na rys.4. Przyjęto arbitralnie, że najistotniej wpływają na błąd wierności wskazań czujnika parametry zaznaczone na rys. i zebrane w tab.1. Zbudowano model badawczy czujnika i opracowano plan badań nadając zmienianym parametrom wartości ze zbioru przedstawionego w tab.1.



Rys.4. Schemat kinematyczny badanego modelu czujnika. Oznaczenia i wartości parametrów:  
 $a = 2.5 \text{ mm} = \text{const}$ ,  
 $R$  i  $r$  - dobierane zależnie od pozostałych parametrów,  
 $R \in (8.5 - 9.6) \text{ mm}$ ,  
 $r \in (4.6 - 7.1) \text{ mm}$ ,  
 pozostałe parametry zgodnie z tab.1.

Wartości zmienianych parametrów czujnika. T a b l i c a 1

$d_{k2}$	=	1	,	1.2	,	1.6	,	2	,	2.5	mm,
$m_{r2}$	=	70	,	99	,	210					kN/mm <sup>2</sup> ,
$d_{k3}$	=	0.62	,	0.895	,	1.1	,	1.35			mm,
$b$	=	40	,	45	,	50	,	55			mm,
$L$	=	6	,	13	,	20	,	30	,	50	μm,
$d_2$	=	0.2	,	0.62	,	0.8	,	1			mm,
$M_{02}$	=	4.7	,	6.1	,	7.3					rad.

Nie wnikając w postać planu badań i formę ich przeprowadzenia, należy pamiętać, że przed badaniami rozkład błędów wierności wskazań konstrukcji zjednoczono ze względu na błąd poprawności wskazań korygując wartości parametrów  $R$  i  $r$  na rys.4. Macierz korelacji przedstawioną w tab.2 uzyskano w wyniku przebadania 39 wersji czujnika łącznie w 417 punktach po przeprowadzeniu ok. 10 tys. elementarnych pomiarów.

Macierz sprowadzono do postaci przedstawionej w tab.3 wykorzystując do tego celu program "canor" z SSP [5]. Na rys.5 przedstawiono schematycznie udział czynników wejściowych /parametry czujnika i charakterystyki błędów/ w skorelowanych czynnikach wyjściowych /wymuszających  $U_1, U_2$  i  $U_3$  i wynikowych  $V_1, V_2$  i  $V_3$ /; dla ujednoczenia wagi czynników jednostki na osiach wykreślono proporcjonalnie do korelacji kanonicznych odpowiadających danym czynnikom.

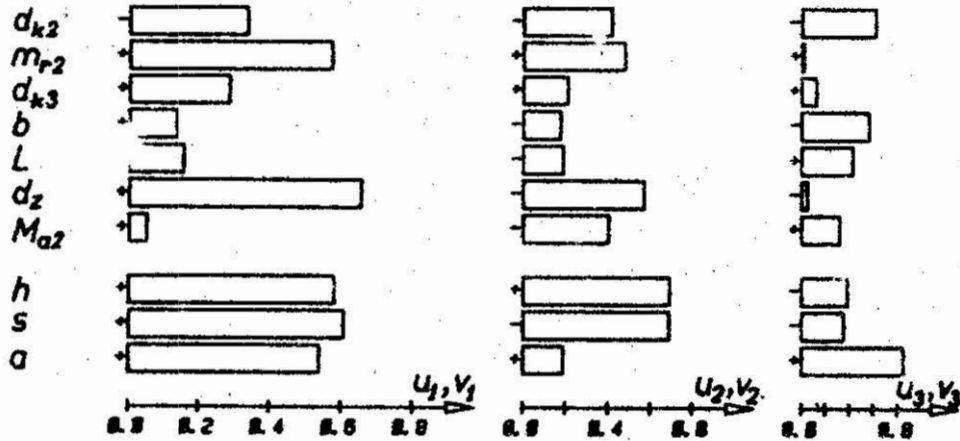
Uzyskane czynniki  $V_1, V_2$  i  $V_3$  stanowią ortogonalny układ kryteriów optymalizacji. Utożsamiać je można: pierwszy  $V_1$  z globalną oceną błędów, drugi  $V_2$  z ekscysem rozkładu i trzeci  $V_3$  z asy-

Tablica 2  
Macierz korelacji parametrów wymuszających i wynikowych.

$d_{k2}$	$m_{r2}$	$d_{k3}$	$b$	$L$	$d_z$	$M_{a2}$	$h$	$s$	$a$	
1.000	.089	.174	.055	-.063	-.071	-.033	-.099	-.005	-.181	$d_{k2}$
	1.000	-.282	.342	-.159	-.177	.357	.235	.107	.109	$m_{r2}$
		1.000	-.031	.015	.016	-.298	.052	-.005	.009	$d_{k3}$
			1.000	-.209	-.368	.093	.130	.027	-.059	$b$
				1.000	-.131	-.050	-.183	-.137	-.023	$L$
					1.000	-.069	.035	.344	.183	$d_z$
						1.000	-.035	.115	.081	$M_{a2}$
$R_{11}$										
							1.000	.063	-.113	$h$
								1.000	.122	$s$
									1.000	$a$
$R_{21}$							$R_{22}$			

Macierz korelacji w postaci kanonicznej. Tablica 3

$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	
1.000	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.517	.0	.0	$U_1$
	1.000	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.310	.0	$U_2$
		1.000	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.178	$U_3$
			1.000	.0	.0	.0	.0	.0	.0	$U_4$
				1.000	.0	.0	.0	.0	.0	$U_5$
					1.000	.0	.0	.0	.0	$U_6$
						1.000	.0	.0	.0	$U_7$
$R_{11}$										
							1.000	.0	.0	$V_1$
								1.000	.0	$V_2$
									1.000	$V_3$
$R_{21}$							$R_{22}$			



Rys.5. Czynniki wymuszające  $U$  i wynikowe  $V$  do macierzy korelacji przedstawionej w tab.3.

metrią rozkładu. Korygując konstrukcję w kierunku czynnika  $U_1$  można jednocześnie i prawie równomiernie zmniejszać  $h$ ,  $s$  i  $a$ ; kierunek czynnika  $U_2$  zmniejsza eksces, tzn. zmniejsza  $h$  i zwiększa  $s$ , lub odwrotnie, pogłębia eksces, tzn. zwiększa  $h$

i mniejsza  $S$  przy praktycznie stałej asymetrii  $\sigma$ ; trzeci czynnik  $u_3$  wpływa zasadniczo na  $\sigma$ , a i to z dużym błędem, bo współczynnik korelacji ma niewielką wartość.

Analiza czynników wymuszających  $u_1$ ,  $u_2$  i  $u_3$  wykazuje, że zmniejszyć błąd /tzn. czynnik  $V_1$ / można zmniejszając do konstrukcyjnego minimum średnicę osi zębniaka  $d_2$ , ale operacja ta w większym stopniu wpływa na  $S$  niż na  $h$  /wskazują na to czynniki  $u_2$  i  $u_3$ /. Ocena udziału  $m_{r2}$  /sztywność dźwigni/ wskazuje, że zmniejszenie sztywności zmniejsza błąd. Ten pozorny paradoks rozwikłać można wiążąc  $m_{r2}$  nie ze sztywnością dźwigni /były one dostatecznie sztywne/ lecz z ich masą /dźwignie wykonane były z materiałów: PA7N, MO59 i 45/. Zmniejszenie masy dźwigni zmniejsza błąd, ale na eksces rozkładu wpływa odwrotnie niż rozpatrywana powyżej średnica osi zębniaka.

## 5. Podsumowanie

W przedstawionym przykładzie zastosowanie korelacji kanonicznej pozwoliło na kompleksowe uzależnienie błędu wierności wskazań przedstawionego parametrami pewnego stacjonarnego procesu stochastycznego /tu:  $h, S, \sigma$ / od parametrów konstrukcyjnych czujnika realizującego ten proces w formie kolejnych wartości błędów pomiaru, co umożliwiło poprawę konstrukcji pod kątem zmniejszenia wartości histerezy  $h$ , odchylenia średniokwadratowego  $S$  i asymetrii rozkładu  $\sigma$ .

Oczywiście, podobnie jak w metodach gradientowych, optymalizacja konstrukcji została zrealizowana w formie jednego kroku. Następny krok, to dalsze badania, w których prawdopodobnie postać zidentyfikowanych kryteriów optymalizacji w przestrzeni decyzyjnej i odpowiadających im gradientów w przestrzeni parametrów konstrukcyjnych będzie inna. Ze względu na cenę badań drugiego kroku nie wykonano zadowalając się uzyskanymi wynikami.

Ogólnie zastosowanie korelacji kanonicznej w zagadnieniach statystycznej optymalizacji wielokryterialnej umożliwia:

- zbudowanie ortogonalnego /nieskorelowanego/ układu kryteriów optymalizacji najsilniej zależnego od zmian parametrów optymalizowanej konstrukcji,
- wyznaczenie /również ortogonalnego/ układu gradientów w przestrzeni parametrów odpowiadających powyższym kryteriom,

- określenie liczbowej miary związku między gradientami i kryteriami w postaci współczynników korelacji.

Indywidualna analiza tak przedstawionego zadania umożliwia:

- globalną ocenę kryteriów optymalizacji - oczywiście ich interpretacja należy do konstruktora,
- wyznaczenie parametrów konstrukcji najsilniej wpływających na kryteria optymalizacji.

Do największych zalet korelacji kanonicznej należy jakościowa systematyzacja zagadnienia, można jednak uzyskać również pewne oceny ilościowe - wewnątrz każdej z podprzestrzeni wyznaczają je wartości czynników wymnożone przez odchylenia średniokwadratowe parametrów, a między podprzestrzeniami dodatkowo wymnożone przez wartości współczynników korelacji. Jest to jednak oddzielne zagadnienie i na tyle szerokie, że wymaga niezależnego artykułu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. P a o C. R.: Modele liniowe statystyki matematycznej PWN, Warszawa 1982.
2. R a t a j c z y k E. i inni: 'Methods of indicating minimalization of errors' in dial gauges. Acta IMKO 1976, str.163-170.
3. J ę d r z e j e w s k i A.: Problemy wykorzystania korelacji kanonicznej w statystycznych badaniach przyrządów pomiarowych. Prace Nauk.Inst.Metr.Elekt.Pol.Wrocławskiej Nr 19, WPWr, Wrocław 1979.
4. R a t a j c z y k E., J ę d r z e j e w s k i A.: Zastosowanie wielomianów Czebyszewa w minimalizacji błędów wskazań przyrządów pomiarowych. Mechanik, 1974, nr 11, str.630-634.
5. System/360, Scientific Subroutine Package /360A-CM-05X/ Version III, IBM, Techn.Public.Dep., N.Y.



ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО  
АНАЛИЗА В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Резюме

На примере оптимизации конструкции механической измерительной головки представлено применение канонического корреляционного анализа.

THE CANONICAL CORRELATION USE FOR POLYOPTIMIZATION

Summary

The example of the statistical method of canonical correlation use for mechanical gauge construction polyoptimization is presented and is discussed.

Praca została przesłana dnia 1986.04.21

V KONFERENCJA "POLIOPTYMALIZACJA W PROJEKTOWANIU"  
MIELNO 86

Ignacy Kaliszewski  
Instytut Badań Systemowych PAN,  
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6

WYZNACZANIE ROZWIĄZAŃ NIEZDOMINOWANYCH W ZADANIACH  
WIELOKRYTERIALNEGO PROGRAMOWANIA CAŁKOWITOLICZBOWEGO

Pojęcie rozwiązania optymalnego zadania optymalizacji wielokryterialnej nie jest jednoznacznie zdefiniowane. Zwykle jednak zakłada się, że rozwiązanie optymalne jest niezdominowane. Z tego powodu znajomość zbioru rozwiązań niezdominowanych pośrednia lub bezpośrednia jest pożądana, w zbiorze tym bowiem znajduje się rozwiązanie optymalne.

W niniejszej pracy przedstawimy pewną charakteryzację zbioru rozwiązań niezdominowanych zadań wielokryterialnego programowania całkowitoliczbowego i wynikający z niej sposób wyznaczania tych rozwiązań.

1. Wstęp

W praktyce inżynierskiej, w zakresie konstrukcji maszyn i sterowania procesami technologicznymi spotykamy się zazwyczaj z nieliniowymi zadaniami programowania matematycznego. Natomiast dla problemów planowania i zarządzania najczęściej formułuje się zadania programowania liniowego. Osobną grupę stanowią zadania programowania liniowego, w których nałożone są dodatkowe warunki na całkowitoliczbowość zmiennych (części lub wszystkich). Tego typu zadania mogą wystąpić także w praktyce inżynierskiej wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z szeroko rozumianą organizacją produkcji, decyzjami dwuwartościowymi "tak", "nie" i niepodzielnymi wielkościami. Konkretnego przykładu dostarcza praca [9], w której sformułowano wielokryterialne zadanie harmonogramowania produkcji z wykorzystaniem zmiennych całkowitoliczbowych. Przykładów problemów, które mogą być sformułowane jako zadania programowania całkowitoliczbowego dostarcza także monografia [4].

W niniejszej pracy rozpatrzemy zadania wielokryterialnego li-

niowego programowania całkowitoliczbowego<sup>1</sup>. Specyfika tych zadań uzasadnia wyodrębnienie ich z grupy zadań nieliniowych; metody i algorytmy rozwiązywania tych zadań różnią się znacznie od metod i algorytmów stosowanych zarówno dla zadań programowania liniowego jak i dla zadań w których funkcje celu i ograniczenia są istotnie nieliniowe. Wspólna jest natomiast metodologia programowania wielokryterialnego dotycząca w szczególności koncepcji rozwiązania optymalnego.

W zadaniach programowania wielokryterialnego istnieje wiele koncepcji rozwiązania optymalnego. Każda z tych koncepcji ma swoje wady i zalety, każda z nich ma swoich przeciwników i obrońców i jedynie dwa przypadki skrajne nie wywołują kontrowersji. Jeżeli dysponujemy pełną informacją o preferencjach decydenta, to możemy (przynajmniej w teorii) dokonać skalaryzacji zadania wielokryterialnego poprzez pewien funkcjonal nazywany funkcją użyteczności. Rozwiązaniem zadania wielokryterialnego będzie wtedy rozwiązanie dopuszczalne ze względu na zbiór ograniczeń i maksymalizujące funkcję użyteczności. Jeżeli nie posiadamy żadnych dodatkowych informacji poza zestawem kryteriów i ograniczeń, każde rozwiązanie niezdominowane może służyć jako rozwiązanie optymalne. Pomiedzy tymi dwoma skrajnościami plasuje się cała gama koncepcji zakładająca różny stopień znajomości preferencji decydenta.

W niniejszej pracy będziemy zakładać, że nie posiadamy jakichkolwiek informacji poza standardowym sformułowaniem zadania wielokryterialnego. A zatem centralnym obiektem naszych zainteresowań będzie zbiór rozwiązań niezdominowanych. Przedstawimy charakterystykę tego zbioru i wynikający z niej sposób wyznaczania wszystkich jego elementów.

Zbiór rozwiązań niezdominowanych jest na ogół bardzo liczny a w związku z tym umiejętność wyznaczania wszystkich elementów tego zbioru ma znaczenie jedynie teoretyczne. W każdym jednak

---

<sup>1</sup> Zadanie w którym występuje warunek całkowitoliczbowości zmiennych nie jest oczywiście zadaniem liniowym. Nazwa zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego pochodzi stąd, że po odrzuceniu całkowitoliczbowości zmiennych otrzymujemy zadanie liniowe.

konkretnym przypadku pojawienie się dodatkowej informacji pozwala ograniczyć zbiór rozwiązań niezdominowanych do jego podzbioru zawierającego rozwiązania interesujące decydenta poprzez wykorzystanie tej informacji w procesie wyznaczania rozwiązań niezdominowanych. Informacje dodatkowe mogą być bardzo różne, nie sposób zatem wyczerpać wszystkie możliwe przypadki. Z tego też względu w niniejszej pracy skupimy naszą uwagę jedynie na wyznaczaniu rozwiązań niezdominowanych.

## 2. Charakteryzacja zbioru rozwiązań niezdominowanych

Rozpatrzmy następujące zadanie wielokryterialnego liniowego programowania całkowitoliczbowego:

$$(P) \quad \begin{aligned} & V\text{-max } Cx \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \\ & x \text{ - całkowite,} \end{aligned}$$

gdzie  $C$  jest macierzą  $k \times n$  -wymiarową, którą tworzy  $k$  liniowych funkcji celu,  $A$  jest  $m \times n$  -wymiarową macierzą ograniczeń,  $b$   $m$  -wymiarowym wektorem ograniczeń. Symbol  $V\text{-max}$  oznacza, że rozwiązaniem zadania  $P$  jest dowolne rozwiązanie niezdominowane.

Rozwiązaniem niezdominowanym (rozwiązaniem Pareto, rozwiązaniem efektywnym) zadania  $P$  nazywamy rozwiązanie dopuszczalne  $x$  takie, że nie istnieje dopuszczalne  $x'$ ,  $x \neq x'$ , spełniające  $C_1 x' \geq C_1 x$  dla każdego  $i$ ,  $i=1, \dots, k$ , oraz  $C_1 x' > C_1 x$  dla co najmniej jednego  $i$ . Zbiór wszystkich rozwiązań niezdominowanych oznaczymy przez  $E$ .

Będziemy zakładać, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $S = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0, x \text{ - całkowite}\}$  jest ograniczony. Założenie to implikuje, że  $S$  jest zbiorem skończonym. W zadaniach praktycznych założenie to jest prawie zawsze spełnione. Dodatkowo założymy, że współczynniki macierzy  $C$  są całkowite. Ponieważ współczynniki macierzy  $C$  są zwykle przedstawiane za pomocą skończonej reprezentacji dziesiętnej, spełnienie tego założenia można zawsze uzyskać mnożąc wszystkie współczynniki przez odpowiednią potęgę liczby 10.

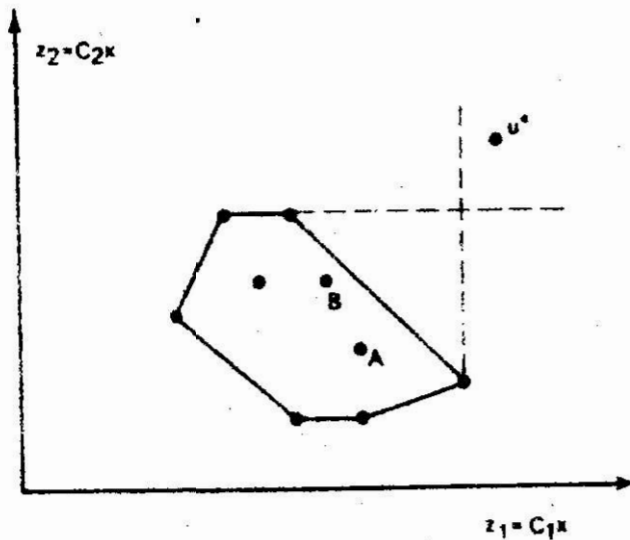
Wprowadzimy następujący zbiór  $k$ -wymiarowych wektorów

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^k \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}. \text{ Możemy teraz sformułować nastę-}$$

pujące zadanie jednokryterialne:

$$(P_\lambda) \quad \max \lambda Cx \\ x \in S, \\ \lambda \in \Lambda.$$

Łatwo jest pokazać (patrz rys. 1), że nie istnieje wartość  $\lambda \in \Lambda$  taka, że rozwiązaniem zadania  $P_\lambda$  jest rozwiązanie niezdominowane nie należące na powłocie wypukłej zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Innymi słowy rozwiązując zadanie  $P_\lambda$  dla  $\lambda \in \Lambda$  możemy wyznaczyć jedynie rozwiązania leżące na wypukłej powłocie zbioru rozwiązań dopuszczalnych a powodem tego jest fakt, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niewypukły.



Rys. 1. Nie istnieje  $\lambda \in \Lambda$  takie, że  $\lambda_1 C_1 x + \lambda_2 C_2 x$  osiąga swoje maksimum na przedstawionym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych (oznaczonych punktami) dla niezdominowanych rozwiązań A i B, gdyż nie należą one do wypukłej powłoki zbioru rozwiązań dopuszczalnych tj. do zbioru ograniczonego linią ciągłą ,

W zadaniach wielokryterialnego programowania liniowego, gdzie wszystkie rozwiązania niezdominowane leżą na wypukłej powłocie zbioru rozwiązań dopuszczalnych (co wynika z wypukłości zbioru rozwiązań dopuszczalnych) postępowanie takie znalazło szerokie zastosowanie dla wyznaczania zbioru rozwiązań niezdominowanych oraz do selekcji rozwiązań niezdominowanych poprzez odpowiedni wybór wektorów wag [7], [8], [12].

Rodzina zadań  $P_\lambda, \lambda \in \Lambda$ , chociaż nie pozwala na wyznaczenie wszystkich rozwiązań niezdominowanych zadania P posiada jednak bardzo ważną cechę. Mianowicie, zadania te są zadaniami programowania liniowego całkowitoliczbowego a zatem mogą być rozwiązywane standardowymi algorytmami. Nie istnieją jednak powody dla których moglibyśmy z góry wykluczyć z rozważań rozwiązania niezdominowane nie leżące na wypukłej powłoce zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Zainteresowani jesteśmy zatem metodą, która pozwalałaby wyznaczyć wszystkie rozwiązania niezdominowane za pomocą jednokryterialnych zadań programowania liniowego całkowitoliczbowego. Istnieje co prawda metoda [2], dzięki której można wyznaczyć wszystkie rozwiązania niezdominowane zadania P. Wykorzystuje ona jednak nieliniową postać funkcji celu zadań jednokryterialnych; nieliniowość ta, co przyznają sami autorzy metody, jest głównym powodem tego, że metoda ma walor jedynie poznawczy i nie może stanowić podstawy dla konstrukcji efektywnych algorytmów.

Zdefiniujemy wektor  $u^* \in R^k$  w następujący sposób:  
 $u_1^* = \max_{x \in S} C_1 x + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0$  i sformułujemy zadanie:

$$(P^2) \quad \min_x \max_i \left\{ \lambda_i (u_1^* - C_1 x) \right\},$$

$$x \in S,$$

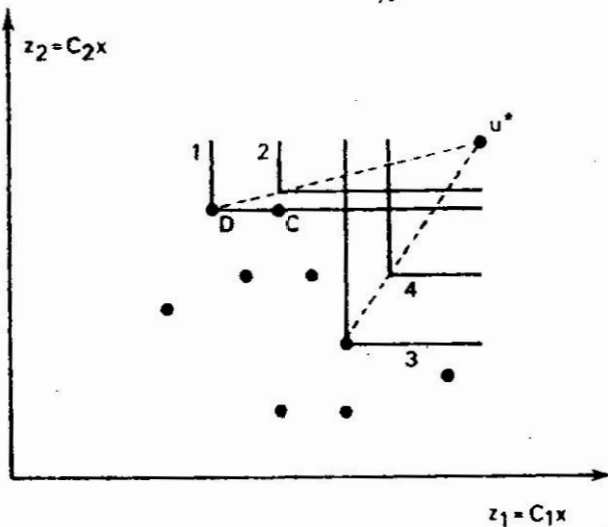
$$\lambda \in \Lambda.$$

Twierdzenie 1. [1] .  $\bar{x} \in E$  tylko wtedy, kiedy istnieje wektor  $\bar{\lambda} \in \Lambda$  taki, że

$$\min_{x \in S} \max_i \left\{ \bar{\lambda}_i (u_1^* - C_1 x) \right\} = \max_i \left\{ \bar{\lambda}_i (u_1^* - C_1 \bar{x}) \right\}.$$

Rysunek 2 przedstawia warstwicę funkcji  $\max_i \left\{ \lambda_i (u_1^* - C_1 x) \right\}$  dla  $x \in V = \{x | C_1 x \leq C_1 u^*, \quad i=1, \dots, k\}$ . Jednocześnie rysunek ten wyjaśnia dlaczego minimalizacja funkcji  $\max_i \left\{ \lambda_i (u_1^* - C_1 x) \right\}$  na zbiorze S jest jedynie warunkiem koniecznym na to aby dane rozwiązanie było niezdominowane. Warstwica 1 zawiera dwa rozwiązania dopuszczalne C i D, z których tylko C jest rozwiązaniem niezdominowanym. Niewielkie rozwarście kąta pomiędzy dwoma odkami tworzącymi warstwicę spowodowałoby, że wartość zmodyfi-

kowanej w ten sposób funkcji byłaby mniejsza dla rozwiązania C niż dla rozwiązania D. Innymi słowy rozwiązania te stałyby się rozróżnialne ze względu na wartość zmodyfikowanej funkcji. Rozwarcie kąta nie może być zbyt duże, gdyż może to uniemożliwić wyznaczenie niektórych rozwiązań niezdominowanych. W skrajnym przypadku osiągnięcie kąta rozwarcia  $180^\circ$  spowoduje sprowadzenie problemu  $P^\lambda$  do problemu  $P_\lambda$ .



Rys. 2. Warstwyce funkcji  $\max\{\lambda_i(u_i^* - C_i x)\}$ . 1,2 - warstwyce dla  $\lambda' \in \Lambda$ ; 3,4 - warstwyce dla  $\lambda'' \in \Lambda$ ,  $\lambda' \neq \lambda''$

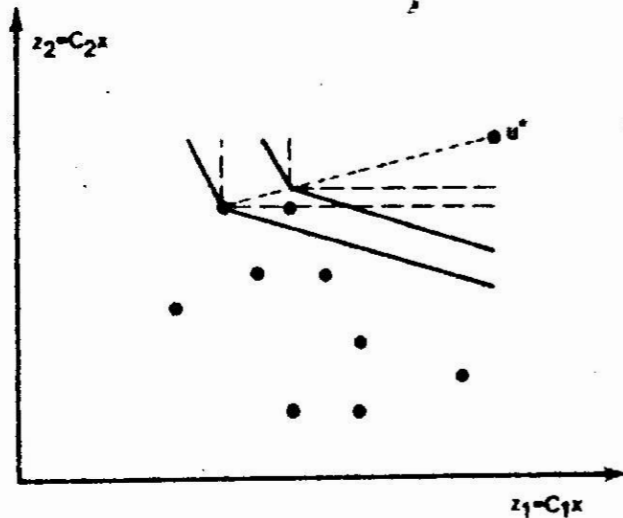
Aby otrzymać warunki zarówno konieczne jak i dostateczne musimy dokonać regularyzacji funkcji  $\max\{\lambda_i(u_i^* - C_i x)\}$  na zbiorze S poprzez dołączenie członu liniowego  $e^T(u^* - Cx)$ , gdzie  $e^T$  jest k-wymiarowym wektorem o postaci  $(1, 1, \dots, 1)$ , w rezultacie czego otrzymujemy funkcję  $\max\{\lambda_i[(u_i^* - C_i x) + \xi e^T(u^* - Cx)]\}$ ,  $\xi > 0$ . Rysunek 3 przedstawia warstwyce tej funkcji dla  $x \in V$ .  
Twierdzenie 2. [5]. Niech  $I_x = \{i | x^i \in S\}$ ,  $I_E = \{i | x^i \in E\}$  oraz

$$\xi < \min_{l \in I_E} \left\{ \min_{j \in I_x \setminus \{l\}} \left\{ \frac{\min_{i: (C_i x^l - C_i x^j) > 0} (C_i x^l - C_i x^j)}{e^T(Cx^j - Cx^l)} \right\} \right\} e^T(Cx^j - Cx^l) > 0 \Big\}$$

$\bar{x} \in E$  wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje wektor  $\bar{\lambda} \in \Lambda$  taki, że

$$\min_{x \in S} \max_1 \left\{ \bar{\lambda}_i [(u_i^* - C_i x) + \xi e^T(u^* - Cx)] \right\} =$$

$$= \max_1 \left\{ \lambda_1 \left[ (u_1^* - c_1 \bar{x}) + \xi e^T (u^* - c\bar{x}) \right] \right\}.$$



Rys. 3. Warstwyce funkcji  $\max \left\{ \lambda'_i \left[ (u_i^* - C_i x) + \xi e^T (u^* - Cx) \right] \right\}$  (linia ciągła) i warstwyce funkcji  $\max \left\{ \lambda'_i (u_i^* - C_i x) \right\}$  (linia przerywana) dla  $\lambda' \in \Lambda$ , przy czym wektor  $\lambda'$  jest taki sam jak na rys. 2.

Twierdzenie 2 przedstawia pełną charakteryzację zbioru E. Zwróćmy uwagę na fakt, że zadanie P określone następująco:

$$\left( P_{\xi}^{\lambda} \right) \quad \min_x \max_1 \left\{ \lambda_1 \left[ (u_1^* - c_1 x) + \xi e^T (u^* - Cx) \right] \right\}$$

$$x \in S,$$

$$\lambda \in \Lambda.$$

może być zapisane w równoważnej postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego:

$$\min \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} \geq \lambda_1 \left[ (u_1^* - c_1 x) + \xi e^T (u^* - Cx) \right], i=1, \dots, k,$$

$$x \in S,$$

$$\lambda \in \Lambda.$$

Rozwiązanie powyższego zadania dla ustalonego  $\lambda$  nie nastrocza trudności. Przy  $\lambda$  przebiegającym zbiór  $\Lambda$  możemy wyznaczyć cały zbiór E przy czym pozostają w mocy wszystkie poprzednio sformułowane zastrzeżenia dotyczące liczności elementów tego zbioru. Jednak nawet jeżeli nie dysponujemy dodatkową infor-



macją pozwalającą ograniczyć się do pewnego podzbioru zbioru  $E$ , możemy się zdecydować na wyznaczenie jedynie pewnej reprezentacji tego zbioru np. według schematu zaproponowanego przez Steuera i Choo [10].

Dla pokazania, że przedstawiona w Twierdzeniu 2 charakterystyka zbioru  $E$  może być wykorzystana do konstrukcji efektywnego algorytmu dla wyznaczania tego zbioru pozostaje wskazać jak efektywnie wyznaczać wartość parametru  $\xi$ . Formuła podana w Twierdzeniu 2 jest zbyt pracochłonna aby można ją było zastosować dla praktycznych obliczeń; ograniczyć się musimy zatem do oszacowań. Ze względu na całkowitoliczbowość współczynników macierzy  $C$  licznik formuły wyznaczającej wartość parametru  $\xi$  może być oszacowany od dołu przez wartość 1. Z kolei wartość mianownika możemy oszacować od góry przez wartość  $\delta k$ , gdzie  $\delta = \max_i \max_{x, x' \in S} |c_i x - c_i x'|$ . Zatem  $\xi < (\delta k)^{-1}$ . W rzeczywistości można pokazać [5], że  $\xi$  może być wybrane nieco większe a mianowicie  $\xi < (\delta'(k-1)-1)^{-1}$ , gdzie  $\delta' = \max_i \max_{x, x' \in E} |c_i x - c_i x'|$ .

### 3. Uwagi końcowe

Zadanie  $P_3^\lambda$ , które jest podstawą zaprezentowanej metody wyznaczania zbioru  $E$  może być zinterpretowane w terminach rozwiązań kompromisowych wprowadzonych przez Yu [13]. Ponieważ zwykle nie istnieje rozwiązanie maksymalizujące równocześnie wszystkie kryteria, każde rozwiązanie niezdominowane przedstawia sobą pewien kompromis względem maksymalnych wartości kryteriów. Oryginalnie Yu zaproponował następującą formułę wyznaczającą kompromis:  $|\sum_{i=1}^k u_i^* - c_i x|^p$ , gdzie  $1 \leq p < \infty$ , która sprowadza się do minimalizacji odległości zbioru  $\{y \in R^k | y = Cx, x \in S\}$  od  $u^*$  w sensie  $p$ -normy  $\|\cdot\|_p$ . Zwróćmy uwagę, że funkcja  $\max_i \left\{ \lambda_i \left[ \|u_i^* - c_i x\| + \xi e^T (u^* - Cx) \right] \right\}$  jest pochodną następującej normy  $\| \|u^* - Cx\| + \xi e \|^1$ , która poszerza zakres możliwych kompromisów. Jeżeli decydent zaakceptuje formę kompromisu wyrażoną poprzez tę funkcję, to zadanie  $P_3^\lambda$  jest wygodnym narzędziem dla wyznaczania rozwiązań optymalnych dla zadań  $P$ . Zwróćmy także uwagę na fakt, że decydent ma duży zakres swobody dla określania formy kompromisu poprzez dobór wektorów  $\lambda$ ,

co może być traktowane, w zależności od okoliczności, jako wada lub zaleta prezentowanego podejścia.

Funkcja  $\max\{\lambda_i(u_i^* - c_i x)\}$  może być także regularyzowana w inny niż to<sup>i</sup> przedstawiono sposób. Rozpatrzmy mianowicie funkcję  $\max\{\lambda_i(u_i^* - c_i x) + \xi e^T(u^* - Cx)\}$ . Dla tej funkcji możemy sformułować twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 2 (patrz [10], porównaj także [6], [11]). Jednak pierwszy z przedstawionych sposobów regularyzacji ma dwie ważne zalety. Mianowicie, łatwo można wyznaczyć oszacowania wartości parametru  $\xi$  a wartości tego parametru nie zależą od wyboru punktu  $u^*$ . Przeciwnie, wykorzystując funkcję  $\max\{\lambda_i(u_i^* - c_i x) + \xi e^T(u^* - Cx)\}$  szacowanie wartości parametru<sup>i</sup>  $\xi$  nie jest natychmiastowe (porównaj [5]) a wartości tego parametru są funkcją  $u^*$ , co utrudnia wykorzystanie tej funkcji np. w metodzie punktu odniesienia [11].

Literatura cytowana w tekście

1. B o w m a n V.J.: On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. W: Multiple Criteria Decision Making, H.Thiriez i S.Zionts (wyd.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 130, Springer Verlag, 1976, 76-85.
2. B u r k a r d R.E., K e i d i n g H., K r a r u p J., P r u z a n P.M.: A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0-1 programming. Computers and Operations Research 8, 1981, 241-247.
3. C h o o E.U., A t k i n s D.R.: Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming. Mathematics of Operations Research 8, 1983, 467-470.
4. G a r n f i n k e l R.S., N e m h a u s e r G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, 1978, Warszawa.
5. K a l i s z e w s k i I.: A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming. Sprawozdania IBS PAN, ZPM-3-49/84, 1984.
6. K a l l i o M., L e w a n d o w s k i A., O r c h a r d - H a y s W.: An implementation of the reference point approach for multiobjective optimization. IIASA Working Paper WP-80-35, 1980.
7. K o n a r z e w s k a - G u b a ł a E.: Programowanie przy wielorakości celów. PWN, 1980, Warszawa.
8. N y k o w s k i I.: Programowanie liniowe, PWE, 1980, Warszawa.
9. S ł o w i ń s k i R.: Modelling and solving multicriteria project scheduling problems. Foundations of Control Engineering 9, 1984, 43-52.
10. S t e u e r R.E., C h o o E.U.: An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. Mathematical Programming 26, 1983, 309-322.
11. W i e r z b i c k i A.P.: The use of reference objectives in multiobjective optimization, Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, G.Fandel and T.Gal (wyd.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 177, Springer Verlag, 1980, 468-486.

12. Z i o n t s S., W a l l e n i u s J.: An interactive programming method for solving the multiple criteria problem. Management Science 22,1976 , 652-663.
13. Y u P.L.: A class of solutions for group decision problems. Management Science 19,1973 , 936-946.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ НЕДОМИНИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ  
В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Резюме

В работе представляется характеристика недоминированных решений задач линейного целочисленного программирования. Показано что эту характеристику можно использовать для отыскания недоминированных решений.

A METHOD FOR DETERMINATION OF NONDOMINATED SOLUTIONS  
IN MULTICRITERIA LINEAR INTEGER PROGRAMS

Summary

We present a characterization of nondominated solutions of multicriteria linear integer programs. This characterization gives rise to a method for determination of nondominated solutions.

V KONFERENCJA "POLIOPTYMALIZACJA W PROJEKTOWANIU"  
MIELNO 86

Ewa Konarzewska-Gubała

Instytut Cybernetyki Ekonomicznej, Wydział Informatyki i  
Zarządzania

Akademia Ekonomiczna im. O. Langego we Wrocławiu

O WYKORZYSTANIU CELÓW REFERENCYJNYCH W WIELOKRYTERIOWEJ  
ANALIZIE DECYZJI

W artykule formułuje się pewne spostrzeżenia odnoszące się do rozwoju idei celów referencyjnych w wielokryteriowej analizie decyzji. Podkreśla się w szczególności wpływ i znaczenie ustaleń deskryptywnej teorii decyzji dla rozumienia roli ideału, ogólnie celu referencyjnego, w procesie podejmowania decyzji.

Z psychologicznych modeli decyzyjnych wynika m.in., że motywacja do sukcesu i motywacja do uniknięcia niepowodzenia nie odgrywają całkowicie symetrycznej roli. W związku z powyższym w pracy formułuje się koncepcję tzw. bipolarnego układu celów referencyjnych: ideał-antyideał, zaś ostateczna ocena decyzji oparta jest na niezależnych ocenach względem obu członów tego układu.

Proponowany model analizy decyzji wykorzystuje się w zagadnieniu wielokryteriowej oceny projektów rozmieszczenia stanowisk pracy.

1. O rozwoju idei celów referencyjnych

Sledząc "dzieje" pojęcia optimum w kontekście dynamicznego rozwoju wielokryteriowej analizy decyzji trudno nie wyróżnić koncepcji, która co pewien czas powraca w innym kształcie do rozważań teoretycznych i zastosowań praktycznych, a którą śmiało można uznać za najbardziej konkurencyjną w stosunku do klasycznego, paretońskiego rozumienia optimum wielokryteriowego.

Jakkolwiek występuje ona /zwłaszcza ostatnio/ pod różnymi szyldami i nazwami, najbardziej jest znana jako koncepcja punktu idealnego /ideal-solution concept/.

W modelu decyzyjnym formułowanym w oparciu o nią, jakość

decyzji ocenia się na podstawie wskazań pewnej funkcji wielomiennej określonej w przestrzeni realizacji celów i mierzącej odległość badanego punktu tej przestrzeni /od realizującego analizowanej decyzji/ od pewnego wybranego punktu w tej przestrzeni.

Punkt ten nazywany jest punktem idealnym /bądź utopijnym / i definiuje się go zwykle jako wektor

$$P = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_K \end{bmatrix} \in R^K,$$

gdzie  $\hat{f}_i = \max_{X \in D} f_i(X)$ ,  $D \subset R^n$ ,  $i = 1, \dots, K$ ,

w przypadku jednoczesnej maksymalizacji  $K$  celów<sup>1</sup> / a więc kryteriów typu stymulant/.

Wyznaczenie idealne reprezentuje najlepszą bądź najbar-  
ziej pożądaną w danych warunkach realizację wszystkich  
jednocześnie składowych  $\hat{f}_i$  celu wielorakiego i zarazem  
realizacja nielosialna, jako, że jej przeciwobraz w przes-

---

<sup>1</sup> w przypadku minimalizacji  $i$ -tego celu

$$\hat{f}_i = \min_{X \in D} f_i(X) = -\max_{X \in D} [-f_i(X)], \text{ zaś w przypadku } i\text{-tego}$$

kryterium typu dominanty,  $\hat{f}_i$  oznacza najbardziej pożądaną jego wartość.

tezeni decyzji  $R^n$  z reguły nie należy do zbioru  $D$  decyzji dopuszczalnych.

Decyzja jest tym lepsza im jej obraz w przestrzeni realizacji celów leży bliżej rozwiązania idealnego  $P$ . Optimum w tym modelu wyznacza decyzja najbliższa punktowi idealnemu.

Historycznie pierwsze ślady pomysłu znajdziemy u Geoffriona /1965/, a także u Radzikowskiego /1967/, Jütlera /1967/ / [10], s.154 /. Pełne operacyjne propozycje wykorzystania koncepcji dla sformułowania i rozwiązania liniowego zadania wielokryterialnego programowania matematycznego zawierają prace m. inn. Sałki /1968/, Nykowskiego /1970/, Sałukvadze /1971/<sup>2</sup>.

Wreszcie w latach 1973-1974 idea zostaje rozwinięta, głównie dzięki pracom Yu i Zeleny'ego, do postaci tzw. koncepcji rozwiązań kompromisowych /compromise solutions/, uzyskiwanych przez zastosowanie rodziny miar odległości, wyrażających się ogólnym wzorem

---

2

Niezależnie od nurtu decyzyjnego w statystycznej analizie wielowymiarowej pojawia się analogiczna koncepcja. W r 1968 Z. Hellwig w pracy zatytułowanej "Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr" wprowadza pojęcie "wzorca rozwoju", tj. pożądanego, idealnego punktu w  $K$ -wymiarowej przestrzeni cech charakteryzujących rozwój socjo-ekonomiczny. Kraje są reprezentowane przez punkty w tej przestrzeni zaś odległość każdego z nich od wzorca jest miarą jego rozwoju socjo-ekonomicznego.



$$d_p[F(X)] = \sum_{i=1}^K \left[ \left( \frac{\hat{f}_i - f_i(X)}{s_i} \right)^p \right]^{1/p} \quad \text{dla } p > 1,$$

gdzie  $s_i > 0$  są współczynnikami zapewniającymi porównywalność poszczególnych składników sumy, najczęściej w omawianej klasie zadań  $s_i = \hat{f}_i$  bądź  $s_i = \hat{f}_i - \check{f}_i$ ,  $\check{f}_i = \min_{X \in D} f_i$  / [2], ss.144-174/.

W istocie swiej była to idea wyrosła na gruncie geometrycznego pojęcia tego co "najlepsze". Ponadto stworzyła złudne wrażenie, iż na jej gruncie unika się skomplikowanej problematyki modelowania preferencji decydenta.

Dyskusje i propozycje w tym czasie koncentrowały się wokół zagadnień formalnych. Analizowano własności poszczególnych metryk oraz własności rozwiązań kompromisowych przy różnych wartościach parametru  $p$ . Lecz na jakiej podstawie decydent miał dokonać wyboru np. między  $p = 2$  a  $p = 10$  chcąc ustalić optymalny kompromis?

Przez analogię, jako "lustrzane odbicie" punktu idealnego  $P$ , formułuje się pojęcie punktu anty-idealnego  $Q$  reprezentującego najmniej preferowany w danych warunkach poziom realizacji wszystkich celów jednocześnie / [9], s.199 /.

Rozwiązanie anty-idealne może być zarówno dopuszczalne jak i niedopuszczalne, w obu przypadkach może służyć jako punkt odniesienia w procesie analizy decyzji. W tej sytuacji należy oczywiście poszukiwać decyzji najbardziej oddalonej od anty-ideału.

Jak łatwo można pokazać, zbiór kompromisów względem ideału

nie jest identyczny ze zbiorem kompromisów względem antyideału / [10], s.331 /. Jednakże w literaturze przyjmuje się, że oba warianty oceny decyzji, tj. względem rozwiązania idealnego oraz względem rozwiązania antyidealnego są zadaniami symetrycznymi, tzn. uznaje się, że dążąc do minimalizacji odległości od P, maksymalizujemy tym samym dystans względem Q. W związku z czym tego drugiego zadania nie formułuje się explicite.

Przyjmując geometryczny punkt widzenia, faktycznie można mówić o symetrii czy równoważności obu podejść, spełniona jest bowiem następująca równość

$$\frac{\hat{f}_1 - f_1}{\hat{f}_1 - \check{f}_1} + \frac{f_1 - \check{f}_1}{\hat{f}_1 - \check{f}_1} = 1$$

Ale czy rzeczywiście podejmując decyzje kierujemy się lub powinniśmy się kierować wyłącznie dążeniem do sukcesu /ideału/? A jeśli również dążeniem do uniknięcia niepowodzenia /antyideału/, to czy intensywność podążania w obu kierunkach jest /powinna być / taka sama?

Te i podobne pytania są wyrazem wątpliwości w stosunku do idei, która miała być wykorzystana w praktycznych problemach podejmowania decyzji, np. procesach zarządzania, a w żaden sposób nie próbowała odwoływać się do wyników teorii deskryptywnych czy do zachowań ludzi podejmujących decyzje.

Stosunkowo od niedawna koncepcja minimalizacji odległości od rozwiązania idealnego rozpatrywana jest w szerokim kontekście argumentacji psychologicznej. Przede wszystkim akcentuje się znane psychologii fakty, iż ideały są podstawowymi czynnikami kształtującymi nasze preferencje, że są po to by się do nich zbliżyć, a dążenie do nich jest siłą motywacyjną o pod-

tawowym znaczeniu [10], s.130 /.

W związku z powyższym szczególnego znaczenia nabrały zagadnienia związane z ustalaniem ideałów jako klucza do preferencji decydenta.

Pod wpływem nowej problematyki koncepcja rozwiązania idealnego ewoluowała w kierunku ogólniejszej idei celów referencyjnych /reference objectives/, wykorzystującej dowolny punkt lub zbiór w przestrzeni realizacji celów reprezentujący poziom aspiracji decydenta, jako podstawę do oceny badanych decyzji. W tym zakresie na szczególną uwagę zasługuje praca Wierzbickiego /1979, w [8]/ oraz artykuł Krawczyka i Konarzewskiej /1974/, w którym po raz pierwszy wprowadzono pojęcie zbioru referencyjnego pod nazwą zbioru rozwiązań docelowych w przestrzeni celów / [1] oraz w [2] ss.193-201/.

Należy podkreślić, że wobec niejednoznaczności w określaniu ideałów /rozmytość sformułowań, wielość "kształtów doskonałości"/ częściej obecnie mówi się o zbiorze ideałów /zbiorze celów referencyjnych/ niż o punkcie idealnym /punkcie referencyjnym/.

Jednocześnie bada się dynamikę ideału, jego ewolucję i wpływ na preferencje decydenta /teoria przemieszczającego się ideału Zeleny'ego w [9], [10]/.

Zastanawiający jest fakt, że ten kierunek badań i formalizacja koncepcji celów referencyjnych, uwzględniający w sposób istotny ustalania deskryptywnej teorii decyzji, pojawił się niejako w drugiej fazie rozwoju omawianej idei, mimo, że przekonujące wyniki teorii psychologicznej znane były znacznie wcześ-

niej<sup>2</sup>.

## 2. O potrzebie i wykorzystaniu bipolarnego układu celów referencyjnych

Nowy etap rozwoju idei punktu idealnego w zasadzie nie wpłynął na zmianę poglądów na rolę antyideału. Można tutaj wymienić jako jedną z nielicznych propozycję Zeleny'ego sugerującą swego rodzaju "przełączanie się" w kierunku np. antyideału w miarę malejącej mocy dyskryminacyjnej ideału / [9] s.172,173 /.

Występowanie sytuacji decyzyjnych, w których moc dyskryminacyjna ideału jest niedostateczna jest niewątpliwie argumentem przemawiającym za stosowaniem bipolarnego układu celów referencyjnych: ideał - antyideał.

Kolejnym argumentem jest obawa, iż wobec nieostrego /czy też "wielokształtnego"/ definiowania ideału i antyideału - w postaci zbiorów, a nie pojedynczego punktu - nie zawsze zbliżenie się do któregoś z elementów zbioru ideałów zapewnia oddalenie się od zbioru antyideałów.

Wydaje się, że najbardziej przekonujące racje za stosowaniem bipolarnego układu celów referencyjnych w analizie decyzji, pojawiają się z chwilą odwołania się do nowych wyników badań psychologicznych. W ich świetle motywacja do sukcesu i motywacja do uniknięcia niepowodzenia nie odgrywają symetrycznej roli, wbrew temu co dotychczas sądzono.

2

Już w roku 1964 znane były rezultaty testów psychologicznych Festingera, z których wynikało, że ocena porównywanych ze sobą alternatyw zależy od tego czy punktem odniesienia jest alternatywa idealna, czy przeciętna /za [10] ss. 135-137/.

Istotnie według klasycznego modelu motywacji do osiągnięć Atkinsona sytuacja przedstawia się następująco / [5] ss.10,26,27/

Rozważmy dwóch decydentów scharakteryzowanych przez siły motywów do sukcesu  $S_1$  i  $S_2$  oraz siły motywów do uniknięcia niepowodzenia  $N_1$  i  $N_2$ . Przy identycznych pozostałych warunkach - decyzyjne zachowanie się tych osób powinno być takie samo o ile tylko  $S_1 - N_1 = S_2 - N_2$ .

Tymczasem aktualny stan teorii psychologiczno-socjologicznej, wskazuje, że tak nie musi być.

Motywy S i N wpływają na decyzję każdy oddzielnie a nie tylko poprzez ich różnicę S-N. Okazuje się np., że wbrew potocznym intuicjom inne są konsekwencje np. dwukrotnego wzrostu motywu S do sukcesu, a inne - zmniejszenia o połowę motywu N do uniknięcia niepowodzenia /choć w obu przypadkach stosunek  $\frac{S}{N}$  wzrasta dwukrotnie/ / [5], s.49/.

To stwierdzenie jest szczególnie ważne poznawczo, ponieważ daje teoretyczne uzasadnienie tego, że w każdej sytuacji decyzyjnej, jeśli istnieje możliwość porównywania badanych alternatyw z układem celów referencyjnych, ostateczna ocena oparta będzie na niezależnych ocenach względem obu członów tego układu.

W przypadku skończonego i niezbyt liczego zbioru badanych wariantów decyzyjnych podstawą ostatecznej decyzji może być wektor "stanu" związany z każdą alternatywą. Składowe tego wektora /co najmniej dwie/ oceniałyby w sposób niezależny "pozycję" badanej decyzji względem obu członów układu celów referencyjnych, nazywanych tu umownie: ideałem i antyideałem.

Możliwości wykorzystania tego rodzaju analizy dostrzegamy

m. in. w praktyce projektowania, np. do oceny projektów rozmieszczenia stanowisk pracy w hali produkcyjnej.

W zagadnieniu tym /nazywanym dalej również problemem layout/ podstawowe pytanie, sformułowane przez R. Muther'a w fundamentalnej pracy z tego zakresu, brzmi następująco "How good is a layout we have?" / [4] , s.3/. Jakkolwiek stosunkowo dokładnie wiadomo jakie cele winien osiągać tzw. dobry layout<sup>3</sup>, to jednak ocena jakości danego projektu, porównanie go z innymi alternatywnymi projektami może okazać się zadaniem szczególnie trudnym. Różne projekty w różny sposób spełniają postulaty dobrego layout'u, różna bowiem z reguły jest optyka projektowa czyli sposób widzenia problemu przez autorów każdego z projektów.

Zdarza się, że decydentowi /zleceniodawcy/ udeje się stosunkowo precyzyjnie sformułować swój sposób widzenia problemu w postaci wzorcowych rozwiązań projektowych oraz rozwiązań, których należy unikać /zauważamy, że optyka decydenta może być ulegająca w stosunku do ogólnych zasad "szutki" projektowania np. o dowiadczenia wynikające z ułtykowania dotychczasowego projektu/. Powstałe wówczas potrzeba analitycznego narzędzia, które umożliwiłoby określenie "pozycji" każdego z rozpatrywanych wariantów projektowych względem optyki decydenta.

<sup>3</sup>Cele te sformułuje się w postaci tzw. postulatów /zasad/ dobrego layout'u. Najczęściej spełnianie się następujące zasady:

- 1/ skoordynowanej integracji: personelu, materiałów, narzędzi, urządzeń, służb pomocniczych,
- 2/ minimalizacji przemieszczania materiałów,
- 3/ produkcji potokowej, tj. rozmieszczenia stanowisk zgodnie z kolejnością operacji technologicznych,
- 4/ najlepszego wykorzystania kubatury pomieszczenia,
- 5/ bezpieczeństwa i higieny pracy,
- 6/ elastycznego przystosowywania się do częstych zmian warunków procesu produkcyjnego.

Propozycję takiego narzędzia, wykorzystującego koncepcję bipolarnego układu celów referencyjnych zamieszczamy poniżej<sup>4</sup>.

### 3. O zastosowaniu bipolarnego układu celów referencyjnych do oceny projektów w problemie layout

#### 3.1. Sformułowanie modelu

Konstrukcja modelu wymaga aby na wstępie zidentyfikowane były następujące jego elementy:

##### 1. Zbiór obiektów badania

$$O = \{o_i\}$$

tj. skończony zbiór alternatyw /wariantów/ decyzji będących przedmiotem oceny

##### 2. Zbiór kryteriów oceny

$$K = \{f_j\}, f_j(o_i): O \rightarrow E_j,$$

tj. zbiór skalarnych funkcji oceniających poziom realizacji celów decyzji przez elementy zbioru  $O$ , przy czym skala  $E_j$  może być liczbowa, porządkowa lub binarna

##### 3. Parametry decyzyjne

- wektor wag kryterialnych

$$P = [p_j], \quad \sum p_j = 1,$$

ustalający względną ważność między kryteriami  $f_j$ ;

- bipolarny układ obiektów referencyjnych

$$R = \{r_t\}, \quad R = D \cup Z$$

---

<sup>4</sup> Jest to zmieniona wersja modelu przedstawionego w pracy [3]. Została ona omówiona w pracy: E. Konarzewska-Gubała: Wielokryteriowa ocena decyzji względem bipolarnego układu celów referencyjnych, Prace Naukowe AE we Wrocławiu /w przygotowaniu do druku/

w postaci dwóch zbiorów obiektów /realnych lub sztucznych/:

$D = \{d_h\}$  - zbiór "dobrych", o pożądanym poziomie realizacji celów

$Z = \{z_k\}$  - zbiór "złych" o nieakceptowanym poziomie realizacji celów.

O zbiorach tych zakładamy, że są rozłączne, tj.

$$D \cap Z = \emptyset$$

- wartość progowa "z" dla wyznaczanych metodą ELECTRE II wskaźników przewyższania, taka, że

$$\min_j p_j \leq z \leq 1 .$$

W analizowanym zagadnieniu oceny projektów rozmieszczania stanowisk pracy przedmiotem oceny są cztery takie projekty:

$$O = \{o_1 \text{ (aktualny)}, o_2, o_3, o_4\} ,$$

odnoszące się do pewnego wydziału montażowego przemysłu maszynowego.

Przy współudziale decydenta wyspecyfikowano 12 kryteriów, które nie stały się ograniczeniami projektowymi lecz elementami oceniającymi. Wśród nich jest 7 kryteriów ściśle mierzalnych /np. redukcja transportu wewnętrznego [%], odległość od strefy usług [m], przyrost zatrudnienia personelu pomocniczego [%]/, 4 kryteria o wartościach ze skali porządkowej /np. jakość połączenia wydziału z magazynem wyrobów gotowych [dobra, dostateczna, niedostateczna], poziom zakłóceń docierających do strefy biur [niski, średni, wysoki] oraz jedno kryterium binarne, oceniające czy projekt zachowuje plan budynku [tak, nie] .



Również z pomocą decydenta wyodrębniono dwa zbiory obiektów odniesienia:  $D = \{d_h\}$ ,  $h = 1, 2, 3$  - zbiór projektów "dobrych", inaczej wzorcowych oraz  $Z = \{z_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  - zbiór projektów "nie do przyjęcia". Przy czym zgodzono się na trzy różne "definicje" "dobrego" layout'u oraz cztery "definicje" projektu "złego".

Dokonano oceny każdego z badanych obiektów oraz każdego z obiektów odniesienia z punktu widzenia 12 przyjętych kryteriów.

Ustalono następujący wektor współczynników względnej ważności kryteriów:  $[0,20 \ 0,04 \ 0,05 \ 0,05 \ 0,15 \ 0,07 \ 0,07 \ 0,04 \ 0,05 \ 0,04 \ 0,20]$ .

Jako wartość progową "z" przyjęto minimalny poziom zgodności ocen, tj.  $z = 0,5$ .

### 3.2. Idea i podstawowe fazy analizy

Celem proponowanej procedury analitycznej jest wyodrębnienie badanego zbioru obiektów  $O$  z układem obiektów odniesienia  $R = D \cup Z$  dla określenia "pozycji" /"stanu"/ każdego z obiektów  $o_i$  względem  $R$ .

Konfrontacja, czyli porównanie elementów zbioru  $O$  z elementami zbioru  $R$  z formalnego punktu widzenia oznacza zdefiniowanie pewnej relacji binarnej na  $O \cup R$ .

Ze względu na przyjęte założenia merytoryczne /zakończony zbiór alternatyw, ilościowe i jakościowe kryteria oceny/, a przede wszystkim ze względu na szczególne własności zastępujemy tutaj tzw. relację przewyższania /fr. relation de supériorité, ang. outranking relation, niem. Überlegenheitsrelation/. Zasadniczo jest

wprowadzona przez francuską szkołę wielokryteriowej analizy decyzji jako wyjątkowo realistyczne narzędzie modelowania preferencji decydenta /zob np. [7], [6] /.

Definicja 1: Mówimy, że "alternatywa  $a$  przewyższa alternatywę  $a'$  w zbiorze  $A$ ", co zapisujemy  $a S_A a'$ , jeśli  $a$  jest co najmniej tak dobre jak  $a'$  i argumenty przemawiające na korzyść alternatywy  $a$ , wynikające z dostępnej informacji np. wektora ocen kryterialnych, są uznane za wystarczające przekonujące.

W odróżnieniu od klasycznej relacji preferencji i indyferencji, relacja przewyższania pozwala na uwzględnienie sytuacji nieporównalności między danymi alternatywami, wtedy, gdy nie możemy, nie chcemy bądź nie potrafimy je porównywać.

W celu sformułowania relacji przewyższania, w zbiorze  $O \times R$  definiujemy metodę porównań wektorów ocen kryterialnych. Rozróżnienie to w wielu praktycznych zagadnieniach są źródłem niejednoznaczności, niepewności i różnorodności wprowadzonej struktury preferencyjnej.

Definicja 2: Będziemy nazywali rozmytą relacją przewyższania określoną na  $O \times R$  funkcję uczestnictwa  $d: O \times R \rightarrow [0, 1]$ , której wartości  $d(o_i, r_t)$  mierzą siłę związku między dwoma dowolnymi elementami  $o_i \in O$  i  $r_t \in R$  w sensie: " $o_i$  przewyższa  $r_t$ ".

Definicja 3: Niech  $d(o_i, r_t) = d_{it}^+$  oraz  $d(r_t, o_i) = d_{it}^-$ .

Wartości  $d_{it}^+$  i  $d_{it}^-$  odpowiednich funkcji uczestnictwa  $d(o_i, r_t)$  i  $d(r_t, o_i)$  będziemy nazywali wskaźnikami przewyższania /przewagi/ odpowiednio: alternatywy  $o_i$  nad  $r_t$ , bądź alternatywy  $r_t$  nad  $o_i$ .

Zdefiniowane relacje oraz ustalone przez decydenta parametry decyzyjne pozwalają na przeprowadzenie zamierzonej konfrontacji. Będzie ona przebiegała w następujących trzech fazach.

FAZA I : Porównanie obiektów  $o_1$  z elementami  $r_t$  układu referencyjnego  $R = D \cup Z$

A. Wyznaczenie wskaźników przewagi:  $d_{it}^+$ ,  $d_{it}^-$

Dla każdej pary  $(o_1, r_t)$  weryfikuje się hipotezę: " $o_1$  przewyższa  $r_t$ ". /Analogicznie dla pary  $(r_t, o_1)$  weryfikuje się hipotezę: " $r_t$  przewyższa  $o_1$ ". Hipoteza zostaje przyjęta jeśli spełnione są: test zgodności oraz test niekonfliktowości, wchodzące w skład metody ELECTRE II [6].

Rysunek 1. przedstawia ideę porównań i konstrukcji wskaźników przewagi:  $d_{it}^+$ ,  $d_{it}^-$ , zaś tablice 1 i 2 strukturę porównań między elementami odpowiednio  $o_1$  i  $d_h$  /tablica 1 / oraz  $o_1$  i  $z_k$  /tablica 2 / w analizowanym przykładzie praktycznym.

B. Określenie struktury preferencji między elementami O i R

Niech  $z$  będzie przyjętym przez decydenta "progiem zgodności" ocen kryterialnych, takim, że  $\min_j p_j \leq z \leq 1$ .

Przyjmijmy  $s = z - \min_j p_j$ .

Porównujemy teraz otrzymane wskaźniki przewagi z wartością progową  $s$ , definiując dla każdej pary uporządkowanej  $(o_1, r_t)$  następujące relacje binarne:

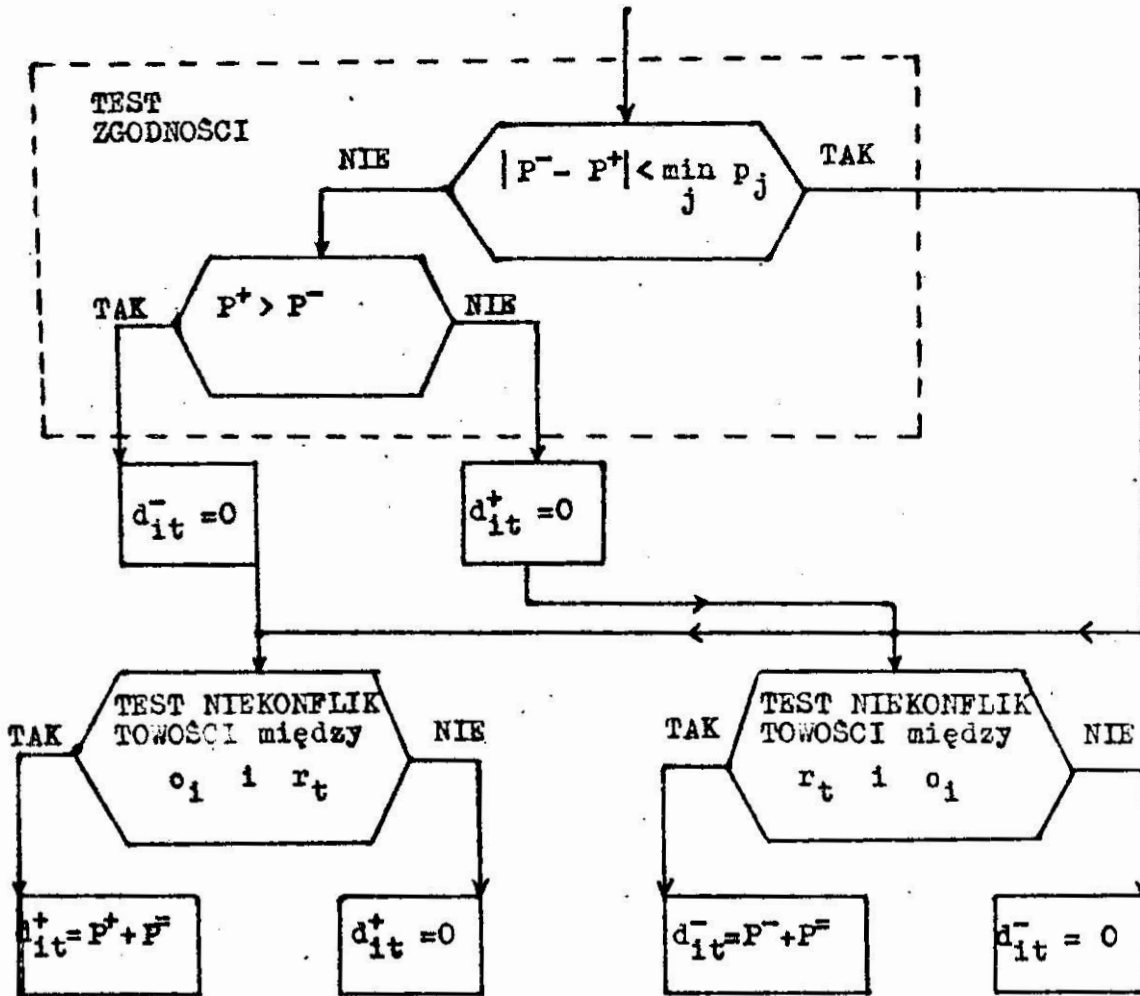
- preferencji " $>$ "

$$o_1 > r_t \iff d_{it}^+ > s \wedge d_{it}^- = 0$$

$$r_t > o_1 \iff d_{it}^+ = 0 \wedge d_{it}^- > s$$

- indyferencji " $\approx$ "

$$o_1 \approx r_t \iff d_{it}^+ > s \wedge d_{it}^- > s$$



$$P^+ = P^+(o_1, r_t), \quad P^- = P^-(o_1, r_t), \quad P^\pm = P^\pm(o_1, r_t)$$

$$P^+(o_1, r_t) = \sum_{j^+} p_{j^+} \quad \text{gdzie} \quad j^+ \in \{j : f_j(o_1) > f_j(r_t)\}$$

$$P^-(o_1, r_t) = \sum_{j^-} p_{j^-} \quad j^- \in \{j : f_j(o_1) < f_j(r_t)\}$$

$$P^\pm(o_1, r_t) = \sum_{j^\pm} p_{j^\pm} \quad j^\pm \in \{j : f_j(o_1) = f_j(r_t)\}$$

Rys. 1 FAZA I: Porównanie obiektów  $o_1$  z elementami  $r_t$  układu referencyjnego  $R = D \cup Z$   
Schemat konstrukcji wskaźników przewagi



Tablica 2

KRITERIA $z_k$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$d^+$	$d^-$
$z_1$	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	=	.76	0
$z_2$	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	+	.66	0
$z_3$	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	=	.76	0
$z_4$	=	+	+	-	-	=	+	+	-	+	+	+	.86	0
$z_1$	=	+	+	+	+	-	+	+	-	+	=	=	.81	0
$z_2$	=	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	.72	0
$z_3$	-	+	+	+	+	=	+	+	-	+	=	=	.76	0
$z_4$	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	.72	0
$z_1$	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	.68	0
$z_2$	+	+	+	-	+	+	-	+	+	=	+	=	.88	0
$z_3$	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	-	.68	0
$z_4$	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	=	.73	0
$z_1$	+	+	+	+	-	=	+	+	+	+	+	=	.95	0
$z_2$	+	+	+	-	-	=	+	+	+	=	=	+	.90	0
$z_3$	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	=	.95	0
$z_4$	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	=	+	.68	0

Wagi: .20 .04 .04 .05 .05 .15 .07 .07 .04 .05 .04 .20

- nieporównywalności  $\neq$

$$o_i \neq r_t \iff (d_{it}^+ < s \wedge d_{it}^- < s) \vee (d_{it}^+ < s \wedge d_{it}^- = 0) \vee \\ (d_{it}^+ = 0 \wedge d_{it}^- < s) \vee (d_{it}^+ = 0 \wedge d_{it}^- = 0).$$

Przykładowo, z wartości wskaźników przewagi zawartych w tabelicy 2 wynika, że porównując badane projekty  $o_i$  z elementami zbioru  $Z$  w każdym przypadku mamy do czynienia z relacją preferencji:  $o_i \succ z_k$ .

Warto zauważyć, że jeśli przyjęliśmy  $z = 0.5$ , to nieporównywalność  $o_i$  z  $r_t$  może się zdarzyć jedynie w związku z sytuacją czwartą, tj. para  $(o_i, r_t)$  nie przeszła przez test niekonfliktowości i  $d_{it}^+ = d_{it}^- = 0$ .

FAZA II: Porównanie obiektów  $o_i$  z elementami zbioru "dobrych" D oraz z elementami zbioru "złych" Z

A. Porównanie  $o_i$  ze zbiorem "dobrych"  $D = \{d_h\}$ .

Schemat konfrontacji każdego obiektu  $o_i$  ze zbiorem D przedstawia rysunek 2.

Wykorzystując zdefiniowane relacje: preferencji, indyferencji oraz nieporównywalności, określamy dla każdego badanego obiektu  $o_i$  tzw. stopień osiągnięcia sukcesu  $d_S$  w następujący sposób.

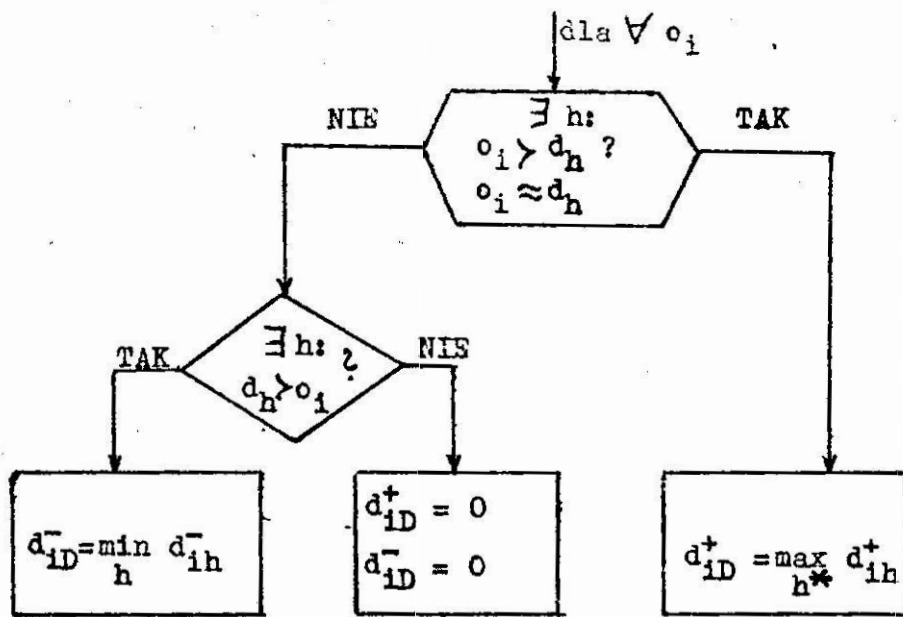
1/ Jeżeli  $\exists h : o_i \succ d_h \vee o_i \approx d_h$ , to

$$d_S = d_{iD}^+ = \max_{h^*} d_{ih}$$

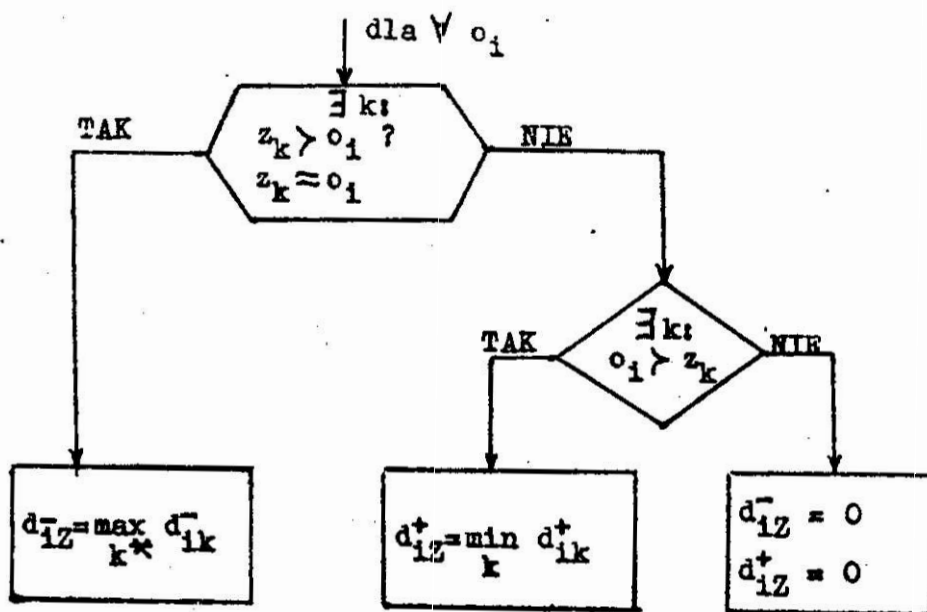
$$\text{gdzie } h^* = \{h : o_i \succ d_h \vee o_i \approx d_h\}$$

2/ Jeżeli  $\sim \exists h : o_i \succ d_h \vee o_i \approx d_h$  natomiast  $\exists h : d_h \succ o_i$ , to

$$d_S = d_{iD}^- = \min_h d_{ih}^-$$



Rys. 2 FAZA II: Porównanie obiektów  $o_i$  ze zbiorem "dobrych"  
 $D = \{d_h\}$   
 Określenie stopnia osiągnięcia sukcesu



Rys. 3 FAZA II: Porównanie obiektów  $o_i$  ze zbiorem "złych"  
 $Z = \{z_k\}$   
 Określenie stopnia uniknięcia niepowodzenia



3/ Jeżeli żaden element ze zbioru "dobrych" nie jest lepszy od badanego obiektu  $o_1$ , to orzekniemy, że " $o_1$  jest nieporównywalny ze zbiorem D" oraz, że

$$d_S = d_{iD}^+ = d_{iD}^- = 0.$$

Wyniki konfrontacji czterech ocenianych projektów ze zbiorem obiektów wzorcowych:

$$o_1 : d_S = d_{iD}^+ = \max_{h^*} d_{ih} = 0,72$$

$$o_2 : d_S = d_{iD}^+ = \max_{h^*} d_{ih} = 0,77$$

$$o_3 : d_S = d_{iD}^+ = \max_{h^*} d_{ih} = 0,64$$

$$o_4 : d_S = d_{iD}^+ = \max_{h^*} d_{ih} = 0,73$$

B. Porównanie  $o_1$  ze zbiorem "złych"  $Z = \{z_k\}$

Schemat konfrontacji każdego obiektu  $o_1$  ze zbiorem Z przedstawia rysunek 3.

Weryfikując dla każdego badanego obiektu  $o_1$  relację preferencji, indyferencji bądź nieporównywalności z elementami zbioru "złych" ustalamy dla niego tzw. stopień uniknięcia nieporównania  $d_N$  w następujący sposób.

1/ Jeżeli  $\exists k : z_k \succ o_1 \vee z_k \approx o_1$ , to

$$d_N = d_{iZ}^- = \max_{k^*} d_{ik}^-$$

gdzie  $k^* = \{k : z_k \succ o_1 \vee z_k \approx o_1\}$

2/ Jeżeli  $\sim \exists k : z_k \succ o_1 \vee z_k \approx o_1$ , natomiast  $\exists k : o_1 \succ z_k$ , to

$$d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik}^+$$

3/ Jeżeli badany obiekt  $o_1$  nie jest lepszy od przynajmniej jednego elementu ze zbioru "złych", to orzekniemy, że " $o_1$  jest nieporównywalny ze zbiorem Z" oraz  $d_N = d_{iZ}^- = d_{iZ}^+ = 0$ .

Wyniki konfrontacji czterech ocenianych projektów ze zbiorem obiektów antywzorcowych :

$$o_1 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0,66$$

$$o_2 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0,72$$

$$o_3 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0,68$$

$$o_4 : d_N = d_{iZ}^+ = \min_k d_{ik} = 0,68$$

FAZA III: Określenie pozycji obiektu  $o_i$  względem układu referencyjnego (D,Z)

Jako rezultat przeprowadzonej w FAZIE I i II konfrontacji otrzymujemy dla każdego obiektu  $o_i$  wektor  $[d_S, d_N]$ . Składowa  $d_S$  ocenia pozycję obiektu  $o_i$  względem zbioru referencyjnego D, który jest synonimem sukcesu, natomiast składowa  $d_N$  ocenia pozycję tego samego obiektu względem zbioru referencyjnego Z, który jest z kolei synonimem niepowodzenia.

Zestawmy w tabeli możliwe kombinacje wartości jakie mogą przyjmować składowe wektora "stanu"  $[d_S, d_N]$ .

$d_N \backslash d_S$	$d_{iD}^+ > 0$	$d_{iD}^- > 0$	$d_{iD}^+ = d_{iD}^- = 0$
$d_{iZ}^- > 0$	(0)	(1)	(2)
$d_{iZ}^+ > 0$	(3)	(4)	(5)
$d_{iZ}^- = d_{iZ}^+ = 0$	(6)	(7)	(8)

Przy założeniu, że zbiory D i Z są rozłączne przypadek (0) nie może się zdarzyć.

Możliwe "stany" obiektu  $o_i$  to: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8)

Wśród nich wyróżnimy trzy grupy:

Grupa 1: należą tu "stany": (1), (3), (4) .

Obiekty  $o_i$ , które znajdują się w jednym z nich mają określoną "pozycję" względem przyjętego systemu referencyjnego R. Jest ona najkorzystniejsza w przypadku (3), następnie (4), dalej (1).

Grupa 2: należą tu "stany": (2), (5), (6), (7)

Są to "stany" obiektu  $o_i$ , w których jest on niekonfrontowalny bądź ze zbiorem D/"stany" (2), (5) / bądź ze zbiorem Z /"stany" (6), (7) /.

Zaistnienie takiej sytuacji wymaga przeanalizowania jej przyczyn, tj. m.in.:

- a/ wartości progowej "z",
- b/ testu niekonfliktowości,
- c/ kryteriów oceniających,
- d/ wag kryterialnych.

Grupa 3: należy tu "stan" (8), w którym obiekt  $o_i$  jest nie do sk. frontowania z całym układem referencyjnym R.

Przyczyny tej sytuacji mogą być analogiczne jak w przypadku grupy 2 ale mogą również pochodzić od zdefiniowanych zbiorów referencyjnych D i Z.

Zarówno analiza przyczyn nieporównywalności badanego obiektu z całym układem referencyjnym R, bądź z którymś z jego członów, jak i ewentualne modyfikacje elementów modelu powinny odbywać się w trybie dialogowym tj. przy współudziale decydenta. W ten sposób arbitralnie przyjęte na wstępie parametry decyzyjne mają szansę być rewidowane.

W rozpatrywanym przykładzie praktycznym cztery oceniane projekty layout'u /w tym jeden aktualnie użytkowany/ są scharakteryzowane przez następujące wektory "stanu":

$$\begin{array}{ll} o_1 & \left[ d_S = d_{iD}^+ = 0,72 \right. \\ & \left. d_N = d_{iZ}^+ = 0,66 \right] \\ o_2 & \left[ d_S = d_{iD}^+ = 0,77 \right. \\ & \left. d_N = d_{iZ}^+ = 0,72 \right] \\ o_3 & \left[ d_S = d_{iD}^+ = 0,64 \right. \\ & \left. d_N = d_{iZ}^+ = 0,68 \right] \\ o_4 & \left[ d_S = d_{iD}^+ = 0,73 \right. \\ & \left. d_N = d_{iZ}^+ = 0,68 \right] \end{array}$$

Przy tak zdefiniowanych stopniach osiągnięcia sukcesu oraz niepowodzenia można powiedzieć, że projekt jest tym lepszy im obie składowe wektora  $[d_S, d_N]$  są większe. Jednakże różnice wartości odpowiednich składowych są w tym przypadku mało istotne. /przypomnijmy, że są to wartości pewnej rozmytej relacji /.

Z punktu widzenia proponowanej metodologii istotnym jest fakt, że wszystkie analizowane projekty zajmują określoną "pozycję" względem przyjętego systemu odniesienia /wszystkie należą do grupy 1/ oraz, że "pozycja" ta w każdym przypadku jest najkorzystniejsza /wszystkie badane obiekty znajdują się w stanie (3) /.

Jeśli zatem ostatecznym, praktycznym celem analizy było podjęcie decyzji czy zmieniać istniejący projekt rozmieszczenia stanowisk pracy, wyniki jej sugerują iż nie ma takiej potrzeby.

#### 4. Uwagi końcowe

Istotą przedstawionej analizy decyzji w warunkach realizacji więcej niż jednego celu, jest to, iż porządek preferencyjny w zbiorze ocenianych alternatyw generowany jest nie przez porównywanie ich między sobą lecz poprzez konfrontowanie ze zbiorami wariantów o pożądanym poziomie realizacji celów oraz ze zbiorami wariantów o wartościach realizacji tychże celów nie do przyjęcia z punktu widzenia decydenta.

Zauważmy, że taka koncepcja wykorzystania celów referencyjnych nie tylko, że imitowałaby znany psychologii fakt rozłącznego i niesymetrycznego oddziaływania motywacji do sukcesu i unik-

nięcia niepowodzenia ale wprowadza swego rodzaju rygor odnośnie do precyzowania oczekiwań decydenta zarówno co do pożądanych zalet rozwiązania jak i wad koniecznych do uniknięcia.

Z reguły uwzględnianie tego rodzaju wymagań w zakresie pozytywnych i negatywnych cech rozwiązań odbywa się na etapie identyfikacji zbioru decyzji dopuszczalnych. Jednakże etap ten może mieć charakter mniej lub bardziej subiektywny. Np. w praktyce projektowej, opracowywane projekty odzwierciedlają optykę ich autorów -- projektantów. Przyjęta w takiej sytuacji koncepcja bipolarnego układu obiektów referencyjnych odzwierciedlałaby optykę decydenta. Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną, istotną konsekwencję proponowanej koncepcji.

Stosunkowo często ostatecznym celem przeprowadzonej analizy będzie wybór wariantu najlepszego, a więc takiego, który ma najkorzystniejszą "pozycję" względem bipolarnego zbioru celów referencyjnych. Zauważmy, że procedura dopuszcza wystąpienie sytuacji, w której żadna z ocenianych alternatyw nie otrzyma wymaganej rekomendacji potencjalnej decyzji /wszystkie alternatywy znajdują się w "stanie" (8)/.

Pozostaje wtedy, bądź

- ponowna analiza tego samego zbioru alternatyw przy zmodyfikowanych parametrach decyzyjnych modelu, bądź
- poszukiwanie nowych alternatyw.

Ta ostatnia ewentualność jest nie tylko często spotykaną sytuacją np. w praktyce projektowej lecz jedną z podstawowych charakterystyk procesu podejmowania decyzji w ogóle. Podjąć decyzję znaczy częstokroć zidentyfikować nową alternatywę jako dopuszczalną.

Jednym z wyników wspomnianych wcześniej eksperymentów psychologa Festingera z roku 1964 jest stwierdzenie: "Zachowanie się osoby, jej rozważania, procesy myślowe nie ograniczają się wyłącznie do alternatyw pomiędzy którymi musi wybrać" /za [10], s.137 /.

Co więcej ustalił on, że większa część tzw. czasu decydowania poświęcana jest nie na zbieranie i szacowanie informacji o danych alternatywach, lecz na usiłowanie wynalezienia nowych alternatyw, które aktualnie nie są dostępne i przekształcenie ich w dopuszczalne.

Jest to bardzo cenne zapewnienie, które znane nauce decyzyjnej, powinno być respektowane w normatywnych procedurach decyzyjnych.

Wartość i znaczenie

- [1] Kozłowski J.: Wybrane problemy optymalizacji wielokryteriowej, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, nr 22/84/1974
- [2] Kozłowski J.: Programowanie przy wielorakości celów, PWN, Warszawa 1980
- [3] Kozłowski J.: Die Multikriteriale Bewertung von Projekten im Layout-Probleme. Materialien der 31 Tagung der Informationsgemeinschaft Operationsforschung, Frankfurt/Oder 1983, 87-100
- [4] Wuthet R.: Practical plant layout, McGraw-Hill Book Company INC., New York, Toronto, London, 1955
- [5] Nowakowska M.: Nowe idee w naukach społecznych, PAN Instytut Filozofii i Socjologii, Ossolineum 1980
- [6] Roy B.: Classement et choix en présence de points de vue

- multiples. /La Methode ELECTRE/, RIRO, 1968
- [7] Roy B: Outranking and fuzzy outranking relations: a concept making operational order analysis in: Decision making with multiple conflicting objectives /ed: Raiffa and Keeny/, IIASA, Vienne, 1976
- [8] Wierzbicki A: The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization w: Fandel G. and T. Gal /eds./: Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, Springer Verlag, New York 1980, 468-486
- [9] Zeleny M. ed: Multiple Criteria Decision Making Kyoto 1975 Springer-Verlag, New York 1976
- [10] Zeleny M. : Multiple Criteria Decision Making, John Wiley & Sons Book Company, New York 1982.

Praca została przesłana w lipcu 1985r.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕФЕРЕНЦИОННЫХ ЦЕЛЕЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

### Резюме

В работе формулируются некоторые замечания касющиеся развития концепции референционных целей /целей отнесения/ в многокритериальном анализе решений. В частности подчеркивается влияние и значение достижений дескриптивной теории решений на понимание роли идеала в процессах принятия решений.

В нормативных моделях формулируются также, как "зеркальное отражение" идеальной точки /множества/ понятие антиидеала /точки или множества/. Но эти два варианта оценки решений /по отношению к идеалу - антиидеалу/ считаются симметрическими.

Из психологических моделей процессов принятия решений вытекает то, что мотивация к успехам  $S$  и мотивация к устранению неудачи  $N$  играют симметрической роли. Мотивы  $S$  и  $N$  влияют на решение - каждый отдельно - в равной мере через разницу  $S-N$ . Поэтому в работе предлагается пользоваться биполярной системой референционных целей /идеал - антиидеал/.

Предлагаемая концепция используется в модели многокритериальной оценки проектов размещения рабочих мест. Элементы модели это:

- конечное множество оцениваемых вариантов решений,
- критерия оценки /численные, порядковые, бинарные/,
- весовые коэффициенты относительной значимости критериев,
- два множества объектов отнесения /"хороших" и "плохих"/.

Сущность анализа заключается в том, что отдельных решений нельзя сравнивать друг с другом, только с элементами биполярной системы объектов отнесения. Таким образом, качество исследуемого варианта оценивается на основе "места" какое занимает он по отношению к обеим членам данной системы.



ON THE USE OF REFERENCE OBJECTIVES IN MULTIPLE CRITERIA  
DECISION MAKING

S u m m a r y

The paper shows some aspects of the development of the reference objectives concept in MCDM. The impact and importance of the descriptive decision theory on understanding of the role of ideal in the decision making is pointed out.

The anti-ideal point /set/, as "mirror image" of ideal alternative /alternatives/ is being formulated in normative models. But both concepts are used interchangeably rather than simultaneously. They are considered as the symmetric variants of the same decision analysis.

From the descriptive decision models follows that motivations for reaching success  $S$  and motivations for avoiding the failure  $N$  do not play entire symmetric role. Motives  $S$  and  $N$  have an impact on the decision separately, not only by their difference  $S-N$ .

It is why in this paper the concept of bipolar reference objectives system /ideal, anti-ideal/ is introduced. It has been used to model the multi criteria project analysis in the layout problem. The elements of the model are following:

- finite set of decision alternatives,
- criteria of evaluation /cardinal, ordinal, binar/,
- weights of relative importance of the criteria,
- two sets of reference objects /"good" and "bad"/,

The essence of the analysis consists in that alternatives are not compared to each other, but to the elements of bipolar reference objectives system. In this manner the evaluation of the given alternative is based on its "position" with regard to both segments of reference system.

K. Kusidko

Instytut Automatyki

Wydział Automatyki, Elektroniki

i Informatyki

Politechnika Śląska w Gliwicach

CELENYE PRZYKŁADZIE WYKORZYSTANIA POLIOPTYMALIZACJI

W PROCESIE PROJEKTOWANIA ELEKTROMAGNESU

W artykule, wykorzystując metody polioptymalizacji rozwiązano problem doboru tolerancji wykonania nurnika i tulei karkasu elektromagnesu prądu stałego. Konstruktor podejmuje odpowiednią decyzję na podstawie nomogramu utworzonego ze znalezionej zbioru rozwiązań niezdominowanych.

1. Wstęp

Rozpatrywany będzie elektromagnes prądu stałego z rdzeniem wolframowym [1]. W tego typu elektromagnesach istnieje instrumentalny luz, pomiędzy powierzchnią boczną nurnika i powierzchnią wewnętrzną tulei karkasu, umożliwiając swobodne przemieszczanie się nurnika - rys.1. Jest on określony następującą zależnością:

$$\epsilon = R_T - R_N \quad [m]$$

/1/

gdzie:

$\epsilon$  [m] - maksymalna wartość luzu;

$R_T$  [m] - wewnętrzny promień tulei karkasu;

$R_N$  [m] - nominalny promień nurnika, który określa się dla założonej siły jaką ma rozwijać elektromagnes.

Jak wykazano w pracy [2] wartość luzu  $\epsilon$  ma bezpośredni wpływ na wartość siły tarcia jaka występuje pomiędzy nurnikiem i tuleją karkasu. Mając na uwadze histerezę

charakterystyki regulacyjnej [3] i straty energetyczne elektromagnesu należy dążyć do jak najmniejszej siły tarcia. Można to uzyskać na drodze minimalizacji wartości luzu [2]. W tym przypadku należy jednak zwrócić uwagę na występowanie zjawiska typu "poduszka powietrzna". Tworzy się ona pomiędzy powierzchniami czołowymi nurnika oraz stopy i jest ograniczona ściankami tulei karkasu. Przy coraz mniejszych tolerancjach wykonania nurnika i tulei karkasu, a więc mniejszych siłach tarcia, opór ruchu nurnika, który coraz skuteczniej będzie pełnił rolę tłoka w zamkniętym cylindrze będzie wzrastał. Aby temu zapobiec można wykonać w stopie magnetowodu otwór odpowietrzający. Jego średnica powinna być określona wydajnością ewakuacji powietrza oraz minimalnym spadkiem permeancji magnetowodu. Okazuje się jednak, że w przypadku małych, szybko działających i o dużym skoku nurnika elektromagnesów wykonanie otworu odpowietrzającego może być utrudnione.

Powstaje więc problem znalezienia kompromisowych wartości luzu  $\epsilon$ , a co za tym idzie określenia kompromisowych tolerancji wykonania nurnika i tulei karkasu. Problem ten zostanie rozwiązany na drodze wykorzystania metody optymalizacji wielokryterialnej [4] poprzez wyznaczenie zbioru rozwiązań niezdominowanych (w sensie Pareto) na dwukryterialnej, niekooperacyjnej płaszczyźnie celu. Pierwsze kryterium będzie związane z siłą tarcia jaka występuje pomiędzy nurnikiem a tuleją karkasu. Natomiast drugie kryterium będzie związane ze skutecznością ewakuacji powietrza zgromadzonego w komorze utworzonej <sup>przez</sup> powierzchnie czołowe nurnika, stopy i ściankę tulei karkasu. Przy czym będziemy dążyć do tego aby jedyną zmienną występującą w funkcjach opisujących oba kryteria był luz  $\epsilon$ . Taki sposób rozwiązania problemu zapewni możliwość elastycznego doboru wykonania nurnika i tulei karkasu w zależności od konkretnego zastosowania projektowanego elektromagnesu.

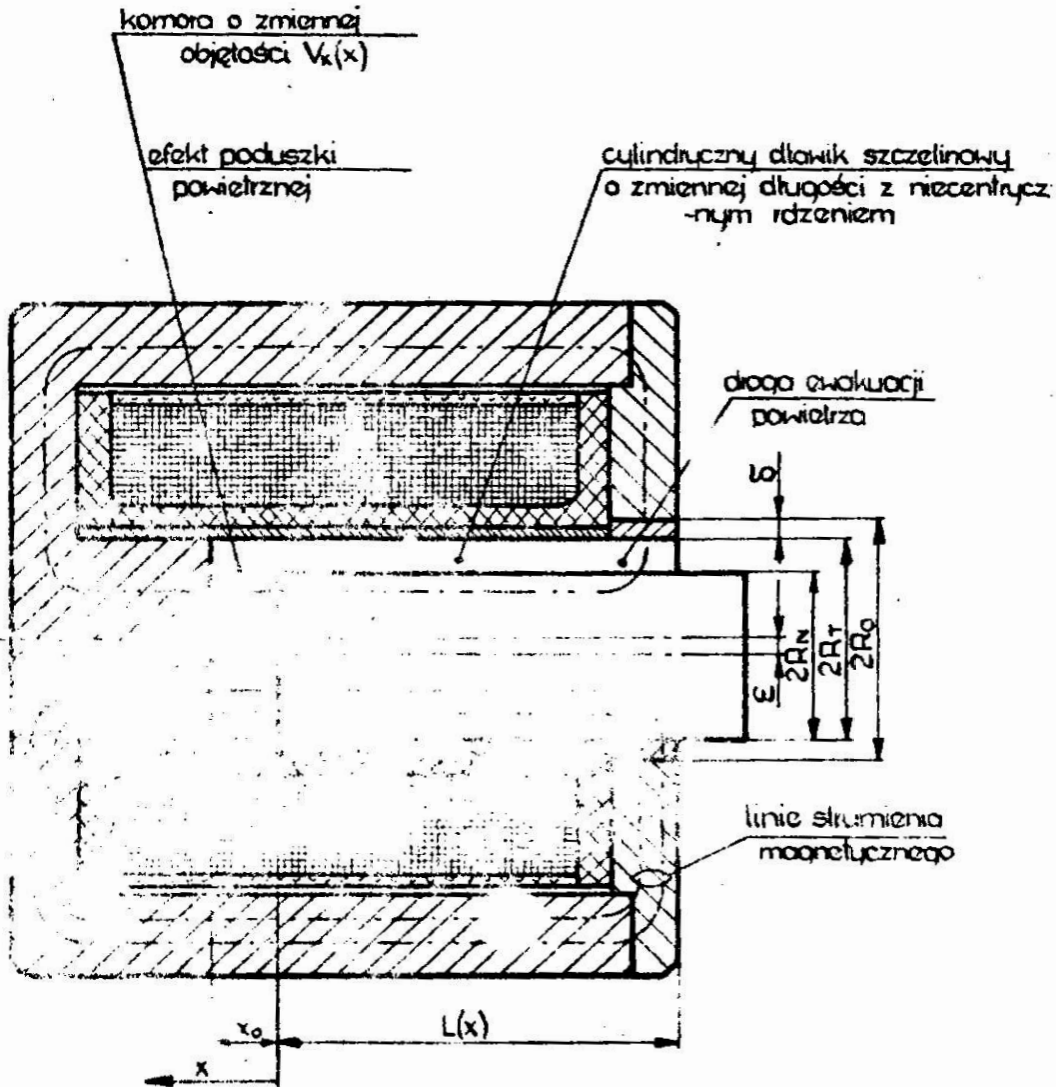


Fig. 1 Model elektromagnesu.

Opisany wyżej problem występuje w praktyce eksploatacyjnej zawsze. Jego rozwiązanie ma zasadniczy wpływ na właściwości statyczne i dynamiczne elektromagnesu prądu stałego. Dlatego też każdorazowo konkretne zastosowa-

nie elektromagnesu oraz szczególne warunki techniczne projektowego pozwoli na określenie jednego z kryteriów optymalizacji, wiążącego w sposób ilościowy dwa wskazane wcześniej kryteria. Dzięki temu będzie można, z wykreślnie przedstawionych zbiorów rozwiązań niezdominowanych (spełniających rolę nomogramów), odczytać konkretne wartości luzu  $\xi$ .

Dzięki takiemu ujęciu zagadnienia, decydujący o poprawności techniczno-eksploatacyjnej moment wyboru tolerancji wykonania nurnika i tulei karkasu może być przesunięty w kierunku końca sieci działań składającej się na strukturę procesu projektowania [5]. Pozwoli to na lepsze przygotowanie decyzji a sam wybór będzie w większym stopniu zobiektywizowany.

## 2. Kryteria oceny

Na rys.1 przedstawiono model elektromagnesu z niecentrycznie prowadzonym nurnikiem. W celu określenia kryterium oceny związanego z siłą tarcia zostają przyjęte następujące założenia [2]:

- a) wszystkie powierzchnie walcowe są walcami idealnymi;
- b) tuleja karkasu i otwór w magnetowodzie, przez który wychodzi nurnik są współosiowe;
- c) rozptył strumieni magnetycznych jest taki jak na rys.1;
- d) osie symetrii nurnika i tulei karkasu przebiegają równolegle;
- e) długość pasywniejszej szczeliny powietrznej w dowolnym jej miejscu jest różna od zera;
- f) pomija się reluktancję magnetowodu, istnienie strumieni rozproszenia i wybrzuszenie linii polowych wzdłuż osi wokół szczelin powietrznych.

Na podstawie rys.1 i przyjętych tam oznaczeń oraz zależności można wyprowadzić [2] następującą zależność od siły tarcia  $F_T$  występująca między nurnikiem a tuleją karkasu:

$$F_T = \frac{\mu_T \mu_0 (Iz)^2 R_N^2}{8} \cdot \frac{\epsilon}{[(x + R_0 - R_N)^2 - \epsilon^2]^{1,3}} \quad [N] \quad /2/$$

gdzie:

- $\mu_T$  - współczynnik tarcia suchego;
- $\mu_0$  [H/m] - przenikalność magnetyczna próżni;
- $Iz$  [A] - amperozwoje uzwojenia magnesującego;
- $x$  [m] - długość roboczej szczeliny powietrznej;
- $R_0$  [m] - promień otworu w magnetowodzie, przez który wychodzi nurnik.

Dla określenia procentowego udziału siły tarcia w całkowitej sile rozwijanej przez elektromagnes idealny tzn. taki, w którym nurnik jest prowadzony centrycznie ( $\epsilon = 0$ ), wprowadza się pojęcie względnego błędu siły zdefiniowanego w sposób następujący:

$$\delta P = \frac{F_T}{F_{ei}} \cdot 100\% \quad /3/$$

gdzie:

- $F_{ei}$  [N] - siła pochodzenia elektrycznego rozwijana przez elektromagnes idealny i określona następująco:

$$F_{ei} = \frac{\mu_0 (Iz)^2 R_N^2}{8} \frac{1}{\Delta^2} \quad [N] \quad /4/$$

gdzie:

- $\Delta$  [m] - wypadkowa długość wszystkich szczelin nieferromagnetycznych na drodze strumienia magnetycznego

$$\Delta = x + \delta \quad [m] \quad /5/$$

gdzie:

- $\delta$  [m] - grubość nieferromagnetycznego pierścienia osadzonego w otworze magnetowodu i wypełniającego przestrzeń pasywniczej szczeliny powietrznej, zapobiegającego przyklejaniu

się nurnika do karnego ośi.

$$\delta = R_{\delta} - R_T \quad [\text{m}] \quad /6/$$

Wskazując zależności od /2/ do /6/ otrzymujemy wyrażenie określające wartość względnego błędu siły

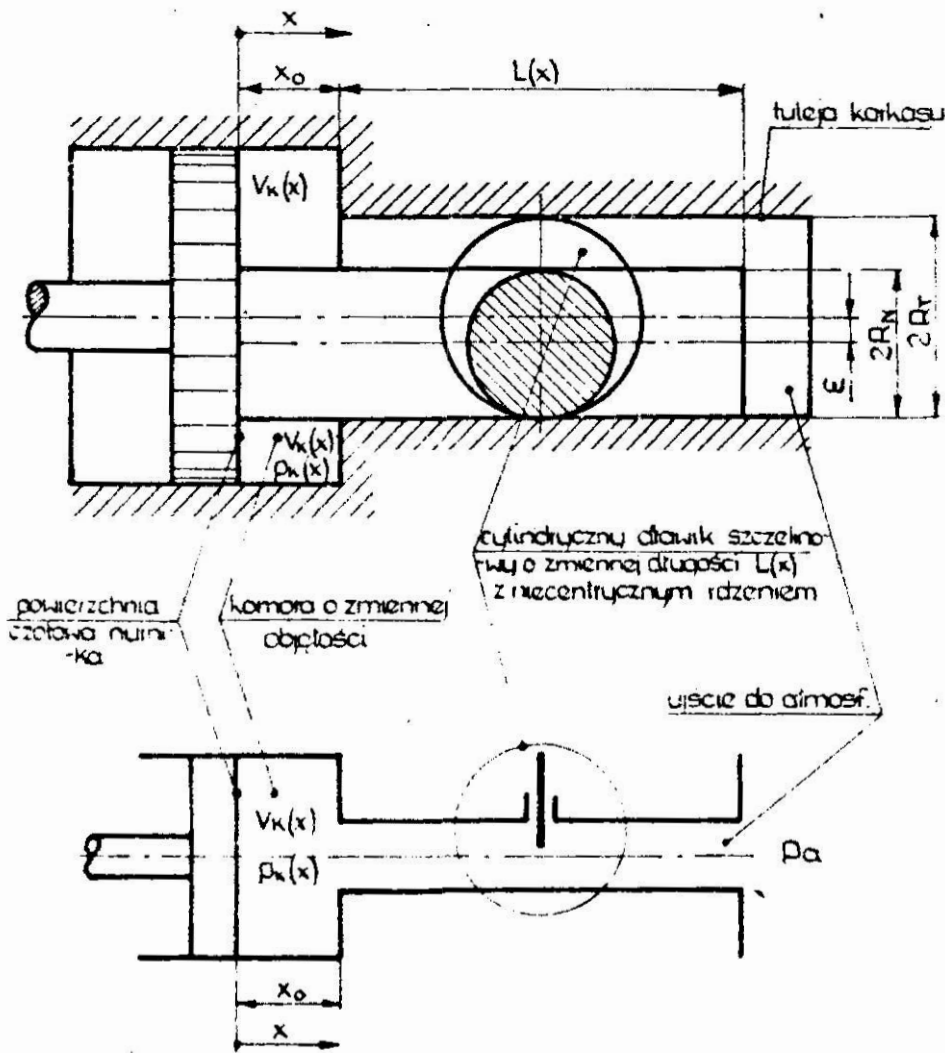
$$\delta F = \mu_T \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\Delta}{(\Delta + 2\varepsilon)^3}} \cdot 100\% \quad /7/$$

Wzór ten jest uniwersalny ponieważ jest on niezależny od wszystkich cech konstrukcyjnych elektromagnesu za wyjątkiem luzu  $\varepsilon$ . W celu porównania różnych rozwiązań konstrukcyjnych przyjmuje się, że  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$  [m]. Uniezależniamy się wtedy od grubości  $\delta$  pierścienia nieferromagnetycznego, która w zależności od warunków technologiczno-materiałowych może być różna dla różnych rozwiązań konstrukcyjnych elektromagnesu. Wartość względnego błędu siły  $\delta F$  określona zależnością /7/ zostaje przyjęta jako pierwsze kryterium oceny  $k_1$  związane z siłą tarcia  $F_T$ . Oczywiście dąży się do tego aby przyjmowało ono jak najmniejsze wartości.

$$k_1 = \delta F = \min \quad [\%] \quad /8/$$

Nim przystąpimy do wyznaczenia drugiego kryterium oceny związane z skutecznością ewakuacji powietrza zostaną podane przyjęte założenia.

Zakłada się, że ewakuacja powietrza następuje wyłącznie pomiędzy powierzchnią boczną nurnika położonego niecentrycznie względem osi głównej elektromagnesu a powierzchnią wewnętrzną tulei karkasu. Utworzony w ten sposób opór pneumatyczny zamodelowano cylindrycznym dławikiem szczelinowym, o zmiennej długości, z niecentrycznie umieszczonym sworzniem. Rozpatrywać więc będziemy ewakuację kaskady pneumatycznej o zmiennej objętości (komora pomiędzy ruchomym nurnikiem i stopą) poprzez wyżej określony dławik - rys.2.



Rys 2 Model ewakuacji powietrza

Dodatkowo zakłada się, że:

- a) elektrowakuum może pracować zarówno w reżimie pracy przekaźnikowej jak i sterowanej (proporcjonalnej), tzn. nurnik może przyjmować dowolne (w zakresie swojego zakresu) stabilne położenia;
- b) skokowy ruch nurnika, po włączeniu napięcia zasilającego urządzenie magnesyjące, można w przybliżeniu opisać za pomocą poprawnie funkcją Heaviside'a;



- i) zachodzi przemiana izotermiczna  $T = \text{const.}$ ;
- j) w dławiku zachodzi przepływ laminarny  $Re < 2300$ ;
- k) uwzględnia się ściśliwość powietrza;
- l) temperatura powietrza w stanie ustalonym  $T = 413,15 [^{\circ}\text{K}]$ ;
- k)  $\varepsilon \ll R_N$  [m];
- m) w stanie ustalonym ciśnienie  $p_K$  powietrza wewnątrz komory jest równe ciśnieniu atmosferycznemu (otoczenie elektromagnesu);
- n) początkowa długość roboczej szczeliny powietrznej  $x_0 = 2R_N$  [m] .

W celu ograniczenia objętości artykułu zostaną teraz podane oznaczenia wszystkich wielkości niezdefiniowanych wcześniej a występujących w dalszej treści.

Oznaczenia są podane w kolejności ich występowania.

$m$ [kg]	- masa powietrza zgromadzonego w komorze;
$Q_m^n$ [kg/s]	- masowy wypływ powietrza z komory (przez cylindryczny dławik szczelinowy o zmiennej długości z niecentrycznym sworzniem);
$V$ [m <sup>3</sup> ]	- objętość komory (zmienna);
$Q_m$ [kg/s]	- masowy przepływ przez dławik cylindryczny;
$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	- przyspieszenie ziemskie;
$R$ [Jm/kg·deg]	- stała gazowa;
$A$ [m <sup>2</sup> ]	- pole przekroju dławika cylindrycznego;
$\rho_{sr}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	- średnia gęstość powietrza w komorze;
$d$ [m]	- średnica dławika cylindrycznego;
$B$	- współczynnik korekcyjny uwzględniający straty związane z tworzeniem się parabolicznego profilu prędkości strugi w początkowym odcinku dławika cylindrycznego [6];
$l$ [m]	- długość dławika cylindrycznego;
$D_T$ [m]	- wewnętrzna średnica otworu dławika szczelinowego;
$\delta$ [m]	- grubość szczeliny w dławiku szczelinowym;
$\psi(\varepsilon/R_N)$	- funkcja poprawkowa uwzględniająca niecentryczne prowadzenie sworznia w dławiku szczelinowym [8];

$\eta$  [Ns/m<sup>2</sup>] - dynamiczny współczynnik lepkości powietrza w komorze.

W celu ilościowego określenia skuteczności ewakuacji powietrza z dyskutowanej kaskady pneumatycznej będziemy poszukiwać wyrażenia określającego wartość stałej czasowo-występującej w transmitancji:

$$K(s) = \frac{P_K(s)}{X(s)} \quad /9/$$

gdzie:

$P_K(s)$  - transformata Laplace'a wyrażenia określającego wartość ciśnienia wewnątrz kaskady pneumatycznej;

$X(s)$  - transformata Laplace'a wyrażenia określającego wartość skoku nurnika.

Na podstawie rys.2 oraz przyjętych założeń można napisać następujące równanie bilansu masy powietrza znajdującego się w komorze:

$$\frac{dm}{dt} = -Q_m^n \quad [\text{kg/s}] \quad /10/$$

Wykorzystując równanie Hagen-Poiseuille'a z uwzględnieniem ściśliwości powietrza, równanie stanu gazu oraz elementarne zależności wynikające z rys.2 można napisać następujące równania:

- równanie stanu gazu

$$m = \frac{V}{RT} P_K \quad [\text{kg}] \quad /11/$$

- objętość komory

$$V = \pi R_N^2 (x_0 - x) \quad [\text{m}^3] \quad /12/$$

- początkowa długość szczeliny roboczej

$$x_0 = 2R_N \quad [\text{m}] \quad /13/$$

- wzór Hagen-Poiseuille'a dla dławika cylindrycznego [6]

$$Q_m = \frac{3A^2 \gamma_{gr}}{\pi B \eta_1} \cdot (p_K - p_a) \quad [kg/s] \quad /14/$$

- pole przekroju dławika cylindrycznego

$$A = \frac{\pi a^2}{4} \quad [m^2] \quad /15/$$

- poprawka uwzględniająca ścisłość powietrza [6]

$$\gamma_{gr} = \frac{p_K + p_a}{2RT} \quad [kg/m^3] \quad /16/$$

- aproksymacja funkcji określającej wartość współczynnika korekcyjnego

$$B = \frac{1060 \cdot d}{1} + 64 \quad /17/$$

- zastąpienie dławika cylindrycznego dławikiem szczelinowym

$$A^2 \approx 10D_T \gamma^2 \quad [m^4] \quad /18/$$

- wewnętrzna średnica otworu dławika szczelinowego

$$D_T = 2(R_N + \varepsilon) \quad [m] \quad /19/$$

- grubość szczeliny w dławiku szczelinowym

$$\gamma = \varepsilon \quad [m] \quad /20/$$

- długość dławika szczelinowego [7]

$$l = 3R_N + x \quad [m] \quad /21/$$

- przepływ przez cylindryczny dławik szczelinowy z niecentrycznym sworzniem [8]

$$Q_m^2 = Q_m \cdot V\left(\frac{\varepsilon}{R_N}\right) \quad [kg/s] \quad /22/$$

- funkcja poprawkowa uwzględniająca niecentryczne położenie sworznia [8]

$$V\left(\frac{\varepsilon}{R_N}\right) = \frac{1}{2\pi\left(\frac{\varepsilon}{R_N}\right)^3} \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{R_N}\right)^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\varepsilon}{R_N} (1 + \sin \varphi) - 1 \right]^3 d\varphi \quad /23/$$

Wykorzystując zależności od /12/ do /23/ otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\pi}{RT} \cdot R_N^2 \left[ p_K \cdot \frac{d}{dt} (2R_N - x) + (2R_N - x) \frac{d}{dt} p_K \right] \quad [\text{kg/s}] \quad /24/$$

$$Q_m^n = \frac{2,5(R_N + \varepsilon) R_N^3 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{\varepsilon}{R_N}\right)}}{2RT\eta \left[ 1060 \cdot \sqrt[4]{20(R_N + \varepsilon)\varepsilon^3} + 64(R_N + x) \right]} \quad [\text{kg/s}] \quad /25/$$

W celu określenia transmitancji /3/ równania /24/ i /25/ zostaną zlinearyzowane dla niewielkich przyrostów wokół punktu pracy.

$$\Delta \left( \frac{dm}{dt} \right) = \left( \frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial x} \right)_c \Delta x + \left( \frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial \left( \frac{dx}{dt} \right)} \right)_c \Delta \left( \frac{dx}{dt} \right) + \left( \frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial p_K} \right)_c \Delta p_K + \left( \frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial \left( \frac{dp_K}{dt} \right)} \right)_c \Delta \left( \frac{dp_K}{dt} \right) \quad /26/$$

$$\Delta Q_m^n = \left( \frac{\partial Q_m^n}{\partial x} \right)_c \Delta x + \left( \frac{\partial Q_m^n}{\partial p_K} \right)_c \Delta p_K \quad /27/$$

Wykonując operacje zaznaczone w wyrażeniach /26/ i /27/ i wykorzystując równania /24/, /25/ oraz założenie 4' otrzymujemy:

$$\frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial x} = 0 \quad /28/$$

$$\frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial \left( \frac{dx}{dt} \right)} = - \frac{\pi R_N^2}{RT} p_K \Big|_c \quad /29/$$

$$\frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial p_K} = \frac{\pi R_N^2}{RT} (2R_N - x) \Big|_c \quad /30/$$

$$\frac{\partial \left( \frac{dm}{dt} \right)}{\partial \left( \frac{dp_K}{dt} \right)} = 0 \quad /31/$$

$$\frac{\partial Q_m^n}{\partial x} = 0 \quad /32/$$

$$\frac{\partial Q_m^n}{\partial p_K} = \frac{12,5\pi(R_N + \varepsilon)\varepsilon^3 \cdot 2p_K}{RT\eta \cdot [1060 \sqrt[4]{20(R_N + \varepsilon)\varepsilon^3 + 64(3R_N + x)}]} \Big|_0 \quad /33/$$

Na podstawie równań od /26/ do /33/ oraz równań /9/ i /10/ otrzymujemy następujące wyrażenie określające poszukiwaną transmitancję

$$K(s) = \frac{k \cdot s}{sT + 1} \quad /34/$$

gdzie:

$$k = \frac{p_a}{2R_N} \quad [N/m^3] \quad /35/$$

$$T = \frac{\eta}{12,5p_a} \frac{1060 \cdot \sqrt[4]{20(R_N + \varepsilon)\varepsilon^3 + 252R_N} \cdot R_N^3}{(R_N + \varepsilon)\varepsilon^3} \quad [s] \quad /36/$$

Przyjmuje się, że stan ustalony ( $p_K = p_a$ ) nastąpi w przybliżeniu po skończonym czasie  $T_u$  równym

$$T_u = 4T \quad [s] \quad /37/$$

Ostatecznie więc przyjmujemy wartość czasu  $T_u$ , po którym nastąpi w przybliżeniu zrównanie ciśnienia powietrza wewnątrz komory pomiędzy stopą a nurnikiem z ciśnieniem atmosferycznym, za drugie kryterium oceny będące miarodajnym wskaźnikiem skuteczności ewakuacji powietrza. Czyli możemy napisać, że

$$k_2 = T_u = \min \quad [s] \quad /38/$$

Jedyną zmienną występującą w wyznaczonych kryteriach oceny  $k_1$  i  $k_2$  jest wielkość luzu  $\varepsilon$ , na którą nałożono następujące ograniczenia:

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\Delta}{5} \quad [m] \quad /39/$$

Ograniczenie to wynika z żądania aby był spełniony warunek

$$20 \cdot \lg \frac{F_{ei}}{F_e} \leq 3 \text{ dB} \quad /40/$$

gdzie:

$$F_e = \frac{\mu_0 (Iz)^2 N^2}{8} \frac{1}{(\Delta + \xi)^2} \text{ [N]} \quad /41/$$

Wzór /41/ określa siłę pochodzenia elektrycznego rozwijaną przez elektromagnes z centrycznie prowadzonym nurnikiem ale z uwzględnieniem promieniowego luzu  $\xi$ .

Warunek /40/ wyznacza dopuszczalny spadek siły rozwijanej przez elektromagnes na skutek zwiększenia się sumarycznej długości wszystkich szczelin nieferromagnetycznych znajdujących się na drodze strumienia magnetycznego.

### 3. Wyznaczenie zbioru kompromisów

Na podstawie zależności /7/ i /36/ można stwierdzić, że otrzymaliśmy dwa niekooperacyjne kryteria oceny. Oznacza to, że poprawa jednego z nich np. minimalizacja wartości siły tarcia na drodze zmniejszenia wartości luzu  $\xi$  prowadzi do jednoczesnego pogorszenia drugiego z kryteriów - nastąpi wzrost czasu ewakuacji powietrza z komory. Sytuacja taka wymaga od konstruktora podjęcia decyzji kompromisowej. Dlatego też zostaną wyznaczone wszystkie możliwe kompromisy w ramach przyjętych ograniczeń. Czyli decydent będzie dysponował dla danej wartości luzu  $\xi$  dwoma najlepszymi wartościami kryteriów oceny  $k_1, k_2$ , których względem siebie nie można już poprawić. Poprawa jednego powoduje pogorszenie drugiego.

Poszukiwany zbiór kompromisów przedstawia na kartezjańskiej płaszczyźnie celu zależność  $k_2 = f(k_1)$ . Analizując zależności /7/ i /36/ można stwierdzić, że analityczne rozwikłanie tych równań względem zmien-

nej  $\xi$  jest bardzo uciążliwe dlatego nie można też w sposób bezpośredni wyznaczyć zależności  $k_2=f(k_1)$ . Zbiór kompromisów został więc znaleziony numerycznie poprzez wyznaczenie wartości poszczególnych kryteriów oceny dla tych samych wartości luzu  $\xi$  a następnie naniesieniu wszystkich otrzymanych dwójek  $(k_1, k_2)$  na płaszczyznę celu. Procedurę zrealizowano na mikrokomputerze ATARI 800XL przy pomocy programu napisanego w BASIC-u.

Na wykresie - rys.1 przedstawiono zbiory kompromisów wyznaczone dla różnych wartości promienia nominalnego  $R_N$  nurnika, przy czym ustalono wartość współczynnika tarcia  $\mu_T=1$ . Uzyskano w ten sposób możliwość porównywania różnych rozwiązań konstrukcyjnych elektromagnesów prądu stałego z płaską stopą i nurnikiem. Dodatkowo przyjmuje się, że wartość  $R_N$  jest zawarta w przedziale

$$5 \cdot 10^{-3} \leq R_N \leq 2 \cdot 10^{-2} \quad [\text{m}] \quad /42/$$

Ponieważ założono, że tuleja karkasu może być wykonana z teflonu, żywicy fenolowej lub mosiądzu natomiast nurnik ze stali niskowęglowej dlatego każdorazowo podczas korzystania wykresu należy się posługiwać pomocniczymi osiami wyskalowanymi w procentowych wartościach względnego błędu siły odpowiadającego określonemu materiałowi z jakiego jest wykonana tuleja karkasu. W obliczeniach przyjęto następujące wartości współczynników tarcia:

$$\mu_T = \begin{cases} 0,1 & \text{- tuleja wykonana z teflonu;} \\ 0,25 & \text{- tuleja wykonana z żywicy fenolowej;} \\ 0,35 & \text{- tuleja wykonana z mosiądzu.} \end{cases} \quad /43/$$

Wartości pozostałych stałych występujących w równaniach /7/ i /36/ określono w sposób następujący:

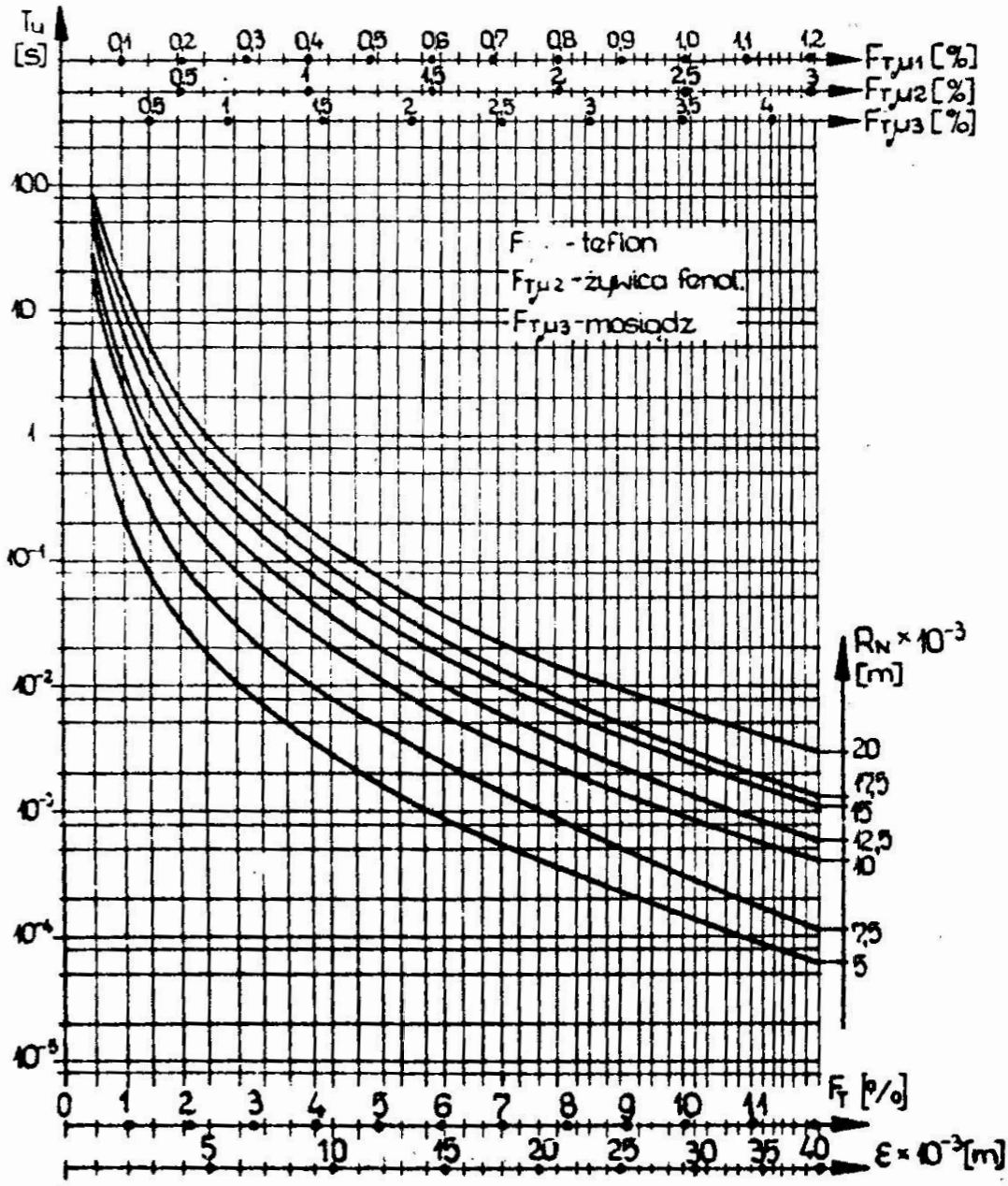
$$\Delta = 5 \cdot 10^{-3} [\text{m}] \quad /44/$$

$$\eta = 19,1 \cdot 10^{-6} [\text{Ns/m}^2] \quad *) \quad /45/$$

$$p_a = 1013 \cdot 10^2 [\text{Pa}] \quad /46/$$

\* Przyjęto, że w stanie ustalonym temperatura powietrza w komorze wynosi  $413,15 [^{\circ}\text{K}]$

Na rys.3 przedstawiono wyznaczone zbiory kompromisów. Ze względu na dużą rozpiętość wartości czasu  $T_u$  os przy-  
porządkowana temu kryterium została przedstawiona w ska-  
li logarytmicznej.



Rys. 3



Praktyczne wykorzystanie nomogramu powinno być następujące.

Po obliczeniu wszystkich wymiarów magnetowodu oraz danych nawojowych uzwojenia magnesującego (ogólnymi metodami przedstawionymi np. w [9], [10]) należy, w zależności od tego jakie ma być konkretne zastosowanie projektowanego elektromagnesu, określić pomocnicze kryterium oceny wiążące żądane preferencje kryteriów  $k_1$ ,  $k_2$ . Dla małych szybko działających elektromagnesów decydujące znaczenie będzie miało kryterium  $k_1$ . Natomiast dla elektromagnesów o dużej średnicy nurnika, w szczególności pracujących w reżimie pracy proporcjonalnej [3] należy preferować kryterium  $k_2$ . Po zdefiniowaniu pomocniczego kryterium oceny można dla określonej średnicy nurnika  $2R_N$  i określonego materiału z jakiego jest wykonana tuleja karkasu odczytać dopuszczalną wartość luzu  $\xi$ .

#### 4. Wnioski

a) Wyznaczony zbiór kompromisów  $k_2=f(k_1)$  pozwala już na wczesnym etapie projektowania elektromagnesu uwzględnić wpływ takich zjawisk jak:

- występowanie siły tarcia pomiędzy nurnikiem a tuleją karkasu na skutek niecentrycznego prowadzenia nurnika;
- wpływ luzu promieniowego  $\xi$  na skuteczność ewakuacji powietrza zgromadzonego w komorze pomiędzy stopą i nurnikiem.

Jednocześnie moment podjęcia ostatecznej decyzji dotyczącej wyboru konkretnej wartości luzu  $\xi$  ulega zobiektywizowaniu i może zostać przesunięty w kierunku końca struktury procesu projektowania. Dzięki temu uzyskuje się dodatkowe możliwości kształtowania zarówno własności statycznych jak i dynamicznych elektromagnesu prądu stałego. Można też minimalizować straty energetyczne spowodowane tarciem.

- b) Oba wyznaczone kryteria oceny mogą być w prosty i szybki sposób weryfikowane na drodze doświadczalnej.
- c) Jak się wydaje użyta metoda optymalizacji wielokryterialnej nadaje się szczególnie do wspomagania procesu projektowania, w aspekcie przygotowania decyzji wyboru, wszędzie tam gdzie występują niekooperacyjne kryteria oceny. Nadaje się ona zwłaszcza do opracowywania nomogramów stanowiących pomoc w codziennej pracy projektanta i konstruktora.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Kusidło K.: O pewnych nowych sposobach kształtowania charakterystyki napędowej elektromagnesu prądu stałego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Automatyka, nr 73. Gliwice 1984.
- [2] Kusidło K.: Wpływ niecentrycznego prowadzenia nurnika na pracę elektromagnesu prądu stałego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Automatyka, nr 73. Gliwice 1984.
- [3] Bortliczek Z.: O właściwościach statycznych jedno-uzwojeniowych mechanizmów elektromagnetycznych prądu stałego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria: Automatyka, nr 54. Gliwice 1980.
- [4] Peschel M., Riedl C.: Polioptymalizacja. Metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżyniersko-technicznych. WNT, Warszawa 1979.
- [5] Tarnowski W.: Struktura procesu projektowania. Przegląd Mechaniczny, nr 1-7, kwiecień 1982.
- [6] Chorowski B., Werszko M.: Mechaniczne urządzenia automatyki. WNT, Warszawa 1975.
- [7] Liubczik M.A.: Siłowyje elektromagnity aparatow i ustrojstw automatiki postojannowo toka. Izdatielstwo Energija, Moskwa 1968.

- [8] Trybalski Z.: Urządzenia i układy automatyki. Część I. Elementy pneumatyczne. Skrypt Politechniki Śląskiej nr 562. Gliwice 1974.
- [9] Kowalowski H.: Maszyny i napęd elektryczny. PWN, Warszawa 1981.
- [10] Bajorek Z.: Teoria maszyn elektrycznych. PWN, Warszawa 1982.

### ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛИОПТИМИЗАЦИИ ПРИ СОЗДАВАНИИ НОМОГРАММОВ

#### Резюме

В статье , используя полиоптимизацию , решена проблема подбора допусков на изготовление сердечника и втулки каркаса электромагнита постоянного тока. Конструктор принимает соответствующее решение на основе номограммы полученной в данной работе на базе найденного множества непревзойдённых решений.

### AN APPLICATION OF POLYOPTIMIZATION APPROACH TO THE DESIGN OF AN ELECTROMAGNETIC DEVICE

#### Summary

The problem of tolerances determination of a plunger and of a carcass for d.c. electromagnet is discussed. A nomogramme is worked out to make possible for a designer to take the design decision and a choice from among the set of non-dominated design solutions.

КОНЕЦ ЧАСТИ I