WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ

MECHANIKA TECHNICZNA

(ćw.)

Jarosław Chodór

POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA

Jarosław Chodór

MECHANIKA TECHNICZNA

KOSZALIN 2023

ISBN 978-83-7365-615-4

Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej
Zbigniew Danielewicz

Recenzja
Piotr Nikończuk
Agnieszka Ubowska

Projekt okładki
Aleksandra Iwaszkiewicz
Anna Stępień

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ
75-620 Koszalin, ul. Racławicka 15-17

Koszalin 2023, wyd. I, ark. wyd. 1,99

Spis treści

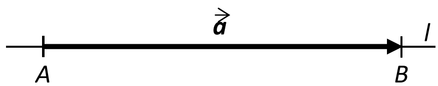
1. Przedstawianie siły w postaci reprezentacji wektorowej i analitycznej. Określenie wypadkowej sił

W mechanice wielkości fizyczne możemy podzielić na dwie grupy[1]:

- wielkości skalarowe (nieukierunkowane), zwane potocznie skalarami,
- wielkości wektorowe (ukierunkowane), zwane potocznie wektorami.

Skalary to wielkości mechaniczne, których wartość liczbowa jest jednoznacznie określona. Oznacza to, że możemy ją przedstawić za pomocą punktu bądź odcinka na przyjętej przez nas osi liczbowej. Przykładami wielkości skalarnych są: temperatura, czas, moc, masa i inne.

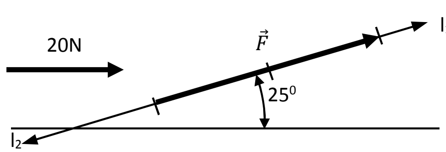
Wektory to wielkości mechaniczne, których wartości możemy przedstawić za pomocą odcinka usytuowanego w przestrzeni. Odcinek ten posiada kierunek i zwrot (rys. 1).



Rys. 1. Przedstawienie wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$

Linia prosta *l* widoczna na rys. 1, na której leży wektor, nazywa się linią działania wektora. Zwrot wektora należy zaznaczyć grotem umieszczonym na końcu wektora. Punkt *A* nazywa się początkiem zaś punkt *B* końcem wektora. W sytuacji kiedy punkt *B* pokrywa się z punktem *A*, czyli *A*=*B*, wektor taki nazywamy wektorem zerowym $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{AB}$.

Reprezentantami wielkości wektorowych w mechanice są m.in.: prędkość, siła, przyspieszenie.



Rys. 2. Wektor $\vec{F}$ przedstawiający siłę

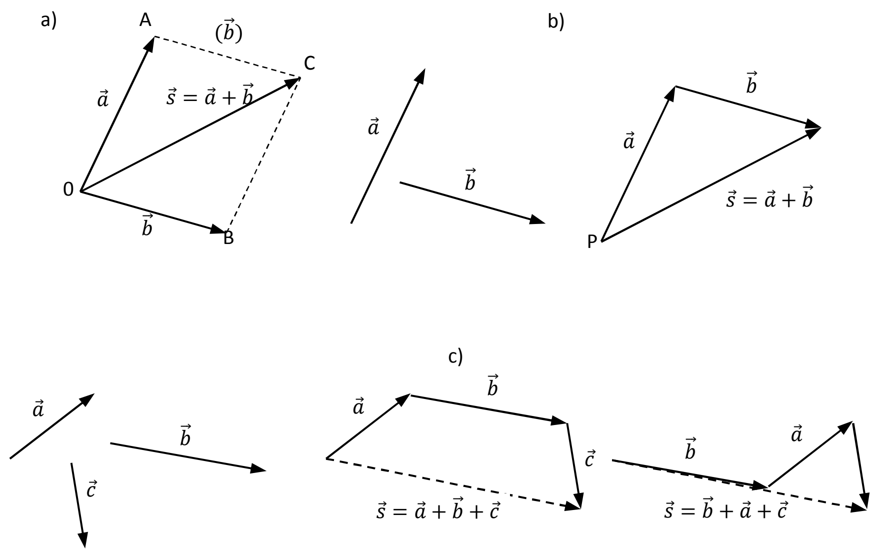
---

[1] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

Istotne jest aby zapamiętać o trzech zasadniczych cechach wektora: wartość (tzw. moduł), kierunek i zwrot. Należy przy tym odróżniać kierunek od zwrotu. Zwrot jest zaznaczony grotem strzałki na końcu wektora. Natomiast wektory, których linie działania są do siebie równoległe mają jednakowe kierunki. Na rys. 2 ukazano wektor przedstawiający siłę 40 N. Jej kierunek tworzy z poziomem kąt 25^0. Siła zwrócona jest do góry. Siłę uważamy za dodatnią, jeśli jej zwrot zgadza się ze zwrotem wartości dodatnich jej linii działania. Dla l_1 wektor siły $\vec{F}$ jest dodatni natomiast względem l_2 – ujemny.

1.1. Dodawanie i odejmowanie wektorów

Dane mamy dwa wektory: $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ (rys. 3). Znajdziemy dla nich ich sumę[2].



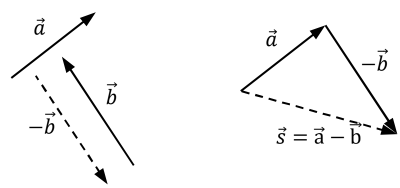
Rys. 3. Sumowanie wektorów metodą równoległoboku (a) i wieloboku (b, c)

Sumowanie wektorów można przeprowadzić na kilka sposobów. Jedną z metod jest tzw. metoda równoległoboku (rys. 3a). Wg tejże metody wektor wypadkowy $\vec{s}$ (zwany również wektorem równoważącym) powstaje w wyniku utworzenia przekątnej w równoległoboku zbudowanego z wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$. Warto zauważyć, że wektory $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $(\vec{\boldsymbol{b}})$ a także utworzony wektor równoważący $\vec{s}$ tworzą trójkąt OAC. Dlatego w celu znalezienia sumy dowolnych dwóch wektorów należy przenieść początek jednego z nich np. wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ na koniec wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$

[2] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

(rys. 3b). Łącząc początek pierwszego wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ z końcem wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ otrzymamy ich sumę $\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}$. Jeżeli wektorów sumowanych jest więcej niż dwa, otrzymujemy nie trójkąt, lecz wielobok. Taki sposób jest drugą metodą wyznaczania wektora równoważącego $\vec{\boldsymbol{s}}$ nazywany metodą wieloboku. Dodawanie wektorów podlega prawu przemienności. Oznacza to, że kolejność ich kreślenia nie wpływa na wynik dodawania czyli na wektor wypadkowy $\vec{\boldsymbol{s}}$ (rys. 3c).

Odejmowanie wektorów polega na dodawaniu ich ze znakiem ujemnym. Aby odjąć od wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ wektor $\vec{\boldsymbol{b}}$, należy do wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ dodać wektor $-\vec{\boldsymbol{b}}$ o wartości i kierunku takim, jak wektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ lecz o zwrocie przeciwnym ($\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{b}})$). Na rys. 4 przedstawiono geometryczne odejmowanie dwóch wektorów. Otrzymany wektor $\vec{\boldsymbol{s}}$ jest różnicą wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$.



Rys. 4. Geometryczne odejmowanie dwóch wektorów

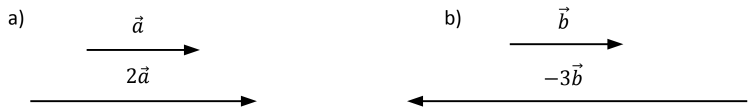
1.2. Mnożenie i dzielenie wektora przez skalar

Rozpatrzmy przypadek kiedy mamy wektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ i dowolny skalar n. Jeśli chcielibyśmy pomnożyć skalar przez dany wektor, czyli $n \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$, mamy do czynienia z dwoma możliwymi przypadkami:

- Skalar n jest większy od zera, czyli liczbę dodatnią mnożymy przez wektor. W rezultacie otrzymujemy wektor, który ma ten sam zwrot i kierunek co wektor $\vec{\boldsymbol{a}}$, lecz jego długość jest teraz n razy większa od długości początkowej wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$.
- Skalar n jest mniejszy od zera czyli liczbę ujemną mnożymy przez wektor. W rezultacie otrzymujemy wektor, który ma ten sam kierunek co wektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ ale przeciwny do niego zwrot. Jego długość jest teraz n razy większa od długości początkowej wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$.

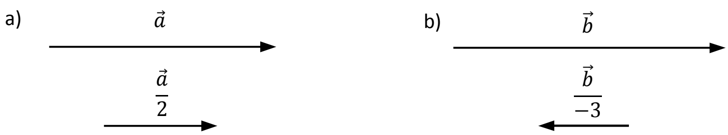
Jeżeli $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{0}$ lub $n = \vec{0}$ należy zakładać, że $n \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{0}$.

Na rys. 5 przedstawiono iloczyn wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ i liczby $n = 2$ a także iloczyn wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ i liczby $n = -3$.



Rys. 5. Iloczyny wektorów dla n większego od zera (a) i n mniejszego od zera (b)

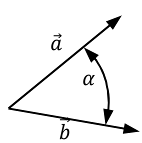
Dzielenie wektora przez liczbę (różną od zera) wygląda następująco:
$\frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = m \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$, gdzie m jest odwrotnością liczby n. Z równania tego wynika, że dzielenie wektora przez liczbę możemy traktować jako mnożenie tego wektora przez odwrotność tej liczby. Na rys. 6 przedstawiono iloraz wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ i liczby $n = 2$ a także iloraz wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ i liczby $n = -3$.



Rys. 6. Ilorazy wektorów dla n większego od zera (a) i n mniejszego od zera (b)

1.3. Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Dane są dwa wektory $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ (rys. 7). Można je mnożyć przez siebie skalarnie bądź wektorowo[3].



Rys. 7. Wektory $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ i kąt α pomiędzy nimi

Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ nazywamy skalar równy iloczynowi modułów tych wektorów i wartości cosinusa kąta α zawartego pomiędzy nimi:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a \cdot b \cdot cos\alpha$$

[3] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

Iloczyn skalarny ma wartość zerową, jeżeli jeden z wektorów jest wektorem zerowym bądź analizowane wektory są do siebie prostopadłe (wówczas $cos\alpha = 0$). Iloczyn skalarny podlega prawu przemienności tj.:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$$

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów będziemy nazywać wektor mający niniejsze cechy:

- Kierunek prostopadły do płaszczyzny na której leżą oba wektory.
- Wartość (moduł oznaczamy dwiema pionowymi kreskami) równą iloczynowi tych wektorów i sinusa kąta zawartego między nimi: $\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = a \cdot b \cdot sin\alpha.$
- Zwrot taki, aby trójka wektorów (w kolejności: pierwszy wektor mnożony, drugi wektor mnożony i wektor iloczynu) tworzyła prawy (prawoskrętny) układ współrzędnych. Na rys. 7 wektor iloczynu $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ jest prostopadły do rysunku i zwrócony za rysunek.

Iloczyn wektorowy nie podlega prawu przemienności, gdyż zmieniając kolejność mnożonych wektorów otrzymamy wektor iloczynu o zwrocie przeciwnym tj.: $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}})$

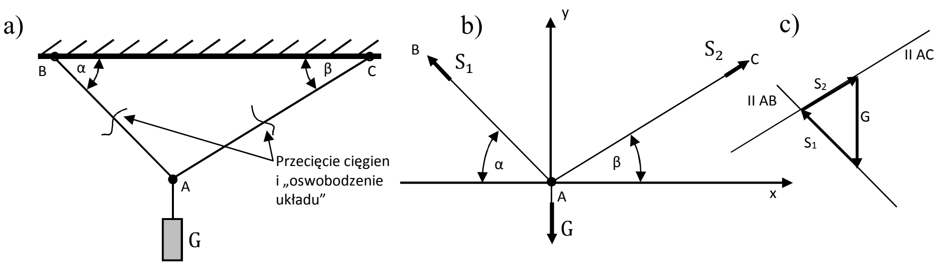
Iloczyn wektorowy przyjmuje wartość zerową, jeżeli jeden z wektorów jest wektorem zerowym lub jeżeli dwa wektory są równoległe (wówczas $sin\alpha = 0$).

2. Zadania na analityczne i wykreślne warunki równowagi zbieżnego układu sił

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania na analityczne i wykreślne warunki równowagi układów sił zbieżnych wraz z omówieniem ich rozwiązania.

Przykład 1

Ciało o ciężarze G zawieszono na dwóch cięgnach tworzących z poziomem kąty α i β (rys. 1). Należy wyznaczyć siły w cięgnach oraz wykonać obliczenia. Dane: $G = 400N$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$. Szukane: S_1 i S_2.



Rys. 1. Rysunek do przykładu 1 (a) jak i układ sił zbieżnych wynikających z treści zadania (b) a także rozwiązanie graficzne (c) – skala 2:1

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie sporządzić równania równowagi układu. Obieramy osie współrzędnych xy (rys. 1b). Z treści zadania wynika, że ciężar zawieszono na dwóch cięgnach (AB i AC) a siła ciężkości G działa na węzeł A tak samo jak naciągi cięgien. Zgodnie z pewnymi uproszczeniami w mechanice technicznej możemy dokonać „przecięcia" owych cięgien i dokonać „oswobodzenia układu" (rys. 1a). Jednakże należy pamiętać aby miejscu przecięcia wstawić siły, które leżą w osi cięgien a ich zwrot jest „na zewnątrz" od miejsca przecięcia patrząc od strony analizowanego układu (rys. 1b). Tak zapisane siły tworzą nam zbieżny układ sił (wszystkie siły zbiegają się w punkcie A). Wartości kątów α i β zgodnie z cechami przystawania trójkątów zostały umieszczone pomiędzy wartościami kątów definiowanych siłami S a osią poziomą x. Warunki równowagi dla zadania przedstawiono poniżej:

$$\sum F_{ix} = -S_1 cos\alpha + S_2 \cos\beta = 0 \qquad (2.1)$$

$\sum F_{iy} = S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta - G = 0$ (2.2)

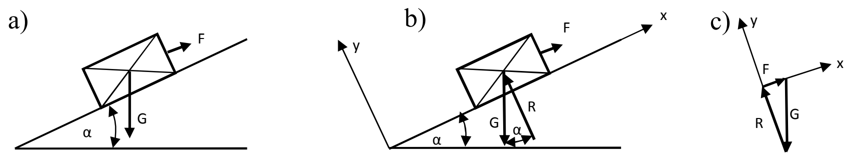
stąd:

$S_1 = \frac{G\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $S_2 = \frac{G\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$,

Po podstawieniu do wzorów danych z zadania otrzymujemy ostatecznie: $S_1 = 358N$ i $S_2 = 295N$.

Przykład 2

Ciało o ciężarze G ustawiono na gładkiej równi nachylonej do poziomu pod kątem α (rys. 2a). Należy wyznaczyć wartości siły F z jaką należy działać tak aby ciało pozostawało w spoczynku a także reakcję R równi (rys. 2b). Dane: $G = 200N$, $\alpha = 30^0$. Szukane: F i R.



Rys. 2. Rysunek do przykładu 2 (a) a także układ sił zbieżnych wynikających z treści zadania (b) i rozwiązanie graficzne (c)

Podobnie jak w przykładzie 1 należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie sporządzić równania równowagi układu. Obieramy osie współrzędnych xy (rys. 1b) w ten sposób aby oś x pokrywała się z kierunkiem ruchu ustawionego na równi ciężaru. Zgodnie z cechami przystawania trójkątów wartość kąta α została umieszczona pomiędzy ciężarem G a siłą reakcji R.

Warunki równowagi dla zadania przedstawiono poniżej:

$\sum F_{ix} = F - G\sin\alpha = 0$ (2.3)

$\sum F_{iy} = R - G\cos\alpha = 0$ (2.4)

stąd: $F = G\sin\alpha$, $R = G\cos\alpha$

Po podstawieniu do wzorów danych z zadania otrzymujemy ostatecznie:

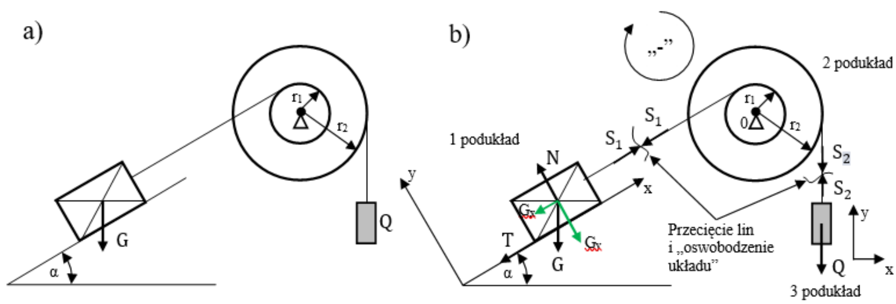
$F = 100N, R = 173N.$

3. Zadania z równowagi płaskiego układu sił z uwzględnieniem sił tarcia

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania na analityczne i wykreślne warunki równowagi układów sił zbieżnych wraz z omówieniem ich rozwiązania.

Przykład 1

Ciało o ciężarze Q zawieszono na linie nawiniętej na bęben o promieniu r_2. Bęben ten jest zespolony z mniejszym bębnem o promieniu r_1 do którego podczepiono za pomocą liny ciężar Q. Ciężar ten spoczywa na równi pochylonej pod kątem α. Należy obliczyć maksymalną wartość ciężaru Q_{max} dla którego opuszczając się spowodowałby przemieszczanie ciężaru G w górę równi. Dane do zadania: $G = 5000N$, $\alpha = 30^0$, $\mu = 0{,}2$, $r_1 = 0{,}3m, r_2 = 1m$. Szukane: $Q_{max} =?$



Rys. 1. Rysunek do przykładu 1 (a) jak i układ sił wynikających z treści zadania (b)

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie sporządzić równania równowagi układu. Obieramy osie współrzędnych xy (rys. 1b). Z treści zadania wynika, że ciężar Q zawieszono na linie nawiniętej na bęben o promieniu r_2. Bęben ten jest zespolony z mniejszym bębnem o promieniu r_1 do którego podczepiono za pomocą liny ciężar Q. Ciężar ten spoczywa na równi pochylonej pod kątem α. Zgodnie z uproszczeniami w mechanice technicznej możemy dokonać „przecięcia” owych lin i dokonać „oswobodzenia układu” (rys. 1b). Jednakże należy pamiętać aby miejscu przecięcia wstawić siły, które leżą w osi lin a ich zwrot jest „na zewnątrz” od miejsca przecięcia patrząc od strony analizowanego podukładu (rys. 1b). W podukładzie 2 przyjęto, że jeśli siła wymuszająca powoduje obrót układu zgodnie z ruchem wskazówek zegara to przyjmuje wartość ujemną (rys. 1b).

Warunki równowagi dla zadania przedstawiono poniżej:

1 podukład:

$\sum F_{ix} = -T - Gsin\alpha + S_1 = 0$ (3.1)

$\sum F_{iy} = N - G\cos\alpha = 0$ (3.2)

2 podukład:

$\sum M_{i0} = S_1 r_1 - S_2 r_2 = 0$ (3.3)

3 podukład:

$\sum F_{iy} = S_2 - Q = 0$ (3.4)

Z podukładu 3 wynika, że $S_2 = Q$. Wykorzystując to wyznaczamy z podukładu nr 2 siłę S_1: $S_1 r_1 = S_2 r_2 \longrightarrow S_1 r_1 = Q r_2 \longrightarrow S_1 = \frac{Q r_2}{r_1}$

Pamiętając, że siła tarcia $T = \mu N$ i podstawiając otrzymane wyniki do równań z podukładu 1 otrzymujemy zapis:

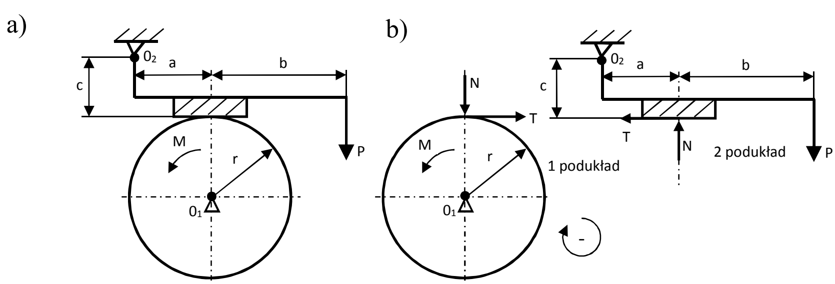
$-\mu N - Gsin\alpha + \frac{Q r_2}{r_1} = 0$, i $N = G\cos\alpha$

stąd: $-\mu G\cos\alpha - Gsin\alpha + \frac{Q r_2}{r_1} = 0$

Po podstawieniu do wzorów danych z zadania otrzymujemy ostatecznie: $Q_{max} = 1005N$.

Przykład 2

Wał, na którym osadzona jest tarcza hamulcowa (tzw. hamulec klockowy) obraca się na skutek oddziaływania pary o momencie M. Na końcu dźwigni przyłożona została siła P, która działając na szczękę hamulca (klocek), który naciska na tarczę, powoduje proces hamowania na skutek działania sił tarcia. Wyznaczyć należy wartość siły P dla danych podanych na rysunku.



Rys. 2. Rysunek do przykładu 2 (a) jak i wyodrębnione w nim 2 podukłady (b)

Podobnie jak w przykładzie 1 należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek (rys. 2a) i na jego podstawie sporządzić równania równowagi układu. Przy obrocie tarczy w kierunku pokazanym na rysunku siła tarcia T przyłożona do tarczy ma zwrot przeciwny do zwrotu wektora prędkości punktów znajdujących się na obwodzie tarczy (rys. 2b). Siła tarcia przyłożona do klocka ma zwrot przeciwny do siły tarcia przyłożonej do tarczy. Układ należy podzielić na 2 podukłady.

Z warunków równowagi momentów (*1 podukład* – rys. 2c) wynika, że:

$$\sum M_{o1} = -Tr + M = 0 \tag{3.5}$$

stąd: $M = Tr, T = \frac{M}{r}$.

Ponieważ tarcza jest w ruchu względem klocka tarcie jest tarciem rozwiniętym, czyli: $T = \mu N$, czyli otrzymujemy $\frac{M}{r} = \mu N$.

Nacisk N potrzebny do wytworzenia siły tarcia o pożądanej wartości równy jest: $N = \frac{M}{r\mu}$. Analizując warunki równowagi *podukładu 2* (dźwigni) otrzymujemy zapis:

$$\sum M_{o2} = -Tc - P(a + b) + Na = 0 \tag{3.6}$$

stąd:

$$P = \frac{Na - Tc}{a + b} \tag{3.7}$$

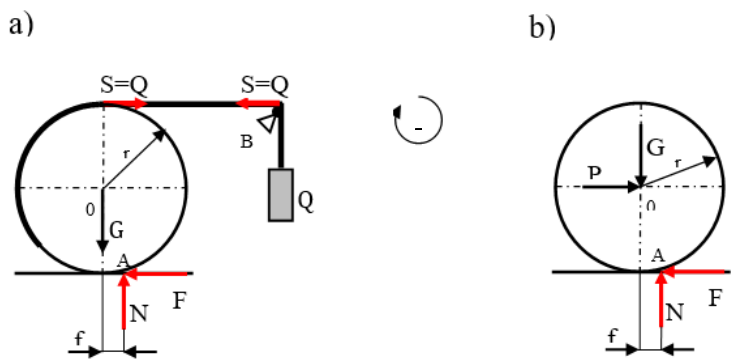
bądź podstawiając dane (jeżeli takie założymy w zadaniu):

$$P = \frac{M(a + c\mu)}{r\mu(a + b)} \tag{3.8}$$

4. Zadania z tarcia toczenia

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania z tarcia toczenia wraz z omówieniem ich rozwiązania.

Przykład 1
Walec o ciężarze G i promieniu r spoczywa na poziomej płaszczyźnie. Do walca przymocowane jest cięgno, które zostało przerzucone przez krążek B, a następnie obciążone pojemnikiem, do którego wsypywany jest piasek. Należy obliczyć współczynnik oporu przy toczeniu f, jeżeli ruch następuje w momencie kiedy ciężar pojemnika z piaskiem wynosi Q. Dane do zadania: G, Q, r. Szukane: f =?



Rys. 1. Rysunek do przykładu 1 (a) jak i układ sił wynikających z treści zadania (b)

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie sporządzić równania równowagi układu. W granicznym położeniu równowag siła z jaką cięgno działa na walec wynosi $S = Q$. Oddziaływanie podłoża należy sprowadzić do siły stycznej F i a także siły normalnej N, przesuniętej o wymiar f względem pionowej osi symetrii walca (rys. 1a).

Warunki równowagi dla walca przedstawiono poniżej:

$\sum F_{ix} = S - F = 0$ (4.1)

skąd: $S = F = Q$

$\sum F_{iy} = N - G = 0$ (4.2)

skąd: $N = G$

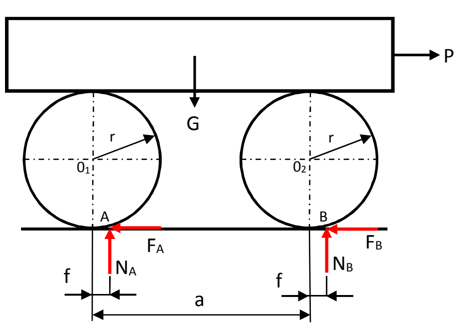
$\sum M_{i0} = -Sr - Fr + Nf = 0$ (4.3)
skąd po podstawieniu wcześniejszych zależności $S = F = Q$ a także $N = G$ otrzymujemy:
$f = \frac{2Qr}{G}$ (4.4)
Przy założeniu, że działalibyśmy poziomą siłą P na środek walca, jak pokazano na rys. 1b, otrzymalibyśmy wówczas:
$\sum F_{ix} = P - F = 0$ (4.5)
skąd: $P = F$
$\sum F_{iy} = N - G = 0$ (4.6)
skąd: $N = G$
$\sum M_{i0} = -Fr + Nf = 0$ (4.7)
skąd po podstawieniu wcześniejszych zależności $P = F$ a także $N = G$ otrzymujemy: $P = \frac{Gf}{r}$

Współczynnik oporu toczenia f nazywany jest również współczynnikiem tarcia tocznego. Warto zauważyć we wzorze na siłę P, że wartość promienia r toczącego się walca występuje w mianowniku. Świadczy to o tym, że im większy będzie promień r, tym mniejsza będzie wymagana siła P.

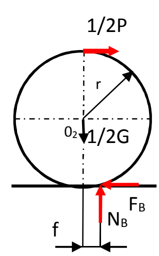
Przykład 2

Płyta wykonana ze stali o ciężarze $G = 500N$ ma być przesuwana po poziomym podłożu za pomocą wałków stalowych o promieniu $r = 2cm$ każdy (rys. 2a). Należy wyznaczyć wartość siły P, jaką należy przyłożyć, jeżeli współczynnik oporu przy toczeniu wałków o podłogę wynosi $f = 0{,}4mm$. W zadaniu należy uwzględnić tylko opór toczenia wałków po podłodze, natomiast pominąć opór toczenia wałków po płycie stalowej.

a)



b)



Rys. 2. Rysunek do przykładu 2 (a) jak i wyodrębnione w nim 2 podukłady (b)

Warunki równowagi dla walca przedstawiono poniżej:

$\sum F_{ix} = P - F_A - F_B = 0$ (4.8)
skąd: $P = F_A + F_B$
$\sum F_{iy} = N_A + N_B - G = 0$ (4.9)
skąd: $G = N_A + N_B$

Widzimy z powyższych zapisów, że suma składowych w osi Y jest równa ciężarowi stalowej płyty a suma sił tarcia tocznego równa jest sile P. Powyższe zapisy są ważne dla dowolnej liczny walców. Zatem układ występujący w tym zadaniu można sprowadzić do prostszego układu, takiego jak był podany w przykładzie 1 (rys. 2b). Ciężar płyty spoczywał na dwóch walcach dlatego analizując jeden z nich należy wziąć pod uwagę połowę ciężaru G a tym samym również połowę wartości siły P.

Warunki równowagi dla walca przedstawiono poniżej:
$\sum F_{ix} = \frac{1}{2}P - F_B = 0$ (4.10)
skąd: $F_B = \frac{1}{2}P$
$\sum F_{iy} = -\frac{1}{2}G + N_B = 0$ (4.11)
skąd: $N_B = \frac{1}{2}G$
$\sum M_{iO_2} = -F_B r - \frac{1}{2}Pr + N_B f = 0$ (4.12)
skąd po podstawieniu wcześniejszych zależności $F_B = \frac{1}{2}P$ a także $N_B = \frac{1}{2}G$ otrzymujemy:
$P = \frac{Gf}{2r} = \frac{500N \cdot 0{,}0004m}{2 \cdot 0{,}02m} = 5N$

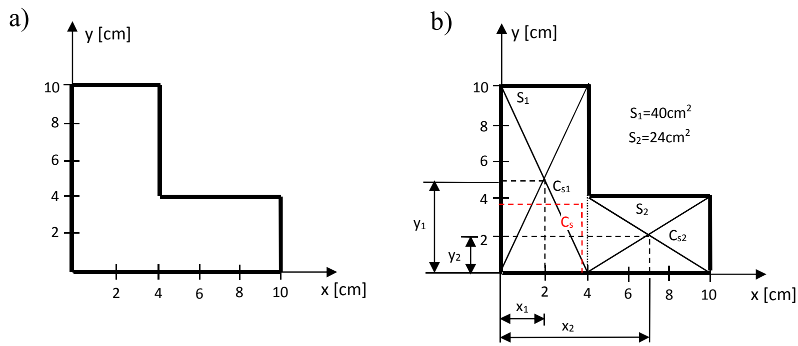
Warto przy okazji zadania wspomnieć, że przesunięcie samej stalowej płyty po podłodze bez żadnych walców, przy współczynniku tarcia $\mu = 0{,}3$, wymagałoby zastosowania siły $P = \mu G = 0{,}3 \cdot 500N = 150N$ (siła potrzebna do przesunięcia byłaby 30 razy większa!).

5. Określanie środków ciężkości figur płaskich i przestrzennych oraz przekrojowych momentów bezwładności figur płaskich

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania z wyznaczania środków ciężkości figur płaskich i przestrzennych wraz z omówieniem ich rozwiązania a także przekrojowe momenty bezwładności figur płaskich.

Przykład 1

Wyznaczyć środek ciężkości $C_s(x_0, y_0)$ figury płaskiej przedstawionej na rysunku 1.



Rys. 1. Rysunek figury złożonej (a) jak i po podziale na figury proste (b)

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie podstawić odpowiednie wartości do wzorów. Rys. 1a przedstawia figurę złożoną z dwóch prostokątów. Środki ich ciężkości znajdują się w środkach symetrii tych prostokątów (C_{s1}, C_{s2}) a pola ich powierzchni wynoszą odpowiednio S_1 i S_2 – rys. 1b. Celem wyznaczenia środka ciężkości figury płaskiej stosujemy wzory[4]:

$$x_0 = \frac{\sum(S_i \cdot x_i)}{\sum S_i} \tag{5.1}$$

$$y_0 = \frac{\sum(S_i \cdot y_i)}{\sum S_i} \tag{5.2}$$

[4] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

stąd:

$$x_0 = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2} = 3{,}875cm$$

$$x_0 = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2} = 3{,}875cm$$

Środek ciężkości bryły złożonej ma współrzędne $C_s(3{,}875cm, 3{,}875cm)$ – oznaczony kolorem czerwonym na rys. 1b.

Analizując powyższe wzory na wyznaczenie środka ciężkości figury płaskiej należy wspomnieć co oznaczają wyrażenia w nich użyte. Mamy więc:

$\sum(S_i \cdot x_i)$ – moment statyczny pola przekroju względem osi y,

$\sum(S_i \cdot y_i)$ – moment statyczny pola przekroju względem osi x.

Przekształcając te wyrażenia i uwzględniając, że $\sum S_i = S$ (pole całego przekroju) można napisać:

$$\sum(S_i \cdot x_i) = S \cdot x_0 \qquad (5.3)$$

$$\sum(S_i \cdot y_i) = S \cdot y_0 \qquad (5.4)$$

Powyższe zależności wypowiadamy następująco[5]:

Moment statyczny pola przekroju względem dowolnej osi jest równy iloczynowi pola tego przekroju i współrzędnej środka ciężkości tego pola przekroju względem danej osi. Jeżeli obrana oś przechodzi przez środek ciężkości pola przekroju ($x_0 = y_0 = 0$) wówczas moment statyczny względem tej osi jest równy zeru. Inaczej można ująć to następująco:

Moment statyczny dowolnej figury względem osi przechodzącej przez środek ciężkości tej figury jest równy zeru.

W przyjętym układzie współrzędnych figura płaska ma trzy momenty bezwładności: dwa osiowe (względem obu osi układu) jak i jeden biegunowy (względem początku układu współrzędnych). Można to zapisać w następujący sposób:

$$J_x = \sum(\Delta S_i \cdot y_i^2) \qquad (5.5)$$

$$J_y = \sum(\Delta S_i \cdot x_i^2) \qquad (5.6)$$

$$J_0 = \sum(\Delta S_i \cdot r_i^2) \qquad (5.7)$$

ale: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

stąd: $J_0 = \sum[\Delta S_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)] = \sum(\Delta S_i \cdot x_i^2) + \sum(\Delta S_i \cdot y_i^2)$

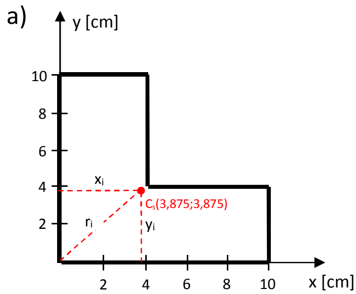
czyli:

$$J_0 = J_x + J_y \qquad (5.8)$$

[5] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

Biegunowy moment bezwładności jest sumą osiowych momentów bezwładności względem dwóch prostopadłych osi przechodzących przez ten biegun.

Postaramy się teraz dla figury złożonej z przykładu 1 wyznaczyć momenty bezwładności w prostokątnym układzie współrzędnych (rys. 2).



Rys. 2. Rysunek figury złożonej z wyznaczonym środkiem ciężkości

Znając współrzędne środka ciężkości możemy wyznaczyć momenty bezwładności naszej figury płaskiej:

$J_x = \sum(\Delta S_i \cdot y_i^2) = 64cm^2 \cdot 3{,}875cm = 248cm^3$

$J_y = \sum(\Delta S_i \cdot x_i^2) = 64cm^2 \cdot 3{,}875cm = 248cm^3$

Jak widzimy momenty bezwładności zarówno względem osi x jak i y przyjmują identyczną wartość wynoszącą $J_x = J_y = 248cm^3$.

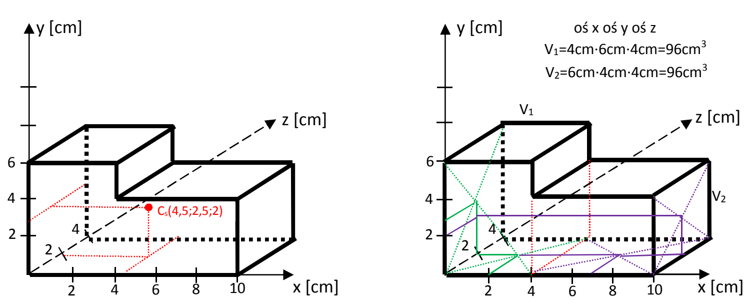
Biegunowy moment bezwładności wyniesie wówczas:

$$J_0 = J_x + J_y = 248cm^3 + 248cm^3 = 496cm^3$$

Wyznaczanie momentów bezwładności względem osi układu współrzędnych przechodzących przez środek ciężkości figury szczególnie jest ważne w wytrzymałości materiałów.

Przykład 2

Dla figury przestrzennej przedstawionej na rys. 3a wyznacz środek jej ciężkości.



Rys. 3. Rysunek figury przestrzennej (a) wraz z podziałem na figury proste (b)

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie podstawić odpowiednie wartości do wzorów. Rys. 3a przedstawia figurę przestrzenną złożoną z dwóch sześcianów (oddzielonych czerwoną kropkowaną linią). Środki ich ciężkości znajdują się w środkach symetrii tych sześcianów (C_{s1}, C_{s2}) a pola ich objętości wynoszą odpowiednio V_1 i V_2 - rys. 3b. Celem wyznaczenia środka ciężkości figury przestrzennej stosujemy wzory:

$$x_0 = \frac{\sum(V_i \cdot x_i)}{\sum V_i} \tag{5.9}$$

$$y_0 = \frac{\sum(V_i \cdot y_i)}{\sum V_i} \tag{5.10}$$

$$y_0 = \frac{\sum(V_i \cdot y_i)}{\sum V_i} \tag{5.11}$$

stąd:

$$x_0 = \frac{V_1 \cdot x_1 + V_2 \cdot x_2}{V_1 + V_2} = \frac{96cm^3 \cdot 2cm + 96cm^3 \cdot 7cm}{96cm^3 + 96cm^3} = 4{,}5cm$$

$$y_0 = \frac{V_1 \cdot y_1 + V_2 \cdot y_2}{V_1 + V_2} = \frac{96cm^3 \cdot 3cm + 96cm^3 \cdot 2cm}{96cm^3 + 96cm^3} = 2{,}5cm$$

$$z_0 = \frac{V_1 \cdot z_1 + V_2 \cdot z_2}{V_1 + V_2} = \frac{96cm^3 \cdot 2cm + 96cm^3 \cdot 2cm}{96cm^3 + 96cm^3} = 2cm$$

Środek ciężkości figury przestrzennej $C_s(x_0, y_0, z_0)$ ma współrzędne $C_s(4{,}5cm, 2{,}5cm, 2cm)$ – oznaczony czerwoną kropką na rys. 3a.

Jeśli chcielibyśmy wyznaczyć środki ciężkości dla figur przestrzennych złożonych z różnych materiałów jest to jak najbardziej możliwe. Wówczas zastosować należy wzory:

$$x_0 = \frac{\sum(V_i \cdot \rho_i \cdot x_i)}{\sum V_i \cdot \rho_i} \tag{5.12}$$

$$y_0 = \frac{\sum(V_i \cdot \rho_i \cdot y_i)}{\sum V_i \cdot \rho_i} \tag{5.13}$$

$$y_0 = \frac{\sum(V_i \cdot \rho_i \cdot z_i)}{\sum V_i \cdot \rho_i} \tag{5.14}$$

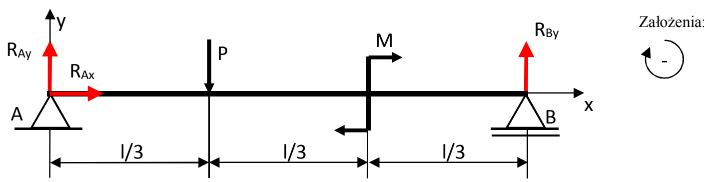
gdzie: ρ_i – gęstość materiału.

6. Zadania z rozwiązywania belek obciążonych siłami skupionymi

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania z wyznaczania reakcji biernych (reakcji w więzach) w belkach obciążonych siłami skupionymi i dodatkowo momentem.

Przykład 1

Wyznaczyć reakcje bierne dla belki przedstawionej na rysunku 1. Dane: $l = 6m, P = 700N, M = 200Nm.$



Rys. 1. Rysunek belki obciążonej siłą skupioną a także momentem

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać belkę a dokładniej siły bierne panujące w podporach. Należy pamiętać, że sposób oznaczenia podpory A świadczy o podporze stałej natomiast podpory B o podporze ruchomej.

Podpora przegubowa stała pozwala na obrót końca belki dookoła osi przegubu, nie dopuszcza natomiast przesuwu końca belki ani w kierunku jej osi, ani w kierunku prostopadłym do niej. Reakcja przechodzi tu przez środek przegubu i leży w płaszczyźnie zginania, kierunek jej jest nam jednak nieznany. Zamiast wyznaczania wielkości reakcji i kąta α, który tworzy ona z osią belki, wygodniejsze jest rozłożenie reakcji na dwie składowe – poziomą i pionową wzdłuż osi prostokątnego układu współrzędnych, którego początek przyjmujemy na lewym końcu belki. Wówczas oś x pokrywa się z osią belki, oś y zaś jest skierowana do góry. Mamy wówczas dwie reakcje nieznane pod względem wielkości, lecz o znanych kierunkach. Na podporze przegubowej stałej są zatem zawsze dwie niewiadome Rx i Ry. Schematycznie będziemy przedstawiali podporę przegubową stałą tak jak na rysunku 1 z lewej strony.

Podpora przegubowa ruchoma różni się od podpory stałej tym, że jest umieszczona na rolkach. Pozwala ona na obrót końca belki dookoła osi przegubu oraz na jego przesuw w kierunku końca belki, umożliwia natomiast przesuw w kierunku prostopadłym do osi belki. Reakcja na podporze ruchomej przechodzi przez środek przegubu i jest prostopadła do osi belki. Mamy tu zatem tylko jedną niewiadomą R. Schemat podpory przegubowej ruchomej przedstawiono na rysunku 1 z prawej strony.

Podpora A jest stała, podpora B ruchoma, ponieważ siła P i reakcja R_B są pionowe, zatem i reakcja RA musi być pionowa. Wyznaczamy wartość reakcji R_A i R_B. Równanie momentów względem punktu (podpory) B ma postać:

$$\sum M_B = -R_{Ay} \cdot l + P \cdot \frac{2}{3} l - M = 0 \qquad (6.1)$$

stąd otrzymujemy: $R_{Ay} = \frac{2}{3} P - \frac{M}{l} = 433{,}33N$

Suma siła działających w osi y ma postać:

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - P + R_{By} = 0 \qquad (6.2)$$

stąd otrzymujemy: $R_{By} = P - R_{Ay} = 266{,}67N$

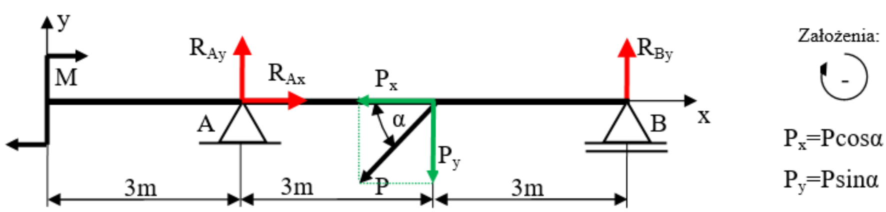
Suma siła działających w osi x ma postać:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} = 0 \qquad (6.3)$$

stąd otrzymujemy: R_{Ax}= 0N

<u>Przykład 2</u>

Wyznaczyć reakcje bierne dla belki przedstawionej na rysunku 2. Dane: $l = 9m, P = 300N, M = 400Nm, \alpha = 30^0$.



Rys. 2. Rysunek belki obciążonej siłą skupioną pod kątem α a także momentem

Schemat postępowania w tym zadaniu jest bardzo zbliżony do poprzedniego przykładu. Kolorem czerwonym i zielonym (rys. 2) zostały wprowadzone oznaczenia sił działających w podporach a także siły składowe obciążenia punktowego P działające zarówno w osi x jak i osi y. Jest to spowodowane faktem, że siła punktowa P działa zarówno w osi x jak i osi y.

Podpora A jest stała, podpora B ruchoma. Wyznaczamy wartość reakcji R_A i R_B. Równanie momentów względem punktu (podpory) A ma postać:

$\sum M_A = -M - P \cdot sin\alpha \cdot 3m + R_{By} \cdot 6m = 0$ (6.4)

Suma siła działających w osi y ma postać:

$\sum F_{iy} = R_{Ay} - P \cdot sin\alpha + R_{By} = 0$ (6.5)

Suma siła działających w osi x ma postać:

$\sum F_{ix} = R_{Ax} - P \cdot cos\alpha = 0$ (6.6)

Z równania na sumę sił działających w osi x wyznaczamy: $R_{Ax} = P \cdot cos\alpha$. Z równania na sumę sił działających w osi y wyznaczamy: $R_{Ay} = P \cdot sin\alpha - R_{By}$. Z kolei z równania momentów względem punktu (podpory) A otrzymujemy:

$R_{By} = \frac{M+P \cdot sin\alpha \cdot 3m}{6m}$ (6.7)

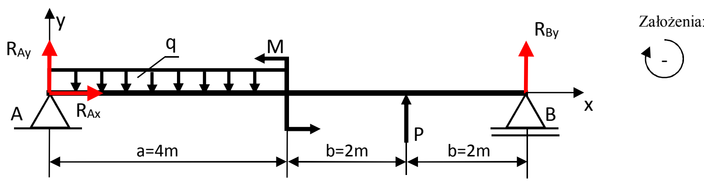
skąd po podstawieniu danych z zadania otrzymujemy finalnie: $R_{Ax} = 259{,}80N$, $R_{Ay} = 8{,}34N$, $R_{By} = 141{,}66N$.

7. Zadania z rozwiązywania belek obciążonych siłami ciągłymi

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania z wyznaczania reakcji biernych (reakcji w więzach) w belkach obciążonych siłami ciągłymi.

<u>Przykład 1</u>

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 1 wyprowadzić wzory na reakcje bierne (podpór). Dane: $q = 40\ kN/m, P = 180kN, M = 40kNm$.



Rys. 1. Rysunek belki obciążonej siłą ciągłą a także momentem

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać belkę a dokładniej siły bierne panujące w podporach. Należy pamiętać, że sposób oznaczenia podpory A świadczy o podporze stałej natomiast podpory B o podporze ruchomej.

Wyznaczamy wartość reakcji R_A i R_B. Równanie momentów względem punktu (podpory) A ma postać:

$$\sum M_A = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M + P \cdot (a + b) + R_{By} \cdot (a + 2b) = 0 \qquad (7.1)$$

a po podstawieniu danych z zadania:

$$-40\frac{kN}{m} \cdot 4m \cdot \frac{4m}{2} + 40kN + 180 \cdot (4m + 2m) + R_{By} \cdot (4m + 4m) = 0$$

stąd otrzymujemy: $R_{By} = -100kN$

Suma siła działających w osi y ma postać:

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - q \cdot a + P + R_{By} = 0 \qquad (7.2)$$

Po podstawieniu danych z zadania:

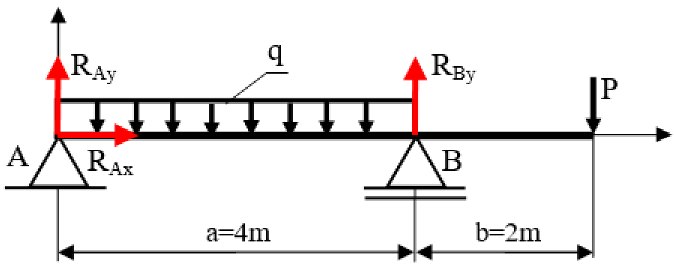
$$R_{Ay} - 40\frac{kN}{m} \cdot 4m + 180kN + (-100kN) = 0$$

stąd otrzymujemy: $R_{Ay} = 80kN$.

Suma siła działających w osi x ma postać:

$\sum F_{ix} = R_{Ax} = 0$ (7.3)
stąd otrzymujemy: $R_{Ax} = 0kN$.

Przykład 2
Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2 wyprowadzić wzory na reakcje bierne (podpór). Dane: $q = 60\ kN/m, P = 120kN$.



Rys. 2. Rysunek belki obciążonej siłą ciągłą i siłą skupioną

Należy pamiętać, że sposób oznaczenia podpory A świadczy o podporze stałej natomiast podpory B o podporze ruchomej.

Wyznaczamy wartość reakcji R_A i R_B. Równanie momentów względem punktu (podpory) A ma postać:

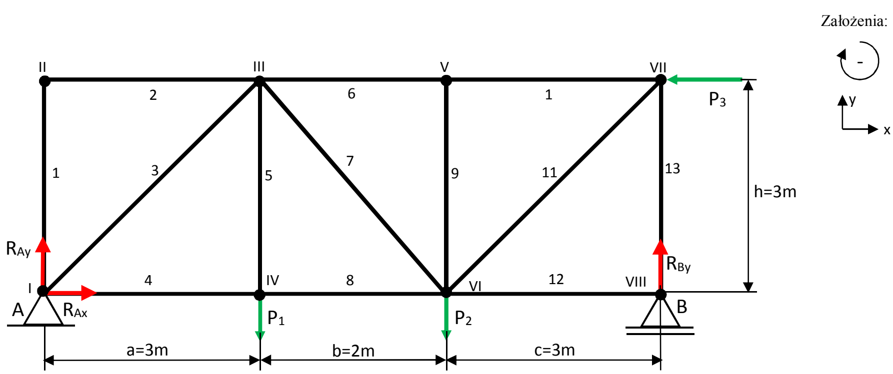
$\sum M_A = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + R_{By} \cdot a - P \cdot (a + b) = 0$ (7.4)
a po podstawieniu danych z zadania:
$$-60\frac{kN}{m} \cdot 4m \cdot \frac{4m}{2} + R_{By} \cdot 4m - 120kN \cdot (4m + 2m) = 0$$
stąd otrzymujemy: $R_{By} = 300kN$
Suma siła działających w osi y ma postać:
$\sum F_{iy} = R_{Ay} - q \cdot a + R_{By} - P = 0$ (7.5)
Po podstawieniu danych z zadania:
$$R_{Ay} - 60\frac{kN}{m} \cdot 4m + 300kN - 120kN = 0$$
stąd otrzymujemy: $R_{Ay} = 60kN$.
Suma siła działających w osi x ma postać:
$\sum F_{ix} = R_{Ax} = 0$ (7.6)
stąd otrzymujemy: $R_{Ax} = 0kN$.

8. Zadania z rozwiązywania kratownic płaskich. Metoda Rittera

W rozdziale tym przedstawione zostaną zadania z wyznaczania reakcji biernych (reakcji w więzach) a także sił w prętach kratownic.

<u>Przykład 1</u>

Dla kratownicy obciążonej jak na rysunku 1 wyprowadzić wzory na reakcje bierne (podpór) a także wyznaczyć wartości sił w 6-7-8 pręcie kratownicy. Dane: $P_1 = 450N, P_2 = 500N, P_3 = 550N$. Wymiary kratownicy przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Rysunek kratownicy z naniesionymi obciążeniami punktowymi

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać kratownicę a dokładniej siły bierne panujące w podporach. Należy pamiętać, że sposób oznaczenia podpory A świadczy o podporze stałej natomiast podpory B o podporze ruchomej. Ponadto ważne jest, aby sprawdzić czy kratownica jest statycznie wyznaczalna, tzn. czy ilość niewiadomych (mamy ich trzy: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}) w zadaniu możemy wyznaczyć analitycznie poprzez napisanie równań równowagi (również mamy ich trzy: $\sum F_{ix}, \sum F_{iy}, \sum M_i$). W tym celu musi zostać spełnione równanie:

$$p = 2 \cdot w - 3 \qquad (8.1)$$

gdzie: p – liczba prętów, w – liczba węzłów. W analizowanym zadaniu liczbami arabskimi oznaczono pręty a rzymskimi węzły. I tak otrzymujemy:
$13 = 2 \cdot 8 - 3$

Równanie jest spełnione więc możemy napisać równania równowagi celem wyznaczenia niewiadomych czyli wartości reakcji w podporach.

Zacznijmy od sumy momentów. Równanie momentów względem punktu (podpory) A ma postać:

$$\sum M_A = -P_1 \cdot a - P_2 \cdot (a+b) + R_{By} \cdot (a+b+c) + P_3 \cdot h = 0 \qquad (8.2)$$

a po podstawieniu danych z zadania:

$$-450N \cdot 3m - 500N \cdot (3m + 2m) + R_{By} \cdot (3m + 2m + 3m) + 550N \cdot 3m = 0$$

stąd otrzymujemy: $R_{By} = 275N$.

Suma siła działających w osi y ma postać:

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - P_1 - P_2 + R_{By} = 0 \qquad (8.3)$$

Po podstawieniu danych z zadania:

$$R_{Ay} - 450N - 500N + 275N = 0$$

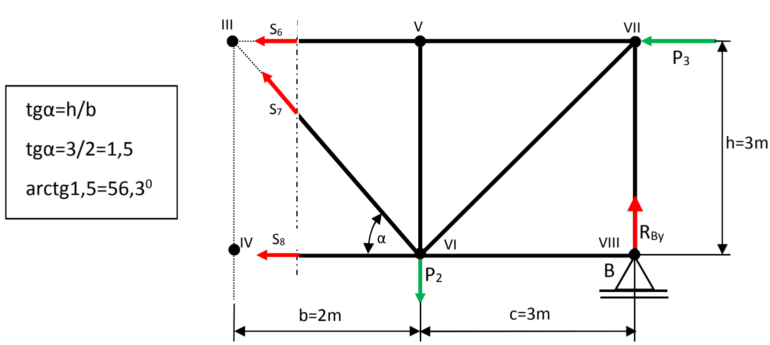
stąd otrzymujemy: $R_{Ay} = 675N$.

Suma siła działających w osi x ma postać:

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} - P_3 = 0 \qquad (8.4)$$

stąd otrzymujemy: $R_{Ax} = 550N$.

W kolejnym kroku aby wyznaczyć siły w prętach 6-7-8 kratownicy płaskiej musimy dokonać myślowego „przecięcia” kratownicy przez interesujące nas pręty 6-7-8 i odrzucić jedną część, np. lewą (rys. 2). Prawa część kratownicy może być w równowadze wówczas, kiedy przyłożymy do przeciętych prętów siły działające wzdłuż ich osi. Siły są zwrócone „na zewnątrz” przecięcia, czyli z założenia są siłami rozciągającymi pręty 6-7-8.



Rys. 2. Rysunek kratownicy z naniesionym przecięciem zgodnie z metodą Rittera

Rozważana część kratownicy (prawa) będzie w spoczynku jeśli zostaną spełnione trzy analityczne równania równowagi (tutaj jest dowolność, mogą być dwa warunki rzutów sił i jeden warunek momentów, bądź dwa warunki momentów i jeden warunek rzutów sił, albo trzy warunki momentów). Staramy się tak dobierać równania aby w każdym z nich występowała jedna niewiadoma.

W analizowanym zadaniu weźmy pod uwagę dwa warunki momentów (względem węzłów III i VI) a także jeden warunek rzutów sił (na oś pionową y).

Zacznijmy od sumy momentów. Równanie momentów względem węzła III ma postać:

$$\sum M_{III} = -P_2 \cdot b - S_8 \cdot h + R_{By} \cdot (b + c) = 0 \tag{8.5}$$

a po podstawieniu danych z zadania:

$-450N \cdot 2m - S_8 \cdot 3m + 275N \cdot (2m + 3m) = 0$, stąd otrzymujemy: $S_8 = 158{,}33N$.

Równanie momentów względem węzła VI ma postać:

$$\sum M_{VI} = S_6 \cdot h + R_{By} \cdot c + P_3 \cdot h = 0 \tag{8.6}$$

a po podstawieniu danych z zadania:

$S_6 \cdot 3m + 275N \cdot 3m + 550N \cdot 3m = 0$, stąd otrzymujemy: $S_6 = 825N$.

Suma sił działających w osi y ma postać:

$$\sum F_{iy} = S_7 \cdot sin\alpha - P_2 + R_{By} = 0 \tag{8.7}$$

Po podstawieniu danych z zadania i wyznaczeniu wartości kąta α:

$S_7 \cdot sin56{,}3 - 500N + 275N = 0$

stąd otrzymujemy: $S_7 = 270{,}4N$.

Wartości jakie otrzymano z obliczeń wynoszą: $S_6 = 825N$, $S_7 = 270{,}4N$, $S_8 = 158{,}33N$. Wszystkie wartości liczbowe są większe od zera a to świadczy, że siły panujące w prętach są siłami rozciągającymi. Jeśliby któryś z wyników przyjął wartości ujemne oznaczałoby to, że siła panująca w pręcie jest siłą ściskającą.

Opisana powyżej metoda nazywa się *metodą Rittera* bądź *metodą przecięć*. Służy ona do jednoczesnego wyznaczania sił w trzech prętach kratownicy. Jeśli chcemy można dokonać kilku przecięć kratownicy rozwiązując to kolejne równania równowagi i wyznaczając kolejne siły w prętach kratownicy. W metodzie Rittera należy jednak pamiętać o kilku czynnościach jakie muszą zostać spełnione aby korzystać z powodzeniem z tejże metody. Oto one[6]:

- wyznaczamy wykreślnie bądź analitycznie reakcje występujące w podporach,
- przecinamy kratownicę przez 3 pręty, dla których chcemy określić siły wewnętrzne,

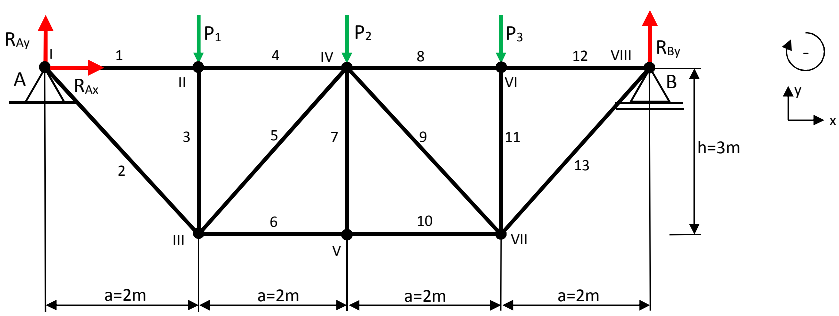
[6] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

- odrzucamy jedną część kratownicy (zaleca się aby była to ta, na którą działa więcej sił zewnętrznych),
- zakładamy, że przecięte pręty są rozciągane trzema siłami zewnętrznymi,
- dla tych sił jak i pozostałych wynikających z analizowanej części kratownicy układamy trzy analityczne warunki równowagi,
- z równań tych wyznaczamy trzy niewiadome, przy czym, jeśli któryś wynik będzie ujemny tzn., że pręt w którym ta siła działa jest prętem ściskanym.

Ponadto należy pamiętać, że jednocześnie możemy przeciąć tylko 3 pręty (dlatego, że możemy napisać 3 równania analityczne równowagi). Pręty przecięte nie mogą wychodzić z jednego węzła gdyż siły te tworzyłyby układ sił zbieżnych – dla takiego płaskiego układu wystarczą 2 analityczne równania równowagi.

Przykład 2

Rozwiąż kratownicę metodą Rittera (wyznacz siły w prętach 4-5-6). Siły czynne wynoszą $P_1 = P_2 = P_3 = 500N$. Wymiary kratownicy przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Rysunek kratownicy z naniesionymi obciążeniami punktowymi

Na wstępie należy sprawdzić czy zadanie jest statycznie wyznaczalne. W tym celu musi zostać spełnione równanie:

$p = 2 \cdot w - 3$

gdzie: p – liczba prętów, w – liczba węzłów. W analizowanym zadaniu liczbami arabskimi oznaczono pręty a rzymskimi węzły. I tak otrzymujemy:

$13 = 2 \cdot 8 - 3$

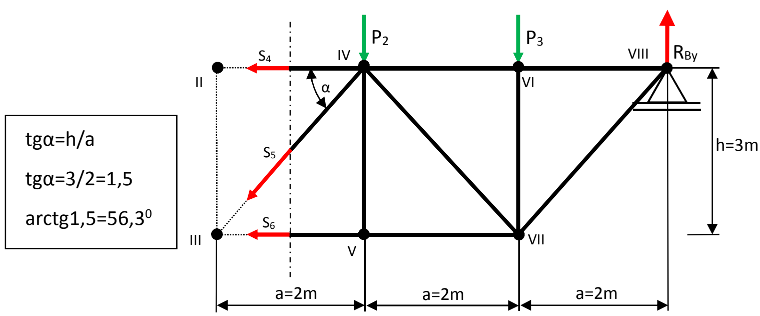
Równanie jest spełnione więc możemy napisać równania równowagi celem wyznaczenia niewiadomych czyli wartości reakcji w podporach.

Zacznijmy od sumy momentów. Równanie momentów względem punktu (podpory) A ma postać:

$$\sum M_A = -P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot 3a + R_{By} \cdot 4a = 0 \tag{8.8}$$

a po podstawieniu danych z zadania:
$-500N \cdot 2m - 500N \cdot 4m - 500N \cdot 6m + R_{By} \cdot 8m = 0$
stąd otrzymujemy: $R_{By} = 750N$.
Suma siła działających w osi y ma postać:
$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - P_1 - P_2 - P_3 + R_{By} = 0 \quad (8.9)$$
Po podstawieniu danych z zadania:
$R_{Ay} - 500N - 500N - 500N + 750N = 0$
stąd otrzymujemy: $R_{Ay} = 750N$.
Suma siła działających w osi x ma postać:
$$\sum F_{ix} = R_{Ax} = 0 \quad (8.10)$$
stąd otrzymujemy: $R_{Ax} = 0N$.

W kolejnym kroku aby wyznaczyć siły w prętach 4-5-6 kratownicy płaskiej musimy dokonać myślowego „przecięcia” kratownicy przez interesujące nas pręty 4-5-6 i odrzucić jedną część, np. lewą (rys. 4). Prawa część kratownicy może być w równowadze wówczas, kiedy przyłożymy do przeciętych prętów siły działające wzdłuż ich osi. Siły są zwrócone „na zewnątrz” przecięcia, czyli z założenia są siłami rozciągającymi pręty 4-5-6.



Rys. 4. Rysunek kratownicy z naniesionym przecięciem zgodnie z metodą Rittera

W analizowanym zadaniu weźmy pod uwagę dwa warunki momentów (względem węzłów III i IV) a także jeden warunek rzutów sił (na oś pionową y). Zacznijmy od sumy momentów. Równanie momentów względem węzła III ma postać:
$$\sum M_{III} = S_4 \cdot h - P_2 \cdot a - P_3 \cdot 2a + R_{By} \cdot 3a = 0 \quad (8.11)$$
a po podstawieniu danych z zadania:
$S_4 \cdot 3m - 500N \cdot 2m - 500N \cdot 4m + 750N \cdot 6m = 0$, stąd otrzymujemy: $S_4 = -1500N$.
Równanie momentów względem węzła IV ma postać:
$$\sum M_{IV} = -S_6 \cdot h - P_3 \cdot a + R_{By} \cdot 2a = 0 \quad (8.12)$$

a po podstawieniu danych z zadania:
$-S_6 \cdot 3m - 500N \cdot 2m + 750N \cdot 4m = 0$, stąd otrzymujemy: $S_6 = 666{,}6N$.
Suma siła działających w osi y ma postać:
$$\sum F_{iy} = -S_5 \cdot sin\alpha - P_2 - P_3 + R_{By} = 0 \qquad (8.13)$$
Po podstawieniu danych z zadania i wyznaczeniu wartości kąta α:
$-S_5 \cdot sin56{,}3 - 500N - 500N + 750N = 0$
stąd otrzymujemy: $S_5 = -300{,}5N$.

Wartości jakie otrzymano z obliczeń wynoszą: $S_4 = -1500N$, $S_5 = -300{,}5N$, $S_6 = 666{,}6N$. Siły w prętach 4 i 5 mają wartości ujemne co oznacza, że siły panujące w prętach są siłami ściskającymi.

9. Zadania z rozwiązywania kratownic płaskich. Metoda równoważenia węzłów

Przy zastosowaniu metody równoważenia węzłów obliczenie sił występujących w każdym z prętów kratownicy polega na rozpatrzeniu równowagi każdego węzła kratownicy. Każdy węzeł jest obciążony płaskim zbieżnym układem sił, dla którego należy napisać dwa równania równowagi (sumy rzutów sił na przyjęte osie płaskiego układu współrzędnego).

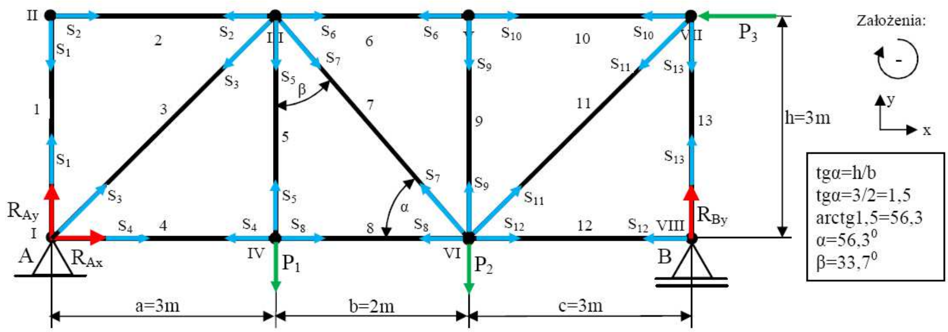
Przy rozwiązywaniu kratownic płaskich dobrze jest stosować się do następujących wytycznych[7]:

- sprawdzić czy kratownica jest statycznie wyznaczalna,
- narysować od węzłów zwroty sił wewnętrznych w prętach. Założenie wstępne jest takie, że wszystkie pręty są rozciągane. Jeśli w wyniku wyjdzie liczba ujemna znaczy to, że dany pręt jest ściskany.
- obliczyć reakcje podpór dla całej kratownicy przy użyciu równań równowagi,
- dokonać myślowego wycięcia węzła kratownicy i dla niego napisać równania równowagi (należy zacząć od węzła, w którym występują dwie niewiadome),
- rozwiązać układy równań równowagi dla kolejnych węzłów.

Przykład 1

Dla kratownicy obciążonej jak na rysunku 1 wyprowadzić wzory na reakcje bierne (podpór) a także wyznaczyć wartości sił w prętach kratownicy. Dane: $P_1 = 450N, P_2 = 500N, P_3 = 550N$. Wymiary kratownicy przedstawiono na rys. 1.

[7] Jan Misiak, *Mechanika Techniczna*, tom 1, WNT.



Rys. 1. Rysunek kratownicy z naniesionymi obciążeniami punktowymi

Zadanie to zostało omówione w poprzednim rozdziale gdzie omawiana była metoda Rittera. Zostało również na początku sprawdzone czy jest statycznie wyznaczalne. Dlatego przytoczymy tylko wyniki, wraz z wyliczonymi siłami w prętach 6-7-8 przy użyciu wspomnianej wyżej metody. Oto one:
$R_{By} = 275N$, $R_{Ay} = 675N$, $R_{Ax} = 550N$.
$S_6 = 825N$, $S_7 = 270{,}4N$, $S_8 = 158{,}33N$.

Metoda równoważenia węzłów stanowi doskonałe uzupełnienie metody Rittera. Jak wspomniano na początku polega na analizowaniu każdego z węzłów osobno. Warto zacząć od węzła, w którym występują tylko dwie niewiadome.
Zacznijmy od węzła IV:
$\sum F_{iy} = S_5 - P_3 = 0$, stąd $S_5 = 550N$
$\sum F_{ix} = S_8 - S_4 = 0$, stąd $S_4 = S_8 = 158{,}3N$
Węzeł III:
$\sum F_{iy} = -S_7 \cdot cos\alpha - S_5 - S_3 \cdot cos45 = 0$, stąd $S_3 = -1095{,}8N$
Węzeł I:
$\sum F_{iy} = R_{Ay} + S_1 + S_3 \cdot cos45 = 0$, stąd $S_1 = 99{,}8N$
Węzeł III:
$\sum F_{ix} = -S_2 + S_6 + S_7 \cdot cos\alpha - S_3 \cdot cos45 = 0$, stąd $S_2 = 1749{,}8N$
Węzeł V:
$\sum F_{ix} = S_{10} - S_6 = 0$, stąd $S_{10} = S_6 = 825N$
Węzeł VII:
$\sum F_{ix} = -P_3 - S_{10} - S_{11} \cdot cos45 = 0$, stąd $S_{11} = -1944{,}5N$
Węzeł VIII:
$\sum F_{iy} = R_{By} + S_{13} = 0$, stąd $S_{13} = R_{By} = -275N$
Węzeł VI:
$\sum F_{ix} = S_{12} + S_{11} \cdot cos45 - S_7 \cdot cos\alpha - S_8 = 0$, stąd $S_{12} = 1683N$
$\sum F_{iy} = S_9 + S_{11} \cdot sin45 + S_7 \cdot sin\alpha = 0$, stąd $S_9 = 1150N$

Podsumowując otrzymujemy wartości sił w prętach kratownicy:

L.p.	Wartość siły [N]	L.p.	Wartość siły [N]
1	99,8	8	158,33
2	1749,8	9	1150
3	-1095,8	10	825
4	158,33	11	-1944,5
5	550	12	1683
6	825	13	-275
7	270,4		

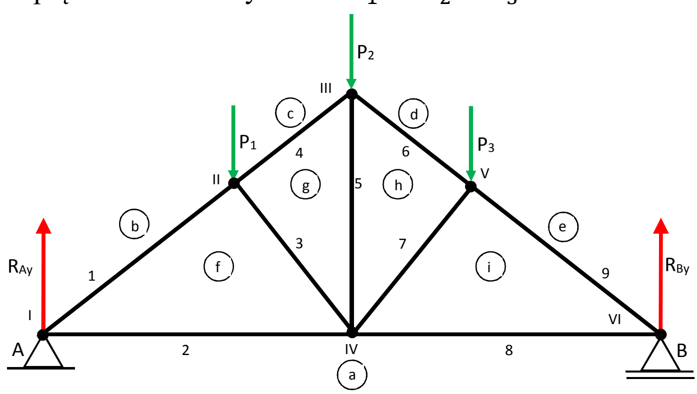
W metodzie równoważenia węzłów należy analizować na bieżąco wszystkie węzły, z których możemy w sposób możliwie najprostszy wyznaczyć niewiadome wartości sił w prętach. Niestety nie ma typowego postępowania w zastosowaniu tej metody a jedynie pewne wytyczne ułatwiające jej stosowanie.

10. Zadania z rozwiązywania kratownic płaskich. Metoda Cremony

W rozdziale tym przedstawione zostanie zadanie z wyznaczania wartości sił w prętach kratownicy przy użyciu metody Cremony[8].

<u>Przykład 1</u>

Dla symetrycznej kratownicy obciążonej jak na rysunku 1 wyznaczyć wartości sił w prętach kratownicy. Dane: $P_1 = P_2 = P_3 = 200N$.



Rys. 1. Rysunek kratownicy z naniesionymi obciążeniami punktowymi

Należy pamiętać, że sposób oznaczenia podpory A świadczy o podporze stałej natomiast podpory B o podporze ruchomej. Ponadto ważne jest, aby sprawdzić czy kratownica jest statycznie wyznaczalna, tzn. czy ilość niewiadomych (mamy ich trzy: R_{Ax}, R_{Ay}, R_{By}) w zadaniu możemy wyznaczyć analitycznie poprzez napisanie równań równowagi (również mamy ich trzy: $\sum F_{ix}, \sum F_{iy}, \sum M_i$). W tym celu musi zostać spełnione równanie:

$p = 2 \cdot w - 3$

gdzie: p – liczba prętów, w – liczba węzłów. W analizowanym zadaniu liczbami arabskimi oznaczono pręty a rzymskimi węzły. I tak otrzymujemy:

$9 = 2 \cdot 6 - 3$

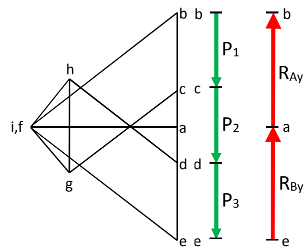
Równanie jest spełnione więc możemy zastosować metodę Cremony celem wyznaczenia sił w prętach kratownicy.

---

[8] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

Z treści zadania i rysunku wynika, że kratownica jest symetryczna a obciążenie działające tylko w osi y. Jeśli występuje taka sytuacja wówczas reakcje bierne występujące w podporach będą sobie równe z uwagi na symetrię kratownicy jak i jednakowe obciążenie i wynosić będą: $R_{Ay} = R_{By} = 300N$. Reakcję R_{Ax} pomijamy z uwagi na brak oddziaływania sił punktowych w osi x. Jej wartość wynosi $R_{Ax} = 0N$. Przyjęto skalę:1:2.

Oznaczenie	Siła	N
b-f	F_{S1}	-520
a-f	F_{S2}	+420
f-g	F_{S3}	-170
c-g	F_{S4}	-405
g-h	F_{S5}	+280
d-h	F_{S6}	-405
h-i	F_{S7}	-170
a-i	F_{S8}	+420
e-i	F_{S9}	-520



Rys. 2. Plan sił Cremony wraz z wyznaczonymi siłami w prętach kratownicy

Siły zewnętrzne czynne i bierne $(P_1, P_2, P_3, R_{Ay}, R_{By})$ dzielą obszar otaczający kratownicę na części oznaczone kolejno literami alfabetu (od a do d). Nazywane są one zewnętrznymi polami kratownicy. Pręty kratownicy wyznaczają również tzw. pola wewnętrzne oznaczone kolejno literami alfabetu (od f do i). Jeśli teraz zobaczymy na oznaczenia kratownicy przekonamy się, że każda siła w kratownicy jest granicą dwóch sąsiadujących ze sobą pól.

Celem wykreślenia planu sił należy się trzymać raz obranej kolejności rozpatrywania sił w poszczególnych prętach kratownicy, wokół rozważanego węzła. Przyjmijmy ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara. Przyjęło się aby wyznaczyć najpierw wielobok sił zewnętrznych, które działają na kratownicę a potem dopiero wyznaczenie na planie sił tych punktów, które odpowiadają polom wewnętrznym kratownicy.

Zaczynamy od reakcji R_{Ay}. W węźle I musimy przejść z pola a przez siłę R_{Ay} do pola b, stąd przez siłę w pręcie 1 do pola f. W kolejnym kroku z pola f przez siłę w pręcie 2 z powrotem do pola a. W kolejnym kroku z punktu b rysujemy kierunek równoległy do pręta 1, natomiast z punktu a kierunek równoległy do pręta 2. W miejscu przecięcia się linii leży szukany punkt f. Zgodnie z zaznaczeniem na rys. 1 węzłowi I kratownicy odpowiada wielobok

a, b, f na planie sił Cremony (rys. 2). Analizując w dalszej kolejności dookoła węzeł II (rys 1) (poprzez pola b, c, g, f) odnajdziemy na planie sił wielobok b, c, g, f (rys. 2), który odpowiada temu węzłowi. Analizując tym sposobem pozostałe węzły stworzymy plan sił Cremony dla całej kratownicy. Warto zauważyć, że kratownica i utworzony dla niej plan sił Cremony są figurami, w których:

- każdemu prętowi kratownicy odpowiada równoległy do niego odcinek sił,
- każdemu węzłowi kratownicy odpowiada zamknięty wielobok na planie sił Cremony,
- każdemu polu na kratownicy odpowiada punkt na planie.

Wartości sił wewnętrznych w prętach wyznaczymy mierząc ich długości i mnożąc przez przyjętą przez nas skalę. W kolejnym kroku należy określić zwrot sił, czyli czy dany pręt jest prętem ściskanym (siły działające do węzłów) czy może jest prętem rozciąganym (siły działające od węzłów). Szukamy więc tych zwrotów sił wewnętrznych analizując po kolei pręty. Pręt 1 jest pomiędzy polem b i f – zgodnie z przyjętym kierunkiem analizy. Należy teraz spojrzeć na plan sił Cremony. Od punktu b do punktu f poruszamy się w dół. Oznacza to, że sile w pręcie 1 należy w węźle I dać zwrot w dół, czyli w kierunku węzła, co oznacza, że pręt ten jest prętem ściskanym. Pręt 2 jest pomiędzy polami f i a. Zgodnie z planem sił Cremony, od punktu f do punktu a poruszamy się w prawo, czyli w węźle I pręt ma strzałkę w prawo, czyli od węzła – oznacza to, że pręt jest rozciągany. Postępując analogicznie z pozostałymi siłami i węzłami zdefiniujemy znaki sił w planie sił Cremony tak jak to uczyniono w tabelce zamieszczonej przy rys. 2.

11. Zadania z ruchów ciała. Kinematyka

W rozdziale tym przedstawione zostaną klasyczne zadania z kinematyki punktu materialnego.

Przykład 1

Dane są równania ruchu punktu: $x = 4 + 3t^2, y = 2 + 6t^2$. Oblicz prędkość, przyspieszenie, tor punktu, początek toru i równanie ruchu punktu po torze.
Obliczyć prędkość, przyspieszenie, tor punktu, początek toru i równanie ruchu punktu po torze.

1. Prędkość wyznaczamy przez pierwszą pochodną z równań ruchu:
   $\dot{x} = v_x = 6t, \dot{y} = v_y = 12t$
   $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(6t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{36t^2 + 144t^2}$$
   $$v = \sqrt{180t^2} = 13{,}4t^2$$
2. Przyspieszenie wyznaczamy przez drugą pochodną z równań ruchu:
   $\ddot{x} = a_x = 6, \ddot{y} = a_y = 12$
   $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144} = 13{,}4\frac{m}{s^2}$$
3. Równanie toru:
   $x = 4 + 3t^2, y = 2 + 6t^2$

Wyznaczamy wartość t z równania pierwszego i podstawiamy do równania drugiego:

$$t = \sqrt{\frac{x-4}{3}}\ ,\ \ y = 2 + 6 \cdot \frac{x-4}{3} = 2 + 2x - 8 = 2x - 6$$

4. Początek toru:
   $x = 4 + 3t^2, y = 2 + 6t^2$

dla $t = 0, \quad x_0 = 4\ \ y_0 = 2$

5. Równanie ruchu punktu:
   $$s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
   $$s = \sqrt{(4 + 3t^2 - 4)^2 + (2 + 6t^2 + 2)^2} = \sqrt{(3t^2)^2 + (6t^2)^2}$$
   $$s = \sqrt{9t^4 + 36t^4} = \sqrt{45t^4} = 6{,}7t^2$$

Przykład 2

Po zakręcie o promieniu $r = 500m$ porusza się samochód ruchem jednostajnie opóźnionym. Długość zakrętu $s = 400m$. Przy wjeździe w zakręt prędkość samochodu wynosiła $v_1 = 20\frac{m}{s}$, przy opuszczaniu zakrętu $v_2 = 10\frac{m}{s}$. Obliczyć przyspieszenie styczne, normalne i całkowite w chwili opuszczania zakrętu $(a_t, a_n, a = ?)$.

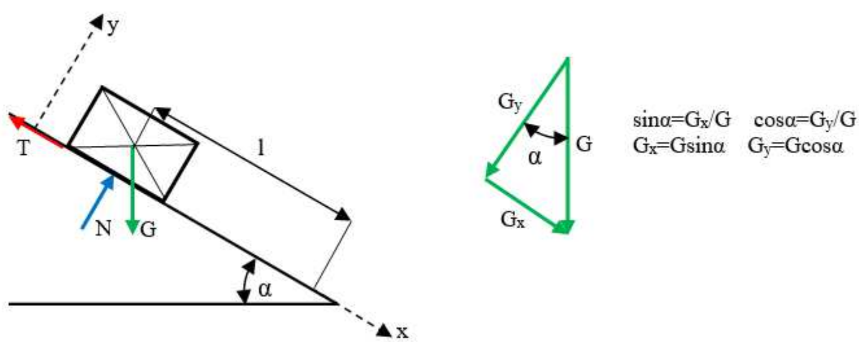
1. Obliczanie przyspieszenia normalnego:
$$a_n = \frac{v_2^2}{r} = \frac{10^2}{500} = 0{,}2\frac{m}{s^2}$$
2. Obliczanie przyspieszenia stycznego:
$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t} \qquad s = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot t$$
Z równania na drogę wyznaczamy wartość t i podstawiamy do równania na przyspieszenie styczne:
$$t = \frac{2s}{v_2 + v_1}$$
$$a_t = (v_2 - v_1) \cdot \frac{v_2 + v_1}{2s} = -0{,}375\frac{m}{s^2}$$
3. Obliczanie przyspieszenia całkowitego:
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(0{,}2)^2 + (-0{,}375)^2} = 0{,}425\frac{m}{s^2}$$

12. Zadania z formułowania dynamicznych równań ruchu. Dynamika

W rozdziale tym przedstawione zostaną klasyczne zadania z dynamiki ruchu punktu materialnego.

Przykład 1

Ciało o masie m zjeżdża po równi pochyłej do poziomu pod kątem α (rys. 1). Wyznaczyć prędkość ciała, w chwili gdy przebędzie ono drogę l, jeżeli współczynnik tarcia o równię wynosi μ. Dane: $l = 2m, \mu = 0{,}1, \alpha = 30^0, m = 2kg, g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.



Rys. 1. Rysunek do przykładu 1

Dynamika jest działem mechaniki poświęconym badaniu zależności pomiędzy ruchem ciał materialnych, a siłami na te ciała działającymi. Należy przypomnieć sobie prawa Newtona.

Pierwsze prawo Newtona: Punkt materialny, na który nie działa żadna siła, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Pierwsze prawo nazywane jest także prawem bezwładności, gdyż wyraża własność punktu materialnego polegającą na zachowaniu stanu ruchu jednostajnego lub stanu spoczynku, w przypadku gdy na punkt ten nie działa żadna siła. Ta ogólna własność materii nosi właśnie miano bezwładności.

Drugie prawo Newtona: Przyspieszenie punktu materialnego jest proporcjonalne do siły działającej na ten punkt i ma kierunek siły.

Niech F oznacza siłę działającą na punkt materialny, a jest to przyspieszenie tego punktu wywołane przez wspomnianą siłę. Z drugiego prawa Newtona wynika następujące równanie, zwane równaniem dynamicznym ruchu punktu materialnego:

$m \cdot a = F$

W równaniu tym m oznacza masę, która w powyższym równaniu odgrywa rolę stałego współczynnika.

Trzecie prawo Newtona: Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych są równe co do wartości bezwzględnej i są przeciwnie skierowane wzdłuż prostej łączącej oba punkty.

Niuton przedstawia siłę, która ciału o masie $1kg$ nadaje przyspieszenie równe $1\frac{m}{s^2}$.

$1niuton = 1N = 1kg \cdot 1\frac{m}{s^2} = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$

Napiszmy ogólne dynamiczne równania ruchu dla ruchu postępowego:

$$\sum F_{ix} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot a_x \tag{12.1}$$

$$\sum F_{iy} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = m \cdot a_y \tag{12.2}$$

$$\sum F_{iz} = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = m \cdot a_z \tag{12.3}$$

Przekładając je na analizowany przykład otrzymujemy:

$\sum F_{ix} = Gsin\alpha - T = m \cdot a$

$\sum F_{iy} = N - Gcos\alpha = 0$

Z drugiego równania otrzymamy: $N = Gcos\alpha$. Pamiętając, że $T = \mu N$ i podstawiając pod to równanie $N = Gcos\alpha$ otrzymamy: $T = \mu Gcos\alpha$. Podstawiając teraz otrzymane równanie do równania na $\sum F_{ix}$ otrzymamy:

$Gsin\alpha - \mu Gcos\alpha = m \cdot a$

W zadaniu podana jest masa ciała natomiast na rys. 1 posługujemy się zapisem ciężaru G. Musimy wobec tego przemnożyć masę przez przyspieszenie grawitacyjne otrzymując zapis: $G = m \cdot g$. Podstawiając teraz to równanie do rówania powyższego otrzymamy:

$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha = m \cdot a$

Dzieląc obustronnie przez m otrzymujemy ostatecznie wzór na przyspieszenie:

$mgsin\alpha - \mu mgcos\alpha = m \cdot a \quad /m$

$g(sin\alpha - \mu cos\alpha) = a$

Wzór na drogę dla naszego przykładu wynosi:

$s = l = \frac{at^2}{2}$ skąd otrzymamy: $t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$.

Wzór ogólny na wyznaczenie prędkości zapisujemy: $v = a \cdot t$. Podstawiając pod wartość t wcześniej wyznaczony zapis otrzymamy:

$v = a \cdot \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2al}$

Podstawiając do powyższego wzoru w miejsce przyspieszenia a równanie wyznaczone na początku zadania na wartość przyspieszenia a otrzymamy prędkość v:

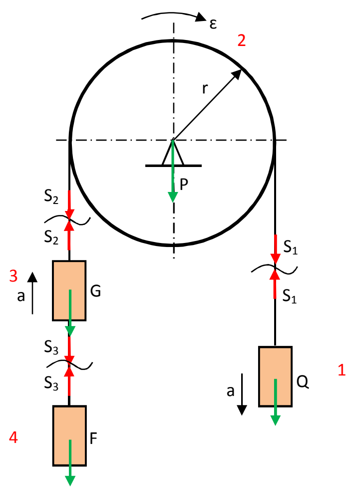
$v = \sqrt{2lg(sin\alpha - \mu cos\alpha)} = 4\frac{m}{s}$

Dla $l = 2m$ otrzymamy czas t:

$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g(sin\alpha - \mu cos\alpha)}} = 1s$

Przykład 2

Dla układu jak na rys. 2 obliczyć przyspieszenie liniowe a ciężarków. Dane: $r = 0{,}5m, G = 200N, F = 300N, Q = 800N, P = 1000N, g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.



Rys. 2. Rysunek do przykładu 2

W celu rozwiązania zadania należy postępować wg poniższych wskazówek:

- rozcinamy układ na podukłady, w miejscu przecięć przykładamy siły,
- wypisujemy dynamiczne równania równowagi dla każdego podukładu oddzielnie. Lewa strona równania zawsze dodatnia. Znak przy siłach jest dodatni jeśli kierunek działania siły jest zgodny z kierunkiem ruchu,
- składamy wszystkie równania w jeden układ równań i po lewej stronie przekształcamy przyspieszenie kątowe na liniowe,
- równania mnożymy lub dzielimy w taki sposób aby po prawej stronie niewiadome S_1, S_2 i S_3 skróciły się przy zsumowaniu wszystkich równań.

Przypomnijmy wzór ogólny: $\sum F = m \cdot a$

<u>Analizując podukład 1 otrzymamy:</u>

$\sum F = m \cdot a$

$m = \frac{Q}{g}$

$\frac{Q}{g} a = Q - S_1$

<u>Analizując podukład 2 otrzymamy</u> (dla ruchu obrotowego, dla koła $J = \frac{mr^2}{2}$):

$J\varepsilon = \sum M$

$\frac{mr^2}{2} \varepsilon = \sum M$

$\frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \varepsilon = S_1 r - S_2 r$

stąd:

$\frac{Pr^2 \varepsilon}{2g} = S_1 r - S_2 r$

<u>Analizując podukład 3 otrzymamy:</u>

$\sum F = m \cdot a$

$\frac{G}{g} a = S_2 - G - S_3$

<u>Analizując ostatni podukład 4 otrzymamy:</u>

$\sum F = m \cdot a$

$\frac{F}{g} a = S_3 - F$

Zgodnie ze wskazówkami z początku zadania składamy wszystkie równania w jeden układ równań:

$$\begin{cases} \frac{Q}{g} a = Q - S_1 \\ \frac{Pr^2 \varepsilon}{2g} = S_1 r - S_2 r \ldots\ldots / r \quad \varepsilon = \frac{a}{r} \\ \frac{G}{g} a = S_2 - G - S_3 \\ \frac{F}{g} a = S_3 - F \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{Q}{g} a = Q - S_1 \\ \frac{Pr\frac{a}{r}}{2g} = S_1 - S_2 \\ \frac{G}{g} a = S_2 - G - S_3 \\ \frac{F}{g} a = S_3 - F \\ \hline \frac{Qa}{g} + \frac{Pa}{2g} + \frac{Ga}{g} + \frac{Fa}{g} = Q - G - F \end{array}$$

Przekształcając powyższe zbiorcze równanie celem wyznaczenia przyspieszenia a otrzymujemy ostatecznie:

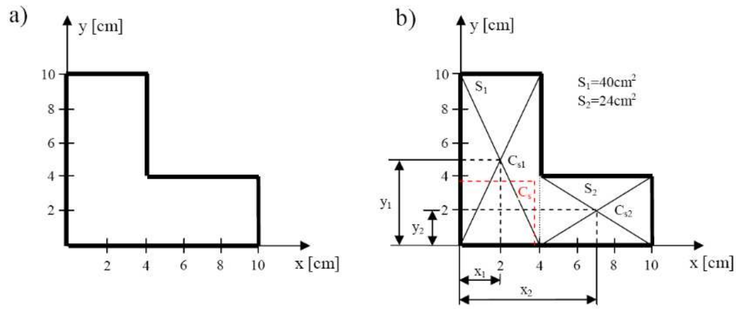
$$a = \frac{(Q - G - F)2g}{2Q + P + 2G + 2F} = \frac{(800 - 200 - 300) \cdot 2 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 800 + 1000 \cdot +2 \cdot 200 + 2 \cdot 300} = 1{,}635 \frac{m}{s^2}$$

13. Określanie momentów bezwładności. Twierdzenie Steinera w zadaniach

W rozdziale tym przedstawione zostanie zadanie z wyznaczania środków ciężkości figur płaskich wraz z wykorzystaniem twierdzenia Steinera. Do tego celu posłużymy się przykładem z rozdziału 5 wzbogaconego o zastosowanie wyżej wspomnianego twierdzenia.

<u>Przykład 1</u>

Wyznaczyć środek ciężkości $C_s(x_0, y_0)$ figury płaskiej przedstawionej na rysunku 1. Ponadto wyznaczyć momenty bezwładności centralne i względem osi przesuniętej l.



Rys. 1. Rysunek figury złożonej (a) jak i po podziale na figury proste (b)

Przystępując do rozwiązania zadania należy najpierw dobrze zrozumieć jego treść. Staramy się na podstawie treści jak i wiedzy teoretycznej nabytej podczas zajęć wykładowych poprawnie opisać rysunek i na jego podstawie podstawić odpowiednie wartości do wzorów. Rys. 1a przedstawia figurę złożoną z dwóch prostokątów. Środki ich ciężkości znajdują się w środkach symetrii tych prostokątów (C_{s1}, C_{s2}) a pola ich powierzchni wynoszą odpowiednio S_1 i S_2 – rys. 1b. Celem wyznaczenia środka ciężkości figury płaskiej stosujemy wzory[9]:

$$x_0 = \frac{\sum(S_i \cdot x_i)}{\sum S_i} \tag{13.1}$$

$$y_0 = \frac{\sum(S_i \cdot y_i)}{\sum S_i} \tag{13.2}$$

---

[9] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

stąd:
$x_0 = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S_1 + S_2} = 3{,}875cm$
$x_0 = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2} = 3{,}875cm$
Środek ciężkości bryły złożonej ma współrzędne $C_s(3{,}875cm, 3{,}875cm)$ – oznaczony kolorem czerwonym na rys. 1b.

Analizując powyższe wzory na wyznaczenie środka ciężkości figury płaskiej należy wspomnieć co oznaczają wyrażenia w nich użyte. Mamy więc:
$\sum(S_i \cdot x_i)$ – moment statyczny pola przekroju względem osi y,
$\sum(S_i \cdot y_i)$ – moment statyczny pola przekroju względem osi x.

Przekształcając te wyrażenia i uwzględniając, że $\sum S_i = S$ (pole całego przekroju) można napisać[10]:

$$\sum(S_i \cdot x_i) = S \cdot x_0 \qquad (13.3)$$
$$\sum(S_i \cdot y_i) = S \cdot y_0 \qquad (13.4)$$

Powyższe zależności wypowiadamy następująco:
Moment statyczny pola przekroju względem dowolnej osi jest równy iloczynowi pola tego przekroju i współrzędnej środka ciężkości tego pola przekroju względem danej osi. Jeżeli obrana oś przechodzi przez środek ciężkości pola przekroju ($\mathrm{x}_0 = \mathrm{y}_0 = 0$) wówczas moment statyczny względem tej osi jest równy zeru. Inaczej można ująć to następująco:
Moment statyczny dowolnej figury względem osi przechodzącej przez środek ciężkości tej figury jest równy zeru.

W przyjętym układzie współrzędnych figura płaska ma trzy momenty bezwładności: dwa osiowe (względem obu osi układu) jak i jeden biegunowy (względem początku układu współrzędnych). Można to zapisać w następujący sposób:

$$J_x = \sum(\Delta S_i \cdot y_i^2) \qquad (13.5)$$
$$J_y = \sum(\Delta S_i \cdot x_i^2) \qquad (13.6)$$
$$J_0 = \sum(\Delta S_i \cdot r_i^2) \qquad (13.7)$$

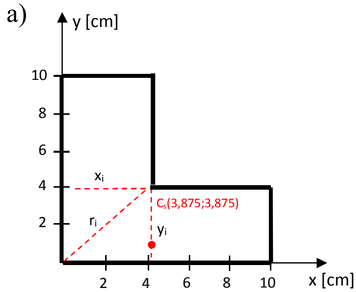
ale: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$
stąd:

$$J_0 = \sum\left[\Delta S_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right)\right] = \sum\left(\Delta S_i \cdot x_i^2\right) + \sum\left(\Delta S_i \cdot y_i^2\right) \qquad (13.8)$$

czyli: $J_0 = J_x + J_y$
Biegunowy moment bezwładności jest sumą osiowych momentów bezwładności względem dwóch prostopadłych osi przechodzących przez ten biegun.

[10] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

Postaramy się teraz dla figury złożonej z przykładu 1 wyznaczyć momenty bezwładności w prostokątnym układzie współrzędnych (rys. 2).



Rys. 2. Rysunek figury złożonej z wyznaczonym środkiem ciężkości

Znając współrzędne środka ciężkości możemy wyznaczyć momenty bezwładności naszej figury płaskiej:

$$J_x = \sum(\Delta S_i \cdot y_i^2) = 64cm^2 \cdot 3{,}875cm = 248cm^3$$

$$J_y = \sum(\Delta S_i \cdot x_i^2) = 64cm^2 \cdot 3{,}875cm = 248cm^3$$

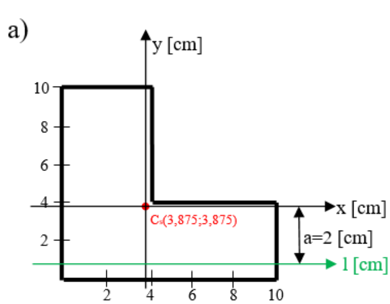
Jak widzimy momenty bezwładności zarówno względem osi x jak i y przyjmują identyczną wartość wynoszącą $J_x = J_y = 248cm^3$.

Biegunowy moment bezwładności wyniesie wówczas:

$$J_0 = J_x + J_y = 248cm^3 + 248cm^3 = 496cm^3$$

Wyznaczanie momentów bezwładności względem osi układu współrzędnych przechodzących przez środek ciężkości figury szczególnie jest ważne w wytrzymałości materiałów.

Znając moment dowolnej figury płaskiej względem osi środkowej (nie musi być wcale główna), można wyznaczyć moment bezwładności tejże figury względem innej osi równoległej (rys. 3).



Rys. 3. Rysunek figury złożonej z wyznaczonym środkiem ciężkości a także dodatkowa oś równoległa l

Moment bezwładności względem osi l, która jest równoległa do osi x wynosi:

$$J_l = \sum[\Delta S_i \cdot (y_i + a)^2] \tag{13.9}$$

stąd:

$$J_l = \sum[\Delta S_i \cdot (y_i + a)^2] = \sum\left(\Delta S_i \cdot y_i^2\right) + a^2 \sum \Delta S_i + 2a \sum(\Delta S_i \cdot y_i)$$

ale:

$\sum\left(\Delta S_i \cdot y_i^2\right) = J_x$; $\sum \Delta S_i = S$; $\sum(\Delta S_i \cdot y_i) = 0$ jako, że jest to moment statyczny względem osi x przechodzącej przez środek ciężkości. Ostatecznie można zapisać:

$$J_l = J_x + S \cdot a^2 \tag{13.10}$$

Powyższy wzór stanowi treść twierdzenia Steinera[11]: *moment bezwładności figury płaskiej względem osi równoległej do osi środkowej jest równy momentowi bezwładności tej figury względem jej osi środkowej, zwiększonemu o iloczyn pola tej figury i kwadratu odległości pomiędzy osiami*.

Z twierdzenia tego wynika, że spośród wszystkich osi równoległych najmniejszy moment bezwładności jest względem tej osi, która przechodzi przez środek ciężkości. Im bardziej jest oddalona oś momentu od środka ciężkości, tym większa jest wartość momentu bezwładności figury względem tej osi. W przypadku analizowanego zadania moment bezwładności względem osi l będzie wynosił:

$$J_l = 248cm^3 + 64cm^2 \cdot 2^2cm = 248cm^3 + 256cm^3 = 504cm^3$$

[11] Władysław Siuta, *Mechanika Techniczna*, WSiP.

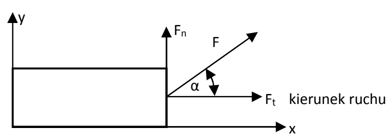
14. Rozwiązywanie zadań z pracy, mocy, energii kinetycznej i potencjalnej

W rozdziale tym oprócz podstaw z teorii przedstawione zostaną klasyczne zadania z wyznaczenia pracy, mocy, energii kinetycznej i potencjalnej.

Praca mechaniczna

Praca mechaniczna jest równa iloczynowi wartości siły działającej wzdłuż kierunku ruchu jaki przebył punkt zaczepienia tej siły przez drogę.

$W = F \cdot S \cdot cos\alpha$ (14.1)



$\alpha=0^0$; $cos\alpha=1$

$W=F \cdot s$

$\alpha=90^0$; $cos\alpha=0$

$W=0$

Rys. 1. Rysunek obrazujący pracę mechaniczną i zależności między jej składowymi

W układzie SI jednostką pracy jest praca siły 1 niutona na przesunięciu 1 m. Jednostkę tę nazywa się dżulem (J).

$W = 1N \cdot 1m = 1J$

$W = 1kG \cdot 1m = 9{,}81J$

Praca mechaniczna w ruchu obrotowym

W ruchu obrotowym dookoła stałej osi pracę wykonuje siła F styczna do toru, a więc prostopadła do promienia r.

$W = F \cdot r \cdot \varphi = M \cdot \varphi$ (14.2)

Praca w ruchu obrotowym wyraża się iloczynem momentu obrotowego M oraz kąta obrotu φ (wyrażonego w radianach).

Moc

Mocą nazywamy iloraz pracy i czasu, w którym ta praca została wykonana.

$P = \frac{W}{t} = \frac{1J}{1s}$ (14.3)

$P = \frac{F \cdot r \cdot \varphi}{t} = M \cdot \omega; \quad \frac{\varphi}{t} = \omega; \quad \omega = \frac{\pi n}{30}$ (14.4)

Jeżeli moment M jest podany w Nm, a n w obr/min, to dla otrzymania mocy P wyrażonej w kW należy wykonać następujące przekształcenie:

$P = M \cdot \omega = M \cdot \frac{\pi \cdot n}{30 \cdot 100}$ (14.5)

stąd moment obrotowy:

$M = \frac{30 \cdot 100}{\pi} \cdot \frac{P}{n}$ (14.6)

czyli: $M = 9554{,}14 \cdot \frac{P}{n}\ \ [Nm]$

Energia mechaniczna

Energię mechaniczną dzieli się na energię kinetyczną E_k, czyli energię ruchu oraz energię potencjalną E_p, czyli energię położenia. Suma energii kinetycznej i potencjalnej pozostaje stała w danym ciele (pominięcie oporów ruchu). Jest to tzw. zasada zachowania energii mechanicznej.

$E = E_k + E_p$ (14.7)

gdzie: $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}, E_p = m \cdot g \cdot h$

Zasada pracy i energii mechanicznej

Jeżeli na poruszający się punkt materialny o masie m działa siła czynna F, to przyrost energii kinetycznej tego punktu jest równy pracy wykonanej przez siłę działającą na ten punkt.

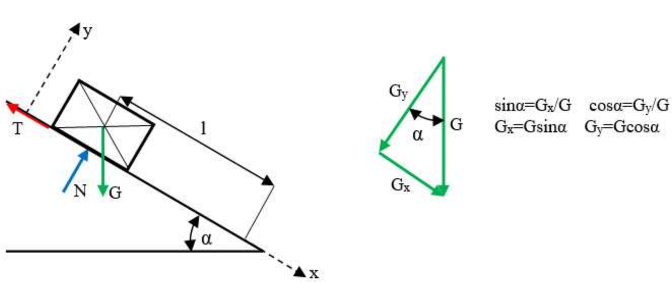
$E_k = W$ (14.8)

Dla ruchu postępowego: $\frac{m \cdot v^2}{2} = F \cdot s$ (14.9)

Dla ruchu obrotowego: $\frac{J \cdot \omega^2}{2} = M \cdot \alpha$ (14.10)

Przykład 1

Ciało o masie m zjeżdża po równi pochyłej do poziomu pod kątem α (rys. 2). Wyznaczyć prędkość ciała, w chwili gdy przebędzie ono drogę l, jeżeli współczynnik tarcia o równię wynosi μ. Dane: $l = 2m, \mu = 0{,}1, \alpha = 30^0, m = 2kg, g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

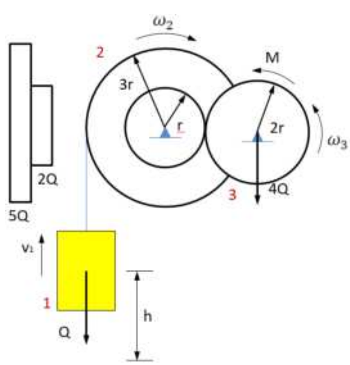


Rys. 2. Rysunek do przykładu 1

Z sumy rzutów sił na oś y otrzymamy ostatecznie: $N = G\cos\alpha$. Pamiętając, że $T = \mu N$ i podstawiając pod to równanie $N = G\cos\alpha$ otrzymamy: $T = \mu G\cos\alpha$
$E_k = W$
Ciało przemieszcza się ruchem postępowym więc: $\frac{m\cdot v^2}{2} = F \cdot s$
Wyprowadzamy równanie dla analizowanego przypadku:
$\frac{m\cdot v^2}{2} = G_x l - Tl$
Po podstawieniu:
$\frac{m\cdot v^2}{2} = l \cdot G \cdot \sin\alpha - l \cdot \mu \cdot G\cos\alpha$
Przekształcając równanie celem wyznaczenia wartości prędkości otrzymujemy:
$v = \sqrt{\frac{2lG(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m}} = 4\ \frac{m}{s}$

Można porównać to zadanie z zadaniem z rozdziału 12, w którym wykorzystywano dynamiczne równania ruchu. Jak można zaobserwować uzyskano identyczny wynik.

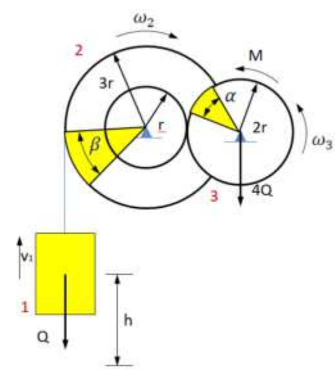
Przykład 2
Dla układu jak na rys. 3 obliczyć prędkość v_1 ciężaru Q. Dane: $Q = 200N, M = 1000Nm, r = 0{,}5m, h = 1m, g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.



Rys. 3. Rysunek do przykładu 2

Cały układ dzielimy na 3 podukłady oznaczone cyframi arabskimi w kolorze czerwonym na rys. 3. Dla każdego z osobna należy napisać równania na energię mechaniczną. Przypomnimy wzory:
$E_k = W$
Dla ruchu postępowego: $\frac{m\cdot v^2}{2} = F \cdot s$
Dla ruchu obrotowego: $\frac{J\cdot\omega^2}{2} = M \cdot \alpha$, pamiętając, że $J_{zc} = \frac{m\cdot r^2}{2}$

Energia układu (lewa strona równania):
podukład 1:
$E_1 = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{Q \cdot {v_1}^2}{2g}$
podukład 2:
$E_2 = \frac{J \cdot \omega^2}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \cdot \frac{5Q}{g} 9r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2Q}{g} r^2)\omega_2^2$
$E_2 = \left(\frac{45Qr^2}{4g} + \frac{2Qr^2}{4g}\right)\omega_2^2 = \frac{47Qr^2\omega_2^2}{4g}$
podukład 3:
$E_3 = \frac{J \cdot \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4Q}{g} 4r^2 \cdot \frac{\omega_3^2}{2} = \frac{4Qr^2\omega_3^2}{g}$



Rys. 4. Rysunek do przykładu 3 z naniesionymi przemieszczeniami kątowymi

Praca układu (prawa strona równania):
podukład 1:
$W_1 = -Q \cdot h$
podukład 2:
2 układ nie wykonuje pracy
podukład 3:
$W_3 = M \cdot \alpha$
Zestawiając teraz wyniki obok siebie otrzymujemy:
$E_1 = \frac{Q \cdot {v_1}^2}{2g}, E_2 = \frac{47Qr^2\omega_2^2}{4g}, E_3 = \frac{4Qr^2\omega_3^2}{g}, W_1 = -Q \cdot h, W_3 = M \cdot \alpha$

Na tym etapie należy przekształcić nasze równania w układ z jedną niewiadomą v_1 pamiętając, że $\omega_2 = \frac{v_1}{3r}$, $\omega_2 \cdot r = \omega_3 \cdot 2r$ stąd $\omega_3 = \frac{\omega_2}{2} = \frac{v_1}{6r}$. Z kolei $\beta \cdot r = \alpha \cdot 2r$ stąd $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{6r}$.
$\frac{Q \cdot {v_1}^2}{2g} + \frac{47Qr^2\omega_2^2}{4g} + \frac{4Qr^2\omega_3^2}{g} = -Q \cdot h + M \cdot \alpha$

uwzględniając powyższe przekształcenia uzyskujemy:

$$\frac{Q\cdot {v_1}^2}{2g}+\frac{47Qr^2\frac{{v_1}^2}{9r^2}}{4g}+\frac{4Qr^2\frac{{v_1}^2}{36r^2}}{g}=-Q\cdot h+M\cdot\frac{h}{6r}$$

Przekształcając powyższe równanie ostatecznie uzyskujemy:

$$v_1=\sqrt{\frac{36gh\cdot\left(-Q+\frac{M}{6r}\right)}{69Q}}=\sqrt{\frac{36\cdot 9{,}81\cdot 1\cdot\left(-200+\frac{1000}{6\cdot 0{,}5}\right)}{69\cdot 200}}=1{,}85\ \frac{m}{s}$$

15. Zadania z drgania układów

W rozdziale tym przedstawione zostaną typowe zadania związane z drganiem układów.

Przykład 1

Na sprężynie w długości $l_0 = 10cm$ zawieszono ciężarek o masie $m_1 = 0{,}1kg$, w wyniku czego długość sprężyny zwiększyła się do $10{,}5cm$. Następnie zdjęto obciążnik i zawieszono inny, tym razem o masie $m_2 = 0{,}2kg$.

a) Wyprowadź wzór na okres drgań sprężyny po zawieszeniu drugiego ciężarka w zależności od danych a następnie oblicz ten okres.

b) Wyprowadź wzór na prędkość maksymalną drugiego ciężarka w zależności od danych i oblicz tę prędkość zakładając, że amplituda $A = 0{,}02m$.

Dane: $m_1 = 0{,}1kg, m_2 = 0{,}2kg, l_0 = 10cm, l_1 = 0{,}5cm = 0{,}005m$

Obliczenia:

a) Okres drgań sprężyny:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{k}}$ dla 1 ciężarka $F_1 = k \cdot \Delta l_1\ stąd\ k = \frac{F_1}{\Delta l_1} = \frac{m_1 \cdot g}{\Delta l_1}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{\frac{m_1 \cdot g}{\Delta l_1}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\Delta l_1}{g}}$$

po podstawieniu otrzymujemy:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{0{,}005m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} \approx 0{,}2s$$

b) Rozpatrując ruch harmoniczny dla tego podpunktu:

$$x = A \cdot sin\alpha$$
$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Różniczkując powyższy wzór otrzymujemy:

$$\dot{x} = v = A\omega co\,s(\omega t + \varphi) \ \rightarrow \ v_{max} = A\omega$$
$$\ddot{x} = a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} = A \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{g}{\Delta l_1}}$$

$$v_{max} = 0{,}02m \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{0{,}005m}} \approx 0{,}63\frac{m}{s}$$

Przykład 2

W chwili $t_1 = 0{,}3s$ od przejścia przez położenie równowagi wahadło osiągnęło maksymalne wychylenie równe $A = 2cm$. Oblicz:

a) okres wahadła,
b) długość wahadła,
c) prędkość w chwili przechodzenia przez położenie równowagi,
d) prędkość w chwili $t_2 = 0{,}1s$.

Obliczenia:

a) aby wyznaczyć okres wahadła należy czas t_1 przemnożyć przez wartość 4. Wynika to z faktu, że na pełen okres wchodzą 4 cząstkowe wahnięcia z położenia równowagi.
$T = 4 \cdot t_1 = 1{,}2s$

b) Wykorzystamy wzór na okres wahadła matematycznego:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ważny dla małych kątów wychylenia. Przekształcając wzór otrzymujemy: $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} \rightarrow l = \frac{(1{,}2s)^2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{4 \cdot (3{,}14)^2} \approx 0{,}358m$

c) Prędkość jak i energia kinetyczna w chwili przechodzenia wahadła przez położenie równowagi są maksymalne. Wobec tego:
$v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} \rightarrow v_{max} = 0{,}02m \cdot \frac{2\pi}{1{,}2s} \approx 0{,}105\frac{m}{s}$

d) Czas $t_2 = 0{,}1s$ stanowi $\frac{1}{12}T$. Wobec tego możemy zapisać:
$t_2 = 0{,}1s = \frac{1}{12}T$
$v = A\omega co\,s(\omega t + \varphi)$, gdzie $v_{max} = A\omega$ stąd:
$v = v_{max} \cdot co\,s\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{12}T\right) \rightarrow v = 0{,}105\frac{m}{s} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}091\frac{m}{s}$

16. Pytania kontrolne

1. Co nazywamy wektorem a co skalarem? Wymień kilka wektorowych i skalarowych wielkości mechanicznych.
2. Objaśnij na przykładzie rozkładanie sił na dwie składowe.
3. W jakich przypadkach tarcie ślizgania jest zjawiskiem korzystnym, a w jakich niekorzystnym?
4. Co to jest współczynnik tarcia toczenia?
5. Kiedy moment statyczny względem osi jest równy zeru i dlaczego?
6. Co nazywamy siłą skupioną a co siłą ciągłą?
7. Podaj kolejność czynności przy stosowaniu metody Rittera.
8. Co to jest przyśpieszenie normalne i w jakim ruchu występuje?
9. Podaj definicję i objaśnij I i II zasadę dynamiki.
10. Podaj definicję momentów bezwładności osiowego i biegunowego.
11. Podaj definicję pracy mechanicznej.
12. Co nazywamy okresem drgań?

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny
Projekt „Dostępna uczelnia - Politechnika Koszalińska"
Numer projektu POWR.03.05.00-00-A018/20
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020