ZESZYTY NAUKOWE
WYŻSZEJ SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W KOSZALINIE

LUDWIK CENDROWSKI

OPTYMALIZACJA PROBLEMU PRODUKCYJNO-TRANSPORTOWEGO

KOSZALIN 1971
[1]

1

ZESZYTY NAUKOWE

WYŻSZEJ SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W KOSZALINIE

LUDWIK CENDROWSKI

OPTYMALIZACJA PROBLEMU PRODUKCYJNO-TRANSPORTOWEGO

KOSZALIN – 1971

Recenzent: Prof. dr A. Alexiewicz

Wydano za zgodą
Rektora Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie
pismo z dnia 21 grudnia 1970 r. znak: R/06/6/1970

WYDAWNICTWO UCZELNIANE W. S. INŻ. W KOSZALINIE

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Warszawskiej
Nakład 300+25. Arkuszy druku 8,5. Papier offset kl. III 70 g.
Oddano do druku dnia 9. I. 1971 roku. Zamówienie nr 15. U-80

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY INŻYNIERSKIEJ W KOSZALINIE

Nr 1 1971

Ludwik Cendrowski

OPTYMALIZACJA PROBLEMU PRODUKCYJNO-TRANSPORTOWEGO

1. WSTĘP[1)]

Ostatnie doświadczenia i badania naukowe wykazały, że prawidłowe prowadzenie działalności gospodarczej w skali ogólnopaństwowej, jak i w skali przedsiębiorstwa jest możliwe jedynie poprzez zastosowanie nowoczesnych metod naukowych zwanych badaniami operacyjnymi[2)]. Badania operacyjne - jak sama nazwa wskazuje - powstały w związku z problematyką wojskową[3)]. Obecnie jednak omawiana metoda znajduje szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu problemów techniczno-ekonomicznych, a nawet - jak wykażemy w niniejszym opracowaniu - w wyznaczaniu optymalnych planów produkcyjno-transportowych. W badaniach operacyjnych wyróżnia się na ogół cztery etapy: budowę modelu, rozwiązanie modelu, jego weryfikacja, opracowanie systemu kontroli[4)]. W pracy niniejszej omówione zostaną dwa pierwsze etapy badań operacyjnych.

W rozdziale drugim przedstawimy budowę modelu produkcyjno-transportowego, w rozdziale trzecim i czwartym pokażemy rozwiązanie modelu przy pomocy programowania dynamicznego. W badaniach naszych zwróciliśmy uwagę na programowanie dynamiczne, gdyż wydaje się, iż ta najnowocześniejsza metoda matematyczna, pozwalająca wyznaczyć optymalne rozwiązanie wielu zagadnień ekonomicznych, pokazuje perspektywiczną więź trzech różnych dziedzin: ekonomii, matematyki i techniki.

1) Por. L. Cendrowski: "Programowanie dynamiczne". Życie Gospodarcze Nr 9/1969 s.5.

2) Por. A. Bojarski: "Szkice matematyczno-ekonomiczne". Warszawa 1965 PWE.

3) Por. "Z praktyki badań operacyjnych" Warszawa 1964 PWE.

4) W. Sadowski: "Teoria podejmowania decyzji". Warszawa PWG s.14.

Istota wspomnianej więzi polega na tym, że ekonomista formułuje problemy wzięte z życia gospodarczego, matematyk formalizuje zadane mu przez ekonomistę zagadnienia, a następnie poszukuje ich optymalnych rozwiązań, technik zaś programuje algorytm zbudowany przez matematyka na maszynę matematyczną, czuwa nad jej sprawnym działaniem i doskonaleniem[5].

Jeśli więc założymy, że matematyk przedstawił w postaci analitycznej budowę funkcji kryterium oraz budowę warunków ograniczających rozwiązanie, możemy powiedzieć, że pierwszy etap badań operacyjnych został zakończony. Załóżmy więc, że ekonomista przy współudziale matematyka zbudował model. Czymże jest ów model? W. Niemczynow w pracy "Metody i modele ekonomiczno-matematyczne" stwierdza, że "Model to swojego rodzaju abstrakcja, ogniwo pośrednie między teoretycznym myśleniem, a obiektywną rzeczywistością. Jakość modelu zależy od jego zdolności odzwierciedlania i odtwarzania przedmiotów i zjawisk obiektywnego świata, ich struktury i prawidłowości budowy. Model jest środkiem wyodrębnienia obiektywnie istniejącego systemu regularnych związków i relacji, które istnieją w badanej, realnej rzeczywistości. Im dokładniejsze jest to odzwierciedlenie i im bardziej przejrzysta jest jego forma tym lepszy jest model"[6].

Dla ilustracji powyższej definicji rozpatrzmy budowę następującego modelu. Przypuśćmy, że rozpatrujemy proces przepływu odbywającego się w sposób ciągły z pewnej z góry zadanej ilości źródeł do określonej również z góry podanej ilości "zbiorników" w okresie czasu T. Inaczej mówiąc można rozważać powiązania między pewną ilością źródeł energii elektrycznej, a jej odbiorcami, między pewną ilością źródeł gazu, czy też cieczy a ich odbiorcami. Problem ten można ujmować jako

---

5) Problem doskonalenia maszyn matematycznych, a w szczególności problem ich "pamięci" odgrywa szczególną rolę w programowaniu zadań rozwiązywanych metodą programowania dynamicznego. W trzecim rozdziale pracy zobaczymy, iż tylko najnowocześniejsze maszyny matematyczne mogą pokonać trudności związane z praktycznym wykorzystaniem znalezionego algorytmu.

6) W. Niemczynow: "Metody i modele ekonomiczno-matematyczne" Warszawa 1964 PWE s.26.

problem techniczny, ale w momencie, kiedy do modelu zostaną wprowadzone wielkości ekonomiczne, to przyjmując odpowiednio zbudowaną funkcję kryterium, można optymalizować efekty gospodarcze. W naszych rozważaniach można przyjąć jako funkcję kryterium - funkcję kosztów przepływu. Warunki jakie powinny ograniczać rozwiązanie zadania polegają na tym, aby z jednej strony rozdysponować całą produkcję, a z drugiej strony powinno być zaspokojone zapotrzebowanie poszczególnych odbiorców na wytworzoną produkcję[7].

Ponieważ w drugim rozdziale naszej pracy omówimy szczegółowo budowę modelu produkcyjno-transportowego dlatego też obecnie naszkicujemy myśl przewodnią naszych dalszych rozważań, aby już na wstępie jasno widzieć, czy model nasz odpowiada definicji modelu sformułowanej przez Niemczynowa.

Należy przede wszystkim zauważyć, że problem produkcyjno-transportowy jest jednym z decydujących ogniw ogólnego zagadnienia jakim jest - rozmieszczenie sił wytwórczych. W ostatnich latach pojawiło się szereg opracowań z zakresu teorii rozmieszczenia sił wytwórczych[8]. Niestety, zdecydowana większość wzmiankowanych prac ogranicza się do omawiania tego zasadniczego zagadnienia dla gospodarczego rozwoju kraju metodą słowno-logiczną. Tymczasem łatwo zauważyć, że racjonalne rozmieszczenie produkcji surowców i produktów można przedstawić w precyzyjnej szacie matematycznej. Na to jednak,aby przystąpić do przedstawienia omawianego zagadnienia w matematycznej postaci musimy postawić przed sobą dwa pytania:

1) jaki jest cel omawianego problemu na tle ogólnego rozwoju gospodarki narodowej?
2) czy zbudowany model odpowiada wyżej podanej definicji Niemczynowa?

Jeśli rozpatrujemy rozmieszczenie produkcji w całokształcie perspektywicznego planu, celem jest takie jego zaplanowanie, które zabezpieczy wszechstronny rozwój gospodarki narodowej. Inaczej mówiąc celem optymalnego rozmieszczenia pro-

---

7) Omawiany problem przedstawiono w matematycznej postaci w artykule Z. Bosiakowskiego i L. Cendrowskiego opublikowanym w "Ekonomiście" Nr 3/67 s.755-757.

8) Por. np. literaturę cytowaną w rozdziale p.2.1.

dukcji jest znalezienie odpowiedzi na pytania, kiedy, gdzie, ile, czego produkować, tak aby zbudowana funkcja kosztów produkcji i transportu osiągnęła minimum i aby były spełnione warunki, wynikające z planu gospodarki narodowej. Pełne sformułowanie powyższego problemu wymaga więc ustalenia warunków ograniczających, przy których poszukuje się optymalnego rozwiązania.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zasygnalizowanych modeli należało zastanowić się - jak zauważono wyżej - czy zbudowane modele spełniają warunki definicji modelu. Jak pamiętamy W. Niemczynow mówi, że "model to swojego rodzaju abstrakcja, ogniwo pośrednie między teoretycznym myśleniem a obiektywną rzeczywistością...". Obiektywna rzeczywistość w przykładzie dotyczącym przepływu energii,to podana ilość źródeł, w których wytwarza się np. energię elektryczną, to podana ilość odbiorców tej energii, to wreszcie pewien z góry podany okres czasu. W budowanym modelu "obiektywna rzeczywistość" będzie symbolizowana między innymi przez:

1) ilość miejsc produkcji surowców i produktów;
2) wielkość zapotrzebowania fabryk na surowce;
3) wielkość zapotrzebowania hurtowni na produkty;
4) okres czasu, w którym badamy zjawisko produkcji oraz transportu surowców i produktów.

Nasze teoretyczne myślenie powinno zatem polegać na podaniu w postaci wzorów matematycznych budowy funkcji kryterium oraz warunków ograniczających. I rzeczywiście każdy z przedstawionych modeli jest pomostem między teoretycznymi założeniami, a istniejącymi w rzeczywistości miejscami wytwarzania, odbiorcami oraz zadanym okresem czasu. O wiele trudniej jest dać odpowiedź na inne pytania, które zwykle nurtują po zbudowaniu modelu.

Jaki jest stopień dokładności przedstawionego obrazu? Czy model w pełni odzwierciedla wszystkie prawidłowości istniejące w rzeczywistości?

Wydaje się, że należy zawsze jasno zdawać sobie sprawę z tego, iż "szkielety" rzeczywistości, wyrażone w postaci zbudowanych modeli zawierają wiele odchyleń od warunków istniejących w badanej sytuacji. Problem polega więc na tym,aby poszukiwać dróg prowadzących do uwzględnienia w modelach coraz większej ilości powiązań, wywierających decydujący wpływ na ich zbliżenie do realnie istniejących warunków.

W Uchwale V Zjazdu PZPR znajdujemy wyraźnie wskazówki dotyczące poszukiwania wspomnianych powiązań: "Istotne znaczenie posiada pogłębianie analitycznych metod planowania. Szczególny nacisk należy położyć na uzupełnienie bilansowania tradycyjnego - bilansowaniem opartym na powiązaniach międzygałęziowych, na stosowanie metod ekonometrycznych i wprowadzanie programowania optymalizacyjnego zarówno w skali ogólnogospodarczej jak i w skali wielkich układów ekonomicznych"[9].

Tak więc zgodnie z wyżej sformułowaną myślą Uchwały V Zjazdu PZPR należy stwierdzić, że jeśli praca nad sformułowaniem problemu produkcyjno-transportowego oparta na powiązaniach międzygałęziowych jest zakończona, wówczas musimy zwrócić uwagę na "stosowanie metod ekonometrycznych i wprowadzenie programowania optymalizacyjnego".

Jeśli wśród wspomnianych metod matematycznych znajdziemy sposób rozwiązania interesującego nas problemu, wtedy sprawa jest prosta. Jeśli jednak nawet najnowocześniejszy aparat matematyczny jest za ubogi, wówczas należy albo tworzyć nowy dział, albo rozbudowywać istniejące działy matematyki.

Przy rozwiązywaniu zagadnienia produkcyjno-transportowego wystarczyło rozbudować jedną z najmłodszych metod matematycznych - programowanie dynamiczne. Jak wiadomo istota programowania dynamicznego tkwi w zasadzie optymalności Bellmana, w której mówi się, że "strategia optymalna ma tę własność, że jakimkolwiek byłby stan początkowy i decyzja początkowa, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną z punktu widzenia stanu wynikłego z pierwszej decyzji"[10].

Jeśli więc rozwiązujemy pewne zadanie np. z zakresu ekonomii, to ogólnie można je nazwać układem fizycznym U. Jeśli do układu fizycznego U zastosujemy strategię S, wówczas układ fizyczny może zmienić swój stan w kolejnych etapach. Jeś-

---

9) V Zjazd PZPR 11-16 listopada 1968. Warszawa 1968, Książka i Wiedza s.239.

10) R. Bellman: "Dinamiczeskoje programirowanije" Moskwa 1960 Izdatielstwo Inostrannoj Litieratury.

li układ fizyczny U ilościowo charakteryzować będziemy przy pomocy kryterium F, wtedy ponieważ wartość liczbowa kryterium F zależy od rodzaju strategii - zadanie programowania dynamicznego polega na tym, aby znaleźć na każdym etapie spośród wszystkich możliwych strategii S taką strategię, która przeprowadzi badany układ ze stanu pierwszego do stanu drugiego, ze stanu drugiego do trzeciego aż w końcu ze stanu przedostatniego do stanu ostatniego.

Wykorzystując powyższe uwagi wyprowadziliśmy w rozdziale trzecim ciąg równań funkcyjnych odpowiadający zbudowanemu w rozdziale drugim modelowi produkcyjno-transportowemu. W rozdziale czwartym podamy wskazówki dotyczące metod obliczeniowych znalezionego ciągu równań funkcyjnych,a tym samym przedstawimy algorytm przy pomocy którego na maszynach matematycznych można wyznaczać wartości ekstremalne badanego modelu.

Wróćmy jeszcze na chwilę do programowania dynamicznego. Wydaje się, że zasadnicza zaleta tej nowej metody matematycznej polega na tym, iż przy jej pomocy można obliczać ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych niezależnie od budowy funkcji kryterium oraz od budowy warunków ograniczających.

Wynika stąd, że najmodniejszy do tej pory w zastosowaniach ekonomicznych dział matematyki, jakim jest programowanie liniowe, został sprowadzony do roli szczególnego przypadku. Nie wynika oczywiście z tego, że przynajmniej w niektórych zagadnieniach programowanie liniowe nie będzie miało dalszych zastosowań.

Tym bardziej byłby błędny wniosek, że w wyniku rozwiązania stosunkowo szerokiego zagadnienia, jakim jest problem produkcyjno-transportowy, dalszy rozwój programowania dynamicznego będzie ograniczony. Sądzić należy, że najpiękniejszą odpowiedź na powyższą wątpliwość dał twórca programowania dynamicznego R. Bellman, który w pracy: "Adaptacyjne procesy sterowania" mówiąc o możliwościach stosowania nowej metody tak stwierdza: "Niestety nie możemy spocząć na laurach. Owo ostatnie "niestety" trzeba uważać poniekąd za krokodyle łzy. Jakkolwiek nękani kłopotami inżynierowie i ekonomiści pragnęliby zapewne dysponować "książką kucharską" zawierającą recepty matematyczne na wszystkie potrzeby, czymś w rodzaju sławnej tablicy całek, czy tablic logarytmicznych, matematyk w przeciwieństwie do nich nie tęskni za czymś podobnym. Indywiduum to doznaje dogłębnej rozkoszy, gdy widzi, że jedno zbadane i rozwiązane zagadnienie otwiera drzwi do tuzina innych, gdy zdobycie jednego szczytu prowadzi do odkrycia dalszych niezbadanych rejonów górskich. Na szczęście wszechświat fizyczny dostarcza mu uprzejmie całej hierarchii zagadnień, które prowadzą do nowych teorii, a te teorie do dalszych problemów"[11]. Sądzić należy, że zadowolenie o którym mówi R. Bellman, będzie tym większe, im bardziej będzie widoczna więź wyników rozwiązania z potrzebami ludzi. Z powyższych rozważań wynika, że stosowanie metod matematycznych w działalności gospodarczej rozwija się w dwu kierunkach. Z jednej strony chodzi o to, aby budować modele coraz wierniej obrazujące rzeczywistość, aby w modelach tych było coraz mniej uproszczeń, aby "szkielety" rzeczywistości odzwierciedlały ją możliwie najdokładniej. Z drugiej strony stosowanie metod matematycznych w działalności gospodarczej jest związane z powstawaniem nowych działów matematyki lub rozbudową działów istniejących.

Dlatego też sądzić należy, że stosowanie np. programowania dynamicznego przy rozwiązywaniu problemów ekonomicznych będzie nabierało coraz większego znaczenia, angażując coraz liczniejsze grupy ekonomistów i matematyków przy badaniu najistotniejszych dla wzrostu gospodarki narodowej zagadnień.

Jak więc zauważyliśmy wyżej w prezentowanej pracy stanęło przed nami ważkie i trudne zadanie: zbudować model produkcyjno-transportowy możliwie najwierniej przedstawiający rzeczywistość i jednocześnie rozwinąć metody matematyczne do takiego etapu, aby przy ich pomocy można było rozwiązać sformułowane zadanie. Wydaje się, że na podstawie wyników osiągniętych w pracy można sformułować tezę, że w ostatnich latach widoczna jest wspaniała więź matematyki z życiem. Matematyka pełni służebną rolę życiu, rozwijając się dzięki temu jako nauka.

---

11) R. Bellman: "Adaptacyjne procesy sterowania" Warszawa 1965 PWN, s.24.

I właśnie w tym miejscu pragnę zwrócić szczególną uwagę na rozdział piąty - "Dodatek", w którym pokazano na konkretnych danych liczbowych sposoby badania niesprzeczności przykładowo wybranego modelu produkcyjno-transportowego. Dane liczbowe nie są wzięte z konkretnej działalności gospodarczej. Sądzić jednak należy, że stosunkowo nieduże liczby, które zostały podane przy badaniu niesprzeczności modelu, ułatwią uchwycenie myśli przewodniej niezbędnej przy badaniu niesprzeczności modelu wziętego z praktyki gospodarczej.

Na specjalne podkreślenie zasługuje - jak się wydaje - fakt pokazania związku między produkcją produktów, a produkcją surowców, Związek ten został uwzględniony w "Dodatku" dzięki wprowadzeniu do przykładowego - modelu, współczynników technologicznych produkcji, niezbędnych do wyliczania ograniczeń zapotrzebowania na surowce w celu wytwarzania zaplanowanej ilości poszczególnych produktów.

Ponadto w "Dodatku" rozwiązano jeden przykład liczbowy, w którym przedstawione zostały wszystkie najważniejsze myśli związane z rozwiązywaniem zadań metodą programowania dynamicznego.

*

* *

Praca "Optymalizacja problemu produkcyjno-transportowego" ukazuje się dzięki szczególnym troskom Rektora W.S.Inż. w Koszalinie - doc. J. Smoleńskiego, który nie szczędząc słów zachęty, rad oraz środków, zrobił wszystko aby ukazało się niniejsze wydawnictwo przydatne w działalności gospodarczej.

Serdecznie dziękuję Prof. dr A. Alexiewiczowi za przejrzenie maszynopisu i zwrócenie uwagi na pewne niedokładności rozwiązania, dzięki czemu opracowanie stało się poprawniejsze pod względem matematycznym.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

2.1. Cel opracowania

W uwagach wstępnych zauważono, że problem produkcyjno-transportowy jest jednym z ogniw teorii rozmieszczenia sił wytwórczych. Na to więc aby wyraźnie przedstawić cel opracowania musimy pokrótce zwrócić uwagę na wybrane zagadnienia dotyczące rozmieszczenia sił wytwórczych, co umożliwi sformułowanie problemu produkcyjno-transportowego.

W przedmowie do pracy: "Problemy rozmieszczenia przemysłu w Polsce Ludowej" K. Secomski stwierdza: "W ostatnim 10-leciu zaznaczył się w Polsce szczególnie bujny rozwój badań naukowych w dziedzinie rozmieszczenia sił wytwórczych. Szereg prac teoretycznych, a także oświetlających praktyczne osiągnięcia Polski w zakresie przekształcenia struktury przestrzennej kraju, świadczy wymownie o istniejącym postępie w tej grupie badań"[1].

Wydaje się, iż opracowania o których wspomina K. Secomski można podzielić na trzy grupy[2].

a. Do grupy pierwszej należałoby zaliczyć monografie i artykuły omawiające podstawy teoretyczne rozmieszczenia sił wytwórczych i to zarówno ogólnej teorii rozmieszczenia jak i branżowych teoriach rozmieszczenia, czy też w teoriach lokalizacji szczegółowych[3].

b. W drugiej grupie znaleźlibyśmy rozprawy przedstawiające również dorobek teoretyczny z zakresu podstaw rozmieszczenia sił wytwórczych, jednak w pracach tych pokazywane są dodatkowo możliwości stosowania metod mate-

---

1) Z przedmowy K. Secomskiego do pracy W. Kawaloa "Problemy rozmieszczenia przemysłu w Polsce Ludowej". Warszawa 1965 PWN, s. 7.

2) Jako kryterium omawianego podziału przyjmujemy stopień wykorzystania metod matematycznych przy rozwiązywaniu zagadnień teoretycznych dotyczących rozmieszczenia sił wytwórczych.

3) Por. prace: (10, (14), (19), (28), (36), (37), (38), (42), (43), (44), (50), (54).

matycznych, przy rozwiązywaniu konkretnych modeli rozmieszczenia sił wytwórczych[4].

c. Wreszcie do trzeciej grupy omawianych prac należy zaliczyć artykuły zawierające rozwiązania problemów lokalizacyjnych metodami matematycznymi[5].

Podamy obecnie kilka uwag dotyczących przykładowo wybranych prac z każdej wyżej wymienionych grup. Uzyskamy w ten sposób niezbędny materiał do sformułowania celu niniejszego opracowania. Zwróćmy więc na początek uwagę na pracę K.Secomskiego: "Wstęp do teorii rozmieszczenia sił wytwórczych"[6], w której autor obok wielu interesujących problemów, formułuje jeden, szczególnie ważny dla naszego opracowania. Otóż K. Secomski omawiając główne założenia socjalistycznej teorii rozmieszczenia sił wytwórczych, jasno i precyzyjnie mówi, że: "... u podstaw socjalistycznej teorii rozmieszczenia musi, zgodnie z podstawowym prawem ekonomicznym socjalizmu, występować człowiek wraz z jego potrzebami. Równocześnie,celem socjalistycznej teorii rozmieszczenia musi być ogólny interes społeczeństwa związany z przyspieszeniem wszechstronnego rozwoju gospodarki narodowej, dzięki czemu pełniej i w sposób bardziej różnorodny mogą być zaspokojone również potrzeby człowieka pracy"[7].

Z powyższego sformułowania wynika wzajemny związek socjalistycznego rozmieszczenia sił wytwórczych a wszechstronnym rozwojem gospodarki narodowej. Wspomniana współzależność polega na tym, iż jak wiadomo, rozwój gospodarki narodowej związany jest nieodłącznie z problemami inwestycyjnymi. Zagadnienia inwestycyjne z kolei determinują problemy lokalizacyjne. Jeśli więc potrafimy rozwiązać problemy lokalizacyjne w sposób optymalny, wówczas przyczynimy się przez to do rozwoju gospodarki narodowej i na odwrót, jeśli znajdziemy optymalne rozwiązania dotyczące rozwoju gospodarki narodowej,to tym sa-

---

4) Por. prace: (8), (20), (25), (29), (40), (44), (52).

5) Por. prace: (11), (12), (34), (41), (48), (49).

6) K. Secomski: "Wstęp do teorii rozmieszczenia sił wytwórczych" Warszawa 1956 PWG.

7) K. Secomski op.cit. s. 50.

mym przyczynimy się do prawidłowego rozmieszczenia sił wytwórczych. Chociaż wydaje się, że jest niesłychanie istotną rzeczą z punktu widzenia potrzeb gospodarki narodowej, badanie związku, między zagadnieniami rozmieszczenia sił wytwórczych, a rozwojem gospodarki narodowej, jednak w niniejszym opracowaniu, stawiamy przed sobą węższy zakres - zakres dotyczący jedynie wybranego zagadnienia z teorii rozmieszczenia sił wytwórczych - problemu produkcyjno-transportowego. Niemniej jednak, zwróciliśmy uwagę na definicję gospodarki narodowej i regionu, aby uzyskać dalszy materiał interpretujący wyniki pracy. "Przez gospodarkę narodową, rozumiemy zespół czynników umożliwiających uruchomienie w ramach państwa określonej poziomem i strukturą rozwojową produkcji. Do czynników tych zaliczamy: ludność, terytorium, istniejący majątek narodowy, władzę polityczną i gospodarczą oraz warunki wymiany z otoczeniem"[8)]. Natomiast pojęcie regionu utożsamiać będziemy z "terytorialnym kompleksem produkcyjno-usługowym podlegającym ciągłym zmianom i rozwojowi oraz wyróżniającym się od otaczających go obszarów swoistymi formami zagospodarowania"[9)]. Pamiętać przy tym należy, że "region gospodarczy" nie jest czymś odrębnym, niezależnym. Posiada on "własne życie" jako całość złożona z mniejszych elementów, jest jednak równocześnie elementem większej całości, jaką jest gospodarka narodowa"[10)].

Z powyższego nasuwa się pytanie, czy znalezienie optymalnego rozmieszczenia sił wytwórczych w gospodarce narodowej determinuje znalezienie optymalnego rozmieszczenia sił wytwórczych w poszczególnych regionach i odwrotnie, czy znalezienie optymalnego rozmieszczenia sił wytwórczych w poszczególnych regionach determinuje optymalne rozmieszczenie sił wytwórczych w gospodarce narodowej? Łatwo sprawdzić, że zarówno na pytanie pierwsze, jak i drugie, należy dać odpowiedź

---

8) Paweł Sulmicki "Teoria rozwoju regionów gospodarczych. Próba sformułowania i wyznaczenia kierunków badań szczegółowych", Warszawa 1962, KPZK PAN, s. 36.

9) Antoni Fajferek "Region ekonomiczny i metody analizy regionalnej", Warszawa 1966, PWE, s.11.

10) Paweł Sulmicki op. cit. s. 13.

przeczącą, bowiem optimum sumy nie jest równe sumie optimów i odwrotnie.

Z poprzednich rozważań wynika, że znany jest nam już - w pewnym zarysie - cel socjalistycznego rozmieszczenia sił wytwórczych oraz miejsce jego realizacji. Obecnie należy zastanowić się nad znalezieniem lub udoskonaleniem metod badawczych. "Rozwój tych metod, od metod prób i błędów oraz licznych metod bilansowo-koordynacyjnych,do metod kolejnych przybliżeń - przy ponownej ich weryfikacji metodami bilansowymi - musi w przyszłości uwzględnić dalsze pogłębianie i wielowariantowe ujmowanie kolejnych projektów planów wzrostu ekonomicznego i optymalnej struktury przestrzennej kraju,oparte na wprowadzeniu i wykorzystaniu nowych metod matematycznych. Te nowe metody wymagają w praktyce odpowiedniego ich dostosowania do kolejnych etapów planowania krajowego i planowania regionalnego"[11].

Wspomniane przez K. Secomskiego metody matematyczne stosowane w teorii rozmieszczenia sił wytwórczych można podzielić na dwie grupy.

Do grupy pierwszej - chociażby ze względów historycznych - należy metoda nakładów i wyników produkcji, której podstawy sformułował 30 lat temu W. Leontiew. Przepływy międzygałęziowe można rozpatrywać w ujęciu statycznym oraz dynamicznym. "Statyczny schemat nakładów i wyników produkcji wyjaśnia wzajemną zależność poszczególnych gałęzi gospodarki narodowej przy pomocy pewnego zestawu wskaźników a_{ik}.Każdy taki współczynnik przedstawia ilość określonego nakładu z i-tej gałęzi, która została zużyta przez gałąź k-tą na wytworzenie jednostki jej produkcji.

Pełny zestaw takich współczynników dla pewnej gałęzi produkcji wyznacza przepływy siły roboczej, wszelkiego rodzaju surowców, paliw, części zamiennych itd, które gałąź ta musiałaby zużyć na jednostkę czasu, by móc wyprodukować pewien strumień produkcji"[12].

11) K. Secomski "Niektóre problemy teorii rozmieszczenia" artykuł w pracy zbiorowej: "Teoretyczne problemy rozmieszczenia sił wytwórczych". Warszawa 1965, PWE, s. 58-59.

12) W. Leontiew "Studia nad strukturą gospodarki amerykańskiej" Warszawa 1963, PWN, s. 59.

"Przy rozważaniach dynamicznych odgrywa rolę nowa zmienna jaką jest czas. Poszczególne okresy (np. lata) układają się w ciąg, w którym wyniki działalności gospodarczej jak i polityka gospodarcza w okresach poprzednich oddziałują na okresy następne"[13].

Z powyższych ogólnych uwag, można łatwo zauważyć, że zarówno statyczne jak i dynamiczne ujęcie nakładów i wyników produkcji pozwala jedynie dokonywać analizy współzależności zjawisk gospodarczych. Nie można jednak przy pomocy metody nakładów i wyników produkcji wyznaczać rozwiązań optymalnych tzn. nie można np. wyznaczać wielkości produkcji w każdym z góry zadanym zakładzie produkcyjnym, tak aby łącznie koszty produkcji były najmniejsze i aby były spełnione pewne warunki dodatkowe.

Doszliśmy w ten sposób do drugiej grupy metod stosowanych w teorii rozmieszczenia sił wytwórczych - metody znanej pod nazwą metody programowania, albo podejmowania decyzji.

Spośród kilku znanych metod programowania[14] najbardziej znaną i najczęściej stosowaną w badaniach ekonomicznych jest metoda programowania liniowego[15].

Również w teorii rozmieszczenia sił wytwórczych metody programowania liniowego znajdują swe odbicia - "... programowanie liniowe - bowiem - może objąć znacznie szerszy wachlarz zagadnień wyłaniających się przy analizie układu gospodarczego, na które składają się wzajemnie ze sobą powiązane gałęzie przemysłu. Ogólnie mówiąc międzyregionalne programowanie liniowe znajduje zastosowanie w zagadnieniach maksymalizacji lub minimalizacji pewnej funkcji liniowej pod warunkiem zachowania pewnych liniowych nierówności"[16].

---

13) "Zarys ekonometrii". Praca zbiorowa pod redakcją naukową Z. Hellwiga, Warszawa 1967, PWE, s. 343.

14) Por. O. Lange "Optymalne decyzje" Warszawa 1964. PWE lub W. Sadowski "Teoria podejmowania decyzji". Warszawa 1960, PWS.

15) Por. Z. Czerwiński "Wstęp do teorii programowania liniowego z elementami algebry wyższej". Poznań 1961, PTE Oddział w Poznaniu.

16) W. Isard "Metody analizy regionalnej". Warszawa 1965, PWN s. 267.

Również w polskiej i radzieckiej literaturze ekonomicznej dotyczącej omawianego problemu można znaleźć szereg prób budowy liniowych modeli rozmieszczenia sił wytwórczych i obliczania wartości ekstremalnych metodami programowania liniowego. Na przykład w modelu B.S. Wierchowskiego i W.J. Szibałowa[17] chodzi o to, aby:
Obliczyć minimum formy:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} d_{ijk} Y_{ijk}$$

przy warunkach:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk} = b_{jk} \qquad (j = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots,r)$$

$$\sum_{k=1}^{r} Y_{ijk} = X_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} f_{ij} X_{ij} \leqslant b_i, \quad X_{ij} \geqslant 0, \quad Y_{ijk} \geqslant 0,$$

gdzie: C_{ij} - jednostkowe koszty produkcji j-tego produktu i i-tej fabryce,

D_{ijk} - jednostkowe koszty transportu j-tego produktu z i-tej fabryki do k-tej hurtowni,

b_{jk} - zapotrzebowanie k-tej hurtowni na j-ty produkt,

f_{ij} - zapotrzebowanie na surowiec na produkcję j-tego produktu w i-tej fabryce,

a_i - dolna moc produkcji w i-tej fabryce,

b_i - górna moc produkcji w i-tej fabryce,

X_{ij} - ilość jednostek j-tego produktu w i-tej fabryce,

X_{ijk} - ilość jednostek produktu j-tego przewożonego z i-tej fabryki do k-tej hurtowni.

---

17) B.S. Wierchowski, W.J. Szibałow "Mnogoproduktowaja model-sograniczіwajuszczim resursom" w pracy "Matiematiczeskije metody i problemy rozmieszczenija proizwodstwa", Izdatielstwo Ekonomiczieskoj litieratury. Moskwa 1963 s. 213.

Przy rozwiązywaniu powyższego zadania autorzy dokonując szeregu przekształceń doprowadzają zbudowany model do problemu transportowego i obliczają poszukiwane wartości ekstremalne znanym algorytmem transportowym[18]. W polskiej literaturze ekonomicznej budowane są również liniowe modele rozmieszczenia sił wytwórczych, których rozwiązań poszukuje się przy pomocy zmodyfikowanych problemów transportowych[19].

Dokonywanie analizy międzyregionalnej przy pomocy metody przepływów międzygałęziowych, a następnie poszukiwanie rozwiązań optymalnych modeli rozmieszczenia sił wytwórczych przy pomocy metod programowania liniowego jest niewątpliwie dużym osiągnięciem prac naukowych ostatnich lat. Niemniej jednak nie można zapominać o niedostatkach kryjących się w budowanych modelach. Wiadomo przecież, że zarówno koszty produkcji jak i transportu, ogólnie rzecz biorąc, nie są funkcjami liniowymi, dlatego też formułowanie "szkieletu" rzeczywistości w formie liniowego modelu rozmieszczenia sił wytwórczych przedstawia badaną rzeczywistosć w sposob bardzo uproszczony. Przy badaniu liniowych modeli rozmieszczenia sił wytwórczych, a także przy próbach budowania modeli nieliniowych[20] zakłada się, iż liczba zakładów produkcyjnych jest z góry zadana i niezmienna. Nie bada się czy tego samego zadania produkcyjnego nie można by zrealizować niższym kosztem przy mniejszej lub większej liczbie zakładów produkcyjnych. Niezależnie od zauważonych "Uproszczeń" liniowych modeli rozmieszczenia sił wytwórczych w literaturze ekonomicznej nie zauważyliśmy badań nad dynamicznymi modelami rozmieszczenia sił wytwórczych w sensie budowania funkcji kryterium i warunków ograniczających, a następnie poszukiwania wartości ekstremalnych.

---

18) Por. Z. Czerwiński op. cit. s. 170.

19) Por. np. H. Fiszel, E. Vielrose "Lokalizacja produkcji i koszty transportu", Ekonomista Nr 2 1962, s. 393-410 oraz artykuły J. Nykowskiego w "Ekonomiście" Nr 1 1963 i W. Szwarca w "Przeglądzie statystycznym" Nr 1 1965 jak również artykuł W. Szwarca w "Zastosowaniach Matematyki" t. VI z.2, 1962 M. Nieduszyński "Wieloetapowy model czynności produkcyjnych i transportowych. Warszawa 1964 PWN.

20) Por. artykuł J.W. Girsanowa i B.T. Pollaka w pracy "Problemy optimalnowo planirowanija i uprawnienija proizwodstwa". Izdatielstwo Moskowskowo Uniwiersitieta 1062, s. 161.

Biorąc pod uwagę wyżej sformułowane wskazówki dotyczące problemu rozmieszczenia sił wytwórczych oraz biorąc pod uwagę zauważone niedostatki w konstruowaniu modeli rozmieszczenia sił wytwórczych, łatwiej będzie sformułować problem produkcyjno-transportowy nie zawierający wspomnianych usterek.

Łatwiej będzie postawić cele badań naszego cząstkowego problemu należącego do teorii rozmieszczenia sił wytwórczych, gdyż jasno widzimy jego miejsce w ogólnej problematyce rozmieszczenia sił wytwórczych.

Stawiamy przed sobą dwa cele.

1. Zbudować model produkcyjno-transportowy, w którym funkcja kryterium będzie sumą nieliniowych funkcji kosztów produkcji i kosztów transportu.
2. Rozbudować metody programowania dynamicznego do takiego etapu, aby można było przy ich pomocy rozwiązać sformułowany model produkcyjno-transportowy.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że przed przystąpieniem do budowy dynamicznego modelu produkcyjno-transportowego musimy wyraźnie sprecyzować cel badanego problemu w ramach perspektywicznego planu gospodarki narodowej. Pamiętać przy tym należy, iż cel ten musi być uogólnieniem wyżej sformułowanych celów. Sądzimy, że jeśli rozpatrujemy problem produkcyjno-transportowy w całokształcie planu gospodarki narodowej, wówczas jego celem jest takie zaplanowanie produkcji i transportu, które zabezpieczy planowy wszechstronny rozwój gospodarki narodowej. Dlatego też w opracowaniu niniejszym będziemy starali się znaleźć optymalne rozwiązanie problemu produkcyjno-transportowego, który to problem wynika z założeń perspektywicznego planu gospodarki narodowej. Przy czym przez optymalizację problemu produkcyjno-transportowego będziemy rozumieli znalezienie odpowiedzi na pytania:

Kiedy, gdzie, ile, czego produkować, tak aby zbudowana funkcja kosztów produkcji i transportu osiągnęła minimum oraz były spełnione warunki (były zaspokojone potrzeby), wynikające z planu gospodarki narodowej.

Rozwijając pytania: kiedy, gdzie, ile, czego, należy wyjaśnić, że:

- w pytaniu "czego" zawarta jest myśl dotycząca rodzaju surowca oraz rodzaju produktu,
- jeśli pytamy "ile", wówczas chcemy dowiedzieć się jak wielka powinna być produkcja surowców oraz produktów,
- w pytaniu "gdzie" zawarta jest myśl dotycząca miejsca produkcji surowców i produktów występujących w badanym modelu,
- formułując pytanie "kiedy" stwierdzamy tym samym, że rozpatrywany model jest dynamiczny.

Przez dynamiczny model rozumiemy taki model, w którym wyniki działalności gospodarczej w okresie poprzednim wpływają na działalność w okresie następnym.

Zadaniem naszym będzie więc - zgodnie z tytułem opracowania - znalezienie odpowiedzi na pytanie: w którym okresie ile produkować i przewozić, tak aby zapewnić realizację planu centralnego.

2.2. Interpretacja ekonomiczna parametrów występujących w budowanym modelu

Z rozważań przedstawionych w poprzednim podrozdziale wynika, że pewne elementy perspektywicznego planu rozwoju gospodarki narodowej potraktujemy jako wielkości dane, dzięki czemu będziemy mogli przystąpić do budowy dynamicznego modelu produkcyjno-transportowego.

Inaczej mówiąc z planu perspektywicznego rozwoju gospodarki narodowej zaczerpniemy szereg informacji dotyczących parametrów występujących w budowanym modelu.

Przypuśćmy więc, że ustalono plan gospodarki narodowej na T okresów (np. 5 lat).

Przypuśćmy dalej, iż w planie gospodarki narodowej ustalono jak wielka powinna być produkcja produktów.

Przyjmijmy oznaczenia:

D_1 - łączna ilość produktu 1-go rodzaju wytworzonego w T okresach

D_2 - łączna ilość produktu 2-go rodzaju wytworzonego w T okresach

....

....

D_w - łączna ilość produktu w-tego rodzaju wytworzonego w T okresach.

Przyjmijmy, że w planie centralnym planujemy wytworzenie w omawianych T okresach wytworzenie następującej ilości surowców[21]:

C_1 - łączna ilość surowca 1-go rodzaju wytworzonego w T okresach

C_2 - łączna ilość surowca 2-go rodzaju wytworzonego w T okresach

....

C_l - łączna ilość surowca l-tego rodzaju wytworzonego w T okresach.

2.2.1. Miejsca produkcji surowców i produktów

W rozważanych T okresach miejsca produkcji surowców i produktów można podzielić na dwie grupy. Do grupy pierwszej zaliczymy takie miejsca w których już w pierwszym okresie badanych T okresów produkowane są surowce bądź produkty. Wynika stąd, że w miejscach tych istnieją możliwości kontynuowania produkcji w następnych okresach - w drugim, trzecim itd. - w ostatnim.

Do drugiej grupy miejsc wytwarzania surowców i produktów należą takie miejsca, w których dzięki nakładom inwestycyjnym w okresach poprzednich objętych planem może być rozpoczęta i kontynuowana produkcja w okresach następnych. Problem polega więc na tym, że już na początku pierwszego okresu badanych T okresów, wiemy gdzie można budować zakład produkcyjny. Wiemy również jak wielkie nakłady inwestycyjne należy ponieść w danych miejscach, aby cykl produkcyjny mógł być rozpoczęty i kontynuowany. Zagadnienie wyboru odpowiednich miejsc produkcji jest właśnie myślą przewodnią niniejszego opracowania.

---

21) Zwrócić należy uwagę na to, że łączna ilość każdego z wytwarzanych surowców składa się z 2 części:
a) pierwsza część wynika z planu produkcji produktów - część ta jest bowiem przeznaczona na produkcję produktów
b) część druga produkcji każdego z surowców przeznaczona jest na cele nieprodukcyjne - eksport.

Wprowadźmy więc oznaczenia symbolizujące numery miejsc wytwarzania surowców i produktów.
Niech $r = 1,2,\dots,k_1, k_1 + 1,\dots,k$ oznaczają numery miejsc wytwarzania surowców[22] w poszczególnych okresach należących do rozpatrywania T okresów.
Przy tym wskaźniki $r = 1,2,\dots k_1$ oznaczać będą miejsca, w których s-ty $(s = 1,2,\dots,l)$ surowiec jest produkowany już w pierwszym okresie i jego produkcja może być w tych miejscach kontynuowana w okresach następnych.
Wskaźniki $r = k_1 + 1,\dots,k$ są związane z takimi miejscami wytwarzania omawianych surowców, gdzie w wyniku nakładów inwestycyjnych w okresach poprzednich objętych planem, mogą być wytwarzane surowce w okresach następnych.

Analogicznie wprowadzamy oznaczenia symbolizujące numery miejsc wytwarzania produktów.
Niech więc $i = 1,2,\dots,m_1, m_1 + 1,\dots,m$ oznaczają numery miejsc wytwarzania produktów w poszczególnych okresach należących do rozpatrywanych okresów.
Wskaźniki $i = 1,2,\dots,m_1$ oznaczać będą miejsca, w których już w pierwszym okresie produkowany jest p-ty $(p = 1,2,\dots,w)$ produkt - produkcja p-tego produktu w wymienionych miejscach może być kontynuowana w okresie 2-gim, trzecim itd. oraz w ostatnim.
Wskaźniki $i = m_1 + 1, m_1 + 2,\dots,m$ związane są z takimi miejscami wytwarzania produktów w odpowiednich okresach, gdzie w wyniku nakładów inwestycyjnych w okresach poprzednich objętych planem mogą być wytwarzane produkty w okresach następnych.

Z przedstawionych rozważań oraz z teorii rozmieszczenia sił wytwórczych wynika, że w budowanym modelu nakłady inwe-

---

[22] W szczególnym przypadku niektóre z miejsc wytwarzania surowców mogą symbolizować kraj, z którego te surowce importujemy. Może się również zdarzyć, że z pewnego kraju importujemy produkty niezbędne do dalszej produkcji. W omawianym przypadku termin "surowce" będzie pojęciem szerokim. Przez "surowce" rozumieć będziemy wszystkie te przedmioty, które importujemy w celu zabezpieczenia realizacji produkcji krajowej.
Przez koszty produkcji "surowców" importowanych rozumieć będziemy ich ceny.

stycyjne w okresach poprzednich należących do badanego planu, zarówno w miejscach produkcji surowców jak i produktów powinny uwzględniać:

1) nakłady inwestycyjne związane z budową nowych zakładów produkcyjnych,
2) nakłady inwestycyjne związane z rozbudową istniejących zakładów produkcyjnych,
3) nakłady inwestycyjne związane z modernizacją środków produkcji,
4) nakłady inwestycyjne związane z inwestycjami towarzyszącymi.

2.2.2. Wielkości poszukiwane

W budowanym modelu pierwszą grupę niewiadomych będą stanowiły ilości wytwarzanych surowców oraz produktów. Drugą grupę niewiadomych będą stanowiły ilości przewożonych surowców z miejsc ich wytwarzania do miejsc produkcji oraz ilość przewożonych produktów z miejsc ich wytwarzania do hurtowni[23].

Poszukiwaną ilość s-tego surowca w okresie t w r-tym miejscu wytwarzania oznaczymy przez:

$$X_{rs}^{t}$$

gdzie $t = 1,2,\ldots,T$, $s = 1,2,\ldots,l$, $r = 1,2,\ldots,k$.

Poszukiwaną ilość p-tego produktu w okresie t w i-tym miejscu wytwarzania oznaczymy przez:

$$Y_{ip}^{t}$$

gdzie $t = 1,2,\ldots,T$, $p = 1,2,\ldots,w$, $i = 1,2,\ldots,m$

Poszukiwaną ilość "przepływającego" s-tego surowca w okresie t z r-tego miejsca wytwarzania do i-tej fabryki oznaczymy przez:

---

23) Przez hurtownię rozumieć będziemy miejsce, w którym istnieje zapotrzebowanie na wytworzone w i-tym zakładzie produkcyjnym produkty. W szczególnym przypadku hurtownią może być miejsce wytwarzania surowców, jeśli tylko w tym miejscu istnieje zapotrzebowanie na wytwarzane produkty. Hurtownię może również symbolizować kraj, do którego eksportujemy wytworzone produkty.

$$X^t_{sri}$$

gdzie $t = 1,2,\ldots,T$, $s = 1,2,\ldots l$, $r = 1,2,\ldots,k$, $i=1,2,\ldots,m$

Poszukiwaną ilość "przepływającego" p-tego produktu w okresie t z i-tego miejsca wytwarzania do j-tej hurtowni oznaczymy przez:

$$Y^t_{ijp}$$

gdzie $t = 1,2,\ldots,T$, $p = 1,2,\ldots w$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$

2.2.3. Koszty produkcji oraz koszty transportu

W budowanym modelu uwzględniamy miejsca w których już w pierwszym okresie rozpatrywanych T okresów istnieje cykl produkcyjny oraz takie miejsca, w których dzięki nakładom inwestycyjnym w okresach poprzednich objętych planem może być rozpoczęty i kontynuowany cykl produkcyjny w okresach następnych, dlatego też należy rozróżnić koszty produkcji dwojakiego rodzaju.

W przypadku gdy w pewnych miejscach istnieją zakłady produkcyjne, wówczas na koszty produkcji w tych miejscach złożą się:

a) koszty stałe (względnie stałe)
b) koszty zmienne
c) nakłady inwestycyjne w okresach poprzednich objętych w planie, przeznaczone na rozbudowę zakładu produkcyjnego lub na modernizację środków produkcji.

Jeśli w pewnych miejscach dzięki nakładom inwestycyjnym w okresach poprzednich objętych planem możliwe jest rozpoczęcie i kontynuowanie produkcji w okresach następnych objętych planem, wówczas w miejscach tych na koszty produkcji w okresach następnych złożą się:

a) nakłady inwestycyjne w okresach poprzednich objętych planem przeznaczone na budowę zakładu produkcyjnego oraz nakłady na inwestycje towarzyszące
b) koszty stałe oraz zmienne w tych okresach, w których cykl produkcyjny trwa.

Ponieważ nie jest celem pracy przedstawianie szczegółowej analizy związanej z kosztami produkcji oraz rozważań na temat nakładów inwestycyjnych, dlatego też ograniczymy się do podania oznaczeń literowych przedstawiających koszty produkcji surowców i produktów.

Jeśli więc produkcja s-tego surowca w r-tym miejscu w okresie t, wynosi: X^t_{rs}, wówczas odpowiadające koszty produkcji oznaczymy przez:

$$g^t_{rs}\left(X^t_{rs}\right).$$

Jeśli produkcja p-tego produktu w i-tym miejscu w okresie t wynosi: Y^t_{ip}, wtedy odpowiadające koszty produkcji oznaczać będziemy przez:

$$f^t_{ip}\left(Y^t_{ip}\right).$$

Jeśli chodzi o koszty transportu,to w naszym modelu koszty te będą również funkcjami nieliniowymi. W ten sposób model nasz będzie wierniej odzwierciedlał rzeczywistość,aniżeli modele, w których funkcje kosztów transportu są funkcjami liniowymi.

Tak więc koszty "przepływu" s-tego surowca z r-tego miejsca wytwarzania w okresie t oznaczymy przez:

$$g^t_{ris}\left(X^t_{irs}\right)$$

gdzie: $i = 1,2,\ldots,m$, $r = 1,2,\ldots,k$, $t = 1,2,\ldots,T$, $s = 1,2,\ldots,l$.

Koszty "przepływu" p-tego produktu z i-tej fabryki do j-tej hurtowni w okresie t oznaczać będziemy przez:

$$f^t_{ijp}\left(Y^t_{ijp}\right)$$

gdzie: $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, $t = 1,2,\ldots,T$, $p = 1,2,\ldots,w$.

Na podstawie badań dotyczących funkcji kosztów produkcji i kosztów transportu zakładamy, że funkcje występujące w naszym modelu są ciągłe i różniczkowalne w przedziałach ich określoności oraz, że pierwsze ich pochodne są dodatnie, drugie pochodne są ujemne.

2.2.4. Moce produkcyjne w badanych miejscach wytwarzania surowców oraz produktów

Przez moc produkcyjną badanego miejsca wytwarzania surowców lub produktów rozumieć będziemy ilość produkcji o określonej strukturze asortymentowej i ustalonym zakresie kooperacji, którą można uzyskać w danym okresie przy pełnym wykorzystaniu wszystkich czynników występujących w optymalnych warunkach techniczno-ekonomicznych[24].

W badanym modelu wyżej sformułowana definicja będzie dotyczyła górnej mocy produkcyjnej. Górna moc produkcyjna lub górne ograniczenie produkcji będzie więc symbolizowała wielkość produkcji, której realizacja jest możliwa w każdym z rozpatrywanych miejsc wytwarzania surowców oraz produktów.

Z perspektywicznego planu rozwoju gospodarki narodowej wynika, że w każdym z badanych miejsc wytwarzania surowców oraz produktów, wielkość produkcji nie może być mniejsza od z góry zadanej liczby, która to liczba jest zdeterminowana przez czynniki wynikające z socjalistycznych ogólnospołecznych stosunków.

Z tych też powodów w rozważaniach naszych wystąpi pojęcie dolnego ograniczenia produkcji, które to pojęcie będzie symbolizowało najmniejszą dopuszczalną wielkość produkcji w danym miejscu.

Wykorzystując powyższe uwagi wprowadźmy oznaczenia:

a_{rs}^{t}, gdzie $r = 1,2,\dots,k$, $s = 1,2,\dots,L$, $t = 1,2,\dots,T$ — dolne ograniczenie produkcji w r-tym miejscu wytwarzania s-tego surowca w okresie t.

b_{rs}^{t}, gdzie $r = 1,2,\dots,k$, $s = 1,2,\dots,L$, $t = 1,2,\dots,T$ — górna moc produkcyjna w r-tym miejscu wytwarzania s-tego surowca w okresie t.

c_{ip}^{t}, gdzie $i = 1,2,\dots,m$, $p = 1,2,\dots,W$, $t = 1,2,\dots,T$ — dolne ograniczenie produkcji w i-tym miejscu wytwarzania p-tego produktu w okresie t.

---

24) Por. "Ekonomika przedsiębiorstwa przemysłowego", Warszawa 1965 PWE, s. 119.

d^t_{ip}, gdzie $i = 1,2,\dots,m$, $p = 1,2,\dots,W$, $t = 1,2,\dots,T$ — górna moc produkcyjna w i-tym miejscu wytwarzania p-tego produktu w okresie t.

2.2.5. Zapotrzebowanie na surowce oraz na produkty

Oczywistą jest rzeczą, że jeśli w i-tym zakładzie wytwarzany jest p-ty produkt w okresie t, wówczas na produkcję tegoż p-tego produktu potrzebne są określone ilości różnych surowców. Powyższy fakt zapiszmy w postaci:

$$X^t_{isp} = A^t_{isp}\, Y^t_{ip}$$

gdzie: Y^t_{ip} - wielkość produkcji p-tego produktu w i-tej fabryce w t-tym okresie

X^t_{isp} - zapotrzebowanie i-tej fabryki na s-ty surowiec w okresie t w celu wyprodukowania p-tego produktu w ilości: Y^t_{ip}

A^t_{isp} - współczynnik techniczny produkcji.

Z teorii przepływów międzygałęziowych wiadomo, że współczynnik techniczny produkcji mówi nam ile potrzeba s-tego surowca w i-tej fabryce w okresie t na wyprodukowanie jednostki p-tego produktu.

Z powyższych wyjaśnień wynika, że łączne zapotrzebowanie i-tej fabryki na s-ty surowiec w celu wyprodukowania "w" produktów można wyrazić funkcją:

$$Z^t_{is} = \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, Y^t_{ip}$$

Dla potrzeb budowanego modelu wprowadźmy pojęcie "średniego" współczynnika technicznego produkcji. Niech więc wyrażenie:

$$A_{sp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} A^t_{isp}}{m \times T}$$

mówi nam ile surowca s-tego rodzaju potrzeba "średnio" na wytworzenie jednostki produkcji p-tego rodzaju.

Jeśli więc zechcemy wytworzyć produkt p-tego rodzaju w ilości D_p, w takim razie średnie zapotrzebowanie na surowiec s-tego rodzaju wyniesie: $A_{sp}\ D_p$.

Z powyższego wynika, że zapotrzebowanie na surowiec s-tego rodzaju w celu wyprodukowania "w" produktów wyrazi się wzorem:

$$C_s = \sum_{p=1}^{w} A_{sp}\ D_p$$

Ponieważ w modelu przyjmujemy, że wielkościami danymi są D_p, A_{sp}, w takim razie wielkości C_s dla $s = 1,2,\ldots l$, są wielkościami danymi określonymi wyżej sformułowanym wzorem.

W budowanym modelu wprowadzimy zmienną P^t_{jp} - symbolizującą zapotrzebowanie j-tej hurtowni na p-ty produkt w okresie t.

Ponadto przyjmijmy, że

$$'B^t_{jp} \leqslant P^t_{jp} \leqslant {}''B^t_{jp}$$

gdzie: $'B^t_{jp}$ - dolne ograniczenie zapotrzebowania na p-ty produkt w j-tej hurtowni w okresie t

$''B^t_{jp}$ - górne ograniczenie zapotrzebowania na p-ty produkt w j-tej hurtowni w okresie t.

2.3. Zestawienie parametrów występujących w budowanym modelu

W celu przejrzystego przedstawienia dróg prowadzących do zbudowania dynamicznego modelu produkcyjno-transportowego, pokażemy obecnie w syntetycznej postaci parametry opisane w poprzednim podrozdziale.

Jak pamiętamy problem produkcyjno-transportowy rozpatrywać będziemy w t kolejnych okresach ($t = 1,2,\ldots,T$). Numery miejsc produkcji surowców i produktów, numery hurtowni oraz numery surowców i produktów - zgodnie z wprowadzonymi uprzednio wyjaśnieniami - oznaczać będziemy następująco:

(2.3.1.) $r = 1,2,\ldots,k_1, k_1 + 1,\ldots,k$ - numery miejsc wytwarzania surowców[25]

(2.3.2.) $s = 1,2,\ldots,l$ - numery poszczególnych rodzajów surowców produkowanych w każdym z rozpatrywanych miejsc ich wytwarzania w każdym okresie $t = 1,2,\ldots,T$

(2.3.3.) $i = 1,2,\ldots,m_1, m_1 + 1,\ldots,m$ - numery miejsc wytwarzania produktów

(2.3.4.) $p = 1,2,\ldots,W$ - numery poszczególnych produktów wytwarzanych w każdym z rozpatrywanych zakładów, w każdym okresie $t=1,2,\ldots,T$

(2.3.5.) $j = 1,2,\ldots,n$ - numery hurtowni w których istnieje zapotrzebowanie na wytwarzane produkty w badanych okresach[26]

Wprowadźmy obecnie oznaczenia na ilości produkowanych i przewożonych surowców i produktów

(2.3.6.) X^t_{rs} - ilość s-tego surowca produkowanego w r-tym miejscu w okresie t.

(2.3.7.) X^t_{sri} - ilość s-tego surowca przewożonego z r-tego miejsca do i-tej fabryki w okresie t.

(2.3.8.) Y^t_{pi} - ilość p-tego produktu wytwarzanego w i-tej fabryce w okresie t.

(2.3,9.) Y^t_{pij} - ilość p-tego produktu przewożonego z i-tej fabryki do j-tej hurtowni w okresie t.

Produkcja w każdej fabryce, w każdym mmiejscu wytwarzania surowców i w każdym podokresie jest ograniczona przez dolną i górną moc produkcyjną.

---

25) Zgodnie z wyjaśnieniami poprzedniego podrozdziału, miejscami produkcji surowców może być kraj, z którego te surowce importujemy.

26) W szczególnym przypadku przez hurtownię rozumieć będziemy kraj, do którego eksportujemy wyprodukowane produkty określone w (2,3.4.). Jeśli w miejscu wytwarzania surowców istnieje zapotrzebowanie na produkty (2.3.4.), wówczas przez hurtownie rozumieć będziemy to miejsce.

(2.3.10.) a^t_{rs} - dolne ograniczenie mocy produkcyjnej w r-tym miejscu wytwarzania s-tego surowca w okresie t.

(2.3.11.) b^t_{rs} - górna moc produkcyjna w r-tym miejscu wytwarzania s-tego surowca w okresie t.

(2.3.12.) c^t_{pi} - dolne ograniczenie mocy produkcyjnej w i-tym miejscu wytwarzania p-tego produktu w okresie t.

(2.3.13.) d^t_{pi} - górna moc produkcyjna w i-tym miejscu wytwarzania p-tego produktu w okresie t.

(2.3.14.) $a^t_{rs} \leqslant X^t_{rs} \leqslant b^t_{rs}$ - ograniczenie mocy produkcyjnej s-tego surowca w okresie t w r-tym miejscu.

(2.3.15.) $c^t_{ip} \leqslant Y^t_{ip} \leqslant d^t_{ip}$ - ograniczenie mocy produkcyjnej p-tego produktu w okresie t w i-tym miejscu.

(2.3.16.) $Z^t_{is} = \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, Y^t_{ip}$ - zapotrzebowanie i-tej fabryki na s-ty surowiec w celu wyprodukowania "w" produktów.

Z warunku (2.3.15) oraz z budowy funkcji (2.3.16) wynika ograniczoność funkcji Z^t_{is} postaci:

(2.3.17.) $'A^t_{is} \leqslant Z^t_{is} \leqslant {}''A^t_{is}$ [27]

---

27) Rzeczywiście, jeśli

$$c^t_{ip} \leqslant Y^t_{ip} \leqslant d^t_{ip},$$

wtedy

$$A^t_{isp}\, c^t_{ip} \leqslant A^t_{isp}\, Y^t_{ip} \leqslant A^t_{isp}\, d^t_{ip}$$

czyli

$$\sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, c^t_{ip} \leqslant \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, Y^t_{ip} \leqslant \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, d^t_{ip}$$

Gdy przyjmiemy, że:

$$\sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, c^t_{ip} = {}'A^t_{sp}$$

oraz gdy

$$\sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\, d^t_{ip} = {}''A^t_{sp},$$

wtedy otrzymujemy (2.3.17).

(2.3.13.) $'B_{jp}^{t} \leqslant p_{jp}^{t} \leqslant {}''B_{jp}^{t}$ - zapotrzebowanie j-tej hurtowni na p-ty produkt w okresie t.

Planista centralny biorąc pod uwagę moce produkcyjne w badanych miejscach wytwarzania surowców i w badanych miejscach wytwarzania produktów oraz biorąc pod uwagę zapotrzebowania każdej fabryki na surowce i każdej hurtowni na produkty ustala - łączną wielkość produkcji surowców i produktów we wszystkich badanych okresach, dlatego też wprowadzimy oznaczenia:

(2.3.18.) C_s - łączna produkcja s-tego surowca wytwarzanego we wszystkich badanych okresach.

(2.3.19.) D_p - łączna produkcja p-tego produktu wytwarzanego we wszystkich badanych okresach.

Z produkcją i transportem zarówno surowców jak i produktów związane są koszty[28].

(2.3.20.) $g_{rs}^{t}\ (X_{rs}^{t})$ - funkcja kosztów produkcji s-tego surowca w r-tym miejscu wytwarzania w okresie t.

(2.3.21.) $g_{sri}^{t}\ (X_{sri}^{t})$ - koszty transportu s-tego surowca z r-tego miejsca wytwarzania do i-tej fabryki w podokresie t.

(2.3.22.) $f_{pi}^{t}\ (Y_{pi}^{t})$ - koszty produkcji p-tego produktu z i-tej fabryki do j-tej hurtowni w podokresie t.

(2.3.23.) $f_{ijp}^{t}\ (Y_{ijp}^{t})$ - koszty transportu p-tego produktu z i-tej fabryki do j-tej hurtowni w podokresie t[29].

---

28) W problemach lokalizacyjnych bada się minimalizację produkcji i obrotu z uwzględnieniem siły roboczej. Uwzględniając zagadnienie siły roboczej w decyzjach lokalizacyjnych bierzemy pod uwagę koszty jej przesunięcia. Na koszty przesunięcia siły roboczej składają się: koszty budownictwa mieszkaniowego i socjalno-kulturalnego związane z uzyskaniem siły roboczej w miejscu lokalizacji zakładu (por. E. Minc "Ekonomia polityczna socjalizmu" Warszawa 1965 PWE s.215). W naszych badaniach koszty związane z siłą roboczą włączamy do kosztów produkcji.

29) Zakładamy, że funkcje wyrażone przez (2.3.20) - (2.3.23) są funkcjami wypukłymi.

2.4. Budowa funkcji kryterium oraz warunków ograniczających dynamicznego modelu produkcyjno-transportowego

W badanym modelu produkcyjno-transportowym minimalizować będziemy łączne koszty produkcji i transportu przy zadanych z góry warunkach. Jeśli więc weźmiemy pod uwagę oznaczenia zawarte we wzorach (2.3.1.) - (2.3.23.), wówczas łączne koszty produkcji i transportu będą miały postać:

$$(2.4.1.)\quad \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} g^t_{rs}\,(X^t_{rs}) + \sum_{s=1}^{l}\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} g^t_{sri}\,(X^t_{sri}) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{w}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} f^t_{pi}\,(Y^t_{pi}) + \sum_{p=1}^{w}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} f^t_{ijp}\,(Y^t_{ijp})$$

Minimum formy (2.4.1) poszukiwać będziemy przy następujących warunkach:

(2.4.2.) $\sum_{i=1}^{m} X^t_{ris} = X^t_{rs}$ – przepływ s-tego surowca z r-tego miejsca wytwarzania do m - fabryk w okresie t jest równy wielkości produkcji tegoż surowca w r-tym miejscu w okresie t.

(2.4.3.) $a^t_{rs} \leqslant X^t_{rs} \leqslant b^t_{rs}$ – ograniczenie mocy produkcyjnej s-tego surowca w r-tym miejscu w okresie t.

(2.4.4.) $\sum_{r=1}^{k} X^t_{ris} = Z^t_{is}$ – przepływ s-tego surowca z k - miejsc wytwarzania do i-tej fabryki w okresie t, jest równy zapotrzebowaniu i-tej fabryki na s-ty surowiec w okresie t.

(2.4.5.) $'A^t_{is} \leqslant Z^t_{is} \leqslant {}''A^t_{is}$ – ograniczenie zapotrzebowania i-tej fabryki na s-ty surowiec w okresie t.

(2.4.6.) $\sum_{j=1}^{n} Y^t_{ijp} = Y^t_{ip}$ – przepływ p-tego produktu z i-tej fabryki do n - hurtowni jest równy wielkości produkcji tegoż produktu w i-tej fabryce w okresie t.

(2.4.7.) $c_{ip}^{t} \leqslant Y_{ip}^{t} \leqslant d_{ip}^{t}$ - ograniczenie mocy produkcyjnej p-tego produktu w i-tej fabryce w okresie t.

(2.4.8.) $\sum_{i=1}^{m} Y_{ijp}^{t} = P_{jp}^{t}$ - przepływ p-tego produktu z m - fabryk do j-tej hurtowni jest równy zapotrzebowaniu j-tej hurtowni na p-ty produkt w okresie t.

(2.4.9.) $'B_{jp}^{t} \leqslant P_{jp}^{t} \leqslant {''B}_{jp}^{t}$ - ograniczenie zapotrzebowania j-tej hurtowni na p-ty produkt w okresie t.

Centralny organ planujący biorąc pod uwagę moce produkcyjne zakładów wytwarzających produkty oraz biorąc pod uwagę zapotrzebowanie na produkty ustala,że łączna produkcja p-tego produktu w T okresach, w m - fabrykach winna być równa D_p gdzie $p = 1,2,\ldots,w$, czyli:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} = D_p, \quad p = 1,2,\ldots,w \tag{2.4.10.}$$

Centralny organ planujący ustalając wielkość łącznej produkcji p-tego produktu musi jednocześnie ustalić wielkość łącznej produkcji s-tego surowca niezbędną do wyprodukowania planowanych ilości produktów. Niech więc łączna produkcja s-tego surowca wynosi C_s, czyli:

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{T} X_{rs}^{t} = C_s, \quad s = 1,2,\ldots,l \tag{2.4.11.}$$

gdzie

$$C_s = \sum_{p=1}^{w} A_{sp} D_p$$

$$X_{rs}^{t} \geqslant 0, \quad X_{ris}^{t} \geqslant 0, \quad Y_{ip}^{t} \geqslant 0, \quad Y_{ijp}^{t} \geqslant 0 \tag{2.4.12.}$$

W podsumowaniu przedstawionych w niniejszym podrozdziale oznaczeń, należy stwierdzić, że:

a) przez dynamiczny model produkcyjno-transportowy rozumieć będziemy związki wyrażone wzorami (2.4.1)-(2.4.12)
b) przez funkcję kryterium w zbudowanym modelu rozumieć będziemy funkcję wyrażoną wzorem (2.4.1).
Łatwo widzieć, że funkcja kryterium przedstawia łączne koszty produkcji i transportu surowców oraz produktów
c) przez warunki ograniczające badanego modelu rozumieć będziemy związki wyrażone wzorami (2.4.2) - (2.4.12)
d) przez rozwiązanie modelu (2.4.1) - (2.4.12) rozumieć będziemy znalezienie składowych wektorów:

$$\left(X_{rs}^{ot}\right), \left(X_{ris}^{ot}\right), \left(Y_{ip}^{ot}\right), \left(Y_{ijp}^{ot}\right),$$

które minimalizują formę (2.4.1) i jednocześnie spełniają warunki (2.4.2) - (2.4.12).

2.5. Niesprzeczność modelu

Przed przystąpieniem do poszukiwania algorytmu dającego optymalne rozwiązanie badanego modelu zastanówmy się nad problemem niesprzeczności rozważanego modelu.

Ogólnie rzecz biorąc przez model niesprzeczny rozumiemy taki model, w którym wnioski wynikające z przyjętego układu warunków ograniczających są niesprzeczne.

Tak więc dla zbadania niesprzeczności badanego modelu należy wziąć pod uwagę wnioski wynikające z warunków (2.4.2) - (2.4.12).

Zwróćmy najpierw uwagę na warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ijp}^{t} = Y_{ip}^{t}, \qquad \sum_{i=1}^{m} Y_{ijp}^{t} = P_{jp}^{t}$$

Z powyższych związków łatwo widać, że:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} Y_{ijp}^{t} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} \qquad p = 1,2,\dots,w$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} Y_{ijp}^{t} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} P_{jp}^{t}$$

czyli

$$(2.5.1) \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} P_{jp}^{t} \qquad p = 1,2,\ldots,w$$

Jeśli weźmiemy obecnie pod uwagę ograniczenia:

$$c_{ip}^{t} \leqslant Y_{ip}^{t} \leqslant d_{ip}^{t}, \qquad 'B_{jp}^{t} \leqslant P_{jp}^{t} \leqslant {}''B_{jp}^{t}$$

wówczas łatwo otrzymamy:

$$(2.5.2) \quad q_{1p} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} c_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} d_{ip}^{t} = Q_{1p}$$

$$p = 1,2,\ldots,w$$

gdzie: q_{1p} - suma dolnych ograniczeń produkcji p-tego produktu w m - zakładach, w T - okresach

Q_{1p} - suma górnych ograniczeń produkcji p-tego produktu w m - zakładach, w T - okresach

$$(2.5.3) \quad q_{2p} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} {}'B_{jp}^{t} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} P_{jp}^{t} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} {}''B_{jp}^{t} = Q_{2p}$$

$$p = 1,2,\ldots,w$$

gdzie: q_{2p} - suma dolnych ograniczeń zapotrzebowania na p-ty produkt w n - hurtowniach, w T - okresach

Q_{2p} - suma górnych ograniczeń zapotrzebowania na p-ty produkt w n - hurtowniach, w T - okresach.

Gdy uwzględnimy (2.5.2) oraz (2.5.3) w (2.5.1), wówczas otrzymamy:

$$\max\,(q_{1p}, q_{2p}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} \leqslant \min\,(Q_{1p}, Q_{2p})$$

Ponieważ jednak

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y_{ip}^{t} = D_p,$$

więc:

$$(2.5.4) \quad \max\,(q_{1p}, q_{2p}) \leqslant D_p \leqslant \min\,(Q_{1p}, Q_{2p}), \qquad p = 1,2,\ldots,w$$

Wniosek

Centralny organ planujący ustalając wielkość produkcji p-tego produktu w m - zakładach, w T - okresach, winien pamiętać aby wielkość ta spełniała nierówność (2.5.4) - w przeciwnym bowiem przypadku model będzie sprzeczny.

Innymi słowy mówiąc, wielkość planowanej produkcji p-tego produktu z jednej strony musi być nie mniejsza od $\max(q_{1p}, q_{2p})$, czyli nie mniejsza od większej z 2 liczb, z których pierwsza: q_{1p} - przedstawia sumę dolnych ograniczeń produkcji p-tego rodzaju, druga: q_{2p} - przedstawia sumę dolnych ograniczeń zapotrzebowania na p-ty produkt.

Z drugiej strony planowana produkcja musi być nie większa od $\min(Q_{1p}, Q_{2p})$, czyli nie większa od 2 liczb Q_{1p}, Q_{2p}, których interpretację podano wyżej.

Weźmy obecnie pod uwagę warunki:

$$\sum_{i=1}^{m} X^t_{ris} = X^t_{rs}, \quad \sum_{r=1}^{k} X^t_{ris} = Z^t_{is}$$

Łatwo widzieć, że:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} X^t_{ris} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} X^t_{rs}$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} X^t_{ris} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} Z^t_{is}$$

czyli

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} X^t_{rs} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} Z^t_{is} \tag{2.5.5}$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę ograniczenia

$$a^t_{rs} \leqslant X^t_{rs} \leqslant b^t_{rs}, \qquad {}'A^t_{is} \leqslant Z^t_{is} \leqslant {}''A^t_{is}$$

wówczas łatwo otrzymamy:

$$(2.5.6)\quad q_3^s = \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} a_{rs}^t \leq \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} x_{rs}^t \leq \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} b_{rs}^t = Q_3^s$$

$$s = 1,2,\ldots,l$$

gdzie: q_3^s - suma dolnych ograniczeń produkcji s-tego surowca w k - miejscach wytwarzania oraz w T - okresach

Q_3^s - suma górnych ograniczeń produkcji s-tego surowca w k - miejscach, w T - okresach

$$(2.5.7)\quad q_4^s = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} {}'A_{is}^t \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} Z_{is}^t \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} {}''A_{is}^t = Q_4^s$$

$$s = 1,2,\ldots,l$$

gdzie: q_4^s - suma dolnych ograniczeń zapotrzebowania na s-ty surowiec w m - fabrykach, w T - okresach

Q_4^s - suma górnych ograniczeń zapotrzebowania na s-ty surowiec w m - fabrykach, w T - okresach.

Jeśli uwzględnimy (2.5.6) oraz (2.5.7) w (2.5.5), wówczas otrzymamy:

$$\max\,(q_3^s,\ q_4^s) \leq \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} X_{rs}^t \leq \min\,(Q_3^s,\ Q_4^s) \qquad s = 1,2,\ldots,l$$

Ponieważ jednak:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{T} X_{rs}^t = C_s,$$

więc:

$$(2.5.8)\quad \max\,(q_3^s,\ q_4^s) \leq C_s \leq \min\,(Q_3^s,\ Q_4^s) \qquad s = 1,2,\ldots,l.$$

Wniosek

Centralny organ planujący ustalając wielkość produkcji p-tego produktu w m - zakładach, w T - okresach i jednocześnie ustalając wielkość produkcji s-tego surowca w k - miejscach, w T - okresach winien pamiętać, aby wielkości te spełniały odpowiednio nierówności: (2.5.4) i (2.5.8), gdyż w przeciwnym wypadku model będzie sprzeczny.

Z powyższych rozważań łatwo wnioskujemy, że szczegółowa analiza warunków niesprzeczności modelu, odgrywa decydujące znaczenie w praktycznym zastosowaniu zbudowanego modelu.

Centralny organ planujący przed ewentualnym zastosowaniem w praktycznej działalności opisanego w następnych rozdziałach algorytmu, musi wiedzieć, czy planowane wielkości produkcji produktów oraz produkcji surowców spełniają nierówności (2.5.4) i (2.5.8).

Jeśli w wyniku prostych wyliczeń ograniczeń mocy produkcyjnych produkcji produktów i surowców oraz wyliczeń ograniczeń zapotrzebowania na produkty i surowce okaże się, że zaplanowana wielkość produkcji jest możliwa do zrealizowania (tzn. nierówności (2.5.4) i (2.5.8) nie są sprzeczne) wówczas możemy postawić przed sobą pytania:

- kiedy, gdzie, ile, czego produkować
- kiedy, skąd, dokąd, ile, czego przewozić

tak, aby łączne koszty produkcji i transportu były najmniejsze oraz aby były spełnione warunki ograniczające (2.4.2) - (2.4.12).

Jeśliby jednak okazało się, że ustalona przez centralny organ planujący wielkość produkcji produktów lub surowców nie spełniała warunków niesprzeczności modelu, wówczas należałoby, albo zmniejszyć planowaną produkcję produktów lub surowców, bądź też rozpatrzyć możliwość zwiększenia mocy produkcyjnych w planowanym okresie poprzez nakłady inwestycyjne na rozbudowę istniejących zakładów produkcyjnych, bądź na budowę nowych miejsc produkcji.

Zarówno w pierwszym jak i drugim wypadku dopiero po zweryfikowaniu modelu, należałoby stosować opisany w następnych rozdziałach algorytm odpowiadający zbudowanemu niesprzecznemu modelowi produkcyjno-transportowemu.

3. ROZWIĄZANIE DYNAMICZNEGO MODELU PRODUKCYJNO-TRANSPORTOWEGO

Modelowe przedstawienie problemów produkcyjno-transportowych[1] w polskiej literaturze ekonomicznej zapoczątkował M. Fiszel i E. Vielrose w znanym artykule zamieszczonym w 1962 r. w "Ekonomiście"[2]. Artykuł ten zwrócił uwagę wielu ekonomistów i matematyków na ważne nierozwiązane zagadnienie, mające zasadnicze znaczenie w działalności gospodarczej i - jak się wydaje - dlatego wywołał ożywioną dyskusję[5]. Również i w moich poprzednich badaniach myśli M. Fiszla i E. Vielrosego były bodźcem do poszukiwań. W wyniku tych badań powstała praca: "Zastosowania metod matematycznych do problemu lokalizacji produkcji"[4].

W wymienionej pracy przy pomocy programowania dynamicznego rozwiązany został problem lokalizacji produkcji jednorodnego produktu, bez uwzględnienia czynnika czasu. Obecnie również wykorzystamy podstawowe idee programowania dynamicznego w celu znalezienia rozwiązania zagadnienia postawionego w poprzednim rozdziale.

Dla skupienia uwagi przypominamy, że przez rozwiązanie modelu produkcyjno-transportowego rozumieć będziemy obliczenie minimum formy:

$$(3.0.1)\quad \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} q_{rs}^{t}\,(X_{rs}^{t}) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} q_{ris}^{t}\,(X_{ris}^{t}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w}\sum_{t=1}^{T} f_{ip}^{t}\,(Y_{ip}^{t}) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{w}\sum_{t=1}^{T} f_{ijp}^{t}\,(Y_{ijp}^{t})$$

1) Przez modelowe przedstawienie problemów produkcyjno-transportowych - jak wynika z rozważań drugiego rozdziału - rozumiemy zbudowanie funkcji tryterium uwzględniającej koszty produkcji oraz transportu i obliczenie wartości ekstremalnych tej funkcji, które to wartości muszą spełniać zbudowane warunki uboczne.

2) M. Fiszel, E. Vielrose "Lokalizacja produkcji i koszty transportu" Ekonomista Nr 2 1962 s. 399-410.

3) Dla przykładu można zwrócić uwagę na artykuł J. Nykowskiego w "Ekonomiście" Nr 1 1965.

4) L. Cendrowski "Zastosowanie metod matematycznych do problemu lokalizacji produkcji" - praca zakupiona przez KPZK Polskiej Akademii Nauk.

przy warunkach: [5]

$$(3.0.2)\quad \sum_{i=1}^{m} X^t_{ris} = X^t_{rs} \qquad r = 1,2,\dots,k, \quad s = 1,2,\dots,l$$

$$(3.0.3)\quad a^t_{rs} \leqslant X^t_{rs} \leqslant b^t_{rs} \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$(3.0.4)\quad \sum_{r=1}^{k} X^t_{ris} = Z^t_{is}\ {}^{*)} \qquad i = 1,2,\dots,m, \quad s = 1,2,\dots,l$$

$$(3.0.5)\quad {}'A^t_{is} \leqslant Z^t_{is} \leqslant {}''A^t_{is} \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$(3.0.6)\quad \sum_{j=1}^{n} Y^t_{ijp} = Y^t_{ip} \qquad i = 1,2,\dots,m, \quad p = 1,2,\dots,w$$

$$(3.0.7)\quad c^t_{ip} \leqslant Y^t_{ip} \leqslant d^t_{ip} \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$(3.0.8)\quad \sum_{i=1}^{m} Y^t_{ijp} = P^t_{jp} \qquad j = 1,2,\dots,n, \quad p = 1,2,\dots,w$$

$$(3.0.9)\quad {}'B^t_{jp} \leqslant P^t_{jp} \leqslant {}''B^t_{jp} \qquad t = 1,2,\dots,T$$

$$(3.0.10)\quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} Y^t_{ip} = D_p \qquad p = 1,2,\dots,w$$

$$(3.0.11)\quad \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{T} X^t_{rs} = C_s \qquad s = 1,2,\dots,l$$

$$(3.0.12)\quad X^t_{rs} \geqslant 0, \quad X^t_{ris} \geqslant 0, \quad Y^t_{ip} \geqslant 0, \quad Y^t_{ijp} \geqslant 0, \quad P^t_{jp} \geqslant 0$$

---

[5] Z punktu widzenia formalnego warunki (3.0.2), [redacted] (3.0.6), (3.0.8) az (3.0.11) można by pominąć, jednak wyżej wspomniane oznaczenia wprowadzamy dla przejrzystego przedstawienia pozostałych warunków ograniczających oraz dla jaśniejszego przedstawienia modyfikacji tychże warunków, która to modyfikacja będzie niezbędna w dalszych badaniach.

*) $Z^t_{is} = \sum_{p=1}^{W} A^t_{isp} Y^t_{ip}$

3.1. Oznaczenia pomocnicze

Minimum formy (3.0.1) przy warunkach (3.0.2) - (2.0.12) będziemy poszukiwali metodą programowania dynamicznego.

Przy rozwiązywaniu dowolnego zadania metodą programowania dynamicznego rozróżniamy dwa etapy. W etapie pierwszym poszukujemy ciągu równań funkcyjnych, w etapie drugim dokonujemy adaptacji wyprowadzonych równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych. W każdym z wymienionych etapów należy wprowadzić szereg nowych oznaczeń pomocniczych. Przy wyprowadzaniu ciągu równań funkcyjnych korzystać będziemy z następujących oznaczeń pomocniczych:

$$R = 1,2,\dots,k, \qquad M = 1,2,\dots,m$$

$$N = 1,2,\dots,n, \qquad S = 1,2,\dots,T$$

Niech ponadto, łączna produkcja s-tego surowca w R - miejscach wytwarzania w S - okresach wyraża się wzorem:

$$U^S_{Rs} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} X^t_{rs} \tag{3.1.1}$$

gdzie: $R = 1,2,\dots,k$, $S = 1,2,\dots,T$ dla każdego $s = 1,2,\dots,l$.
Oznaczmy przewóz s-tego surowca z R miejsc do M fabryk w S - okresach przez:

$$U^S_{RMs} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} X^t_{ris} \tag{3.1.2}$$

gdzie: $R = 1,2,\dots,k$; $M = 1,2,\dots,m$; $S = 1,2,\dots,T$ dla każdego $s = 1,2,\dots,l$.

Przyjmijmy, że łączna produkcja p-tego produktu w M fabrykach w S okresach wyraża się wzorem:

$$V^S_{Mp} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} Y^t_{ip} \tag{3.1.3}$$

gdzie: $M = 1,2,\dots,m$, $S = 1,2,\dots,T$, dla każdego $p=1,2,\dots,w$.

Niech przewóz p-tego produktu z M - fabryk do N - hurtowni w S - okresach wyrażony będzie wzorem:

$$V^S_{MNp} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{S} Y^t_{ijp} \tag{3.1.4}$$

Korzystając z oznaczeń (3.1.1) - (3.1.4) wprowadzimy do rozważań wektory:

$$\bar{U}^S_{Rs} = \left(U^S_{R1},\ U^S_{R2}, \ldots,\ U^S_{Rl}\right) \tag{3.1.5}$$

$$\bar{U}^S_{RMs} = \left(U^S_{RM1}, \text{---},\ U^S_{RM2}, \ldots,\ U^S_{RMl}\right) \tag{3.1.6}$$

$$\bar{V}^S_{Mp} = \left(V^S_{M1},\ V^S_{M2}, \ldots,\ V^S_{Mw}\right) \tag{3.1.7}$$

$$\bar{V}^S_{MNp} = \left(V^S_{MN1},\ V^S_{MN2}, \ldots,\ V^S_{MNl}\right) \tag{3.1.8}$$

Wprowadźmy wreszcie zasadnicze dla dalszych rozważań oznaczenie. Otóż jeśli formę (3.0.1) oznaczymy przez $G(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2)$, wówczas przyjmijmy, że:

$$F^{RS}_{MN}\left(\bar{U}^S_{Rs},\ \bar{U}^S_{RMs},\ \bar{V}^S_{Mp},\ \bar{V}^S_{MNp}\right. = \min G\ (X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2) \tag{3.1.9}$$

gdzie: $\bar{X}_1 = \left(X^1_{11}, \ldots, X^T_{kl}\right)$, $\quad \bar{X}_2 = \left(X^1_{111}, \ldots, X^T_{kml}\right)$

$\bar{Y}_1 = \left(Y^1_{11}, \ldots, Y^T_{mw}\right)$, $\quad \bar{Y}_2 = \left(Y^1_{111}, \ldots, Y^T_{mnw}\right)$

W badaniach, które niżej przedstawimy (3.1.9) oznaczać będzie:

- minimalne koszty produkcji l - surowców w R - miejscach ich wytwarzania w S - okresach,
- minimalne koszty transportu l - surowców z R - miejsc ich wytwarzania do M - fabryk w S - okresach,
- minimalne koszty produkcji w - produktów w M - fabrykach w S - okresach,
- minimalne koszty transportu w - produktów z M - fabryk do N - miejsc zbytu w S okresach.

Na to, aby znaleźć ciąg równań funkcyjnych wykorzystamy zasadę optymalności Bellmana, która mówi, że: "Strategia optymalna ma tę własność, że jakimkolwiek byłby stan początkowy oraz decyzja początkowa, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną względem stanu wynikającego z pierwszej decyzji"[6].

Z powyższego wynika, że w zadaniach rozwiązywanych metodą programowania dynamicznego zasadniczą rolę odgrywa pierwszy element ciągu równań funkcyjnych. W naszych rozważaniach przyjmijmy, że decyzja początkowa ma postać:

$$F_{11}^{11}\left(\overline{U}_{1s}^{1},\ \overline{U}_{11s}^{1},\ \overline{V}_{1p}^{1},\ \overline{V}_{11p}^{1}\right) = \sum_{s=1}^{l} g_{1s}^{1}\left(U_{1s}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{11s}^{1}\left(U_{11s}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{1p}^{1}\left(V_{1p}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{11p}^{1}\left(V_{11p}^{1}\right) \tag{3.1.10}$$

Z oznaczeń (3.1.1) - (3.1.4) łatwo widać, że:

$$U_{1s}^{1} = X_{1s}^{1},\quad U_{11s}^{1} = X_{11s}^{1},\quad V_{1p}^{1} = Y_{1p}^{1},\quad V_{11p}^{1} = Y_{11p}^{1} \tag{3.1.11}$$

Uwzględniając (3.1.11) w (3.1.10) otrzymujemy

$$F_{11}^{11}\left(\overline{U}_{11s}^{1},\ \overline{V}_{1p}^{1},\ \overline{V}_{11p}^{1}\right) = \sum_{s=1}^{l} g_{1s}^{1}\left(X_{1s}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{11s}^{1}\left(X_{11s}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{1p}^{1}\left(Y_{1p}\right) + = \sum_{p=1}^{w} f_{11p}^{1}\left(Y_{11p}^{1}\right) \tag{3.1.12}$$

Równanie (3.1.12) będące decyzją początkową należy czytać następująco:

---

6) R. Bellman: "Dinamiczeskoje programirowanije" - wyżej cytowane.

- w przypadku, gdy w (3.1.9) występuje: jedno miejsce wytwarzania surowców,
- jedno miejsce wytwarzania produktów
- jedno miejsce zbytu produktów
- jeden okres

wówczas w wymienionych warunkach minimalna wartość produkcji i transportu surowców oraz produktów równa jest sumie kosztów produkcji i transportu surowców oraz produktów.

Pamiętać jednak musimy, aby warunki ograniczające wyrażone przez (3.0.2) - (3.0.12) były spełnione dla zmiennych występujących w decyzji początkowej. Na to jednak, aby znaleźć warunki ograniczające, przy których należy obliczać minimum formy (3.1.12), musimy wziąć pod uwagę wyżej wprowadzone oznaczenia pomocnicze, a następnie, dokonać szeregu elementarnych przekształceń, które to przekształcenia pokażemy w następnym podrozdziale.

3.2. Zmodyfikowana postać warunków ograniczających

W dalszych badaniach przy wyprowadzaniu ciągu równań funkcyjnych wykorzystywać będziemy zmieniające się wskaźniki R,S,M,N. Z tych też powodów zmodyfikujemy warunki ograniczające modelu do nowej postaci, jednakże równoważnej pierwotnym założeniom.

Łatwo widać, że przy zmieniających się R oraz S prawdziwe są nierówności:

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} a_{rs}^{t} \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} x_{rs}^{t} \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} b_{rs}^{t} \tag{3.2.1}$$

$$0 \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} x_{rs}^{t} \leqslant c_s \qquad s = 1,2,\dots,1 \tag{3.2.2}$$

Z (3.2.1) oraz (3.2.2) otrzymujemy:

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} a_{rs}^{t} \leqslant \sum_{t=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} x_{rs}^{t} \leqslant \min\left(c_s, \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} b_{rs}^{t}\right) \tag{3.2.3}$$

Gdy w (3.2.3) uwzględnimy (3.1.1), wówczas otrzymamy:

$$(3.2.4) \qquad U_{Rs}^{S} \in \left[\sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{S} a_{rs}^{t},\ \min\left(C_s,\ \sum_{r=1}^{R} \sum_{t=1}^{S} b_{rs}^{t}\right)\right]$$

W wyrażeniu (3.2.4) $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 1,2,\ldots,k$ i każdego $S = 1,2,\ldots,T$.

Jeśli weźmiemy pod uwagę zmieniające się M i S wtedy:

$$(3.2.5) \qquad \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} c_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} Y_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t}$$

$$(3.2.6) \qquad 0 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} Y_{ip}^{t} \leqslant D_p, \qquad p = 1,2,\ldots,w$$

Z (3.2.5) oraz (3.2.6) otrzymujemy:

$$(3.2.7) \qquad \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} c_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} Y_{ip}^{t} \leqslant \min\left(D_p,\ \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t}\right)$$

Gdy w (3.2.7) uwzględnimy (3.1.3), wtedy otrzymamy:

$$(3.2.8) \qquad V_{Mp}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} c_{ip}^{t},\ \min\left(D_p,\ \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t}\right)\right]$$

gdzie: $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 1,2,\ldots,m$ i każdego $S = 1,2,\ldots,T$.

Interpretacja ekonomiczna warunków (3.2.4) i (3.2.8) jest prosta i przekonywająca.

W wyrażeniu (3.2.4) mówi się, że przy zmieniających się R i S, łączna produkcja s-tego surowca jest nie mniejsza od sumy dolnych ograniczeń produkcji tegoż surowca i nie większa od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza to, wielkość planowanej produkcji s-tego surowca, druga to suma górnych ograniczeń produkcji tegoż surowca.

Podobnie w wyrażeniu (3.2.8) mówi się, że przy zmieniających się M i S, łączna produkcja p-tego produktu jest nie mniejsza od sumy dolnych ograniczeń produkcji tegoż produktu i nie większa od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza, to wielkość planowanej produkcji p-tego produktu, druga to suma górnych ograniczeń produkcji tegoż produktu.

Zwróćmy obecnie uwagę na warunki ograniczające dotyczące przewozu surowców. Otóż z (3.0.4) przy zmniejszających się M i S mamy:

$$(3.2.9) \qquad \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} x_{ris}^{t} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} z_{is}^{t} \quad {}^{7)} \qquad s = 1,2,\ldots,l$$

Ponieważ łączny przewóz s-tego surowca z k - miejsc wytwarzania do M - fabryk, w S - okresach nie może być większy od sumy górnych ograniczeń produkcji s-tego surowca w k - miejscach w S - okresach, więc mamy:

$$(3.2.10) \qquad 0 \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} x_{ris}^{t} \leq \sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{t}$$

Gdy weźmiemy pod uwagę (3.0.5), wtedy przy zmieniających się M i S mamy:

$$(3.2.11) \qquad \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}'A_{is}^{t} \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} z_{is}^{t} \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}''A_{is}^{t}$$

Uwzględniając (3.2.10) i (3.2.11) w (3.2.9) otrzymamy:

$$(3.2.12) \qquad \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}'A_{is}^{t} \leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} x_{ris}^{t} \leq$$

$$\leq \min\left(\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{t}, \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}''A_{is}^{t}\right)$$

---

7) Zwracamy szczególną uwagę na fakt, iż w lewej stronie równości (3.2.9) k - jest ustalone, zmieniają się M i S.

Wykorzystując (3.1.2) w (3.2.12) dla R = k otrzymujemy:

$$(3.2.13)\quad U^{S}_{kMs}\left(\left[\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}{}'A^{t}_{is},\ \min\left(\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k}b^{t}_{rs},\ \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}{}''A^{t}_{is}\right)\right]\right.$$

gdzie: s = 1,2,...,l dla każdego M = 1,2,...,m i każdego S = 1,2,3,...,T.

W interpretacji ekonomicznej wyrażenie (3.2.13) oznacza, że przewóz s-tego surowca z k - miejsc wytwarzania (liczba k jest stała!) do M - fabryk w S - okresach nie może być mniejszy od "dolnego zapotrzebowania" M - fabryk w S - okresach na s-ty surowiec i z drugiej strony nie może być większy od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza przedstawia górne ograniczenie produkcji s-tego surowca, w k - miejscach w S - okresach, druga to: "górne zapotrzebowanie" M - fabryk na s-ty surowiec w S - okresach.

W podobny sposób zbadamy warunki ograniczające przewóz produktów. Przy zmieniającym się N i S z (3.0.8) mamy:

$$(3.2.14)\quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m}Y^{t}_{ijp} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}P^{t}_{jp}\qquad p = 1,2,\dots,w$$

Ponieważ łączny przewóz p-tego produktu z m - fabryk (liczba m jest ustalona!) do N - hurtowni, w S - okresach nie może być większy od sumy górnych ograniczeń produkcji w m - fabrykach, w S - okresach, więc mamy:

$$(3.2.15)\qquad 0 \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m}Y^{t}_{ijp} \leqslant \sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m}d^{t}_{ip}$$

Gdy weźmiemy (3.0.9), wtedy przy zmieniającym się N i S otrzymujemy:

$$(3.2.16)\quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}'B^{t}_{jp} \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}P^{t}_{jp} \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}''B^{t}_{jp}$$

Jeśli uwzględnimy (3.2.15) i (3.2.16) w (3.2.14), wtedy otrzymamy:

$$(3.2.17) \qquad \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}'B_{jp}^{t} \leq \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m} Y_{ijp}^{t} \leq$$

$$\leq \min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t}, \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}''B_{jp}^{t}\right)$$

Gdy w (3.2.17) wykorzystamy (3.1.4) dla M = m, wtedy będzie:

$$(3.2.18) \quad V_{mNp}^{S}\left(\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}'B_{jp}^{t}, \min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t}, \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}{}''B_{jp}^{t}\right)\right]\right.$$

gdzie: p = 1,2,...,w dla każdego N = 1,2,3,...,n i każdego S = 1,2,3,...,T.

Wyrażenie (3.1.18) oznacza, iż przewóz p-tego produktu z m - fabryk (m jest liczbą ustaloną!) do N - hurtowni, w S - okresach nie może być mniejszy od "dolnego zapotrzebowania" N - hurtowni, w S - okresach na p-ty produkt i z drugiej strony nie może być większy od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza przedstawia górne ograniczenie produkcji p-tego produktu w m - fabrykach, w S - okresach, druga to: "górne zapotrzebowanie" M - fabryk na s-ty surowiec w S - okresach.

W szczególnym przypadku, gdy przewozimy s-ty surowiec z R - tego miejsca wytwarzania do <u>jednej</u> fabryki w 1 - ym okresie, wtedy mamy:

$$(3.2.19) \qquad 0 \leq X_{R1s}^{1} \leq \min\left(b_{Rs}^{1}, {}''A_{1s}^{1}\right),$$

s = 1,2,...,l dla każdego R = 1,2,...,k bądź też,gdy przewozimy s-ty surowiec z R - miejsc do <u>jednej fabryki</u>, w 1-ym okresie, wówczas mamy:

$$(3.2.20) \qquad 0 \leq U_{R1s}^{1} \leq \min\left(\sum_{r=1}^{R} b_{rs}^{1}, {}''A_{1s}^{1}\right)$$

Podobna sytuacja zaistnieje, gdy przewozimy p-ty produkt z M-tej fabryki do <u>jednej hurtowni</u>, w 1-ym okresie, wtedy:

$$0 \leq Y^1_{M1p} \leq \min\left(d^1_{Mp}, "B^1_{1p}\right) \tag{3.2.21}$$

Gdy przewozimy p-ty produkt z M - fabryk do jednej hurtowni w 1-ym okresie, wówczas otrzymujemy:

$$0 \leq V^1_{M1p} \leq \min\left(\sum_{i=1}^{M} d^1_{ip}, "B^1_{1p}\right) \tag{3.2.22}$$

Interpretacja ekonomiczna warunków (3.2.19) - (3.2.22) jest oczywista - zwróciliśmy uwagę na w/w warunki dlatego, gdyż będą one niezbędne przy wyprowadzeniu 1-ej i 2-giej grupy równań funkcyjnych.

3.3. Plan wyprowadzenia ciągu równań funkcyjnych

Rozważania pierwszego podrozdziału niniejszego rozdziału zakończyliśmy stwierdzeniem mówiącym o potrzebie uwzględniania warunków ograniczających przy obliczaniu decyzji początkowej.

Obecnie, gdy znamy już zmodyfikowaną postać warunków ograniczających możemy odpowiedzieć jednoznacznie na pytanie: dla jakich wartości zmiennych niezależnych określona jest decyzja początkowa.

Dla ustalenia uwagi przepiszmy decyzję początkową:

$$F^{11}_{11}\left(\bar{U}^1_{1s}, \bar{U}^1_{11s}, \bar{V}^1_{1p}, \bar{V}^1_{11p}\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l} g^1_{1s}\left(X^1_{1s}\right) + \sum_{r=1}^{l} g^1_{11s}\left(X^1_{11s}\right) + \sum_{p=1}^{w} f^1_{1p}\left(Y^1_{1p}\right) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{w} f^1_{11p}\left(Y^1_{11p}\right)$$

Jeśli w nierównościach (3.2.3) i (3.2.7) oraz w (3.2.19) - (3.2.22) przyjmiemy, że:

$$R = 1, \quad M = 1, \quad N = 1, \quad S = 1,$$

wówczas otrzymamy następujące ograniczenia badanej decyzji początkowej:

$$\left.\begin{aligned} &(3.3.1) \quad a^1_{1s} \leqslant X^1_{1s} \leqslant \min\left(C_s,\ b^1_{1s}\right) \\ &(3.3.2) \quad 0 \leqslant X^1_{11s} \leqslant \min\left(b^1_{1s},\ {}''A^1_{1s}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{gdzie} \\ &s = 1,2,\ldots,l \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &(3.3.3) \quad C^1_{1p} \leqslant Y^1_{1p} \leqslant \min\left(D_p,\ d^1_{1p}\right) \\ &(3.3.4) \quad 0 \leqslant Y^1_{11p} \leqslant \min\left(d^1_{1p},\ {}''B^1_{1p}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{gdzie} \\ &p = 1,2,\ldots,w \end{aligned}$$

Interpretacja ekonomiczna ograniczeń (3.3.1) - (3.3.4). Nierówność (3.3.1) mówi, że produkcja s-tego surowca w 1-ym miejscu wytwarzania w 1-ym okresie, nie może być mniejsza od dolnego ograniczenia produkcji tegoż surowca w 1-ym miejscu, w 1-ym okresie, i jednocześnie nie może być większa od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza to planowana produkcja s-tego surowca, druga to: górne ograniczenia produkcji s-tego surowca.

Analogiczną interpretację przyjmiemy dla (3.3.3) z tym, że w nierówności (3.3.3) mówi się nie o surowcach,lecz o produktach.

Nierówność (3.3.2) oznacza, że przewóz s-tego surowca z pierwszego miejsca jego wytwarzania do 1-ej fabryki w 1-ym okresie nie może być większy od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza to górne ograniczenie produkcji s-tego surowca w 1-ym miejscu wytwarzania, w 1-ym okresie, druga to "górne" zapotrzebowanie na s-ty surowiec w 1-ej fabryce, w 1-ym okresie.

Analogiczną interpretację przyjmujemy dla nierówności (3.3.4), w której mówi się o przewozie produktów z 1-ej fabryki do jednej hurtowni w 1-ym okresie.

Gdy więc znamy postać analityczną decyzji początkowej wyrażonej wzorem (3.1.12) oraz wiemy dla jakich wartości decyzja początkowa jest określona, w takim razie zgodnie z zasadą optymalności Bellmana możemy przystąpić do poszukiwania ciągu równań funkcyjnych, które muszą mieć tę własność, iż każde następne równanie wynika z poprzedniego.

Poszukiwanie ciągu równań funkcyjnych rozbijemy na cztery etapy.

W etapie pierwszym poszukiwać będziemy związku między wyrażeniem:

$$F_{11}^{R1}\left(\overline{U}_{Rs}^{1},\ \overline{U}_{R1s}^{1},\ \overline{V}_{1p}^{1},\ \overline{V}_{11p}^{1}\right)$$

gdzie $R = 2,3,\ldots,k$ a wyrażeniem

$$F_{11}^{R-11}\left(\overline{U}_{Rs}^{1} - \overline{X}_{Rs}^{1},\ \overline{U}_{R1s}^{1} - \overline{X}_{R1s}^{1},\ \overline{V}_{1p}^{1},\ \overline{V}_{11p}^{1}\right)$$

gdzie $R = 2,3,\ldots,k$.

W etapie drugim szukać będziemy związku między wyrażeniem:

$$F_{M1}^{k1}\left(\overline{U}_{ks}^{1},\ \overline{U}_{kMs}^{1},\ \overline{V}_{Mp}^{1},\ \overline{V}_{M1p}^{1}\right)$$

a wyrażeniem:

$$F_{M-11}^{k1}\left(\overline{U}_{ks}^{1},\ \overline{U}_{kMs}^{1} - \sum_{r=1}^{k} \overline{X}_{rMs}^{1},\ \overline{V}_{Mp}^{1} - \overline{Y}_{Mp}^{1},\ \overline{V}_{M1p}^{1} - \overline{Y}_{M1p}^{1}\right)$$

$M=2,3,\ldots,m$

W trzecim etapie szukać będziemy związku między wyrażeniem:

$$F_{mN}^{k1}\left(\overline{U}_{ks}^{1},\ \overline{U}_{kms}^{1},\ \overline{V}_{mp}^{1},\ \overline{V}_{mNp}^{1}\right)$$

a wyrażeniem

$$F_{mN-1}^{k1}\left(\overline{U}_{ks}^{1},\ \overline{U}_{kms}^{1},\ \overline{V}_{mp}^{1},\ \overline{V}_{mNp}^{1} - \sum_{i=1}^{m} \overline{Y}_{iNp}^{1}\right)$$

$N = 2,2,\ldots,n$

I wreszcie w ostatnim, czwartym etapie poszukując kolejnej grupy równań funkcyjnych znajdziemy związek między wyrażeniem:

$$\left.\begin{array}{l} F_{mn}^{kS}\left(\overline{U}_{ks}^{S},\ \overline{U}_{kms}^{S},\ \overline{V}_{mp}^{S},\ \overline{V}_{mnp}^{S}\right) \\ \text{a wyrażeniem} \\ F_{mn}^{kS-1}\left(\overline{U}_{ks}^{S} - \sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{S},\ \overline{U}_{kms}^{S} - \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} \overline{X}_{ris}^{S},\right. \\ \qquad \left.\overline{V}_{mp}^{S} - \sum_{i=1}^{m} Y_{ip}^{S},\ \overline{V}_{mnp}^{S} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Y_{ijp}^{S}\right) \end{array}\right\} \quad S = 2,3,\ldots,T$$

Jeśli założymy, że udało nam się znaleźć zasygnalizowane związki w każdym z wyżej wymienionych etapów, wówczas każdemu związkowi odpowiada określona grupa równań - i tak:

- w etapie pierwszym znajdziemy (k - 1) równań
  " drugim " (m - 1) równań
  " trzecim " (n - 1) równań
  " czwartym " (T - 1) równań

Jak więc łatwo wyliczyć badanemu modelowi łącznie z decyzją początkową będzie odpowiadało:

$$(k + m + n + T) - 3 \quad \text{równań funkcyjnych}$$

Na zakończenie, zwracamy uwagę, że w następnym czwartym paragrafie, przy wyprowadzaniu równań funkcyjnych, wprowadzimy nowe oznaczenia na wektory:

$$\overline{U}_{Rs}^{S},\ \overline{U}_{RMs}^{S},\ \overline{V}_{Mp}^{S},\ \overline{V}_{MNp}^{S}$$

Myślą przewodnią wprowadzenia nowych oznaczeń dla ww. wektorów jest uzyskanie bardziej przejrzystego zapisu wyprowadzonych równań.

3.4. Wyprowadzenie ciągu równań funkcyjnych

3.4.1. Pierwsza grupa równań

W celu znalezienia pierwszej grupy równań funkcyjnych, wprowadźmy niżej wyszczególnione oznaczenia.

$$X_1 = \left(X_{R1}^{1},\ X_{R2}^{1},\ldots,X_{Rl}^{1}\right)$$

- wektor produkcji l - surowców w R-tym miejscu wytwarzania w 1-ym okresie, gdzie $R = 2,3,\ldots,k$.

Składowe wektora X_1 oznaczmy przez: X^1_{Rs}, gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$

$$U_1 = \left(\sum_{r=1}^{R} X^1_{r1}, \sum_{r=1}^{R} X^1_{r2}, \ldots, \sum_{r=1}^{R} X^1_{rl}\right)$$

- wektor produkcji l - surowców w R - miejscach wytwarzania, w 1-ym okresie gdzie $R = 2,3,\ldots,k$.

Składowe wektora U_1 oznaczmy przez U^1_{Rs}, gdzie $s=1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$

$$U_1 - X_1$$

- wektor produkcji l - surowców, które to surowce należy wyprodukować w sposób optymalny w (R - 1) miejscach, przy czym $R = 2,3,\ldots,k$.

$$X_2 = \left(X^1_{R11}, X^1_{R12}, \ldots, X^1_{R1l}\right)$$

- wektor przewozu l - surowców z R-tego miejsca do 1-ej fabryki w 1-ym okresie.

Składowe wektora X_2 oznaczmy przez: X^1_{R1s}, gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$

$$U_2 = \left(\sum_{r=1}^{R} X^1_{r11}, \sum_{r=1}^{R} X_{r12}, \ldots, \sum_{r=1}^{R} X^1_{r1l}\right)$$

- wektor przewozu l- surowców z R - miejsc ich wytwarzania do 1-ej fabryki w 1-ym okresie.

Składowe wektora U_2 oznaczmy przez: U^1_{R1s}, gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$

$$U_2 - X_2$$

- wektor przewozu l - surowców, które to surowce należy przewieźć w sposób optymalny z (R - 1) miejsc do 1-ej fabryki w 1-ym okresie

$$V_1 = \left(V^1_{11},\ V^1_{12}, \dots, V^1_{1w}\right) = \left(Y^1_{11},\ Y^1_{12}, \dots, Y^1_{1w}\right)$$

- wektor produkcji w - produktów w 1-ej fabryce w 1-ym okresie.

Składowe wektora V_1 oznaczać będziemy przez V^1_{1p} lub przez Y^1_{1p} gdzie $p = 1,2,\dots,w$

$$V_2 = \left(V^1_{111},\ V^1_{112}, \dots, V^1_{11w}\right) = \left(Y^1_{111},\ Y^1_{112}, \dots, Y^1_{11w}\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z 1-ej fabryki do 1-ej hurtowni w 1-ym okresie. Składowe wektora V_2 oznaczać będziemy przez V^1_{11p} lub przez Y^1_{11p} gdzie $p = 1,2,\dots,w$

$$\sum_{s=1}^{l} g^1_{Rs}\left(X^1_{Rs}\right)$$

- koszty produkcji l - surowców w R-tym miejscu wytwarzania w 1-ym okresie

$$\sum_{s=1}^{l} g^1_{R1s}\left(X^1_{R1s}\right)$$

- koszty przewozu l - surowców z R-tego miejsca wytwarzania do 1-ej fabryki, w 1-ym okresie.

Łatwo widzieć, że dla $S = 1$, $M = 1$, $N = 1$, oraz dla $R = 2,3,\dots,k$ wzór na łączne koszty produkcji i transportu wyraża się wzorem:

$$(3.4.1)\qquad \sum_{s=1}^{l} g^1_{Rs}\left(X^1_{Rs}\right) + \sum_{s=1}^{l} g^1_{R1s}\left(X^1_{R1s}\right) +$$

$$+ F^{R-11}_{11}(U_1 - X_1,\ U_2 - X_2,\ V_1,\ V_2)$$

gdzie $R = 2,3,\dots,k$.

Rzeczywiście, ponieważ łączne koszty produkcji l - surowców w R-tym miejscu oraz łączne koszty transportu tychże surowców z R-tego miejsca ich wytwarzania do 1-ej fabryki, w 1-ym okresie wyrażają się wzorem:

$$\sum_{s=1}^{l} g_{Rs}^{1}\left(X_{rs}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{R1s}^{1}\left(X_{r1s}^{1}\right)$$

natomiast optymalne koszty produkcji l - surowców w (R - 1) miejscach oraz optymalne koszty przewozu l - surowców z tychże (R - 1) miejsc do 1-ej fabryki w 1-ym okresie i ponadto optymalne koszty produkcji w - produktów w 1-ej fabryce w 1-ym okresie oraz optymalne koszty przewozu tychże produktów, z tejże fabryki do 1-ej hurtowni wyrażają się wzorem:

$$F_{11}^{R-11}\left(U_1 - X_1,\ U_2 - X_2,\ V_1\ V_2\right)$$

więc łączne koszty produkcji oraz transportu przedstawia wzór (3.4.1).

Licząc minimum formy (3.4.1) otrzymamy pierwszą grupę równań funkcyjnych postaci:

$$F_{11}^{R1}\left(U_1, U_2, V_1, V_2\right) = \tag{3.4.2}$$

$$= \min\left[\sum_{s=1}^{l} g_{Rs}^{1}\left(X_{Rs}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{R1s}^{1}\left(X_{R1s}^{1}\right) + F_{11}^{R-11}\left(U_1 - X_1,\ U_2 - X_2,\ V_1,\ V_2\right)\right]$$

gdzie $R = 2,3,\ldots,k$.

Ponieważ w równaniu (3.4.2) R przyjmuje kolejno wartości 2,3,...,k, więc pierwsze równanie należące do znalezionej grupy równań zależne jest od decyzji początkowej, czyli od równania (3.1.12), natomiast każde następne równanie wyrażone przez (3.4.2) zależne jest od równania poprzedniego.

Zgodnie z warunkami badanego modelu minimum formy (3.4.2) należy liczyć przy warunkach:

Gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$, wtedy:

$$X^1_{Rs} \in \left[a^1_{Rs},\ b^1_{Rs}\right]$$

dla każdego

$$U^1_{Rs} \in \left[\sum_{r=1}^{R} a^1_{rs},\ \min\left(C_s,\ \sum_{r=1}^{R} b^1_{rs}\right)\right]$$

spełniającego nierówność:

$$\sum_{r=1}^{R-1} a^1_{rs} \leqslant U^1_{Rs} - X^1_{Rs} \leqslant \min\left(C_s,\ \sum_{r=1}^{R-1} b^1_{rs}\right)$$

i jednocześnie gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$, wtedy:

$$X^1_{R1s} \in \left[0,\ \min\left(b^1_{Rs},\ "A^1_{1s}\right)\right]$$

dla każdego

$$U^1_{R1s} \in \left[0,\ \min\left(\sum_{r=1}^{R} b^1_{rs},\ "A^1_{1s}\right)\right]$$

spełniającego nierówność:

$$0 \leqslant U^1_{R1s} - X^1_{R1s} \leqslant \min\left(\sum_{r=1}^{R-1} b^1_{rs},\ "A^1_{1s}\right)$$

i jednocześnie

$$c^1_{1p} \leqslant Y^1_{1p} \leqslant \min\left(D_p,\ d^1_{1p}\right),$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ i jednocześnie

$$0 \leqslant Y^1_{11p} \leqslant \min\left(d^1_{1p},\ "B^1_p\right),$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$.

3.4.2. Druga grupa równań

Oznaczenia pomocnicze i ich interpretacja ekonomiczna

$$U_k = \left(\sum_{r=1}^{k} X_{r1}^{1}, \sum_{r=1}^{k} X_{r2}^{1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} X_{rl}^{1}\right)$$

– wektor produkcji l – surowców w k – miejscach w 1-ym okresie. Składowe wektora U_k oznaczać będziemy: $\sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{1}$ gdzie $s = 1,2,\ldots,l$

$$X_4 = \left(\sum_{r=1}^{k} X_{rM1}^{1}, \sum_{r=1}^{k} X_{rM2}^{1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} X_{rMl}^{1}\right)$$

– wektor przewozu l – surowców z k – miejsc ich wytwarzania do M-tej fabryki w 1-ym okresie. Składowe wektora X_4 oznaczać będziemy: $\sum_{r=1}^{k} X_{rMs}^{1}$ gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$

$$U_4 = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} X_{ri1}^{1}, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} X_{ri2}^{1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} X_{ril}^{1}\right)$$

– wektor przewozu l – surowców z k – miejsc wytwarzania do M – fabryk w 1-ym okresie. Składowe wektora U_4 oznaczać będziemy: U_{kMs}^{1}, gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$.

$$U_4 - X_4$$

– wektor przewozu l – surowców, które to surowce należy przewieźć w sposób optymalny z k – miejsc do (M-1) fabryk w 1-ym okresie.

$$Y_1 = \left(Y_{M1}^{1}, Y_{M2}^{1}, \ldots, Y_{Mw}^{1}\right)$$

– wektor produkcji w – produktów w M-tym miejscu, w 1-ym okresie. Składowe wektora Y_1 oznaczać będziemy: Y_{Mp}^{1}, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$

$$V_3 = \left(\sum_{i=1}^{M} Y_{i1}^1,\ \sum_{i=1}^{M} Y_{i2}^1, \ldots, \sum_{i=1}^{M} Y_{iw}^1\right)$$

- wektor produkcji w - produktów w M - miejscach wytwarzania w 1-ym okresie. Składowe wektora V_3 oznaczać będziemy: V_{Mp}^1, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$

$$V_3 - Y_1$$

- wektor produkcji w - produktów, które to produkty należy wyprodukować w sposób optymalny w (M-1) fabrykach, dla $M = 2,3,\ldots,m$

$$Y_2 = \left(Y_{M11}^1,\ Y_{M12}^1, \ldots, Y_{M1w}^1\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z M-tej fabryki do 1-ej hurtowni, w 1-ym okresie. Składowe wektora Y_2 oznaczać będziemy: Y_{M1p}^1, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$.

$$V_4 = \left(\sum_{i=1}^{M} Y_{i11}^1,\ \sum_{i=1}^{M} Y_{i12}^1, \ldots, \sum_{i=1}^{M} Y_{i1w}^1\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z M - fabryk do 1-ej hurtowni, w 1-ym okresie. Składowe wektora V_4 oznaczać będziemy: V_{M1p}^1, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$.

$$V_4 - Y_2$$

- wektor przewozu w - produktów, które to produkty należy przewieźć w sposób optymalny z (M-1) fabryk do 1-ej hurtowni w 1-ym okresie.

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g_{rs}^1\left(X_{rs}^1\right)$$

- koszty produkcji l - surowców w k - miejscach ich wytwarzania w 1-ym okresie

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rMs}\left(X^1_{rMs}\right)$$

- koszty przewozu l - surowców z k - miejsc do M-tej fabryki w l-ym okresie.

$$\sum_{p=1}^{w} f^1_{Mp}\left(Y^1_{Mp}\right)$$

- koszty produkcji w - produktów w M-tej fabryce w 1-ym okresie.

$$\sum_{p=1}^{w} f^1_{M1p}\left(Y^1_{M1p}\right)$$

- koszty przewozu w - produktów z M-tej fabryki do 1-ej hurtowni, w 1-ym okresie.

Korzystając z powyższych oznaczeń, możemy napisać wzór na łączne koszty produkcji i transportu surowców oraz produktów - otrzymamy:

$$(3.4.3)\qquad \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rs}\left(X^1_{rs}\right) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rMs}\left(X^1_{rMs}\right) + \sum_{p=1}^{w} f^1_{Mp}\left(Y^1_{Mp}\right) + \sum_{p=1}^{w} f^1_{M1p}\left(Y^1_{M1p}\right) + F^{k1}_{M-11}\left(U_k, U_4 - X_4, V_3 - Y_1, V_4 - Y_2\right)$$

Licząc minimum formy (2.4.3) otrzymamy szukaną drugą grupę równań, czyli:

$$(3.4.4)\qquad F^{k1}_{M1}\left(U_k, U_4, V_3, V_4\right) =$$

$$= \min\left[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rs}\left(X^1_{rs}\right) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rMs}\left(X^1_{rMs}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{p=1}^{w} f_{Mp}^{1}\left(Y_{Mp}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{M1p}^{1}\left(Y_{M1p}^{1}\right) +$$

$$\left. + F_{M-11}^{k1}\left(U_k,\ U_4 - X_4,\ V_3 - Y_1,\ V_4 - Y_2\right)\right]$$

gdzie $M = 2,3,\ldots,m$.

Gdy zwrócimy uwagę na budowę równań należących do (3.4.4), wówczas zauważymy, że:

- pierwsze równanie należące do (3.4.4) uzależnione jest od ostatniego równania należącego do (3.4.2),
- każde następne równanie należące do (3.4.4) jest uzależnione od równania poprzedniego.

Zgodnie z warunkami badanego modelu minimum formy (3.4.4) należy liczyć przy warunkach:

$$\sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{1} \in \left[\sum_{r=1}^{k} a_{rs}^{1},\ \min\left(C_s, \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{1}\right)\right],$$

gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ i jednocześnie gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$, wtedy

$$\sum_{r=1}^{k} X_{rMs}^{1} \in \left[{}'A_{Ms}^{1},\ \min\left({}''A_{Ms}^{1}, \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{1}\right)\right]$$

dla każdego

$$U_{kMs}^{1} \in \left[\sum_{i=1}^{M} {}'A_{is}^{1},\ \min\left(\sum_{i=1}^{M} {}''A_{is}^{1},\ \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{1}\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} A_{is}^{1} \leqslant U_{kMs}^{1} - \sum_{r=1}^{k} X_{rMs}^{1} \leqslant \min\left(\sum_{i=1}^{M-1} A_{is}^{1},\ \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{1}\right)$$

i jednocześnie gdy $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$, wtedy

$$Y^1_{Mp} \in \left[c^1_{Mp},\ d^1_{Mp} \right]$$

dla każdego

$$V^1_{Mp} \in \left[\sum_{i=1}^{M} c^1_{ip},\ \min \left(D_p,\ \sum_{i=1}^{M} D^1_{ip} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} c^1_{ip} \leqslant V^1_{Mp} - Y^1_{Mp} \leqslant \min \left(D_p,\ \sum_{i=1}^{M-1} d^1_{ip} \right)$$

i jednocześnie gdy p = 1,2,...,w dla każdego M = 2,3,...,m, wtedy

$$Y^1_{M1p} \in \left[0,\ \min \left(d^1_{Mp},\ {}''B^1_{1p} \right) \right]$$

dla każdego

$$V^1_{M1p} \in \left[0,\ \min \left({}''B^1_{1p},\ \sum_{i=1}^{M} d^1_{ip} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$0 \leqslant V^1_{M1p} - Y^1_{M1p} \leqslant \min \left({}''B^1_{1p},\ \sum_{i=1}^{M-1} d^1_{ip} \right)$$

Z wyżej przedstawionych ograniczeń na szczególną uwagę zasługuje warunek:

$$\sum_{r=1}^{k} X^1_{rMs} \in \left[{}'A^1_{Ms},\ \min \left({}''A^1_{Ms},\ \sum_{r=1}^{k} b^1_{rs} \right) \right]$$

W interpretacji ekonomicznej powyższy warunek "nakazuje", aby w k - miejsc wytwarzania s-tego surowca nie przywozić do

M-tej fabryki mniej tegoż surowca aniżeli "dolne zapotrzebowanie" na tenże surowiec. Z drugiej strony omawiany warunek mówi, że do M-tej fabryki nie należy przywozić więcej od mniejszej z 2 liczb, z których pierwsza przedstawia "górne zapotrzebowanie" M-tej fabryki na s-ty surowiec, druga - sumę górnych ograniczeń produkcji s-tego surowca w k - miejscach wytwarzania, w 1-ym okresie.

3.4.3. Trzecia grupa równań

Oznaczenia pomocnicze i ich interpretacja ekonomiczna

$$U_k = \left(\sum_{r=1}^{k} X_{r1}^{1}, \sum_{r=1}^{k} X_{r2}^{1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} X_{rl}^{1}\right)$$

- wektor produkcji l - surowców wytwarzanych w k - miejscach w 1-ym okresie. Składowe wektora U_k: $\sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{1}$, gdzie s=1,2,..., l

$$U_{km} = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X_{ri1}^{1}, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X_{ri2}^{1}, \ldots, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X_{ril}^{1}\right)$$

Składowe wektora U_{km} oznaczmy przez: $\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X_{ris}^{1}$, gdzie s = = 1,2,...,l.

Wektor U_{k1} przedstawia przewóz l - surowców z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk w 1-ym okresie.

$$V_m = \left(\sum_{i=1}^{m} Y_{i1}^{1}, \sum_{i=1}^{m} Y_{i2}^{1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{iw}^{1}\right)$$

- wektor produkcji w - produktów w m - fabrykach w 1-ym okresie.

Składowe wektora V_m: $\sum_{i=1}^{m} Y_{ip}^{1}$, gdzie p = 1,2,...,w

$$Y_3 = \left(\sum_{i=1}^{m} Y_{iN1}^{1}, \sum_{i=1}^{m} Y_{iN2}^{1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{iNw}^{1}\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z m - fabryk do N-tej hurtowni w 1-okresie. Składowe wektora Y_3: $\sum_{i=1}^{m} Y^1_{iNp}$, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $N = 2,3,\ldots,n$

$$V_5 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} Y^1_{ij1},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} Y^1_{ij2},\ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} Y^1_{ijw}\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z m - fabryk do N - hurtowni w l-ym okresie. Składowe wektora V_5 oznaczmy przez: V^1_{mNp}, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $N = 2,3,\ldots,n$.

$$V_5 - Y_3$$

- wektor przewozu w - produktów, które to produkty należy przewieźć w sposób optymalny z m - fabryk do (N-1) hurtowni w pierwszym okresie

$$Q_1 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rs}\left(X^1_{rs}\right)$$

- koszty produkcji l - surowców, w k - miejscach wytwarzania w 1-ym okresie.

$$Q_2 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} g^1_{ris}\left(X^1_{ris}\right)$$

- koszty przewozu l - surowców, z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk, w 1-ym okresie.

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f^1_{ip}\left(Y^1_{ip}\right)$$

- koszty produkcji w - produktów, w m - fabrykach w 1-ym okresie.

$$Q_4 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f^1_{iNp}\left(Y^1_{iNp}\right)$$

- koszty przewozu w - produktów, z m - fabryk do N-tej hurtowni w 1-ym okresie.

Korzystając z powyższych oznaczeń możemy napisać wzór na łączne koszty produkcji i transportu surowców oraz produktów, otrzymamy:

$$(3.4.5) \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + F^{k1}_{mN-1} (U_k, U_{km}, V_m, V_5 - Y_3)$$

gdzie $N = 2,3,\dots,n$.

Licząc minimum formy (3.4.5) otrzymamy trzecią grupę równań:

$$(3.4.6) \qquad F^{k1}_{mN} (U_k, U_{km}, V_m, V_5) =$$

$$= \min \left[Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + F^{k1}_{mN-1} (U_k, U_{km}, V_m, V_5 - Y_3)\right]$$

gdzie $N = 2,3,\dots,n$.

Z budowy równań należących do (3.4.6) widzimy, że:

- pierwsze równanie należące do (3.4.6) uzależnione jest od ostatniego równania należącego do (3.4.4)
- każde następne równanie należące do (3.4.6) uzależnione jest od równania poprzedniego.

Minima kolejnych równań należących do (3.4.6) należy liczyć przy warunkach:

$$\sum_{r=1}^{k} X^1_{rs} \in \left[\sum_{r=1}^{k} a^1_{rs},\ \min\left(C_s, \sum_{r=1}^{k} b^1_{rs}\right)\right]$$

gdzie $s = 1,2,\dots,l$ i jednocześnie

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} X^1_{ris} \in \left[\sum_{i=1}^{m} {}' A^1_{is},\ \min\left(\sum_{i=1}^{m} {}'' A^1_{is}, \sum_{r=1}^{k} b^1_{rs}\right)\right], \quad s = 1,2,\dots,l$$

i jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{m} Y^1_{ip} \in \left[\sum_{i=1}^{m} C^1_{ip},\ \min\left(D_p, \sum_{i=1}^{m} d^1_{ip}\right)\right], \quad p = 1,2,\dots,w$$

i jednocześnie, gdy $p = 1,2,\dots,w$ dla każdego $N = 2,3,\dots,n$ wtedy:

$$\sum_{i=1}^{m} Y^1_{iNp} \in \left['B^1_{Np},\ \min\left("B^1_{Np}, \sum_{i=1}^{m} d^1_{ip} \right) \right]$$

dla każdego

$$V^1_{mNp} \in \left[\sum_{j=1}^{N} 'B^1_{jp},\ \min\left(\sum_{j=1}^{N} "B^1_{jp}, \sum_{i=1}^{m} d^1_{ip} \right) \right]$$

spełniającego nierówność:

$$\sum_{j=1}^{N-1} 'B^1_{jp} \leqslant V^1_{mNp} - \sum_{i=1}^{m} Y^1_{iNp} \leqslant \min\left(\sum_{j=1}^{N-1} "B^1_{jp}, \sum_{i=1}^{m} d^1_{ip} \right)$$

3.4.4. Czwarta grupa równań

Oznaczenia pomocnicze i ich interpretacja ekonomiczna

$$X_5 = \left(\sum_{r=1}^{k} X^S_{r1}, \sum_{r=1}^{k} X^S_{r2}, \dots, \sum_{r=1}^{k} X^S_{rl} \right)$$

– wektor produkcji l – surowców, wytwarzania w k – miejscach w S-tym okresie. Składowe wektora X_5 oznaczmy przez: $\sum_{r=1}^{k} X^S_{rs}$, gdzie $s = 1,2,\dots,l$ dla każdego $S = 2,3,\dots,T$

$$U_5 = \left(\sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} X^t_{r1}, \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} X^t_{r2}, \dots, \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} X^t_{rl} \right)$$

– wektor produkcji l – surowców, w k – miejscach wytwarzania w S – okresach. Składowe wektora U_5: U^S_{ks}, gdzie $s = 1,2,\dots,l$ dla każdego $S = 2,3,\dots T$

$$U_5 - X_5$$

- wektor produkcji l - surowców, które to surowce należy wyprodukować w sposób optymalny w k - miejscach w (S-1) okresach dla S = 2,3,...T.

$$X_6 = \left(\sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ri1}^{S}, \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ri2}^{S}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ril}^{S} \right)$$

- wektor przewozu l - surowców z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk w S-tym okresie. Składowe wektora X_6 oznaczać będziemy przez: $\sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ris}^{S}$, gdzie s = 1,2,...,l dla każdego S = 2,3,...,T.

$$U_6 = \left(\sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} X_{ri1}^{t}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} X_{ril}^{t} \right)$$

- wektor przewozu l - surowców z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk w S - okresach.
Składowe wektora U_6: U_{kms}^{S}, gdzie s = 1,2,...,l dla każdego S = 2,3,...,T

$$U_6 - X_6$$

- wektor przewozu l - surowców z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk, które to surowce należy przewieźć w sposób optymalny w (S-1) okresach, dla S = 2,3,...,T.

$$Y_4 = \left(\sum_{i=1}^{m} Y_{i1}^{S}, \sum_{i=1}^{m} Y_{i2}^{S}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{iw}^{S} \right)$$

- wektor produkcji w - produktów, wytwarzanych w m - fabrykach w S-tym okresie.
Składowe wektora Y_4: $\sum_{i=1}^{m} Y_{ip}^{S}$, gdzie p = 1,2,...,w dla każdego S = 2,3,...,T

$$V_6 = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} Y_{i1}^{t}, \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} Y_{i2}^{t}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} Y_{iw}^{t} \right)$$

- wektor produkcji w m - fabrykach, w S - okresach. Składowe wektora V_6: V^S_{mp}, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S=2,3,\ldots,T$

$$V_6 - Y_4$$

- wektor produkcji w - produktów, które to produkty należy wyprodukować w sposób optymalny w m - fabrykach, w (S-1) okresach.

$$Y_5 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Y^S_{ij1},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Y^S_{ij2},\ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Y^S_{ijw}\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z m - fabryk do n - hurtowni w S-tym okresie.

Składowe wektora Y_5 - oznaczać będziemy przez: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Y^S_{ijp}$, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$

$$V_7 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} Y^t_{ij1},\ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} Y^t_{ijw}\right)$$

- wektor przewozu w - produktów z m - fabryk do n - hurtowni w S - okresach.

Składowe wektora V_7: U^S_{mnp}, gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$.

$$V_7 - Y_5$$

- wektor przewozu w - produktów z m - fabryk do n - hurtowni, które to produkty należy przewieźć w sposób optymalny w (S-1) okresach, gdzie $S = 2,3,\ldots,T$.

$$Q_5 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^S_{rs}\left(X^S_{rs}\right)$$

- koszty produkcji l - surowców, w k - miejscach ich wytwarzania w S-tym okresie, gdzie $S = 2,3,\ldots,T$

$$Q_6 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} g_{ris}^{S}\left(X_{ris}^{S}\right)$$

- koszty przewozu l - surowców z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk w S-tym okresie, gdzie $S = 2,3,\ldots,T$.

$$Q_7 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f_{ip}^{S}\left(Y_{ip}^{S}\right)$$

- koszty produkcji w - produktów w m - fabrykach, w S-tym okresie, gdzie $S = 2,3,\ldots,T$.

$$Q_8 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{w} f_{ijp}^{S}\left(Y_{ijp}^{S}\right)$$

- koszty przewozu w - produktów z m - fabryk, do n - hurtowni w S-tym okresie, $S = 2,3,\ldots,T$.

Korzystając z wyżej przyjętych oznaczeń możemy napisać wzór na łączne koszty produkcji i transportu surowców oraz produktów:

(3.4.7) $$Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 + F_{mn}^{kS-1}(U_5 - X_5,\ U_6 - X_6,\ V_6 - Y_4,\ V_7 - Y_5)$$

Licząc minimum formy (3.4.7) otrzymamy czwartą i ostatnią poszukiwaną grupę równań:

(3.4.8) $$F_{mn}^{kS}(U_5, U_6, V_6, V_7) = \min\left[Q_5 + Q_6 + Q_7 + Q_8 + F_{mn}^{kS-1}(U_5-X_5,\ U_6-X_6,\ V_6-Y_4,\ V_7-Y_5)\right]$$

gdzie $S = 2,3,\ldots,T$.

Z budowy równań należących do (3.4.8) łatwo widać, że:

- pierwsze równanie należące do (3.4.8) uzależnione jest od ostatniego równania należącego do (3.4.6)

- każde, następne równanie należące do (3.4.8) uzależnione jest od równania poprzedniego.

Zgodnie z warunkami badanego modelu minimum formy (3.4.8) należy liczyć przy warunkach:

$$\sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{S} \in \left[\sum_{r=1}^{k} a_{rs}^{S},\ \min \left(C_s, \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{S} \right) \right]$$

dla każdego

$$U_{ks}^{S} \in \left[\sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} a_{rs}^{t},\ \min \left(C_s, \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} b_{rs}^{t} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S-1} a_{rs}^{t} \leqslant U_{ks}^{S} - \sum_{r=1}^{k} X_{rs}^{S} \leqslant \min \left(C_s, \sum_{k=1}^{k} \sum_{t=1}^{S-1} b_{rs}^{t} \right)$$

gdzie s = 1,2,...,l dla każdego S = 2,3,...,T i jednocześnie

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ris}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m} {}'A_{is}^{S},\ \min \left(\sum_{i=1}^{m} {}''A_{is}^{S}, \sum_{r=1}^{k} b_{rs}^{S} \right) \right]$$

dla każdego

$$U_{kms}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} {}'A_{is}^{t},\ \min \left(\sum_{r=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} {}''A_{is}^{t}, \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S} b_{rs}^{t} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S-1} {}'A_{is}^{t} \leqslant U_{kms}^{S} - \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} X_{ris}^{S} \leqslant \min \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S-1} {}''A_{is}^{t}, \sum_{r=1}^{k} \sum_{t=1}^{S-1} b_{rs}^{t} \right)$$

gdzie s = 1,2,...,l dla każdego S = 2,3,...,T i jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{ip}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m} C_{ip}^{S},\ \min \left(D_p, \sum_{i=1}^{m} d_{ip}^{S} \right) \right]$$

dla każdego

$$V_{mp}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} C_{ip}^{t},\ \min \left(D_{p},\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S-1} C_{ip}^{t} \leqslant V_{mp}^{S} - \sum_{i=1}^{m} Y_{ip}^{S} \leqslant \min \left(D_{p},\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S-1} d_{ip}^{t} \right)$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$ i jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Y_{ijp}^{S} \in \left[\sum_{j=1}^{n}{}' B_{jp}^{S},\ \min \left(\sum_{j=1}^{n}{}'' B_{jp}^{S},\ \sum_{i=1}^{m} d_{ip}^{S} \right) \right]$$

dla każdego

$$V_{mnp}^{S} \in \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{S}{}' B_{jp}^{t},\ \min \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{S}{}'' B_{jp}^{t},\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S} d_{ip}^{t} \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{S-1}{}' B_{jp}^{t} \leqslant V_{mnp}^{S} - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Y_{ijp}^{S} \leqslant \min \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{S-1}{}'' B_{jp}^{t},\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{S-1} d_{ip}^{t} \right)$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$.

Równania wyrażone przez: (3.4.2), (3.4.4), (3.4.6), (3.4.8) są szukanym ciągiem równań funkcyjnych. Należy zauważyć, że wyprowadzony ciąg równań spełnia warunki wyrażone przez zasadę optymalności Bellmana. Rzeczywiście, w wyniku podjęcia decyzji początkowej wyrażonej przez (3.1.12) pierwsze równanie należące do (3.4.2) jest uzależnione od (3.1.12), ponadto każde następne równanie należące do (3.4.2) jest uzależnione od równania poprzedniego.

Podobnie, gdy zwrócimy uwagę na strukturę kolejnych grup równań, czyli na (3.4.4), (3.4.6) oraz na (3.4.8), wówczas łatwo zauważamy - co było podkreślone przy wyprowadzonych kolejnych grupach równań - że każde następne równanie należące do każdej z grup jest zależne od równania poprzedniego, przy czym równanie pierwsze z grupy następnej jest zależne od równania ostatniego grupy poprzedniej.

3.5. Strategia optymalna

W celu znalezienia wartości ekstremalnych badanego zagadnienia weźmy pod uwagę ostatnie równanie należące do (3.4.8).

Przypuśćmy więc, że dla $S = T$, wartość minimalna równania (3.4.8) wynosi W, czyli:

$$F_{mn}^{kT}\left(U_5, U_6, V_6, V_7\right) = W$$

Niech ponadto wartości minimalnej W odpowiadają wektory:

$$(3.5.1) \qquad {}^{o}\overline{X}_{rs}^{T}, \quad {}^{o}\overline{X}_{ris}^{T}, \quad {}^{o}\overline{Y}_{ip}^{T}, \quad {}^{o}\overline{Y}_{ijp}^{T}$$

Jeżeli więc w ostatnim okresie wyprodukowaliśmy i przewieźliśmy wielkości wyrażone przez (3.5.1), w takim razie w następnym kroku musimy się dowiedzieć jakim wektorom odpowiada wartość minimalna:

$$(3.5.2) \qquad F_{mn}^{kT-1}\left(U_5 - \sum_{r=1}^{k} {}^{o}\overline{X}_{rs}^{T}, U_6 - \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} {}^{o}\overline{X}_{ris}^{T}, V_6 - \sum_{i=1}^{m} {}^{o}\overline{Y}_{ip}^{T}, V_7 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {}^{o}\overline{Y}_{ijp}^{T}\right)$$

Przypuśćmy, że forma (3.5.2) osiąga minimum dla wektorów:

$${}^{o}\overline{X}_{rs}^{T-1}, \quad {}^{o}\overline{X}_{ris}^{T-1}, \quad {}^{o}\overline{Y}_{ip}^{T-1}, \quad {}^{o}\overline{Y}_{ijp}^{T-1}$$

Znając składowe w/w wektorów możemy w opisany sposób wyznaczyć składowe wektorów produkcji i przewozu w okresie T-2, a następnie znając składowe wektorów produkcji i przewozu w okresie T-2, wyznaczamy składowe wektorów produkcji i przewozu w okresie T-3 itd.

Z przedstawionego rozumowania wynika, że z równań (3.4.8) otrzymamy wartości składowych następującego układu wektorów produkcji i transportu:

$$
(3.5.3)\qquad
\begin{array}{cccc}
{}^{o}X^{T}_{rs} & {}^{o}X^{T}_{ris} & {}^{o}Y^{T}_{ip} & {}^{o}Y^{T}_{ijp} \\
{}^{o}X^{T-1}_{rs} & {}^{o}X^{T-1}_{ris} & {}^{o}Y^{T-1}_{ip} & {}^{o}Y^{T-1}_{ijp} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
{}^{o}X^{2}_{rs} & {}^{o}X^{2}_{ris} & {}^{o}Y^{2}_{ip} & {}^{o}Y^{2}_{ijp}
\end{array}
$$

Gdy weźmiemy ostatni wiersz (3.5.3) oraz ostatnie równanie należące do (3.4.6), wówczas otrzymamy:

$$
(3.5.4)\qquad {}^{o}X^{1}_{rs} \quad {}^{o}X^{1}_{ris} \quad {}^{o}Y^{1}_{ip} \quad {}^{o}Y^{1}_{ijp}
$$

Znając (3.5.4) z równań (3.4.6) dla N = n - 1, n - 2,..., 2, możemy łącznie z (3.5.4) utworzyć następujący układ wektorów:

$$
(3.5.5)\qquad
\begin{array}{cccc}
{}^{o}X^{1}_{rs} & {}^{o}X^{1}_{ris} & {}^{o}Y^{1}_{ip} & {}^{o}Y^{1}_{inp} \\
{}^{o}_{1}X^{1}_{rs} & {}^{o}_{1}X^{1}_{ris} & {}^{o}_{1}Y^{1}_{ip} & {}^{o}Y^{1}_{in-1p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
{}^{o}_{q}X^{1}_{rs} & {}^{o}_{q}X^{1}_{ris} & {}^{o}_{q}Y^{1}_{ip} & {}^{o}Y^{1}_{i2p}
\end{array}
$$

Z budowy tablicy wektorów występujących w tabeli (3.5.5) wynika, że składowe wektorów występujących w pierwszym wierszu (3.5.5) są na ogół inne, aniżeli składowe wektorów w pozostałych wierszach (3.5.5). Fakt ten podkreśliliśmy wprowadzając dodatkowe wskaźniki np.:

$$
{}^{o}_{1}X^{1}_{rs},\quad {}^{o}_{1}X^{1}_{ris},\quad {}^{o}_{1}Y^{1}_{ip},\quad {}^{o}_{1}Y^{1}_{ijp}
$$

Analogiczną uwagę stosować będziemy do niżej zbudowanych tabel.

Weźmy obecnie ostatni wiersz należący do (3.5.5) oraz ostatnie równanie należące do (3.4.4), a następnie rozumując w wyżej opisany sposób otrzymamy:

$$
(3.5.6)\qquad
\begin{array}{cccc}
{}^{o}_{11}X^{1}_{rs} & {}^{o}X^{1}_{rms} & {}^{o}Y^{1}_{mp} & {}^{o}Y^{1}_{m1p} \\
{}^{o}_{12}X^{1}_{rs} & {}^{o}X^{1}_{rm-1s} & {}^{o}Y^{1}_{m-1p} & {}^{o}Y^{1}_{m-11p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
{}^{o}_{1q}X^{1}_{rs} & {}^{o}X^{1}_{r2s} & {}^{o}Y^{1}_{2p} & {}^{o}Y^{1}_{21p}
\end{array}
$$

Gdy weźmiemy ostatni wiersz należący do (3.5.6) oraz ostatnie równanie należące do (3.4.2), a następnie gdy przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do wyżej opisanego, to otrzymamy:

$$
(3.5.7)\qquad
\begin{array}{cccc}
{}^{o}X^{1}_{ks} & {}^{o}X^{1}_{k1s} & {}^{o}Y^{1}_{1p} & {}^{o}Y^{1}_{11p} \\
{}^{o}X^{1}_{k-1s} & {}^{o}X^{1}_{k-11s} & {}^{o}_{1}Y^{1}_{1p} & {}^{o}_{1}Y^{1}_{11p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
{}^{o}X^{1}_{2s} & {}^{o}X^{1}_{21s} & {}^{o}_{u}Y^{1}_{1p} & {}^{o}_{u}Y^{1}_{11p}
\end{array}
$$

Znając decyzję początkową wyrażoną równaniem (3.1.12) oraz biorąc pod uwagę ostatni wiersz układu wektorów (3.5.7) otrzymamy:

$$
(3.5.8)\qquad {}^{o}X^{1}_{1s},\quad {}^{o}X^{1}_{11s},\quad {}^{o}_{u}Y^{1}_{1p},\quad {}^{o}_{u}Y^{1}_{11p}
$$

Poszukiwana strategia optymalna przedstawiona jest przez układy wektorów podane w tabelach: (3.5.3) - (3.5.8). Wartości składowych wektorów wyszczególnionych w wyżej wymienionych tablicach wektorów są poszukiwanymi wartościami ekstremalnymi badanego modelu.

Podsumowując powyższe rozważania należy stwierdzić, że jeśli znamy wartość minimalną ostatniego równania należącego do (3.4.8), a tym samym, gdy znamy wartości zmiennych niezależnych odpowiadające tej wartości minimalnej, wówczas korzystając z myśli przewodniej strategii optymalnej przechodzimy do równania przedostatniego, następnie od równania przedostatniego do równania poprzedzającego itd.

Mając stale na uwadze warunki zadania przechodzimy kolejno od ostatniego równania należącego do (3.4.8) poprzez wszystkie równania funkcyjne odpowiadające badanemu modelowi, aż dojdziemy do decyzji początkowej.

Opisane rozważania są myślą przewodnią poszukiwania rozważań metodą programowania dynamicznego.

4. ADAPTACJA MODELU PRODUKCYJNO-TRANSPORTOWEGO DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

4.1. Uwagi wstępne

Przystosowanie znalezionych równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych wymaga wprowadzenia szeregu nowych oznaczeń. Różnorodność oznaczeń, które będziemy musieli wprowadzić może spowodować w pierwszym czytaniu trudności w uchwyceniu myśli przewodniej obliczeń numerycznych. Z tych też powodów rozważania niniejszego rozdziału rozpoczniemy od syntetycznego przedstawienia myśli związanych z adaptacją równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych.

W pierwszym kroku naszych badań prowadzących do adaptacji rozważanego modelu do obliczeń numerycznych, dokonamy podziału każdej zmiennej niezależnej występującej w modelu na równe części. Chodzić nam będzie przy tym o to, aby wszystkie zmienne niezależne występujące w modelu, były podzielona na te same co do wielkości równe części.

Okazuje się, że gdy przyjmiemy powyższe założenie, wówczas - jak wynika z badań przeprowadzonych przez Bellmana i Dreyfusa - obliczenia numeryczne stają się szybsze z dwu powodów:

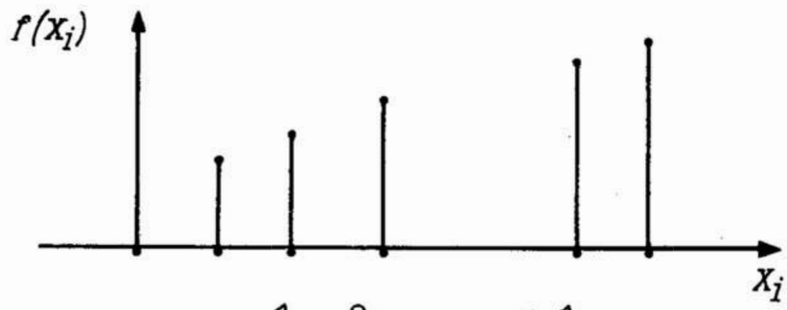
1) w wyliczaniu minimalnych wartości funkcji, które musimy stablicować, występuje mniej tychże minimalnych wartości,

2) proces poszukiwania zmiennych niezależnych jest krótszy[1].

W drugim kroku, gdy zostanie dokonany podział zmiennych niezależnych, a tym samym podział parametrów występujących w modelu, wprowadzimy nowe zmienne przyjmujące wartości w punktach podziału.

Poglądowo powyższe 2 kroki przedstawić można na rysunku. Niech będzie funkcja $Y_i = f_i\ (X_i)$ określona w $\left[a_i,\ b_i\right]$. W wyniku podziału zmiennej X_i otrzymujemy:

$$X_i = (X_i^o,\ X_i^1,\ X_i^2, \ldots, X_i^n)$$



$$a_i \quad X_i^1 \quad X_i^2,\ \ldots,\ X_i^{r-1} b_i$$

Z założeń podziału wynika, że

$$X_i^{(o)} = a_i,\ X_i^{(1)} = a_i + h,\ X_i^{(2)} = a_i + 2h,\ \ldots,\ X_i^{(n)} = a_i + nh$$

Zwrócić należy uwagę, iż zgodnie z naszą umową dotyczącą podziału zmiennych niezależnych, nie możemy stosować w naszych rozważaniach wzoru:

$$X^{(k)} = a_i + k\,\frac{b_i - a_i}{n}$$

gdzie $k = 0,1,2,\ldots,n$, gdyż wielkości

$$h_i = \frac{b_i - a_i}{n} \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

są na ogół różne co do wielkości.

---

[1] Por. R.Bellman, S.Dreyfus: "Programowanie dynamiczne" s.91

Trzeci krok naszych badań będzie polegał na wprowadzeniu do funkcji kryterium oraz zmodyfikowanych warunków ograniczających zmienne przyjęte w kroku drugim.

W wyniku zamiany zmiennych, funkcją kryterium będzie suma funkcji zadanych skokowo w przedziałach określoności.

W ostatnim czwartym kroku dokonamy adaptacji wyprowadzonych równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych. Oczywistą jest rzeczą, że problem adaptacji równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych sprowadzi się do dokonania zamiany zmiennych.

4.2. Adaptacja funkcji kryterium do obliczeń numerycznych

Zgodnie z wyżej podanym planem adaptacji badanego modelu do obliczeń numerycznych dokonajmy podziału na równe części każdej zmiennej niezależnej występującej w modelu, a następnie wprowadźmy zmienne niezależne przyjmujące wartości w wspomnianych punktach podziału.

Etapy pracy

1. Dzielimy zmienną X_{rs}^{t} na równe części.
   Przyjmujemy, że liczba $h > 0$ jest wspomniana równą częścią. Niech J_{rs}^{t} przyjmuje wartości dla punktów będących punktami podziału zmiennej X_{rs}^{t}.
   Wartościom zmiennej J_{rs}^{t} przyporządkujmy wartości funkcji: $g_{rs}^{t}\left(J_{rs}^{t}\right)$ - sumując względem wskaźników: r,s,t, otrzymujemy funkcję łącznych kosztów produkcji l- surowców, w k - miejscach ich wytwarzania w T - okresach, czyli:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} g_{rs}^{t}\left(J_{rs}^{t}\right) \tag{4.2.1}$$

2. Dzielimy zmienną X_{ris}^{t} na równe części.
   Przyjmujemy, że liczba $h > 0$ jest wspomniana równą częścią. Niech J_{ris}^{t} przyjmuje wartości dla punktów będących punktami podziału zmiennej X_{ris}^{t}.
   Wartościom zmiennej J_{ris}^{t} przyporządkujmy wartości funkcji: $g_{ris}^{t}\left(J_{ris}^{t}\right)$ - sumując względem wskaźników: r, i, s, t, otrzymujemy funkcję łącznych kosztów przewozu l - surowców

z k - miejsc ich wytwarzania do m - fabryk w T - okresach, czyli:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} g_{ris}^{t}\left(J_{ris}^{t}\right) \tag{4.2.2}$$

3. Dzielimy zmienną Y_{ip}^{t} na równe części:
Przyjmujemy, że liczba $h > 0$ jest wspomniana równą częścią. Niech L_{ip}^{t} przyjmuje wartości dla punktów będących punktami podziału zmiennej Y_{ip}^{t}.
Wartościom zmiennej L_{ip}^{t} przyporządkujemy wartości funkcji: $f_{ip}^{t}\left(L_{ip}^{t}\right)$ - sumując względem wskaźników: i, p, t, otrzymujemy funkcję łącznych kosztów produkcji w - produktów, w m - fabrykach, w T - okresach, czyli:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w}\sum_{t=1}^{T} f_{ip}^{t}\left(L_{ip}^{t}\right) \tag{4.2.3}$$

4. Dzielimy zmienną Y_{ijp}^{t} na równe części.
Przyjmujemy, że liczba $h > 0$ jest wspomniana równą częścią. Niech L_{ijp}^{t} przyjmuje wartości dla punktów, będących punktami podziału zmiennej Y_{ijp}^{t}.
Wartościom zmiennej L_{ijp}^{t} przyporządkujemy wartości funkcji: $f_{ijp}^{t}\left(L_{ijp}^{t}\right)$ - sumując względem wskaźników: i, j, p, t, otrzymamy funkcję łącznych kosztów przewozu w - produktów, z m - fabryk do n - hurtowni, w T - okresach, czyli:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{w}\sum_{t=1}^{T} f_{ijp}^{t}\left(L_{ijp}^{t}\right) \tag{4.2.4}$$

Gdy dodamy funkcje wyrażone wzorami: (4.2.1) - (4.2.4), wówczas otrzymamy zmodyfikowaną postać funkcji kryterium badanego modelu produkcyjno-transportowego.

Zmodyfikowana funkcja kryterium podana w postaci sumy w/w wzorów może być wykorzystywana przy obliczeniach numerycznych.

4.3. Adaptacja warunków ograniczających do obliczeń numerycznych

Przy adaptacji warunków ograniczających do obliczeń numerycznych korzystać będziemy z wyników przedstawionych w podpunkcie drugim rozdziału trzeciego oraz nowych zmiennych wprowadzonych w poprzednim podpunkcie. Dla przejrzystości zapisu podzielimy warunki ograniczające na niżej wyszczególnione grupy.

4.3.1. Pierwsza grupa warunków ograniczających przystosowanych do obliczeń numerycznych

W wyniku podziału X^t_{rs} na części, otrzymaliśmy liczbę $h > 0$ będącą poszukiwaną równą częścią podziału badanych zmiennych. Załóżmy dodatkowo, że wielkości: a^t_{rs}, b^t_{rs}, C_s zostały podzielone również na te same równe części[2]).

Niech więc:

$$a^t_{rs} = {}^1k^t_{rs}h \qquad \text{gdzie} \quad s = 1,2,\dots,l$$

$$b^t_{rs} = {}^2k^t_{rs}h \qquad r = 1,2,\dots,k$$

$$C_s = k_s h \qquad t = 1,2,\dots,T$$

Ponieważ zmienna J^t_{rs} przyjmuje postać z przedziału $\left[a^t_{rs}, b^t_{rs}\right]$, więc:

$$ {}^1k^t_{rs}h \leqslant J^t_{rs} \leqslant {}^2k^t_{rs}h \tag{4.3.1}$$

Gdy uwzględnimy dla potrzeb algorytmu wskaźniki R,S, wtedy otrzymamy

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} {}^1k^t_{rs}h \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} J^t_{rs} \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} {}^2k^t_{rs}h$$

---

2) Zdajemy sobie sprawę, że założenie współmierności parametrów występujących w modelu jest poważnym niedostatkiem teoretycznym, jednakże z punktu widzenia praktycznego zastrzeżenie to jest mniejszej wagi, gdyż w razie potrzeby, parametry występujące w modelu można łatwo sprowadzić do wielkości współmiernych.

Mamy również

$$0 \leqslant \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} J_{rs}^{t} \leqslant k_s h$$

czyli

$$(4.3.2) \qquad K_{Rs}^{S} \in \left[\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}k_{rs}^{t}h,\ \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}k_{rs}^{t}h\right)\right]$$

gdzie

$$K_{Rs}^{S} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} J_{rs}^{t}$$

W wyrażeniu (4.3.2) $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 1,2,\ldots,k$ i każdego $S = 1,2,\ldots,T$.

4.3.2. Druga grupa warunków ograniczających przystosowanych do obliczeń numerycznych

W wyniku podziału Y_{ip}^{t} na części, otrzymaliśmy liczbę $h > 0$ będącą poszukiwaną równą częścią. Zakładamy dodatkowo, że wielkości: C_{ip}^{t}, d_{ip}^{t}, D_p zostały również podzielone na te same równe części.
Niech więc

$$C_{ip}^{t} = {}^{1}q_{ip}^{t}h \qquad \text{gdzie} \quad p = 1,2,\ldots,w$$

$$d_{ip}^{t} = {}^{2}q_{ip}^{t}h \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$D_p = q_p h \qquad\qquad t = 1,2,\ldots,T$$

Ponieważ zmienna L_{ip}^{t} przyjmuje wartości z przedziału $\left[C_{ip}^{t}, d_{ip}^{t}\right]$, więc:

$$(4.3.3) \qquad {}^{1}q_{ip}^{t}h \leqslant L_{ip}^{t} \leqslant {}^{2}q_{ip}^{t}h$$

Gdy uwzględnimy dla potrzeb algorytmu wskaźniki M,S, wtedy otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}q_{ip}^{t}h \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} L_{ip}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}q_{ip}^{t}h$$

Mamy również

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} L_{ip}^{t} \leqslant q_p h$$

czyli

$$(4.3.4) \qquad Ł_{Mp}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}q_{ip}^{t}h,\ \min\left(q_p h,\ \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}q_{ip}^{t}h\right)\right]^{3)}$$

gdzie

$$Ł_{Mp}^{S} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} L_{ip}^{t}$$

W wyrażeniu (4.3.4) $p = 1,2,\dots,w$ dla każdego $M = 1,2,\dots,m$ i każdego $S = 1,2,\dots,T$.

4.3.3. Trzecia grupa warunków ograniczających przystosowanych do obliczeń numerycznych

W wyniku podziału Y_{ip}^{t} na równe części, funkcję zapotrzebowania na s-ty surowiec w i-tej fabryce w okresie t, można zapisać w postaci:

$${}^{1}Z_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} A_{isp}^{t}\, L_{ip}^{t}$$

[3] W niniejszym oraz następnych podrozdziałach przedstawimy wyłącznie przekształcenia algebraiczne warunków ograniczających, gdyż interpretacja ekonomiczna parametrów oraz nierówności występujących w obecnych rozważaniach jest analogiczna do szczegółowo przedstawionych wyjaśnień w rozdziałach poprzednich, a przede wszystkim w rozdziale III, p.2.

Zgodnie z (4.3.3) mamy:

$$E_{is}^{t} \leqslant {}^{1}Z_{is}^{t} \leqslant H_{is}^{t}$$

gdzie

$$E_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} A_{isp}^{t}\ {}^{1}q_{ip}^{t}h, \quad H_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} A_{isp}^{t}\ {}^{2}q_{ip}^{t}h$$

Po wprowadzeniu wskaźników M oraz S otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} E_{is}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}Z_{is}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} H_{is}^{t} \tag{4.3.5}$$

Weźmy obecnie pod uwagę warunek:

$$\sum_{r=1}^{k} J_{ris}^{t} = {}^{1}Z_{is}^{t} \tag{4.3.6}$$

czyli dla zmieniających się M i S z (4.3.6) mamy:

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} J_{ris}^{t} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}Z_{is}^{t} \tag{4.3.7}$$

Ponieważ

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S}\sum_{r=1}^{k} J_{ris}^{t} \leqslant \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} k_{rs}^{t}h$$

oraz z uwagi na (4.3.5), a następnie ze względu na równość (4.3.7) otrzymujemy:

$$K_{kMs}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} E_{is}^{t},\ \min\left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} k_{rs}^{t}h,\ \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} H_{is}^{t} \right)\right] \tag{4.3.8}$$

gdzie

$$K_{kMs}^{S} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} J_{ris}^{S}$$

przy czym $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $M = 1,2,\ldots,m$ i każdego $S = 1,2,\ldots,T$.
W szczególnym wypadku, gdy $M = 1$ oraz $S = 1$ i jednocześnie gdy $R = 1,2,\ldots,k$ wtedy mamy ograniczenie postaci:

$$K_{R1s}^{1} \in \left[0,\ \min\left(\sum_{r=1}^{R} k_{rs}^{1}h,\ H_{1s}^{1}\right)\right] \tag{4.3.9}$$

4.3.4. Czwarta grupa warunków ograniczających przystosowanych do obliczeń numerycznych

Przyjmijmy, że zmienna P_{jp}^{t}, przedstawiająca zapotrzebowanie j-tej hurtowni na p-ty produkt w okresie t, została również podzielona na równe części oraz niech liczba $h > 0$ będzie wspomnianą równą częścią. Otrzymamy nową zmienną przyjmującą swe wartości w punktach podziału - nową zmienną oznaczmy przez: ${}^{1}P_{jp}^{t}$.
Załóżmy dodatkowo, że ograniczenia ${}'B_{jp}^{t}$ i ${}''B_{jp}^{t}$ zostały podzielone na równe części, czyli:

$$ {}'B_{jp}^{t} = {}^{3}q_{jp}^{t}h = {}^{1}G_{jp}^{t} $$

$$ {}''B_{jp}^{t} = {}^{4}q_{jp}^{t}h = {}^{2}G_{jp}^{t} $$

Z warunku modelu wynika, że:

$$ {}^{1}G_{jp}^{t} \leqslant {}^{1}P_{jp}^{t} \leqslant {}^{2}G_{jp}^{t} $$

Po wprowadzeniu zmieniających się wskaźników M oraz S otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}G_{jp}^{t} \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}P_{jp}^{t} \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}G_{jp}^{t} \tag{4.3.10}$$

Weźmy obecnie pod uwagę warunek

$$\sum_{i=1}^{m} L_{ijp}^{t} = {}^{1}P_{jp}^{t} \tag{4.3.11}$$

dla zmieniających się M oraz S z (4.3.11) mamy:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m} L_{ijp}^{t} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}P_{jp}^{t} \tag{4.3.12}$$

Ponieważ

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m} L_{ijp}^{t} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} q_{ip}^{t} h$$

więc z uwagi na (4.3.10) oraz (4.3.12) otrzymujemy:

$$Ł_{mMp}^{S} \in \left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}G_{jp}^{t},\ \min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} g_{ip}^{t} h,\ \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}G_{jp}^{t}\right)\right] \tag{4.3.13}$$

gdzie

$$Ł_{mNp}^{S} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S}\sum_{i=1}^{m} L_{ijp}^{t}$$

przy czym $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $N = 1,2,\ldots,n$ i każdego $S = 1,2,\ldots,T$.

W szczególnym przypadku, gdy $M = 1,2,\ldots,m$, natomiast $N = 1$, i $S = 1$ otrzymujemy ograniczenie postaci:

$$Ł_{M1p}^{1} \in \left[0,\ \min\left(\sum_{i=1}^{M} q_{ip}^{1},\ {}^{2}G_{1p}^{1}\right)\right] \tag{4.3.14}$$

4.4. Adaptacja równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych

Myśl przewodnia adaptacji równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych polega na dokonaniu zamiany zmiennych w każdej znalezionej w poprzednim rozdziale grupie równań oraz w odpowiadającym danej grupie równań warunkom ograniczającym.

Z przedstawionych badań wynika, że zmienne występujące w naszych rozważaniach można podzielić na dwie klasy. Do klasy 1-ej zaliczymy tzw. zmienne podstawowe, do drugiej klasy zaliczymy zmienne pomocnicze. Przedstawmy poglądowo powyższy podział.

Zmienne podstawowe	
ciągłe	skokowe
X^t_{rs} lub X^S_{Rs}	J^t_{rs} lub J^S_{Rs}
X^t_{ris} lub X^S_{RMs}	J^t_{ris} lub J^S_{RMs}
Y^t_{ip} lub Y^S_{Mp}	L^t_{ip} lub $Ł^S_{Mp}$
Y^t_{ijp} lub Y^S_{MNp}	L^t_{ijp} lub $Ł^S_{MNp}$

Zmienne pomocnicze	
ciągłe	skokowe
$U^S_{Rs} = \sum_{i=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} X^t_{rs}$	$K^S_{Rs} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{S} J^t_{rs}$
$U^S_{RMs} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} X^t_{ris}$	$K^S_{RNs} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} J^t_{ris}$
$V^S_{Mp} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} Y^t_{ip}$	$Ł^S_{Mp} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{S} L^t_{ip}$
$V^S_{MNp} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} Y^t_{ijp}$	$Ł^S_{MNp} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{S} L^t_{ijp}$

W wyniku podziału parametrów występujących w modelu otrzymaliśmy nową ich postać. Dla ustalenia uwagi podajmy zestawienie parametrów, z których korzystaliśmy przy wyprowadzeniu równań funkcyjnych (prawe strony niżej wyszczególnionych równości) oraz z których będziemy korzystali przy podawaniu równań funkcyjnych przystosowanych do obliczeń numerycznych (lewe strony niżej wyszczególnionych równości).

Zestawienie parametrów

$$a^t_{rs} = {}^1k^t_{rs}h, \qquad b^t_{rs} = {}^2k^t_{rs}h, \qquad C_s = k_s h$$

lub

$$a^S_{Rs} = {}^1k^S_{Rs}h, \qquad b^S_{Rs} = {}^2k^S_{Rs}h$$

$$c^t_{ip} = {}^1q^t_{ip}h, \qquad d^t_{ip} = {}^2q^t_{ip}h, \qquad D_p = q_p h$$

lub

$$c^S_{Mp} = {}^1q^S_{Mp}h, \qquad d^S_{Mp} = {}^2q^S_{Mp}h$$

$$'A^t_{is} = \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\ {}^1q^t_{ip}h = E^t_{is} \text{ lub } 'A^S_{Ms} = \sum_{p=1}^{w} A^S_{Msp}\ {}^1q^S_{Mp}h = E^S_{Ms}$$

$$''A^t_{is} = \sum_{p=1}^{w} A^t_{isp}\ {}^2q^t_{ip}h = H^t_{is} \text{ lub } ''A^S_{Ms} = \sum_{p=1}^{w} A^S_{Msp}\ {}^2q^S_{Mp}h = H^S_{Ms}$$

$$'B^t_{jp} = {}^3q^t_{jp}h = {}^1G^t_{jp} \quad \text{lub} \quad 'B^S_{Np} = {}^3q^S_{Np}h = {}^1G^S_{Np}$$

$$''B^t_{jp} = {}^4q^t_{jp}h = {}^2G^t_{jp} \quad \text{lub} \quad ''B^S_{Np} = {}^3q^S_{Np}h = {}^2G^S_{Np}$$

4.4.1. Adaptacja decyzji początkowej do obliczeń numerycznych

W celu jasnego przedstawienia istoty adaptacji wyprowadzonych równań do obliczeń numerycznych, przepiszemy decyzję początkową wraz z odpowiadającymi jej warunkami ograniczającymi, a następnie zgodnie z uwagami wstępnymi niniejszego rozdziału dokonamy zamiany zmiennych.

Pierwotna postać decyzji początkowej
i odpowiadające jej warunki ograniczające

$$F_{11}^{11}\left(\overline{U}_{1s}^{1},\ \overline{U}_{11s}^{1},\ \overline{V}_{1p}^{1},\ \overline{V}_{11p}^{1}\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l} g_{1s}^{1}\left(X_{1s}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{11s}^{1}\left(X_{11s}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{1p}^{1}\left(Y_{1p}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{11p}^{1}\left(Y_{11p}^{1}\right)$$

$$a_{1s}^{1} \leqslant X_{1s}^{1} \leqslant \min\left(C_s,\ b_{1s}^{1}\right)$$

$$0 \leqslant X_{11s}^{1} \leqslant \min\left(b_{1s}^{1},\ A_{1s}^{1}\right)$$

$$c_{1p}^{1} \leqslant Y_{1p}^{1} \leqslant \min\left(D_p,\ d_{1p}^{1}\right)$$

$$0 \leqslant Y_{11p}^{1} \leqslant \min\left(d_{1p}^{1},\ B_{1p}^{1}\right)$$

Zmodyfikowana postać decyzji początkowej
przystosowana do obliczeń numerycznych

$$F_{11}^{11}\left(\overline{K}_{1s}^{1},\ \overline{K}_{11s}^{1},\ \overline{Ł}_{1p}^{1},\ \overline{Ł}_{11p}^{1}\right) = \tag{4.4.1}$$

$$= \sum_{s=1}^{l} g_{1s}^{1}\left(J_{1s}^{1}\right) + \sum_{s=1}^{l} g_{11s}^{1}\left(J_{11s}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{1p}^{1}\left(L_{1p}^{1}\right) + \sum_{p=1}^{w} f_{11p}^{1}\left(L_{11p}^{1}\right)$$

Należy zauważyć, że:

$$\overline{K}_{1s}^{1} = \left(K_{11}^{1},\ K_{12}^{1},\ldots,K_{1l}^{1}\right) = \left(J_{11}^{1},\ J_{12}^{1},\ldots,J_{1l}^{1}\right)$$

$$\overline{K}_{11s}^{1} = \left(K_{111}^{1},\ K_{112}^{1},\ldots,K_{11l}^{1}\right) = \left(J_{111}^{1},\ J_{112}^{1},\ldots,J_{11l}^{1}\right)$$

$$\overline{Ł}_{1p}^{1} = \left(Ł_{11}^{1},\ Ł_{12}^{1},\ldots,Ł_{1w}^{1}\right) = \left(L_{11}^{1},\ L_{12}^{1},\ldots,L_{1w}^{1}\right)$$

$$\overline{Ł}_{11p}^{1} = \left(Ł_{111}^{1},\ Ł_{112}^{1},\ldots,Ł_{11w}^{1}\right) = \left(L_{111}^{1},\ L_{112}^{1},\ldots,L_{11w}^{1}\right)$$

Zmodyfikowana postać warunków ograniczających przystosowana do obliczeń numerycznych

$$^{1}K^{1}_{1s}h \leqslant J^{1}_{1s} \leqslant \min\left(k_s h,\ {}^{2}k^{1}_{1s}h\right)$$

$$0 \leqslant J^{1}_{11s} \leqslant \min\left({}^{2}k^{1}_{1s},\ H^{1}_{1s}\right)$$

$$^{1}q^{1}_{1p}h \leqslant L^{1}_{1p} \leqslant \min\left(q_p h,\ {}^{2}q^{1}_{1p}h\right)$$

$$0 \leqslant L^{1}_{11p} \leqslant \min\left({}^{2}q^{1}_{1p},\ {}^{2}G^{1}_{1p}\right)$$

W obliczeniach numerycznych należałoby stablicować wartości funkcji kosztów produkcji i kosztów transportu zarówno surowców jak i produktów, w wyniku czego otrzymalibyśmy odpowiadające wartości funkcji:

$$F^{11}_{11}\left(\bar{J}^{1}_{1s},\ \bar{J}^{1}_{11s},\ \bar{Ł}^{1}_{1p},\ \bar{Ł}^{1}_{11p}\right)$$

Oczywistą jest rzeczą, że wartości funkcji należy brać w punktach uzyskanych w wyniku podziału zmiennych niezależnych.

4.4.2. Adaptacja pierwszej grupy równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych

W wyniku zamiany zmiennych w równaniach (3.4.2) otrzymamy zmodyfikowaną ich postać przystosowaną do obliczeń numerycznych. Będą to równania postaci:

$$F^{R1}_{11}(K_1,\ K_2,\ Ł_1,\ Ł_2) = \tag{4.4.2}$$

$$= \min\left[\sum_{s=1}^{l} g^{1}_{Rs}\left(J^{1}_{Rs}\right) + \sum_{s=1}^{l} g^{1}_{R1s}\left(J^{1}_{R1s}\right) + F^{R-11}_{11}\left(K_1 - J_1,\ K_2 - J_2,\ Ł_1,\ Ł_2\right)\right]$$

dla $R = 2,3,\ldots,k$

gdzie

$$J_1 = \left(J^1_{R1},\ J^1_{R2},\ldots,J^1_{Rl}\right)$$

$$K_1 = \left(\sum_{r=1}^{R} J^1_{r1},\ \sum_{r=1}^{R} J^1_{r2},\ldots,\ \sum_{r=1}^{R} J^1_{rl}\right)$$

$$J_2 = \left(J^1_{R11},\ J^1_{R12},\ldots,\ J^1_{R1l}\right)$$

$$K_2 = \left(\sum_{r=1}^{R} J^1_{r11},\ \sum_{r=1}^{R} J^1_{r12},\ldots,\ \sum_{r=1}^{l} J^1_{r1l}\right)$$

$$Ł_1 = \left(Ł^1_{11},\ Ł^1_{12},\ldots,\ Ł^1_{1w}\right) = \left(L^1_{11},\ L^1_{12},\ldots,\ L^1_{1w}\right)$$

$$Ł_2 = \left(Ł^1_{111},\ Ł^1_{112},\ldots,\ Ł^1_{11w}\right) = \left(L^1_{111},\ L^1_{112},\ldots,\ L^1_{11w}\right)$$

<u>Zmodyfikowana postać warunków ograniczających przystosowania do obliczeń numerycznych</u>

$$J^1_{Rs} \in \left[{}^1k^1_{R1}h,\ {}^2k^1_{R1}\right]$$

dla każdego

$$K^1_{Rs} = \in \left[\sum_{r=1}^{R} {}^1k^1_{rs}h,\ \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{R} {}^2k^1_{rs}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność:

$$\sum_{r=1}^{R-1} {}^1k^1_{rs}h \leqslant K^1_{Rs} - J^1_{Rs} \leqslant \min\left(k_s\ h,\ \sum_{r=1}^{R-1} {}^2k^1_{rs}h\right)$$

i jednocześnie gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $R = 2,3,\ldots,k$, wtedy:

$$J^1_{R1s} \in \left[0,\ \min\left({}^2k^1_{Rs}h,\ H^1_{1s}\right)\right]$$

dla każdego

$$K^1_{R1s} \in \left[0,\ \min\left(\sum_{r=1}^{R} k^1_{rs}h,\ H^1_{1s}\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$0 \leqslant K^1_{R1s} - J^1_{R1s} \leqslant \min\left(\sum_{r=1}^{R-1} k^1_{rs}h,\ H^1_{1s}\right)$$

i jednocześnie

$$^1q^1_{1p}h \leqslant L^1_{1p} \leqslant \min\left(q_p h,\ {}^2q^1_{1p}h\right) \quad p = 1,2,\dots,w$$

i jednocześnie

$$0 \leqslant L^1_{11p} \leqslant \min\left({}^2q^1_{1p},\ {}^2G^1_{1p}\right) \quad p = 1,2,\dots,w$$

4.4.3. Adaptacja drugiej grupy równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych

Dokonując zamiany zmiennych w równaniach (3.4.4) otrzymamy zmodyfikowaną ich postać przystosowaną do obliczeń numerycznych. Będą to równania postaci:

$$F^{k1}_{M1}\ (K_k,\ K_4,\ Ł_3,\ Ł_4) = \tag{4.4.3}$$

$$= \min\left[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rs}\left(J^1_{rs}\right) + \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rMs}\left(J^1_{rMs}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{p=1}^{w} f^1_{Mp}\left(L^1_{Mp}\right) + \sum_{p=1}^{w} f^1_{M1p}\left(L^1_{M1p}\right) +$$

$$\left. + F^{k1}_{M-11}\left(K_k,\ K_4 - J_4,\ Ł_3 - L_1,\ Ł_4 - L_2\right)\right]$$

dla $M = 2,3,\dots,m$.

Przy czym wektory K_k, K_4, $Ł_3$, $Ł_4$, J_4, L_1, L_2 mają postać:

$$K_k = \left(\sum_{r=1}^{k} J_{r1}^1, \sum_{r=1}^{k} J_{r2}^1, \ldots, \sum_{r=1}^{k} J_{rl}^1\right)$$

$$J_4 = \left(\sum_{r=1}^{k} J_{rM1}^1, \sum_{r=1}^{k} J_{rM2}^1, \ldots, \sum_{r=1}^{k} J_{rMl}^1\right)$$

$$K_4 = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} J_{ri1}^1, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} J_{ri2}^1, \ldots, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{M} J_{ril}^1\right)$$

$$L_1 = \left(L_{M1}^1, L_{M2}^1, \ldots, L_{Mw}^1\right)$$

$$Ł_3 = \left(\sum_{i=1}^{M} L_{i1}, \sum_{i=1}^{M} L_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{M} Liw\right)$$

$$L_2 = \left(L_{M11}^1, L_{M12}^1, \ldots, L_{M1w}^1\right)$$

$$Ł_4 = \left(\sum_{i=1}^{M} L_{i11}^1, \sum_{i=1}^{M} L_{i12}, \ldots, \sum_{i=1}^{w} L_{i1w}\right)$$

Zmodyfikowana postać warunków ograniczających przystosowana do obliczeń numerycznych

$$\sum_{r=1}^{k} J_{rs}^1 \in \left[\sum_{r=1}^{k} {}^1k_{rs}^1 h,\ \min\left(k_s, \sum_{r=1}^{k} {}^2k_{rs}^1 h\right)\right]$$

gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ i jednocześnie

$$\sum_{r=1}^{k} J_{rMs}^1 \in \left[E_{Ms}^1,\ \min\left(H_{Ms}^1, \sum_{r=1}^{k} {}^2k_{rs}^1 h\right)\right]$$

dla każdego

$$K_{kMs}^1 \in \left[\sum_{i=1}^{M} E_{is}^1,\ \min\left(\sum_{i=1}^{M} H_{is}^1, \sum_{r=1}^{k} {}^2k_{rs}^1 h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} E_{is}^{1} \leqslant K_{kMs}^{1} - \sum_{r=1}^{k} J_{rMs}^{1} \leqslant \min\left(\sum_{i=1}^{M-1} H_{is}^{1}, \sum_{r=1}^{k} {}^{2}k_{rs}^{1}h\right)$$

gdzie $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$ i jednocześnie

$$L_{Mp}^{1} \in \left[{}^{1}q_{Mp}^{1}h, \; {}^{2}q_{Mp}^{1}h\right]$$

dla każdego

$$Ł_{Mp}^{1} \in \left[\sum_{i=1}^{M} {}^{1}q_{ip}^{1}h, \; \min\left(q_{p}h, \sum_{i=1}^{M} {}^{2}q_{ip}^{1}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} {}^{1}q_{ip}^{1}h \leqslant Ł_{Mp}^{1} - L_{Mp}^{1} \leqslant \min\left(q_{p}h, \sum_{i=1}^{M-1} {}^{2}q_{ip}^{1}h\right)$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$ i jednocześnie

$$L_{m1p}^{1} \in \left[0, \; \min\left({}^{2}q_{Mp}^{1}h, \; {}^{2}G_{1p}^{1}\right)\right]$$

dla każdego

$$Ł_{M1p}^{1} \in \left[0, \; \min\left({}^{2}G_{1p}^{1}, \sum_{i=1}^{M} {}^{1}q_{ip}^{1}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$0 \leqslant Ł_{M1p}^{1} - L_{M1p}^{1} \leqslant \min\left({}^{2}G_{1p}^{1}, \sum_{i=1}^{M-1} {}^{2}q_{ip}^{1}h\right)$$

gdzie $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $M = 2,3,\ldots,m$.

4.4.4. Adaptacja trzeciej grupy równań funkcyjnych do obliczeń numerycznych

Dokonując zamiany zmiennych w równaniach (3.4.6) otrzymamy zmodyfikowaną ich postać przystosowaną do obliczeń numerycznych. Będą to równania postaci:

(4.4.4) $$F^{k1}_{mN}(K_k, K_{km}, Ł_m, Ł_5) =$$

$$= \min\left[Q^1_1 + Q^1_2 + Q^1_3 + Q^1_4 + F^{k1}_{mN-1}(K_k, K_{km}, Ł_m, Ł_5 - L_3)\right]$$

gdzie $N = 2,3,\ldots,n$.
Wektory występujące w ww. trzeciej grupie równań mają postać:

$$K_k = \left(\sum_{r=1}^{k} J^1_{r1}, \sum_{r=1}^{k} J^1_{r2}, \ldots, \sum_{r=1}^{k} J^1_{rl}\right)$$

$$K_{km} = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J^1_{ri1}, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J^1_{ri2}, \ldots, \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J^1_{ril}\right)$$

$$Ł_m = \left(\sum_{i=1}^{m} L^1_{i1}, \sum_{i=1}^{m} L^1_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} L^1_{iw}\right)$$

$$L_3 = \left(\sum_{i=1}^{m} L^1_{iN1}, \sum_{i=1}^{m} L^1_{iM2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} L^1_{iNw}\right)$$

$$Ł_5 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} L^1_{ij1}, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} L^1_{ij2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} L^1_{ijw}\right)$$

Ponadto przez: Q^1_1, Q^1_2, Q^1_3, Q^1_4 oznaczyliśmy funkcje kosztów produkcji i transportu, czyli:

$$Q^1_1 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g^1_{rs}\left(J^1_{rs}\right); \qquad Q^1_2 = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} g^1_{ris}\left(J^1_{ris}\right)$$

$$Q^1_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f^1_{ip}\left(L^1_{ip}\right); \qquad Q^1_4 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f^1_{iNp}\left(L^1_{iNp}\right)$$

Zmodyfikowana postać warunków ograniczających przystosowana do obliczeń numerycznych

$$\sum_{r=1}^{k} J^1_{rs} \in \left[\sum_{r=1}^{k} {}^1k^1_{rs}h,\ \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{k} {}^2k^1_{rs}h\right)\right]$$

gdzie s = 1,2,...,l i jednocześnie

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J^1_{ris} \in \left[\sum_{i=1}^{m} E^1_{is},\ \min\left(\sum_{i=1}^{m} H^1_{is},\ \sum_{r=1}^{k} {}^2k^1_{rs}h\right)\right]$$

gdzie s = 1,2,...,l i jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{m} L^1_{ip} \in \left[\sum_{i=1}^{m} {}^1q^1_{ip}h,\ \min\left(q_p h,\ \sum_{i=1}^{m} {}^2q^1_{ip}\right)\right]$$

gdzie p = 1,2,...,l i jednocześnie

$$\sum_{i=1}^{m} L^1_{iNp} \in \left[{}^1G^1_{Np},\ \min\left({}^2G^1_{Np},\ \sum_{i=1}^{m} {}^2q^1_{ip}h\right)\right]$$

dla każdego

$$Ł^1_{mNp} \in \left[\sum_{j=1}^{N} {}^1G^1_{jp},\ \min\left(\sum_{j=1}^{N} {}^2G^1_{jp},\ \sum_{i=1}^{m} {}^2q^1_{ip}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{j=1}^{N-1} {}^1G^1_{jp} \leqslant Ł^1_{mNp} - \sum_{i=1}^{m} L^1_{iNp} \leqslant \min\left(\sum_{j=1}^{N-1} {}^2G^1_{jp},\ \sum_{i=1}^{m} {}^2q^1_{ip}h\right)$$

gdzie p = 1,2,...,w dla każdego N = 2,3,...,n.

4.4.5. Adaptacja czwartej grupy równać funkcyjnych do obliczeń numerycznych

Weźmy pod uwagę ostatnią grupę równań, czyli równania (3.4.8) i dokonajmy jak zwykle zamiany zmiennych. Otrzymamy grupę równań przystosowaną do obliczeń numerycznych.

Będą to równania postaci:

(4.4.5)
$$F_{mn}^{kS}(K_5,\ K_6,\ Ł_6,\ Ł_7) =$$
$$= \min\left[Q_5^1 + Q_6^1 + Q_7^1 + Q_8^1 + \left(F_{mn}^{kS-1}\ K_5 - J_5,\ K_6 - J_6,\ Ł_6 - L_4,\ Ł_7 - L_5\right)\right]$$

gdzie $S = 2,3,\ldots,T$

Wektory występujące w ww. czwartej grupie równań mają postać:

$$J_5 = \left(\sum_{r=1}^{k} J_{r1}^S,\ \sum_{r=1}^{k} J_{r2}^S, \ldots,\ \sum_{r=1}^{k} J_{rl}^S\right)$$

$$K_5 = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} J_{r1}^t,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} J_{r2}^t, \ldots,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} J_{rl}^t\right)$$

$$J_6 = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J_{ri1}^S,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J_{ri2}^S, \ldots,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J_{ril}^S\right)$$

$$K_6 = \left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} J_{ri1}^t, \ldots,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} J_{ril}^t\right)$$

$$L_4 = \left(\sum_{i=1}^{m} L_{i1}^S,\ \sum_{i=1}^{m} L_{i2}^S, \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} L_{iw}^S\right)$$

$$Ł_6 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} L_{i1}^t,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} L_{i2}^t, \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} L_{iw}^t\right)$$

$$L_5 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ij1}^S,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ij2}^S, \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ijw}^S\right)$$

$$Ł_7 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} L_{ij1}^t, \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} L_{ijw}^t\right)$$

Ponadto przez Q_5^S, Q_6^S, Q_7^S, Q_8^S oznaczyliśmy funkcje kosztów produkcji i transportu, czyli:

$$Q_5^S = \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l} g_{rs}^S \left(J_{rs}^S\right); \qquad Q_6^S = \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{l} g_{ris}^S \left(J_{ris}^S\right)$$

$$Q_7^S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{w} f_{ip}^S \left(L_{ip}^S\right); \qquad Q_8^S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{w} f_{ijp}^S \left(L_{ijp}^S\right)$$

Zmodyfikowana postać warunków ograniczających przystosowana do obliczeń numerycznych

Gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$, wtedy:

$$\sum_{r=1}^{k} J_{rs}^S \in \left[\sum_{r=1}^{k} {}^1k_{rs}^S h,\ \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{k} {}^2k_{rs}^S h\right)\right]$$

dla każdego

$$K_{ks}^S \in \left[\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} {}^1k_{rs}^t h,\ \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} {}^2k_{rs}^t h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S-1} {}^1k_{rs}^t h \leqslant K_{ks}^S - \sum_{r=1}^{k} J_{rs}^S \leqslant \min\left(k_s h,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S-1} {}^2k_{rs}^t h\right)$$

i jednocześnie gdy $s = 1,2,\ldots,l$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$, wtedy:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J_{ris}^S \in \left[\sum_{i=1}^{m} E_{is}^S,\ \min\left(\sum_{i=1}^{m} H_{is}^S,\ \sum_{r=1}^{k} {}^2k_{rs}^S h\right)\right]$$

dla każdego

$$K_{kms}^S \in \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} E_{is}^t,\ \min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} H_{is}^t,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S} {}^2k_{rs}^t h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S-1} E_{is}^t \leqslant K_{kms}^S - \sum_{r=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} J_{ris}^S \leqslant \min\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{S-1} H_{is}^t,\ \sum_{r=1}^{k}\sum_{t=1}^{S-1} {}^2k_{rs}^t h\right)$$

i jednocześnie gdy $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,2,\ldots,T$, wtedy

$$\sum_{i=1}^{m} L_{ip}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m} {}^{1}q_{ij}^{S}h,\ \min\left(q_p h,\ \sum_{i=1}^{m} {}^{2}q_{ip}^{S}H\right)\right]$$

dla każdego

$$Ł_{mp}^{S} \in \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}g_{ip}^{t}h,\ \min\left(q_p h,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}q_{ip}^{t}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S-1} {}^{1}q_{ip}^{t}h \leqslant Ł_{mp}^{S} - \sum_{i=1}^{m} L_{ip}^{S} \leqslant \min\left(q_p h,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S-1} {}^{2}q_{ip}^{t}h\right)$$

i jednocześnie gdy $p = 1,2,\ldots,w$ dla każdego $S = 2,3,\ldots,T$, wtedy

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ijp}^{S} \in \left[\sum_{j=1}^{n} {}^{1}G_{jp}^{S},\ \min\left(\sum_{j=1}^{n} {}^{2}G_{jp}^{S},\ \sum_{i=1}^{m} {}^{2}q_{ip}^{S}h\right)\right]$$

dla każdego

$$Ł_{mnp}^{S} \in \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} {}^{1}G_{jp}^{t},\ \min\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S} {}^{2}G_{jp}^{t},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{S} {}^{2}q_{ip}^{t}h\right)\right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S-1} {}^{1}G_{jp}^{t} \leqslant Ł_{mnp}^{S} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ijp}^{S} \leqslant \min\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{S-1} {}^{2}G_{jp}^{t},\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{S-1} {}^{2}q_{ip}^{t}h\right)$$

Na podstawie analizy struktury równań funkcyjnych przedstawionych w zmodyfikowanej postaci łatwo zauważyć, że znalezieniu wartości optymalnych badanego modelu jest możliwe jedynie przy zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej.

Pamiętać przy tym należy, że myślą przewodnią poszukiwania wartości optymalnych jest strategia optymalna opisana w rozdziale III.

5. DODATEK - PRZYKŁADY LICZBOWE

5.1. Badanie niesprzeczności modelu

Przypuśćmy, że należy zbadać niesprzeczność modelu, w którym funkcja kryterium ma postać:

$$\sum_{r=1}^{7}\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{5} g_{rs}^{t}\left(X_{rs}^{t}\right)+\sum_{r=1}^{7}\sum_{i=1}^{8}\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{5} g_{ris}^{t}\left(X_{ris}^{t}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{8}\sum_{p=1}^{3}\sum_{t=1}^{5} f_{ip}^{t}\left(Y_{ip}^{t}\right)+\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{6}\sum_{p=1}^{3}\sum_{t=1}^{5} f_{ijp}^{t}\left(Y_{ijp}^{t}\right)$$

Niech pierwsza grupa warunków ograniczających ma postać:

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} = 504, \quad \sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} = 554, \quad \sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} Y_{i3}^{t} = 665$$

$$\sum_{r=1}^{7}\sum_{t=1}^{5} X_{r1}^{t} = 31555, \quad \sum_{r=1}^{7}\sum_{t=1}^{5} X_{r2}^{t} = 77828$$

Dane liczbowe dotyczące ograniczeń produkcji surowców i produktów, jak również zapotrzebowania hurtowni na surowce przedstawione będą w kolejnych niżej wyszczególnionych tabelach.

Myślą przewodnią naszych rozwiązań będzie zbadanie, czy w warunkach opisanych w zadaniu zasoby surowców wystarczą do wyprodukowania produktów rozważanych w zadaniu.

Sądzić należy, że do interesujących faktów niniejszego podrozdziału należy pokazanie sposobu obliczania ograniczeń zapotrzebowania fabryk na surowce, gdyż pokazujemy przez to związek między produkcją produktów, a produkcją surowców.

Tabela I

Dolne ograniczenia produkcji produktu 1-go rodzaju wytwarzanego w 8 fabrykach i w pięciu okresach.

	c_{11}^t	c_{21}^t	c_{31}^t	c_{41}^t	c_{51}^t	c_{61}^t	c_{71}^t	c_{81}^t
c_{i1}^1	2	1	2	0	3	2	1	2
c_{i1}^2	4	3	2	0	3	3	3	3
c_{i1}^3	4	3	2	2	4	4	3	4
c_{i1}^4	5	4	3	3	4	5	3	5
c_{i1}^5	6	4	4	5	6	6	4	6

Wniosek: suma dolnych ograniczeń produkcji produktu 1-go rodzaju wynosi: 133, czyli:

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} c_{i1}^t = 133$$

Tabela II

Górne ograniczenia produkcji produktu 1-go rodzaju wytwarzanego w 8 fabrykach i 5 okresach

	d_{11}^t	d_{21}^t	d_{31}^t	d_{41}^t	d_{51}^t	d_{61}^t	d_{71}^t	d_{81}^t
d_{i1}^1	70	80	110	0	110	120	90	100
d_{i1}^2	120	100	120	0	150	160	120	170
d_{i1}^3	140	120	140	80	200	200	150	200
d_{i1}^4	160	140	160	120	240	240	150	270
d_{i1}^5	200	180	190	200	280	280	180	300

Wniosek: suma górnych ograniczeń produkcji produktu 1-go rodzaju wynosi: 8300, czyli

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} d_{i1}^t = 8300$$

Tabela III

Dolne ograniczenia produkcji produktu 2-go rodzaju wytwarzanego w 8 - fabrykach, w 5 okresach.

	c^t_{12}	c^t_{22}	c^t_{32}	c^t_{42}	c^t_{52}	c^t_{62}	c^t_{72}	c^t_{82}
c^1_{i2}	0	1	0	2	3	2	3	1
c^2_{i2}	0	3	0	4	7	3	3	2
c^3_{i2}	0	4	3	6	8	4	3	4
c^4_{i2}	2	5	5	8	9	5	4	5
c^4_{i2}	2	5	5	8	9	5	4	5
c^5_{i2}	8	7	8	10	10	6	4	6

Wniosek: suma dolnych ograniczeń produkcji produktu 2-go rodzaju wynosi: 151, czyli:

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} c^t_{i2} = 151$$

Tabela IV

Górne ograniczenia produkcji produktu 2-go rodzaju wytwarzanego w 8 - fabrykach, w 5 okresach.

	d^t_{12}	d^t_{22}	d^t_{32}	d^t_{42}	d^t_{52}	d^t_{62}	d^t_{72}	d^t_{82}
d^1_{i2}	0	100	0	80	100	150	70	190
d^2_{i2}	0	130	0	120	130	200	100	210
d^3_{i2}	0	200	120	180	170	250	120	250
d^4_{i2}	100	250	200	220	210	250	180	250
d^5_{i2}	200	270	230	300	290	350	230	300

Wniosek: suma górnych ograniczeń produkcji produktu 2-go rodzaju wynosi: 6700, czyli:

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} d^t_{i2} = 6700$$

Tabela V

Dolne ograniczenia produkcji produktu 3-go rodzaju wytwarzanego w 8 zakładach w 5 okresach.

	c_{13}^t	c_{23}^t	c_{33}^t	c_{43}^t	c_{53}^t	c_{63}^t	c_{73}^t	c_{83}^t
c_{i3}^t	2	1	2	3	2	1	4	1
c_{i3}^2	3	3	4	4	2	1	5	1
c_{i3}^3	4	5	6	4	3	2	6	1
c_{i3}^4	4	6	8	4	3	2	6	2
c_{i3}^5	5	7	8	5	4	3	7	3

Wniosek: suma dolnych ograniczeń produkcji 3-go rodzaju wytwarzanego w 8 zakładach, w pięciu okresach wynosi: 141, czyli

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} c_{i3}^t = 141$$

Tabela VI

Górne ograniczenia produkcji produktu 3-go rodzaju wytwarzanego w 8 zakładach w 5 okresach.

	d_{13}^t	d_{23}^t	d_{33}^t	d_{43}^t	d_{53}^t	d_{63}^t	d_{73}^t	d_{83}^t
d_{i3}^1	120	190	150	160	100	140	120	130
d_{i3}^2	180	210	200	200	150	160	180	170
d_{i3}^3	220	270	250	240	200	240	240	230
d_{i3}^4	280	330	250	300	250	260	260	270
d_{i3}^5	300	400	350	300	300	350	280	330

Wniosek: suma górnych ograniczeń produkcji produktu 3-go rodzaju wytwarzanego w 8 zakładach, w 5 okresach wynosi: 8960, czyli:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} d_{i3}^t = 8960$$

Tabela VII

Dolne ograniczenie zapotrzebowania na pierwszy produkt w sześciu hurtowniach, w 5 okresach.

	$'B_{11}^{t}$	$'B_{21}^{t}$	$'B_{31}^{t}$	$'B_{41}^{t}$	$'B_{51}^{t}$	$'B_{61}^{t}$
$'B_{j1}^{1}$	8	10	13	10	4	13
$'B_{i1}^{2}$	10	12	15	15	10	17
$'B_{j1}^{3}$	12	18	17	25	12	18
$'B_{j1}^{4}$	20	20	25	30	16	20
$'B_{j1}^{5}$	24	20	20	30	18	22

Wniosek: suma dolnego zapotrzebowania na pierwszy produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi: 504, czyli:

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} {'B_{j1}^{t}} = 504$$

Tabela VIII

Górne zapotrzebowanie na pierwszy produkt w pięciu okresach przez 6 hurtowni.

	$''B_{11}^{t}$	$''B_{21}^{t}$	$''B_{31}^{t}$	$''B_{41}^{t}$	$''B_{51}^{t}$	$''B_{61}^{t}$
$''B_{j1}^{1}$	18	17	20	15	12	20
$''B_{j1}^{2}$	22	33	20	25	18	30
$''B_{j1}^{3}$	30	40	30	35	20	40
$''B_{j1}^{4}$	30	25	35	37	24	40
$''B_{j1}^{5}$	32	25	35	43	26	45

Wniosek: suma górnego zapotrzebowania na pierwszy produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi: 632 jednostki, czyli

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} {''B_{j1}^{t}} = 632$$

Tabela IX

Dolne ograniczenie zapotrzebowania na drugi produkt w pięciu okresach przez sześć hurtowni.

	$'B^t_{12}$	$'B^t_{22}$	$'B^t_{32}$	$'B^t_{42}$	$'B^t_{52}$	$'B^t_{62}$
$'B^1_{j2}$	7	4	8	10	12	6
$'B^2_{j2}$	10	16	10	15	18	13
$'B^3_{j2}$	13	24	15	18	21	17
$'B^1_{j2}$	20	30	22	22	29	24
$'B^1_{j2}$	30	30	25	35	30	30

Wniosek: suma dolnego zapotrzebowania na drugi produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi: 554, czyli

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} {}'B^t_{j2} = 554$$

Tabela X

Górne ograniczenie zapotrzebowania na drugi produkt w pięciu okresach przez sześć hurtowni.

	$''B^t_{12}$	$''B^t_{22}$	$''B^t_{32}$	$''B^t_{42}$	$''B^t_{52}$	$''B^t_{62}$
$''B^1_{j2}$	20	15	18	20	15	17
$''B^2_{j2}$	25	25	22	30	20	23
$''B^3_{j2}$	25	35	30	40	30	27
$''B^4_{j2}$	30	44	38	50	35	33
$''B^5_{j2}$	40	56	42	60	40	45

Wniosek: suma górnego zapotrzebowania na drugi produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi: 750, czyli:

$$\sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} {}''B^t_{j2} = 750$$

Tabela XI

Dolne ograniczenie zapotrzebowania na trzeci produkt w pięciu okresach przez sześć hurtowni.

	$'B_{13}^{t}$	$'B_{23}^{t}$	$'B_{33}^{t}$	$'B_{43}^{t}$	$'B_{53}^{t}$	$'B_{63}^{t}$
$'B_{j3}^{1}$	8	10	6	8	10	12
$'B_{j3}^{1}$	12	22	12	10	15	18
$'B_{j3}^{5}$	20	28	28	15	20	20
$'B_{j3}^{4}$	30	30	30	25	25	25
$'B_{j3}^{5}$	40	50	34	32	40	30

Wniosek: suma dolnego zapotrzebowania na trzeci produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi: 665, czyli:

$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{t=1}^{5} {}'B_{j3}^{t} = 665$$

Tabela XII

Górne ograniczenie zapotrzebowania na trzeci produkt w pięciu okresach przez sześć hurtowni.

	$''B_{13}^{t}$	$''B_{23}^{t}$	$''B_{33}^{t}$	$''B_{43}^{t}$	$''B_{53}^{t}$	$''B_{63}^{t}$
$''B_{j3}^{1}$	20	20	10	15	20	20
$''B_{j3}^{2}$	30	30	15	20	30	30
$''B_{j3}^{3}$	50	40	20	30	45	35
$''B_{j3}^{4}$	60	50	25	35	50	45
$''B_{j3}^{5}$	80	90	45	45	70	50

Wniosek: suma górnego zapotrzebowania na trzeci produkt przez sześć hurtowni w pięciu okresach wynosi 1125, czyli:

$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{t=1}^{5} {}''B_{j3}^{t} = 1125$$

Dokonajmy obecnie zestawienia wyliczeń uzyskanych w wyżej przedstawionych tabelach. Weźmiemy kolejno ograniczenia produkcji, produktów 1-go, 2-go i 3-go rodzaju oraz ograniczenia dotyczące zapotrzebowania na ww. produkty.

Łączne ograniczenia produkcji produktu 1-go rodzaju, wyliczone w tabelach I i II umożliwiają nam zapisać nierówność:

$$114 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} \leqslant 8300 \tag{01}$$

Łączne ograniczenia zapotrzebowania na pierwszy produkt, wyliczone zostały w tabelach VII i VIII, otrzymujemy więc:

$$504 \leqslant \sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} P_{j1}^{t} \leqslant 632 \tag{02}$$

Ponieważ zakładamy, że planowana produkcja pierwszego produktu wytwarzanego w 8 zakładach w 5 okresach musi być równa zapotrzebowaniu na tenże produkt w 5 okresach i sześciu hurtowniach, więc otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} = \sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} P_{j1}^{t} \tag{03}$$

Uwzględniając nierówności (01) oraz (02) w (03) otrzymujemy:

$$\max\,(114, 504) \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} \leqslant \min\,(8300, 632) \tag{04}$$

czyli

$$504 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} \leqslant 632 \tag{06}$$

Nierówność (06) jest pierwszą informacją dotyczącą ustalania wielkości produkcji, produktu pierwszego rodzaju. Ostateczne ustalenie wielkości produkcji produktu pierwszego rodzaju może nastąpić dopiero po analizie zasobów surowców niezbędnych do wytworzenia produktu 1-go rodzaju.

Weźmy obecnie pod uwagę produkcję produktu 2-go rodzaju i istniejące zapotrzebowanie na tenże produkt. Z tabel III i IV oraz IX i X otrzymujemy:

$$151 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} \leqslant 6700 \tag{07}$$

$$554 \leqslant \sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} P_{j2}^{t} \leqslant 750 \tag{08}$$

Ponieważ:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} = \sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} P_{j2}^{t},$$

czyli

$$\max(151,554) \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} \leqslant \min(6700,750) \tag{09}$$

więc

$$554 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} \leqslant 750 \tag{010}$$

Podobnie rozumując w stosunku do produkcji produktu 3-go i zapotrzebowania na tenże produkt otrzymamy z tabel V i VI oraz XI i XII następujące nierówności:

$$141 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i3}^{t} \leqslant 8960$$

$$665 \leqslant \sum_{j=1}^{6} \sum_{t=1}^{5} P_{j3}^{t} \leqslant 1125$$

Z uwagi na to, że

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} Y_{i3}^{t} = \sum_{j=1}^{6}\sum_{t=1}^{5} P_{j3}^{t},$$

otrzymujemy

(011) $$665 \leqslant \sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} Y_{i3}^{t} \leqslant 1125$$

W zbudowanym modelu produkcyjno-transportowym ustaliliśmy, że zapotrzebowanie i-tej fabryki na s-ty surowiec w t-tym okresie w celu wyprodukowania "w" - produktów, wyraża się wzorem:

$$Z_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} A_{isp}^{t}\, Y_{ip}^{t}$$

Ponadto wykazaliśmy, że:

$$'A_{is}^{t} \leqslant Z_{is}^{t} \leqslant {''A}_{is}^{t}$$

gdzie

$$'A_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} A_{isp}^{t}\, C_{ip}^{t}, \quad A_{is}^{t} = \sum_{p=1}^{w} {''A}_{isp}^{t}\, d_{ip}^{t}$$

W rozważanym przykładzie liczbowym przypuśćmy, że do wyprodukowania każdego z trzech produktów potrzeba co najwyżej 2 - surowców.

W wyniku powyższego założenia otrzymamy związki:

(012) $$'A_{i1}^{t} = A_{i11}^{t}C_{i1}^{t} + A_{i12}^{t}C_{i2}^{t} + A_{i13}^{t}C_{i3}^{t}$$

(013) $$'A_{i2}^{t} = A_{i21}^{t}C_{i1}^{t} + A_{i22}^{t}C_{i2}^{t} + A_{i23}^{t}C_{i3}^{t}$$

(014) $$''A_{i1}^{t} = A_{i11}^{t}d_{i1}^{t} + A_{i12}^{t}d_{i2}^{t} + A_{i13}^{t}C_{i3}^{t}$$

(015) $$''A_{i2}^{t} = A_{i21}^{t}d_{i2}^{t} + A_{i22}^{t}d_{i2}^{t} + A_{i23}^{t}d_{i3}^{t}$$

W powyższych równaniach występują ograniczenia produkcji: c_{ip}^{t}, d_{ip}^{t}. Wartości liczbowe wspomnianych ograniczeń produkcji zostały podane w tabelach I - VI.

Na to, aby znaleźć ograniczenia dotyczące zapotrzebowania każdej fabryki na niezbędne do produkcji surowce, musimy ustalić wartości współczynników technologicznych produkcji, czyli musimy określić dane liczbowe na wielkości: A_{isp}^{t}, gdzie $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$, $t = 1,2,3,4,5$, $p = 1,2,3$, $s = 1,2$.

Wartości liczbowe
współczynników technologicznych produkcji

Tabela 1

	A_{111}^{t}	A_{211}^{t}	A_{311}^{t}	A_{411}^{t}	A_{511}^{t}	A_{611}^{t}	A_{711}^{t}	A_{811}^{t}
A_{i11}^{1}	3	4	3	5	3	2	6	4
A_{i11}^{2}	3	4	2	4	2	2	4	4
A_{i11}^{3}	2	3	1	2	2	2	3	3
A_{i11}^{4}	2	3	1	2	1	1	2	3
A_{i11}^{5}	1	2	1	2	1	1	2	2

Tabela 2

	A_{112}^{t}	A_{212}^{t}	A_{312}^{t}	A_{412}^{t}	A_{512}^{t}	A_{612}^{t}	A_{712}^{t}	A_{812}^{t}
A_{i12}^{1}	9	9	8	7	8	7	7	6
A_{i12}^{2}	8	9	7	5	5	6	5	5
A_{i12}^{3}	7	8	6	6	7	5	4	4
A_{i12}^{4}	6	8	5	6	6	4	4	3
A_{i12}^{5}	5	7	5	4	5	4	3	3

Tabela 3

	A^t_{113}	A^t_{213}	A^t_{313}	A^t_{413}	A^t_{513}	A^t_{613}	A^t_{713}	A^t_{813}
A^1_{i13}	12	12	11	10	10	12	11	11
A^2_{i13}	11	10	9	10	9	10	10	11
A^3_{i13}	10	8	7	9	8	8	9	10
A^4_{i13}	9	6	7	8	8	6	8	9
A^5_{i13}	8	6	7	8	7	6	8	9

Tabela 4

	A^t_{121}	A^t_{221}	A^t_{321}	A^t_{421}	A^t_{521}	A^t_{621}	A^t_{721}	A^t_{812}
A^1_{i21}	18	18	17	19	16	17	17	18
A^2_{i21}	17	16	17	16	16	16	15	16
A^3_{i21}	17	16	16	15	15	15	15	15
A^4_{i21}	16	15	16	14	15	14	14	14
A^5_{i31}	15	15	15	14	14	13	14	14

Tabela 5

	A^t_{122}	A^t_{222}	A^t_{322}	A^t_{422}	A^t_{522}	A^t_{622}	A^t_{722}	A^t_{822}
A^1_{i22}	10	10	11	12	10	9	12	13
A^2_{i22}	10	9	8	11	9	9	11	10
A^3_{i22}	9	9	8	10	9	8	10	10
A^4_{i22}	8	8	8	9	9	8	9	10
A^5_{i22}	8	8	7	9	8	7	9	9

Tabela 6

	A^t_{123}	A^t_{223}	A^t_{323}	A^t_{423}	A^t_{523}	A^t_{623}	A^t_{723}	A^t_{823}
A^1_{i23}	21	20	22	23	19	21	24	20
A^2_{i23}	20	18	18	23	19	19	23	18
A^3_{i23}	20	17	18	20	18	18	20	16
A^4_{i23}	19	17	18	18	18	17	18	16
A^5_{i23}	19	16	17	16	17	17	16	14

Współczynniki technologiczne produkcji przedstawione w tabelach 1 - 6 oraz ograniczenia produkcji wytwarzanych produktów uwidocznione w tabelach I - VI umożliwiają znalezienie ograniczeń zapotrzebowania na surowce niezbędne do wytwarzania rozpatrywanych produktów.

Pierwszą grupą dolnych ograniczeń zapotrzebowania na pierwszy surowiec w 5 - okresach oraz 8 fabrykach znajdziemy ze wzoru (012).

Dla ustalenia uwagi pokażmy sposób obliczania ograniczenia na 1-y surowiec, w 1-ym okresie w 8 zakładach produkcyjnych. Weźmy więc pod uwagę wzór:

$$'A^1_{i1} = A^1_{i11}C^1_{i1} + A^1_{i12}C^1_{i2} + A^1_{i13}C^1_{i3} \tag{012a}$$

gdzie $i = 1,2,\ldots,8$.

Rozpisując wzór (012a) oraz uwzględniając, w rozpisanych równaniach dane liczbowe z tabel 1 - 3 oraz I - V otrzymamy:

$$'A^1_{11} = A^1_{111}C^1_{11} + A^1_{112}C^1_{12} + A^1_{113}C^1_{13} = 3\cdot 2 + 9\cdot 0 + 12\cdot 2 = 30$$

$$'A^1_{21} = A^1_{211}C^1_{21} + A^1_{212}C^1_{22} + A^1_{213}C^1_{23} = 4\cdot 1 + 9\cdot 1 + 12\cdot 1 = 25$$

$$'A^1_{31} = A^1_{311}C^1_{31} + A^1_{312}C^1_{32} + A^1_{313}C^1_{33} = 3\cdot 2 + 8\cdot 0 + 11\cdot 2 = 28$$

$$'A^1_{41} = A^1_{411}C^1_{41} + A^1_{412}C^1_{42} + A^1_{413}C^1_{43} = 5\cdot 0 + 7\cdot 2 + 10\cdot 3 = 44$$

$$'A_{51}^1 = A_{511}^1 C_{51}^1 + A_{512}^1 C_{52}^1 + A_{513}^1 C_{53}^1 = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$$

$$'A_{61}^1 = A_{611}^1 C_{61}^1 + A_{612}^1 C_{62}^1 + A_{613}^1 C_{63}^1 = 2 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 30$$

$$'A_{71}^1 = A_{711}^1 C_{71}^1 + A_{712}^1 C_{72}^1 + A_{713}^1 C_{73}^1 = 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 11 \cdot 4 = 71$$

$$'A_{81}^1 = A_{811}^1 C_{81}^1 + A_{812}^1 C_{82}^1 + A_{813}^1 C_{83}^1 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 11 \cdot 1 = 25$$

Tabela dolnych ograniczeń zapotrzebowania na pierwszy surowiec, w pięciu okresach, w 8 fabrykach.

(Wyniki wyliczeń z równości: (012))

Tabela XIII

	$'A_{11}^t$	$'A_{21}^t$	$'A_{31}^t$	$'A_{41}^t$	$'A_{51}^t$	$'A_{61}^t$	$'A_{71}^t$	$'A_{81}^t$
$'A_{i1}^1$	30	25	28	44	53	30	71	25
$'A_{i1}^2$	45	69	40	60	49	34	77	33
$'A_{i1}^3$	48	71	62	76	98	44	75	38
$'A_{i1}^4$	58	88	84	86	82	37	70	48
$'A_{i1}^5$	86	99	100	90	84	48	86	57

Wniosek: suma dolnego zapotrzebowania na pierwszy surowiec przez 8 fabryk, w pięciu okresach wynosi: 2396 czyli:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} {}'A_{i1}^t = 2396$$

Tabela dolnych ograniczeń zapotrzebowania na drugi surowiec, w pięciu okresach, w 8 fabrykach.

(Wyniki wyliczeń z równości (013))

Tabela XIV

	$'A^t_{12}$	$'A^t_{22}$	$'A^t_{32}$	$'A^t_{42}$	$'A^t_{52}$	$'A^t_{62}$	$'A^t_{72}$	$'A^t_{82}$
$'A^1_{i2}$	78	48	78	73	116	72	151	69
$'A^2_{i2}$	128	129	86	136	129	94	193	86
$'A^3_{i2}$	148	169	154	170	186	128	195	96
$'A^4_{i2}$	182	202	232	186	195	144	186	152
$'A^5_{i2}$	239	228	252	240	232	171	204	180

Wniosek: suma dolnego zapotrzebowania na drugi surowiec przez 8 fabryk, w pięciu okresach wynosi: 6245, czyli:

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} {}'A^t_{i2} = 6245$$

Na to, aby wyliczyć górne ograniczenia zapotrzebowania na pierwszy i drugi surowiec, które są niezbędne do wytwarzania produktów pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju weźmiemy pod uwagę nierówności (014) i (015).

Dla przykładu rozpiszmy równość (014), aby wyraźnie pokazać jakie należy poczynić wyliczenia, aby otrzymać potrzebne dane liczbowe.

Niech więc będzie równość:

$$''A^t_{i1} = A^t_{i11}\, d^t_{i1} + A^t_{i12}\, d^t_{i2} + A^t_{i13}\, d^t_{i3}$$

W powyższej równości $t = 1,2,3,4,5$ oraz $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$. W wyniku postępu wyliczenia widzimy, że z (014) należy utworzyć 40 równań.

Wypiszmy dla przykładu osiem następujących równań:

$$''A^t_{11} = A^t_{111}d^t_{11} + A^t_{112}d^t_{12} + A^t_{113}d^t_{13}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{21} = A^t_{211}d^t_{21} + A^t_{212}d^t_{22} + A^t_{213}d^t_{23}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{31} = A^t_{311}d^t_{31} + A^t_{312}d^t_{32} + A^t_{313}d^t_{33}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{41} = A^t_{411}d^t_{41} + A^t_{412}d^t_{42} + A^t_{413}d^t_{43}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{51} = A^t_{511}d^t_{51} + A^t_{512}d^t_{52} + A^t_{513}d^t_{53}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{61} = A^t_{611}d^t_{61} + A^t_{612}d^t_{62} + A^t_{613}d^t_{63}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{71} = A^t_{711}d^t_{71} + A^t_{712}d^t_{72} + A^t_{713}d^t_{73}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

$$''A^t_{81} = A^t_{811}d^t_{81} + A^t_{812}d^t_{82} + A^t_{813}d^t_{83}, \quad \text{gdzie } t = 1,2,3,4,5$$

Gdy, więc w równaniach (014) i (015) uwzględnimy podane w poprzednio zbudowanych tabelach odpowiednie dane liczbowe, wówczas otrzymamy wartości liczbowe na: $''A^t_{i1}$, $''A^t_{i2}$.

Tabela górnych ograniczeń zapotrzebowania na pierwszy surowiec w pięciu okresach, 8 fabrykach.

(Wyniki wyliczeń uzyskano z równości: (014))

Tabela XV

	$''A^t_{11}$	$''A^t_{21}$	$''A^t_{31}$	$''A^t_{41}$	$''A^t_{51}$	$''A^t_{61}$	$''A^t_{71}$	$''A^t_{81}$
$''A^1_{i1}$	1650	3500	1980	2160	2130	2970	2350	2970
$''A^2_{i1}$	2340	3670	2040	2600	2300	3120	2780	3600
$''A^3_{i1}$	2480	4120	2610	3400	3190	3570	3090	3900
$''A^4_{i1}$	3440	4400	2910	3960	3510	2800	3160	3990
$''A^5_{i1}$	3600	4650	3790	4000	3850	3780	3330	4470

Wniosek: suma górnego zapotrzebowania na pierwszy surowiec przez 8 fabryk w pięciu okresach wynosi: 128160, czyli

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} ''A^t_{i1} = 128160$$

Tabela górnych ograniczeń zapotrzebowania na drugi surowiec w pięciu okresach, 8 fabrykach.

(Wyniki wyliczeń uzyskano z równości: (015))

Tabela XVI

	$''A_{12}^t$	$''A_{22}^t$	$''A_{32}^t$	$''A_{42}^t$	$''A_{52}^t$	$''A_{62}^t$	$''A_{72}^t$	$''A_{82}^t$
$''A_{i2}^1$	3780	6240	5170	4640	4660	6330	5250	6870
$''A_{i2}^2$	5640	6550	5640	5920	6420	7400	7160	6960
$''A_{i2}^3$	6780	8310	7700	7800	8130	9320	8250	9180
$''A_{i2}^4$	8680	9710	8660	10460	10140	7780	10220	10600
$''A_{i2}^5$	9700	10990	9950	8800	10750	10990	7970	9720

Wniosek: suma górnego zapotrzebowania na drugi surowiec przez 8 fabryk, w pięciu okresach wynosi: 315220 czyli:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} {''A_{i2}^t} = 315220$$

Zbadajmy obecnie zasoby surowców, które są niezbędne do produkcji rozpatrywanych w zadaniu produktów.

Tabela XVII

Dolne ograniczenia produkcji surowca 1-go rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach w pięciu okresach.

	a_{11}^t	a_{21}^t	a_{31}^t	a_{41}^t	a_{51}^t	a_{61}^t	a_{71}^t
a_{r1}^1	30	50	50	30	70	80	60
a_{r1}^2	40	80	40	40	80	80	80
a_{r1}^3	40	90	50	40	90	90	90
a_{r1}^4	50	90	60	50	90	90	90
a_{r1}^5	70	100	70	50	100	90	100

Wniosek: suma dolnych ograniczeń produkcji surowca pierwszego rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach, w pięciu okresach wynosi: 1960, czyli

$$\sum_{r=1}^{7} \sum_{t=1}^{5} a_{r1}^t = 1960$$

Tabela XVIII

Górne ograniczenia produkcji surowca 1-go rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach w pięciu okresach.

	b^t_{11}	b^t_{21}	b^t_{31}	b^t_{41}	b^t_{51}	b^t_{61}	b^t_{71}
b^1_{r1}	900	1000	800	700	1400	1700	1000
b^2_{r1}	1200	1300	900	1100	2000	2200	1100
b^3_{r1}	1500	1500	1400	1700	2300	2700	1600
b^4_{r1}	2000	2200	2000	2000	2500	2800	2000
b^5_{r1}	2500	2700	2400	2800	3000	3200	2300

Wniosek: suma górnych ograniczeń produkcji surowca pierwszego rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach, w pięciu okresach wynosi: 64600, czyli

$$\sum_{r=1}^{7} \sum_{t=1}^{5} b^t_{r1} = 64600$$

Tabela XIX

Dolne ograniczenia produkcji surowca 2-go rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach w pięciu okresach.

	a^t_{12}	a^t_{22}	a^t_{32}	a^t_{42}	a^t_{52}	a^t_{62}	a^t_{72}
a^1_{r2}	70	90	60	110	100	90	80
a^2_{r2}	130	150	200	180	220	210	120
a^3_{r2}	210	200	300	270	300	350	200
a^4_{r2}	280	300	350	360	450	400	300
a^5_{r2}	330	350	400	500	600	500	400

Wniosek: suma dolnych ograniczeń produkcji surowca drugiego rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach, w pięciu okresach wynosi: 9160, czyli

$$\sum_{r=1}^{7} \sum_{t=1}^{5} b^t_{r2} = 9160$$

Tabela XX

Górne ograniczenie produkcji surowca 2-go rodzaju wytwarzanego w 7 zakładach w pięciu okresach.

	b_{12}^t	b_{22}^t	b_{32}^t	b_{42}^t	b_{52}^t	b_{62}^t	b_{72}^t
b_{r2}^1	2000	2500	1500	2000	2500	2000	1800
b_{r2}^2	3300	4000	3000	3000	4500	3000	2200
b_{r2}^3	4500	6000	4000	4500	6000	4500	3000
b_{r2}^4	5800	7000	5000	5500	7000	5000	4000
b_{r2}^5	8000	8000	6700	9700	9000	7000	6000

Wniosek: suma górnych ograniczeń produkcji surowca drugiego rodzaju wytwarzanego w siedmiu zakładach w pięciu okresach wynosi: 160100, czyli

$$\sum_{r=1}^{7}\sum_{t=1}^{5} b_{r2}^{t} = 160100$$

Kolejnym etapem naszych wyliczeń będzie zestawienie wyników dotyczących ograniczeń wytwarzanych surowców oraz ograniczeń dotyczących zapotrzebowania na surowce.

Z tabeli XVII i XVIII wnioskujemy, że

$$1960 \leqslant \sum_{r=1}^{7}\sum_{t=1}^{5} x_{r1}^{t} \leqslant 64600$$

Z tabeli XIII i XV mamy:

$$2396 \leqslant \sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} z_{i1}^{t} \leqslant 128160$$

Ponieważ zakładamy, że:

$$\sum_{r=1}^{7}\sum_{t=1}^{5} x_{r1}^{t} = \sum_{i=1}^{8}\sum_{t=1}^{5} z_{i1}^{t}$$

więc otrzymamy:

(016) $$2396 \leqslant \sum_{r=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} X_{r1}^{t} \leqslant 64600$$

Zwróćmy obecnie uwagę na produkcję i zapotrzebowanie na drugi surowiec. Łatwo widzieć, że:

$$9160 \leqslant \sum_{r=1}^{7} \sum_{t=1}^{5} X_{r2}^{t} \leqslant 160100$$

oraz

$$6245 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Z_{i2}^{t} \leqslant 315220$$

czyli

(017) $$6245 \leqslant \sum_{r=1}^{7} \sum_{t=1}^{5} X_{r2}^{t} \leqslant 160100$$

Przy zestawieniu danych liczbowych dotyczących ograniczeń wytwarzanych produktów i ograniczeń dotyczących zapotrzebowania przez hurtownie przez wymienione produkty otrzymaliśmy nierówności:

$$504 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i1}^{t} \leqslant 632$$

$$554 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i2}^{t} \leqslant 750$$

$$665 \leqslant \sum_{i=1}^{8} \sum_{t=1}^{5} Y_{i3}^{t} \leqslant 1125$$

Stwierdziliśmy ponadto, że wyżej wymienione nierówności są pierwszą informacją dotyczącą ustalania produkcji.

Przedstawiając teoretyczne podstawy modelu, wprowadziliśmy pojęcie średniego współczynnika technicznego produkcji i wyraziliśmy powyższy fakt wzorem:

$$A_{sp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} A_{isp}^{t}}{m + T}$$

Przy pomocy powyższego wzoru ustalić można wielkość produkcji s-tego surowca w celu wyprodukowania "w" produktów, otrzymamy:

$$C_s = \sum_{p=1}^{w} A_{sp} D_p$$

W naszym konkretnym przykładzie, gdzie występują trzy produkty i 2 surowce należy wyliczyć z tabel 1 - 6 wartości współczynnika A_{sp}, dla $s = 1,2$, oraz $p = 1,2,3$, pamiętać przy tym należy, że $m = 8$, $T = 5$, czyli $m + T = 13$.

W celu zbadania, czy zasoby surowców są wystarczające dla wyprodukowania każdego z trzech produktów, weźmy pod uwagę równości:

$$C_1 = A_{11}D_1 + A_{12}D_2 + A_{13}D_3$$

$$C_2 = A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3$$

Łatwo wyliczyć z wyżej wyszczególnionych wskazówek, że:

$$A_{11} \approx 7, \quad A_{12} \approx 18, \quad A_{13} \approx 27$$

$$A_{21} \approx 48, \quad A_{22} \approx 29, \quad A_{23} \approx 58$$

Weźmy pod uwagę ograniczenia dotyczące wielkości produkcji poszczególnych produktów, i ustalmy, że chcemy wytwarzać następujące wielkości:

$$D_1 = 504, \quad D_2 = 554, \quad D_3 = 665$$

Zapotrzebowanie na surowiec pierwszego rodzaju w celu wyprodukowania wyżej wyszczególnionych wielkości produktów 1-go, 2-go i 3-go rodzaju wyrazi się liczbą:

$$C_1 = 7\cdot504 + 18\cdot554 + 27\cdot665 = 31555$$

Z nierówności (016) widzimy, że ograniczenia surowca 1-go rodzaju są zawarte w przedziale: $[2396,\ 64600]$, czyli wzmiankowaną produkcję poszczególnych produktów możemy produkować.

Sprawdźmy obecnie, czy wystarczające są zasoby surowca drugiego rodzaju w celu wyprodukowania trzech badanych produktów.

Gdy podstawimy wyżej wyszczególnione dane liczbowe do wzoru:

$$C_2 = A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3,$$

wówczas otrzymamy:

$$C_2 = 48\cdot504 + 29\cdot554 + 58\cdot665 = 77828$$

Wniosek: zasoby surowca drugiego rodzaju są wystarczające do wyprodukowania ww. ilości poszczególnych produktów, gdyż liczba 77828 należy do przedziału określonego nierówności (017).

Z powyższych rozważań stwierdzamy, że rozważany przykładowo model produkcyjno-transportowy jest modelem niesprzecznym. Wiedząc, iż model jest niesprzeczny należałoby przystąpić do poszukiwania wartości minimalizujących. funkcję kryterium i spełniających warunki ograniczające.

Można stosunkowo łatwo napisać ciągi równań funkcyjnych wraz z odpowiadającymi warunkami, jednakże znalezienie wartości optymalnych jest możliwe jedynie przy użyciu elektronicznej techniki obliczeniowej.

W celu potwierdzenia powyższej tezy w następnym paragrafie pokażemy rozwiązanie najprostszego zadania metodą programowania dynamicznego i przez to, wskażemy drogi jakimi należy postępować przy rozwiązywaniu konkretnych przykładów liczbowych.

Wprawdzie wędrówki do osiągnięcia celu są długie i uciążliwe, jednakże w rezultacie stosowania programowania dynamicznego otrzymamy rozwiązanie optymalne, czego byśmy nie osiągnęli stosując metody klasyczne.

5.2. Zadanie przykładowe

W celu jasnego przedstawienia idei programowania dynamicznego, na których opierają się wyniki naszej pracy rozpatrzmy następujące zadania przykładowe.

Znaleźć wektor:

$$X^o = (X_1^o, X_2^o, \ldots, X_m^o),$$

który spełniając warunki:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = w,$$

$$a_i \leqslant X_i \leqslant b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

powoduje minimalizację formy:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\ (X_i)$$

Zadaniu powyższemu można nadać następującą interpretację ekonomiczną:

$f_i\ (X_i)$ - dane koszty produkcji w i-tym zakładzie

a_i - dolne ograniczenia produkcji

b_i - górne ograniczenia produkcji

w - planowana produkcja w m - zakładach.

Przy rozwiązywaniu zagadnień metodą programowania dynamicznego rozróżniamy 2 etapy (porównaj rozważania rozdziału III i IV).

W pierwszym etapie poszukujemy ciągu równań funkcyjnych. W etapie drugim dokonujemy adaptacji wyprowadzonych równań do obliczeń numerycznych.

Etap I - Poszukiwanie ciągu równań funkcyjnych

Wprowadźmy nową funkcję $F_M(W)$, $M = 1,2,3,\ldots,m$. Funkcja $F_M\ (W)$ oznacza minimalne koszty produkcji w M - zakładach, wytwarzających łącznie W - jednostkach badanego produktu.

Oczywisty jest związek: $F_1(W) = f_1(W)$, bowiem optymalne koszty produkcji w jednym zakładzie, czyli $F_1(W)$ muszą się równać kosztom produkcji w tym zakładzie.

Znajdźmy obecnie związek między $F_M(W)$ i $F_{M-1}(W)$ dla dowolnego W oraz M.

Niech X_M będzie wielkością produkcji, którą należy wyprodukować w M-tym zakładzie gdzie:

$$a_M \leqslant X_M \leqslant b_M$$

$$0 \leqslant X_M \leqslant W$$

czyli
$$a_M \leqslant X_M \leqslant \min (b_M, W)$$

Jeśli więc X_M produkować będziemy w M-tym zakładzie, w takim razie wielkość produkcji postaci: $W - X_M$ należy produkować w pozostałych $M - 1$ zakładach w taki sposób aby koszty produkcji były najmniejsze.

Ponieważ optymalne koszty produkcji $W - X_M$ w $M - 1$ zakładach - jak wynika z definicji - wyraża $F_{M-1}(W - X_M)$, natomiast koszty produkcji w M-tym zakładzie wynoszą $f_M(X_M)$, więc łączne koszty produkcji w M - badanych zakładach wyniosą:

$$f_M(X_M) + F_{M-1}(W - X_M)$$

Naszym celem jest znalezienie optymalnych wartości X_M, przy których funkcja kryterium osiąga minimum. W ten sposób otrzymamy:

1. $$F_M(W) = \min\left[F_M(X_M) + F_{M-1}(W - X_M)\right]$$

gdzie $M = 2,3,\ldots,m$

gdy $M = 1$, wtedy

2. $$F_1(W) = f_1(X_1)$$

Minima równań (1) i (2) należy liczyć przy warunkach:

3. $$a_M \leqslant X_M \leqslant \min (b_M, W), \quad M = 1,2,\ldots,m$$

Etap II - Adaptacja równań (1) - (2) do obliczeń numerycznych.

Podzielmy X_M na równe części oraz w punktach podziału określmy nową zmienną np. L_M.
Podzielmy również W na ww. części. Niech dane w zadaniu funkcje będą określone w punktach podziału, czyli w punktach: L_M. Wprowadźmy zmienną pomocniczą postaci:

$$Ł_M = \sum_{i=1}^{M} L_i$$

W wyniku powyższego podziału oraz zamiany zmiennych otrzymujemy zmodyfikowaną postać równań (1) - (2), wygodną do obliczeń numerycznych.
Będą to równania:

$$F_M\ (Ł_M) = \min \left[f_M\ (L_M) + F_{M-1}\ (Ł_M - L_M) \right]$$

gdzie $M = 2,3,\ldots,m$
Przy czym $L_M \in \left[a_M,\ b_M\right]$ dla każdego

$$Ł_M \in \left[\sum_{i=1}^{M} a_i,\ \min \left(\sum_{i=1}^{M} b_i,\ W \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} a_i \leqslant Ł_M - L_M \leqslant \min \left(\sum_{i=1}^{M-1} b_i,\ W \right)$$

Uwaga

W praktycznych wyliczeniach wygodnie jest założyć, że wielkości a_i, b_i, W są współmierne i wtedy, gdy h jest wspólną miarą tych wielkości, wówczas otrzymujemy:

$$L_M \in \left[k_M h,\ q_M h \right]$$

dla każdego

$$Ł_M \in \left[\sum_{i=1}^{M} k_i h,\ \min \left(\sum_{i=1}^{M} q_i h,\ kh \right) \right]$$

spełniającego nierówność

$$\sum_{i=1}^{M-1} k_i h \leqslant Ł_M - L_M \leqslant \min \left(\sum_{i=1}^{M-1} q_i h,\ kh \right)$$

Przykład liczbowy

Obliczyć minimum formy:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i\ (X_i)$$

przy warunkach

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = 32$$

$$2 \leqslant X_1 \leqslant 14; \quad 2 \leqslant X_2 \leqslant 12; \quad 2 \leqslant X_3 \leqslant 16;$$

$$4 \leqslant X_4 \leqslant 12; \quad 4 \leqslant X_5 \leqslant 14$$

Niech wartości funkcji $f_i\ (X_i)$ dla $i = 1,2,3,4,5$ będą dane w tabeli.

X_i	2	4	6	8	10	12	14	16
$f_1(X_1)$	3	6	9	12	15	18	21	-
$f_2(X_2)$	3	5	7	12	15	19	-	-
$f_3(X_3)$	4	6	9	13	16	18	22	25
$f_4(X_4)$	-	-	5	8	13	17	20	-
$f_5(X_5)$	-	-	5	7	11	15	17	20

Biorąc pod uwagę warunki ograniczające badanego przykładu przyjmijmy, że w zadaniu naszym $h = 2$. Wykorzystując więc myśl przewodnią opisanego algorytmu napiszmy 5 równań funkcyjnych oraz odpowiadające im warunki ograniczające, a tym samym przedstawmy plan rozwiązania zadania.

1) $$F_1(Ł_1) = f_1(L_1)$$

gdzie $Ł_1 = L_1$ oraz $2 \leqslant Ł_1 \leqslant 14$

2) $$F_2(Ł_2) = \min\left[f_2(L_2) + F_1(Ł_2 - L_2)\right]$$

gdzie $L_2 = 2,4,\ldots,12$
dla każdego $Ł_2 = 4,6,\ldots,26$
spełniającego nierówność: $2 \leqslant Ł_2 - L_2 \leqslant 14$

3) $$F_3(Ł_3) = \min\left[f_3(L_3) + F_2(Ł_3 - L_3)\right]$$

gdzie $L_3 = 2,4,\ldots,16$
dla każdego $Ł_3 = 6,8,\ldots,32$ spełniającego nierówność $4 \leqslant Ł_3 - L_3 \leqslant 26$.

4) $$F_4(Ł_4) = \min\left[f_4(L_4) + F_3(Ł_4 - L_4)\right]$$

gdzie $L_4 = 4,6,\ldots,12$ dla każdego $Ł_4 = 10,12,\ldots,32$ spełniającego nierówność $6 \leqslant Ł_4 - L_4 \leqslant 32$.

5) $$F_5(Ł_5) = \min\left[f_5(L_5) + F_4(Ł_5 - L_5)\right]$$

gdzie $L_5 = 4,6,\ldots,14$ dla każdego $Ł_5 = 14,16,\ldots,32$ spełniającego nierówność $10 \leqslant Ł_5 - L_5 \leqslant 32$.

Mając powyższe równanie należy zbudować pięć tabel odpowiadających kolejnym równaniom.

Tabela 1

$Ł_1$	2	4	6	8	10	12	14
$F_1(Ł_1)$							
$X_1 = L_1$							

Tabela 2

$Ł_2$	4	6	8	12	14	16	18	20	22	24	26
$F_2(Ł_2)$											
$X_2 = L_2$											

Tabela 3

$Ł_3$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	26	28	30	32
$F_3(Ł_3)$													
$X_3 = L_3$													

Tabela 4

$Ł_4$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$F_4(Ł_4)$													
$X_4 = L_4$													

Tabela 5

$Ł_5$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30.	32
$F_5(Ł_5)$												
$X_5 = L_5$												

Aby uzyskać dane liczbowe należące do tabeli pierwszej należy wykorzystać decyzję początkową. Inaczej mówiąc należy po prostu przepisać wartość funkcji $f_1(X_1)$ do tabeli 1-ej. Otrzymamy:

Tabela 1

$Ł_1$	2	4	6	8	10	12	14
$F_1(Ł_1)$	3	6	9	12	15	18	21
$L_1 = X_1$	2	4	6	8	10	12	14

Aby obliczyć $F_2(Ł_2)$, a tym samym aby uzyskać wyniki do tabeli 2-giej musimy pamiętać: że $L_2 = 2,3,\ldots,12$ dla każdego $Ł_2 = 4,6,\ldots,26$ spełniającego nierówność $2 \leqslant Ł_2 - L_2 \leqslant 14$ Jeśli więc $Ł_2 = 4$, wtedy z uwagi na nierówność $2 \leqslant Ł_2 - L_2 \leqslant 14,\ldots,L_2 = 2$, czyli:

$$F_2(4) = f_2(2) + F_1(4 - 2) = 3 + 3 = 6$$

Jeśli $Ł_2 = 6$, wtedy $L_1 = 2,4$, czyli

$$F_2(6) = \begin{matrix} f_2(2) + F_1(6-2) = 3 + 6 = 9 \\ f_2(4) + F_1(6-4) = 5 + 3 = 8 \end{matrix}$$

Gdy $Ł_2 = 6$, wtedy wartość minimalna $F_2(6) = 8$.Wartości minimalnej 8 odpowiada $X_2 = 4$.
Jeśli $Ł_2 = 8$, wtedy $L_2 = 2,4,6$, czyli

$$F_2(8) = \begin{matrix} f_2(2) + F_1(8 - 2) = 3 + 9 = 12 \\ f_2(4) + F_1(8 - 4) = 5 + 6 = 11 \\ f_2(6) + F_1(8 - 6) = 7 + 3 = 10 \end{matrix}$$

Wartości minimalnej $F_2(8) = 10$ odpowiada $X_2 = 6$
Jeśli $Ł_2 = 10$ wtedy $L_2 = 2,4,6,8$, czyli:

$$F_2(10) = \begin{matrix} f_2(2) + F_1(10-2) = 3 + 12 = 15 \\ f_2(4) + F_1(10-4) = 5 + 9 = 14 \\ f_2(6) + F_1(10-6) = 7 + 6 = 13 \\ f_2(8) + F_1(10-8) = 12 + 3 = 15 \end{matrix}$$

$F_2(10) = 13$ dla $X_2 = 6$

Postępując w opisany sposób otrzymamy następujące wartości minimalne i odpowiadające im wartości zmiennych niezależnych.

$F_2(12) = 16$ dla $X_2 = 6$; $F_2(14) = 19$ dla $X_2 = 6$;

$F_2(16) = 22$ dla $X_2 = 6$; $F_2(18) = 25$ dla $X_2 = 6$;

$F_2(20) = 28$ dla $X_2 = 6$; $F_2(22) = 33$ dla $X_2 = 8$ lub $X_2 = 10$

$F_2(24) = 36$ dla $X_2 = 10$; $F_2(26) = 40$ dla $X_2 = 12$

Znalezione dane liczbowe zapisujemy w tabeli 2.

Tabela 2

$Ł_2$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$F_2(Ł_2)$	6	8	10	13	16	19	22	25	28	33	36	40
$L_2 = X_2$	2	4	6	6	6	6	6	6	6	8 13	10	12

Jeśli wykorzystamy kolejne równanie funkcyjne dla $M = 3,4,5$ oraz gdy będziemy postępowali według przedstawionego rozumowania, wówczas otrzymamy dane liczbowe należące do tabeli trzeciej, czwartej i piątej. Z warunków zadania wynika, że w tabeli piątej interesować nas będzie tylko wartość minimalna $F_5(32)$ oraz odpowiadające jej wartości X_5 - stąd też w etapie 5-tym ograniczymy się tylko do obliczenia $F_5(32)$ oraz odpowiadających wartości X_5.

Tabela 3

$Ł_3$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$F_3(Ł_3)$	10	12	14	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46
L_3	2	2 4	2 4	4	4 6	4 6	4 6	4 6 12	4 6 12	4 6 12	6 12	12	12	12

Tabela 4

$Ł_4$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$F_4(Ł_4)$	15	17	19	21	24	27	30	33	36	39	42	45
L_4	4	4	4	4	4 6	4 6	4 6	4 6	4 6	4 6	4 6	4 6

Łatwo można wyliczyć, że wartości minimalnej $F_5(32) = 43$ odpowiada $X_5^o = 6$.

W ostatnim etapie rozwiązania należy wykorzystać wyliczone dane liczbowe. Jeśli więc minimum badanej formy przy danych warunkach wynosi $F_5(32) = 43$ i jeśli minimum to jest osiągnięte dla $X_5 = 6$, w takim razie z tabeli 4-tej poszukujemy wartości X_4 odpowiadającej wartości $F_4(32-6)$. Widzimy, że wartość $F_4(32-6) = F_4(26) = 36$ odpowiada $X_4 = 4$ lub $X_4 = 6$.
Przypomnijmy, że $X_4^o = 4$. Z tabeli trzeciej poszukujemy wartości X_3 odpowiadającej wartości minimalnej $F_3(26-4)$. Widzimy, że wartości minimalnej $F_3(22)$ w tabeli 3-ej odpowiada: $X_3 = 4$ lub $X_3 = 6$ lub $X_3 = 12$.

Przyjmijmy, że $X_3^o = 4$. Z tabeli drugiej poszukujemy wartości X_2 odpowiadającej wartości minimalnej $F_2(22-4)$.

W tabeli 2-giej odczytujemy, że wartości minimalnej $F_2(18)$ odpowiada $X_2^o = 6$. Mając $X_2^o = 6$ odczytujemy z tabeli pierwszej, że $X_1^o = 12$. Uzyskaliśmy w ten sposób pierwszy wektor, którego składowe minimalizują badaną formę i spełniają warunki ograniczające, czyli:

$$X_1^o = 12, \quad X_2^o = 6, \quad X_3^o = 4, \quad X_4^o = 4, \quad X_5^o = 6$$

Sprawdzenie

1) $f_1(12) + f_2(6) + f_3(4) + f_4(4) + f_5(6) = 18+7+6+5+7 = 43$

2) $X_1^o + X_2^o + X_3^o + X_4^o + X_5^o + X_6^o = 12 + 6 + 4 + 4 + 6 = 32$

3) $2 \leqslant X_1^o \leqslant 14, \quad 2 \leqslant X_2^o \leqslant 12, \quad 2 \leqslant X_3^o \leqslant 16$

$4 \leqslant X_4^o \leqslant 12, \quad 4 \leqslant X_5^o \leqslant 14$

Łatwo można sprawdzić, że istnieje jeszcze pięć wektorów, których składowe spełniają warunki zadania i minimalizują badaną formę. Są to wektory postaci:

$$\{8,6,6,6,6\}; \quad \{10,6,6,4,6\}; \quad \{4,6,12,4,6\};$$

$$\{10,6,4,6,6\}; \quad \{2,6,12,6,6\}.$$

UWAGI KOŃCOWE

W rozdziale II przy formułowaniu celu pracy ustaliliśmy, że dążyć będziemy do przedstawienia budowy dynamicznego modelu produkcyjno-transportowego oraz do rozbudowy metod programowania dynamicznego do takiego etapu, aby można było przy ich pomocy znaleźć optymalne rozwiązanie zbudowanego modelu.

Przypomnijmy, że przez optymalne rozwiązanie modelu produkcyjno-transportowego rozumiemy znalezienie odpowiedzi na pytania:

Kiedy, gdzie, ile, czego produkować oraz kiedy, skąd, dokąd, ile, czego przewozić, tak aby zbudowana funkcja kosztów produkcji i transportu osiągnęła minimum oraz aby były spełnione warunki (były zaspokojone potrzeby) wynikające z planu gospodarki narodowej.

Z rozważań przedstawionych w rozdziałach II, III i IV wynika, że ogólne założenia pracy zostały osiągnięte.

Nasuwa się jednak pytanie: jakie są możliwości praktycznego wykorzystania znalezionych równań funkcyjnych w konkretnej działalności gospodarczej?

Wydaje się, że zastosowanie znalezionego algorytmu w praktyce będzie możliwe gdy:

a) podane zostaną dane liczbowe dotyczące ograniczeń produkcji, surowców i produktów oraz ograniczeń dotyczących zapotrzebowania na surowce i produkty w poszczególnych okresach planowanego okresu czasu,

b) podane zostaną liczby mówiące ile należy produkować surowców i produktów w planowanym okresie czasu np. w ciągu 5 lat,

c) ustalone zostaną funkcje kosztów produkcji i przewozu surowców oraz produktów,

d) ułożony zostanie "schemat blokowy", a tym samym dane liczbowe można będzie zaprogramować na maszynę cyfrową.

Należy zauważyć, że omówiony w pracy problem produkcyjno-transportowy można łatwo zaadoptować do ustalania optymalnego planowania produkcji i transportu w dowolnej gałęzi gospodarki narodowej, w dowolnym zjednoczeniu, a nawet w optymalizacji planów produkcyjno-transportowych pojedynczych zakładów produkcyjnych.

W każdym z trzech wyżej wymienionych przypadkach mikroekonomicznych, problem adaptacji sprowadzałby się do podania interpretacji ekonomicznej szczególnych przypadków, ogólnego modelu zbudowanego i rozwiązanego w pracy.

Wyliczenia liczbowe podane w "Dodatku" wskazują, że problem produkcyjno-transportowy w praktyce należy rozpatrywać w 2 etapach.

W etapie pierwszym, wykorzystując dane liczbowe dotyczące ograniczeń produkcji i surowców oraz zapotrzebowania hurtowni na produkty, fabryk na surowce, należy przy użyciu elektronicznej techniki obliczeniowej zbadać czy proponowany przez centralny organ planujący jest wewnętrznie zgodny. W omawianym etapie szczególną rolę odgrywają współczynniki techniczne produkcji, gdyż wiążą się z postępem technicznym, a tym samym rewolucją naukowo-techniczną.

W drugim etapie również przy użyciu elektronicznej techniki obliczeniowej należy zastosować znaleziony algorytm do obliczeń numerycznych. Tak więc w II etapie brane będą łącznie: warunki ograniczające oraz dane dotyczące funkcji kosztów produkcji produktów i surowców.

Oczywistą jest rzeczą, że zarówno w I jak i II etapie dane liczbowe muszą być wzięte z konkretnej działalności gospodarczej, gdyż tylko wówczas znalezione równania funkcyjne będą mogły odzwierciedlać istniejącą rzeczywistość w optymalnych warunkach wynikających z rozwiązania.

BIBLIOGRAFIA

1. K. ARROW, S. KARLIN, H. SEARF: Studies in the Mathematical Theory of Jnventory and Production. Stanford University Press 1958.
2. R. BELLMAN: Adaptacyjne procesy sterowania.Warszawa 1965.
3. R. BELLMAN: Dinamiczeskoje programirowanije. Moskwa 1960.
4. R. Bellman; S. DREYFUS: Applied Dynamic Programming.Princeton Univ. Press 1962.
5. A. BOJARSKI: Szkice matematyczno-ekonomiczne. Warszawa 1965.
6. Z. BOSIAKOWSKI, L. CENDROWSKI: Optymalizacja planu przepływu produkcji w warunkach modelu nieliniowego. Ekonomista 3/67, ss.756,757.
7. L. CENDROWSKI: Wyznaczanie optymalnego planu produkcji. Biuletyn WSInż. w Zielonej Górze 1969.
8. L. CENDROWSKI: Zastosowanie metod matematycznych do problemu lokalizacji produkcji. Praca zakupiona przez KPZK PAN w 1967.
9. L. CENDROWSKI: Programowanie dynamiczne. Życie Gospodarcze Nr 9/1969.
10. J. Ciadunowicz: Zdolności produkcyjne w przemyśle.Warszawa 1968.
11. Z. CZERWIŃSKI: Wstęp do teorii programowania liniowego. Poznań 1961,
12. Z. CZERWIŃSKI: Matematyka na usługach ekonomii. Warszawa 1969.
13. L. DUKIN, T. KOSIENKO, M. JASUPOW:Rozmieszczenie, specjalizacja i kooperacja produkcji przemysłowej jako problemy programowania optymalnego. Artykuł Zespołowy w pracy: Zastosowanie matematyki w badaniach ekonomicznych.Warszawa 1963.

14. A. FAJEREK: Region ekonomiczny i metody analizy regionalnej. Warszawa 1966.
15. M. FISZEL: Efektywność inwestycji w gospodarce socjalistycznej. Warszawa 1963.
16. M. FISZEL; E. VIELROSE: Lokalizacja produkcji a koszty transportu, "Ekonomista" Nr 2/62.
17. S.J. GASS: Programowanie liniowe. Warszawa 1963.
18. J. PRICIŃSKI: Matematyczne narzędzie zarządzania. Warszawa 1967.
19. E.M. HOOVER: Lokalizacja działalności gospodarczej. Warszawa 1962.
20. W. ISARD: Metody analizy regionalnej. Warszawa 1965.
21. M. KALECKI: Zarys teorii wzrostu gospodarki socjalistycznej. Warszawa 1963.
22. L. KANTOROWICZ: Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobów. Warszawa 1961.
23. W. KAWALEC: Problemy rozmieszczenia przemysłu w Polsce Ludowej. Warszawa 1965.
24. T. KOOPMANS: Activity Analysis of Production and Allacation. New York 1951.
25. W. LEONTIEW: Studia nad strukturą gospodarki amerykańskiej. Warszawa 1963.
26. O. LANGE: Wstęp do ekonometrii. Warszawa 1961.
27. O. LANGE: Optymalne decyzje. Warszawa 1964.
28. A. LOSCH: Gospodarka przestrzenna. Warszawa 1961.
29. Matiematiczeskije Metody i Problemy Rozmieszczenija Proizwodstwo. Moskwa 1963.
30. T. MRZYGŁOD: Polityka rozmieszczenia przemysłu w Polsce. Warszawa 1962.
31. B. MINC: Ekonomia polityczna socjalizmu. Warszawa 1963.
32. B. MINC: Postęp ekonomiczny. Warszawa 1967.
33. W. NIEMCZYNOW: Metody i modele ekonomiczno-matematyczne. Warszawa 1964.
34. J. NYKOWSKI: O planowaniu wieloszczeblowym.Warszawa 1968.
35. J. NYKOWSKI: O rzeczywiście optymalnym sposobie rozwiązywania zadań typu: Lokalizacja produkcji a koszty transportu "Ekonomista" Nr 1/63.

36. "Problemy ekonomii i ekonometrii" - praca zbiorowa. Warszawa 1967.
37. A. PROBST: Lokalizacja przemysłu socjalistycznego. Warszawa 1965.
38. A. PROBST: Efektywność przestrzennej organizacji produkcji. Warszawa 1970.
39. J.W. ROMANOWSKI: O programowaniu dynamicznym i jego wykorzystaniu w gospodarce. Warszawa 1963.
40. W. SADOWSKI: Teoria podejmowania decyzji. Warszawa 1960.
41. W. SADOWSKI: Zastosowanie programowania liniowego do realizacji zapotrzebowania. Przegląd Statystyczny Nr 4/1959.
42. K. SECOMSKI: Wstęp do teorii rozmieszczenia sił wytwórczych. Warszawa 1956.
43. K. SECOMSKI: Podstawy planowania perspektywicznego. Warszawa 1967.
44. "Strategia intensywnego rozwoju" - praca zbiorowa. Warszawa 1970.
45. P. SULMICKI: Teoria regionów gospodarczych. Warszawa 1962.
46. P. SULMICKI: Proporcje gospodarcze. Warszawa 1962.
47. P. SULMICKI: Przepływy międzygałęziowe. Warszawa 1958.
48. W. SZWARC: Zagadnienia transportowe. "Zastosowania Matematyki" Nr 2/1962.
49. J. TARSKI: Transport jako czynnik lokalizacji produkcji. Warszawa 1963.
50. Teoretyczne problemy rozmieszczenia sił wytwórczych. Warszawa 1965.
51. W.W. TRGUBIENKO: Zastosowanie programowania dynamicznego w gospodarce, w pracy: Matematyczna Analiza Reprodukcji Rozszerzonej. Warszawa 1963.
52. A. VASSONYI: Scientific Programming in Business and Industry. New York 1962.
53. B.S. WENDEL: Elementy dinamiczeskowo programirowanija. Moskwa 1964.
54. J. ZIÓŁKOWSKI, K. PODOSKI, J. KOLOPIŃSKI, B. WINIARSKI: Z problematyki osadniczej i socjologicznej przestrzennego zagospodarowania kraju. KPZK - Biuletyn Z.41.
55. V Zjazd PZPR 11 - 16 listopada 1968. Podstawowe materiały i dokumenty. Warszawa 1968.

SPIS TREŚCI