

SKRYPTY

**WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
W KOSZALINIE**

**Tatiana Łukianowicz
Czesław Łukianowicz**

**ĆWICZENIA
Z PODSTAW METROLOGII**



KOSZALIN

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA W KOSZALINIE

Czesław Łukianowicz, Tatiana Łukianowicz

Ć W I C Z E N I A

Z P O D S T A W M E T R O L O G I I

Koszalin 1990

SKRYPT WYDZIAŁU MECHANICZNEGO
do przedmiotu: podstawy metrologii

Opiniodawca:
Jan Chajda

Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej:
Leon Jamroz

Projekt okładki:
Piotr Żerdzicki

Wydano za zgodą Rektora WSInż. w Koszalinie

Wydawnictwo Uczelniane Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie
75-620 Koszalin, ul. Racławicka 15-17

Koszalin 1990, wyd. 1, format B-5, ark. wyd. 4,6, nakład 200 egz.

WSTĘP

W ramach przedmiotu Podstawy metrologii, na Wydziale Mechanicznym Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie prowadzone są wykłady i ćwiczenia. Celem ćwiczeń jest praktyczne zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami metrologii, z wyznaczaniem charakterystyk narzędzi pomiarowych, z elementami rachunku błędów oraz z podstawami opracowywania wyników pomiarów.

Niniejszy skrypt zawiera opis 13-tu dwugodzinnych ćwiczeń. W ćwiczeniach tych dokonywane są proste pomiary zaś uzyskane wyniki stanowią dane do przeprowadzenia obliczeń pozwalających wyznaczyć odpowiednie parametry i charakterystyki metrologiczne. W ćwiczeniach tych wymaga się aby student, samodzielnie lub w małym zespole, wykonał niezbędne pomiary, a następnie dokonał odpowiednich obliczeń, sformułował wnioski i sporządził sprawozdanie.

Proporcje między częścią doświadczalną i rachunkową kształtują się różnie w każdym z ćwiczeń. Dla przykładu, ćwiczenia nr 1, 2, 3, 13 mają przede wszystkim charakter ćwiczeń rachunkowych, zaś ćwiczenia nr 5, 6, 7, 8, 12 w większym stopniu wymagają przeprowadzenia pomiarów w laboratoriach. Dobór ćwiczeń do odpowiedniej formy zajęć /ćwiczenia laboratoryjne lub ćwiczenia audytoryjne/ powinien uwzględniać ich charakter i być dostosowany do obowiązującego programu studiów z przedmiotu Podstawy metrologii.

Wdzięczni jesteśmy prof. dr inż. Tadeuszowi Karpińskiemu za inspirujące dyskusje, propozycje i uwagi poczynione podczas przygotowywania skryptu. Pragniemy także podziękować doc. dr inż. Janowi Chajdzie za wnikliwą recenzję skryptu. Uwagi i życzliwe sugestie zawarte w recenzji, które w miarę możliwości staraliśmy się uwzględnić, pozwoliły przekazać do rąk Czytelnika skrypt w jego obecnym kształcie. Zdając sobie sprawę z niedoskonałości skryptu prosimy Czytelników o zgłaszanie uwag, opinii i propozycji, które pozwoliłyby na udoskonalenie następnego wydania skryptu.

Ćwiczenie nr 1

Temat: Zastosowanie układu SI w pomiarach wybranych wielkości fizycznych

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie ma na celu zapoznanie studentów z jednostkami miar układu SI oraz wykształcenie umiejętności praktycznego posługiwania się nimi.

2. Podstawy teoretyczne

Uporządkowany zbiór wielkości przyjęty do stosowania w danej dziedzinie działalności człowieka nosi nazwę układu wielkości. W układzie wielkości wyróżnia się na ogół wielkości podstawowe i pochodne. Wielkości podstawowe mogą być w znacznym stopniu ustalane dowolnie. Powinny one jednak spełniać następujące warunki:

- nie mogą być określane za pomocą równań definicyjnych, w których występują pozostałe wielkości podstawowe,
- powinny pozwalać, wraz z pozostałymi wielkościami podstawowymi, określać wszelkie inne wielkości objęte układem.

Wielkości pochodne mogą być określone za pomocą wielkości podstawowych danego układu.

Układowi wielkości odpowiada układ jednostek miar. Podobnie jak poprzednio, w układzie jednostek miar wyróżnia się jednostki podstawowe i pochodne. W Polsce obowiązuje Międzynarodowy Układ Jednostek Miar /Système International d'Unités - w skrócie SI/ przyjęty przez XI Generalną Konferencję Miar i Wąg w 1960 r. i uzupełniony przez XIV Generalną Konferencję Miar i Wąg w 1971 r. Układ SI przewiduje siedem jednostek podstawowych i dwie uzupełniające. Zestawiono je w tabelicy 1.1.

W tabelicy 1.2. zestawiono wybrane pochodne jednostek miar układu SI oraz podano ich oznaczenia i związki z jednostkami podstawowymi i uzupełniającymi.

Układ SI jest układem spójnym. W układzie tym równania

definicyjne wszystkich jednostek zawierają współczynniki liczbowe równe jedności. Przewidziano także dostosowanie układu SI do różnych dziedzin techniki przez stosowanie dziesiętnej krotności jednostek tego układu. Przedrostki oznaczające krotność danej jednostki zestawiono w tabelicy 1.3. Stosując oznaczenia zgodne z tabelicą 1.3 można dla przykładu zapisać, że:

$$12,3 \times 10^{-8} \text{ F} = 0,123 \mu\text{F} = 123 \text{ nF}$$

Jednostki układu SI obowiązują w Polsce zgodnie z Rozporządzeniem Rady Ministrów z dnia 24 czerwca 1966 roku w sprawie ustalenia legalnych jednostek miar, ogłoszonym w [16]. Zasady układu SI szczegółowo mówiono między innymi w pracy [9].

Tablica 1.1. Jednostki podstawowe i uzupełniające układu SI

Jednostki podstawowe			
Lp.	Wielkość	Nazwa jednostki miary	Oznaczenie
1.	Długość	metr	m
2.	Masa	kilogram	kg
3.	Czas	sekunda	s
4.	Natężenie prądu elektrycznego	amper	A
5.	Temperatura termodynamiczna	kelwin	K
6.	Światłość	kandela	cd
7.	Ilość materii	mol	mol
Jednostki uzupełniające			
1.	Kąt płaski	radian	rad
2.	Kąt bryłowy	steradian	sr

Tablica 1.2. Wybrane jednostki pochodne układu SI

Lp	Nazwa wielkości	Nazwa jednostki miary	Oznaczenie
1.	Pole powierzchni	metr kwadratowy	m^2
2.	Objętość	metr sześcienny	m^3
3.	Gęstość	kilogram na metr sześcienny	kg/m^3
4.	Częstotliwość, częstość	herc	$Hz = \frac{1}{s}$
5.	Prędkość	metr na sekundę	m/s
6.	Prędkość kątowna	radian na sekundę	rad/s
7.	Przyspieszenie	metr na sekundę do kwadratu	m/s^2
8.	Przyspieszenie kątowne	radian na sekundę do kwadratu	rad/s^2
9.	Siła	niuton	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
10.	Ciśnienie, naprężenie mechaniczne	paskal	$Pa = \frac{N}{m^2}$
11.	Praca, energia, ilość ciepła	dżul	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
12.	Moc	wat	$W = \frac{J}{s} = VA$
13.	Napięcie elektr.	wolt	$V = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^2}$
14.	Rezystancja	om	$\Omega = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3} = \frac{V}{A}$
15.	Pojemność elektr.	farad	$F = \frac{A \cdot s}{V}$
16.	Indukcyjność	henr	$H = \frac{V \cdot s}{A}$
17.	Indukcja magnetycz.	tesla	$T = \frac{A}{Vs} = \frac{1}{H}$
18.	Strumień świetlny	lumen	$lm = cd \cdot sr$
19.	Luminacja	kandela na metr kwadratowy	cd/m^2
20.	Natężenie oświetlenia	luks	$lx = \frac{cd \cdot sr}{m^2}$

Tablica 1.3. Przedrostki oznaczające wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar

Przedrostek	Oznaczenie	Mnożnik
eksa	E	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
peta	P	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
tera	T	$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$
giga	G	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
mega	M	$10^6 = 1\ 000\ 000$
kilo	k	$10^3 = 1\ 000$
hekto	h	$10^2 = 100$
deka	da	$10^1 = 10$
decy	d	$10^{-1} = 0,1$
centy	c	$10^{-2} = 0,01$
mili	m	$10^{-3} = 0,001$
mikro	μ	$10^{-6} = 0,000\ 001$
nano	n	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$
piko	p	$10^{-12} = 0,000\ 000\ 000\ 001$
femto	f	$10^{-15} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$
atto	a	$10^{-18} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy dokonać pomiarów wskazanych przez prowadzącego wielkości oraz rozwiązać podane zadania. Wyniki pomiarów wyrażone w jednostkach układu SI oraz rozwiązania zadań trzeba zmieścić w sprawozdaniu. Przykłady zadań podano w p.4.

Z zasadą pomiaru za pomocą suwmiarki i mikrometru należy zapoznać się przed wykonaniem ćwiczenia korzystając z li-

Ćwiczenia 1. 1972

1. Zmiana

- 1/ Ziemia jest sferą kulistą o promieniu $R = 6370$ km. Obliczyć jej objętość.
- 2/ Zmierzyć mikrometrem grubość wskazanej kuli i obliczyć jej objętość oraz pole powierzchni.
- 3/ Używając wagi laboratoryjnej wyznaczyć masę, a następnie gęstości prostopadłościanu i kuli z zadania 1 i 2. Wyniki wyrazić w g/cm^3 .
- 4/ Wyznaczyć okres i prędkość kątową wskazówek sekundowej, minutowej i godzinowej/zegara wskazówkowego w jednostkach układu SI.
- 5/ Obliczyć okres i prędkość kątową Ziemi podczas jej ruchu wokół własnej osi i wyrazić w jednostkach układu SI.
- 6/ Obliczyć prędkość kątową wrzeciona tokarki oraz prędkość skrawania wałka o średnicy $d = 50$ mm, jeżeli wrzeciono wykonuje $n = 480$ obrotów na minutę. Wyniki wyrazić w jednostkach układu SI.
- 7/ Wyrazić w jednostkach układu SI ciśnienie odpowiadające 750, 760 i 770 mm Hg. Częstość rtęci przyjąć $\rho = 13,6 \frac{g}{cm^3}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$.
- 8/ Wyrazić w jednostkach układu SI moc silnika:
 - a/ samochodu FIAT 126 p równą 23 KM;
 - b/ samochodu POLONEZ /wersja normalna/ równą 75 KM;
 - c/ samochodu POLONEZ /wersja wzmacniona/ równą 82 KM;
- 9/ Obliczyć częstotliwość odpowiadającą:
 - a/ długości fali programu I Polskiego Radia, równą 15,2m;
 - b/ długości fali programu III Polskiego Radia, równą 4,48m.
- 10/ Obliczyć długość fali odpowiadającą:
 - a/ częstotliwości programu II Polskiego Radia, równą 69,92 MHz;
 - b/ częstotliwości programu Rozgłośni Niemieckiej, równą 1206 kHz.
- 11/ Licznik energii elektrycznej wskazał w ciągu tygodnia pobór 103 kWh energii elektrycznej. Wyznaczyć moc w jed-

nostkach układu SI.

- 12/ Wyrazić pojemność kondensatora równą 0,00062 F w μF , nF i pF.
- 13/ Wyrazić długość fali światła lasera He-Ne $\lambda = 6328 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ w μm , nm oraz \AA / $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$.
- 14/ Jaka częstotliwość drgań elektromagnetycznych odpowiada długości fali światła laserowego, o którym mowa w zad.13?
- 15/ Obliczyć natężenie oświetlenia wewnętrznej powierzchni kuli o promieniu $r = 2 \text{ m}$, w środku której umieszczono punktowe źródło o światłości 1 cd.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki dokonanych pomiarów i rozwiązania zadań.

Ćwiczenie nr 2

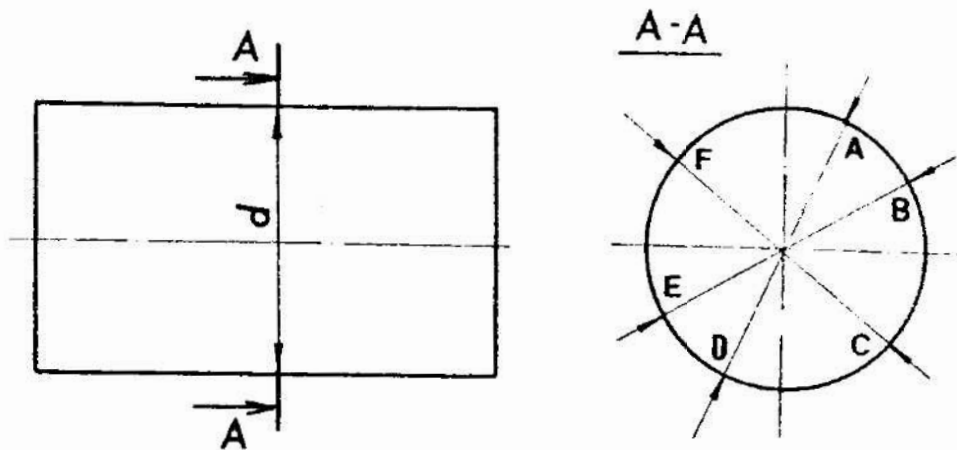
Temat: Wyznaczanie wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego wielkości mierzonej

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z wyznaczaniem podstawowych statystycznych parametrów charakteryzujących wielkość mierzoną.

2. Podstawy teoretyczne

Wartości wielkości mierzonej tworzą na ogół pewien zbiór, z którego w wyniku pomiaru wyznaczana jest konkretna wartość. Jeżeli np. interesuje nas średnica wałka w określonym przekroju, to wartość wielkości mierzonej, uzyskana w danym pomiarze będzie zależała od tego, w których punktach wałka zetkną się końcówki pomiarowe przyrządu. Ilustruje to rys. 2.1.



Rys. 2.1. Schemat ilustrujący pomiar średnicy wałka w przekroju A-A

Podobnie np. przy pomiarze temperatury cieczy lub gazu termometrem cieczowym istotne jest, w którym miejscu umiędziemy termometr. Umieszczając go w kolejnych miejscach wyznaczymy lokalne temperatury w tych miejscach, w danej chwili czasu.

Odpowiedź na pytania: jaka jest średnica wałka?; jaka jest temperatura gazu?; wymaga zatem uściślenia. Należy uściślić czy interesuje nas wartość danej wielkości w danym miejscu i w danej chwili, czy interesuje nas wartość uśredniona miejscowej wielkości. Najczęściej interesują nas wartości uśrednione np. temperatura powietrza w pokoju, temperatura wody w jeziorze, średnica wałka /bez szczegółowego określenia linii pomiarowej/. Dlatego też możemy traktować wielkość mierzoną jako zbiór wielu wartości, przy czym w wyniku pomiaru należy wyznaczyć wartość przeciętną.

Dokonując wielokrotnie pomiaru wielkości X /np. średnicy wałka/ uzyskuje się wartości x_1, x_2, \dots, x_n , przy czym uzyskanie tej czy innej wartości jest zdarzeniem losowym z zakresu możliwych wartości wielkości X . Można zatem wielkość X uważać za zmienną losową.

Wartość oczekiwana wielkości mierzonej X może być określona na równaniem:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, \quad (2.1)$$

gdzie: $E(X)$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej X ,
 X - zmienna losowa,
 x - wartość zmiennej losowej,
 $f(x)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej X .

Dokonujący pomiaru nie zna zazwyczaj ani rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X , ani jej wszystkich wartości. Dysponuje on jedynie kilkoma wartościami uzyskanymi z pomiarów. Powstaje zatem problem oszacowania wartości oczekiwanej. Problem ten jest przedmiotem teorii estymacji opisanej szczegółowo między innymi w pracach [3, 13]. Z punktu widzenia tej teorii, estymatorem /ocena, szacunkiem/, który najlepiej przybliży wartość oczekiwaną $E(X)$ zmiennej losowej jest wartość średniej arytmetycznej uzyskanych wyników pomiarów. Średnia arytmetyczna, jak pokazano to w pracy [13], jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym wartości oczekiwanej $E(X)$, a w przypadku gdy zmienna X ma rozkład normalny średnia arytmetyczna jest estymatorem najefektywniejszym.

Dążąc do wyznaczenia wartości oczekiwanej można zatem przyjąć, że:

$$E(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.2)$$

gdzie: \bar{x} - średnia arytmetyczna,
 x_i - wynik i -tego pomiaru,
 n - ilość pomiarów.

Równanie (2.2) oznacza, że dokonując pomiarów mierzonej wielkości X , jako wynik pomiaru odpowiadający wartości oczekiwanej, przyjmujemy wartość średniej arytmetycznej \bar{x} uzyskanych wyników pomiarów.

Ważną charakterystyką wielkości mierzonej X jest rozproszenie wartości x_1, x_2, \dots, x_n w stosunku do wartości oczekiwanej $E(X)$. Najczęściej stosowanymi parametrami charakteryzującymi to rozproszenie są: wariancja $D^2(X)$ i odchylenie standardowe σ . Określone są one następująco:

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx, \quad (2.3)$$

$$\sigma = \sqrt{D^2(X)} \quad (2.4)$$

Aby wyznaczyć wartości tych parametrów na podstawie ograniczonej liczby pomiarów wygodnie jest posłużyć się odpowiednimi estymatorami. Estymatory wariancji i odchylenia standardowego dane są równaniami:

$$D^2(X) \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.5)$$

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.6)$$

gdzie: s^2 - oznacza estymator wariancji,
 s - oznacza estymator odchylenia standardowego.

Im większe są wartości s i s^2 tym większe jest rozproszenie wyników pomiarów.

Jeżeli np. w jakimś pomieszczeniu ma być stabilizowana temperatura, to o jakości urządzeń realizujących ten cel można sądzić na podstawie pomiarów temperatury w tym pomieszczeniu i wyznaczonej wartości średniej arytmetycznej oraz estymatora odchylenia standardowego. Jakość urządzenia będzie tym lepsza im mniejsza będzie wartość estymatora odchylenia standardowego oraz im bardziej wartość średniej arytmetycznej zbliżona będzie do zadanej wartości temperatury.

Średnia arytmetyczna obliczona jest na podstawie ograniczonej ilości wyników pomiarów. Dlatego też można uważać, że jest ona zmienną losową, zależną od wielkości mierzonej oraz od ilości dokonanych pomiarów. Można wykazać, że odchylenie standardowe wartości średniej arytmetycznej określone jest równaniem:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.7)$$

gdzie: $\sigma_{\bar{x}}$ - odchylenie standardowe średniej arytmetycznej,
 n - ilość pomiarów,
 σ - odchylenie standardowe wielkości mierzonej.

Zastępując w równaniu (2.7) odchylenia standardowe ich estymatorami otrzymuje się:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \quad (2.8)$$

gdzie: $s_{\bar{x}}$ - estymator odchylenia standardowego średniej arytmetycznej.

Jak wynika z równań (2.7) i (2.8) rozproszenie wartości średniej arytmetycznej zmniejsza się wraz ze wzrostem ilości pomiarów. Jest to ważny wniosek praktyczny. Dokonanie większej ilości pomiarów gwarantuje lepsze oszacowanie wartości oczekiwanej wielkości mierzonej.

Często ważne jest określenie przedziału wartości, w którym z dużym prawdopodobieństwem zawiera się wartość oczekiwana wielkości mierzonej. Przedział ten nazywa się przedziałem ufności. Na ogół przyjmuje się, iż jego środkiem jest wartość średniej arytmetycznej, zaś jego szerokość zależy od przyjętej wartości prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo tego, że wartość oczekiwana wielkości mierzonej znajduje się wewnątrz przedziału ufności nazywa się poziomem ufności. Przyjęcie większego poziomu ufności powoduje na ogół zwiększenie się szerokości przedziału ufności. Zakładając, że rozkład prawdopodobieństwa wartości wielkości mierzonej jest rozkładem normalnym, oraz przyjmując poziom ufności równy 0,9973, przedział ufności przy liczbie pomiarów $n > 30$ można określić następująco:

$$\left(x - 3 \frac{6}{\sqrt{n}} , \quad x + 3 \frac{6}{\sqrt{n}} \right) . \quad (2.9)$$

Szerokość tego przedziału jest zatem równa $6 \frac{6}{\sqrt{n}}$. W przypadku gdy liczba pomiarów n nie przekracza 30, szerokość przedziału ufności można wyznaczyć z rozkładu t-Studenta, tak jak opisano to w ćwiczeniu nr 10.

3. Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu należy dokonać 60-ciu pomiarów średnicy wałka

ze pomocą mikrometru oraz opracować wyniki pomiarów zgodnie z wzorami podanymi w p.4 i wskazówkami prowadzącego ćwiczenie. Ze sposobem odczytu wartości z mikrometru należy zapoznać się przed ćwiczeniem, korzystając np. z literatury [5, 15].

Do obliczeń wartości średnich arytmetycznych i estymatorów odchylenia standardowych można wykorzystać mikrokomputer. W tym celu należy napisać program pozwalający wyznaczyć wartości tych parametrów zgodnie z równaniami podanymi w p.2 albo skorzystać z gotowego programu STATYS napisanego w języku BASIC.

4. Zadania

- 1/ Dokonaj 60-ciu pomiarów średnicy wałka i zanotuj wyniki w tabeli. Odczytu wyników dokonuj starannie i dokładnie.
- 2/ Oblicz wartości średnie arytmetyczne kolejno z 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50 i 60 pomiarów.
- 3/ Narysuj wykres wartości średniej arytmetycznej w funkcji ilości pomiarów.
- 4/ Oblicz estymatory odchylenia standardowego kolejno dla 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50 i 60 pomiarów.
- 5/ Narysuj wykres estymatora odchylenia standardowego w funkcji ilości pomiarów.
- 6/ Oblicz estymatory odchylenia standardowego średniej arytmetycznej kolejno dla 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50 i 60 pomiarów.
- 7/ Wykonaj wykres estymatora odchylenia standardowego średniej arytmetycznej w funkcji ilości pomiarów.
- 8/ Oblicz szerokości przedziałów ufności dla serii zawierających 30, 40, 50, 60 pomiarów oraz zaznacz położenie tych przedziałów na wykresie wykonanym w zad. 3.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki dokonanych pomiarów i obliczeń, sporządzić wykresy i wnioski.

Ćwiczenie nr 3

Temat: Wyznaczanie rozkładu częstości względnych wartości wielkości mierzonej

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie studentów z wyznaczaniem rozkładu częstości względnych wartości wielkości mierzonej oraz z budową histogramu i wykresu częstości skumulowanych.

2. Podstawy teoretyczne

Wartości wielkości mierzonej tworzą zbiór, który może być traktowany jako zmienna losowa X . Podstawowymi charakterystykami tej zmiennej są:

- funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$,
- dystrybuanta $F(x)$.

Określa się je następująco:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} ; \Delta x > 0, \quad (3.1)$$

$$F(x) = P(X < x), \quad (3.2)$$

gdzie: $P(x \leq X < x + \Delta x)$ i $P(X < x)$ oznaczają określone prawdopodobieństwa.

Zależność między funkcją gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuantą wyraża równanie:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (3.3)$$

Znając $f(x)$ łatwo jest wyznaczyć $F(x)$ i odwrotnie. Łatwo też jest wyznaczyć prawdopodobieństwo znalezienia się zmiennej X w określonym przedziale wartości. Np. prawdopodobieństwo $P(x_1 \leq X < x_2)$ jest równe różnicy:

$$F(x_2) - F(x_1) .$$

Znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa lub dystrybuanty może być w wielu przypadkach bardzo pożądana. Jednak obserwator dokonujący pomiarów dysponuje na ogół ograniczoną liczbą wartości zmiennej X . Z pomocą przychodzi tu teoria estymacji, która pozwala oszacować wartości obu funkcji. Oszacowaniem funkcji gęstości prawdopodobieństwa jest empiryczna funkcja gęstości prawdopodobieństwa nazywana również funkcją rozkładu częstości względnych. Oszacowaniem dystrybuanty jest natomiast dystrybuanta empiryczna nazywana także funkcją częstości skumulowanych.

Przystępując do wyznaczania empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty empirycznej przy dużej ilości wyników pomiarów, korzystne jest zgrupować je w przedziałach wartości x . W tym celu obszar zmienności wyników pomiarów od x_{\min} do x_{\max} dzieli się na k przedziałów o jednakowej szerokości Δx . Wartość Δx oblicza się z równania:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} . \quad (3.4)$$

Wartość k może być wstępnie obliczona na podstawie ilości wyników pomiarów N z wzoru:

$$k = 1 + 3,3 \log N, \quad (3.5)$$

z zaokrągleniem do najbliższej liczby całkowitej i ewentualnie skorygowana. Podobnie należy skorygować Δx jeżeli to uprości obliczenia.

Następnie oblicza się liczbę wyników pomiarów n_j znajdujących się w każdym z k przedziałów $/j = 1, 2, \dots, k/$. Wynikom pomiarów znajdującym się w tym samym przedziale j nadaje się wartości \bar{x}_j , która odpowiada wartości środkowej danego przedziału. Należy także przyjąć zasadę ustalającą, do którego przedziału zostanie zakwalifikowany wynik pomiarów odpowiadający granicy przedziałów. Można przyjąć, np., że jeżeli wynik pomiaru równy jest wartości na granicy j -go i $j+1$ -ego przedziału to zalicza się go $j+1$ -go przedziału. Dane są i

wyniku zgrupowania wygodnie jest zestawić w tabelicy np. takiej jak tablica 3.1.

Tablica 3.1. Zestawienie danych uzyskanych w wyniku zgrupowania wyników pomiarów w przedziałach wartości wielkości mierzonej

Nr przedziału	1	2	3	...	k
Graniczne wartości przedziału					
Wartość środkowa w przedziale	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_j	...	\bar{x}_k
Częstość n_j	n_1	n_2	n_j	...	n_k
Częstość względna $v_j = \frac{n_j}{N}$	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	$\frac{n_j}{N}$...	$\frac{n_k}{N}$

Zgrupowane dane mogą być wykorzystane do wyznaczenia empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\hat{f}(x)$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k \frac{n_j(x)}{\Delta x} \quad (3.6)$$

gdzie: N - ilość wyników pomiarów,

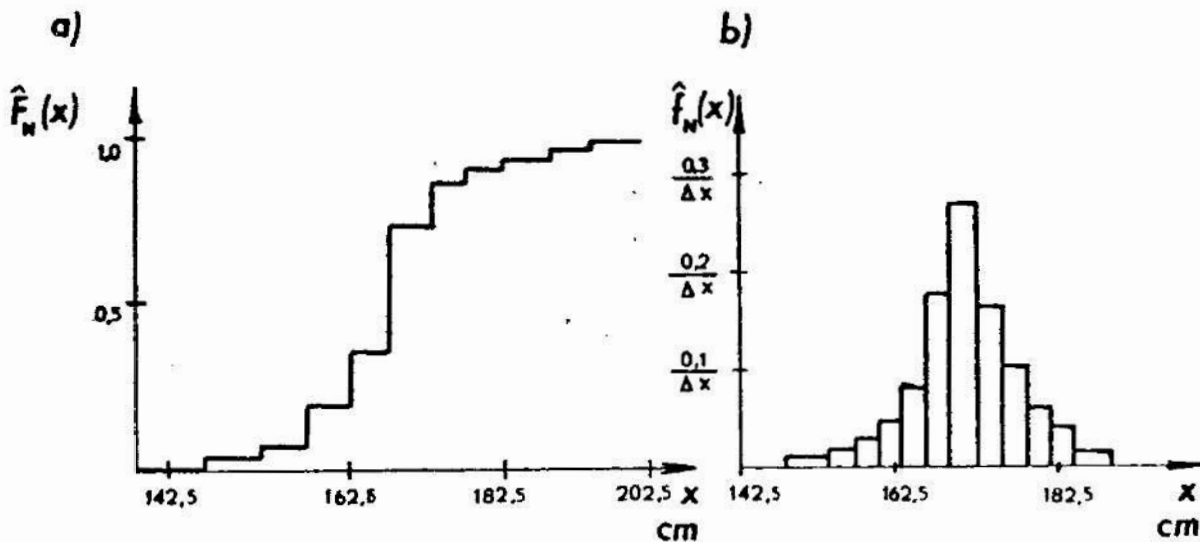
$$n_j(x) = \begin{cases} n_j, & \text{jeżeli } \bar{x}_j - \frac{\Delta x}{2} \leq x < \bar{x}_j + \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & \text{jeżeli } x < \bar{x}_j - \frac{\Delta x}{2} \text{ lub } \bar{x}_j + \frac{\Delta x}{2} \leq x. \end{cases}$$

Otrzymana w ten sposób funkcja może być wykreślona, zaś wykres ten nazywa się **histogramem**. Odpowiedni wykres można sporządzić także dla dystrybuanty empirycznej. Wykres ten nosi nazwę wykresu częstości skumulowanych. Dystrybuanta empiryczna $F(x)$ określona jest równaniem:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k m_j(x) \quad , \quad (3.7)$$

gdzie: $m_j(x) = n_j$, jeżeli $x > \bar{x}_j - \frac{\Delta x}{2}$,
 $m_j(x) = 0$, jeżeli $x < \bar{x}_j - \frac{\Delta x}{2}$.

Na rys. 3.1. pokazano wykres dystrybuanty empirycznej i wykres empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, uzyskane w rezultacie opracowania wyników pomiarów wzrostu 8585 mężczyzn. Dane te zaczerpnięto z pracy [6].



Rys. 3.1. Wykres częstości skumulowanych (a); histogram (b)

Uzyskanie graficznego obrazu empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa daje jedynie pewne podstawy do wnioskowania o postaci rozkładu prawdopodobieństwa, któremu podlega mierzona wielkość. Wnioskowanie takie powinno uwzględniać wyniki statystycznych testów zgodności, za pomocą których sprawdza się hipotezy odnoszące się do postaci rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej. Podstawy weryfikacji hipotez statystycznych przedstawiono między innymi w pracach [8, 13].

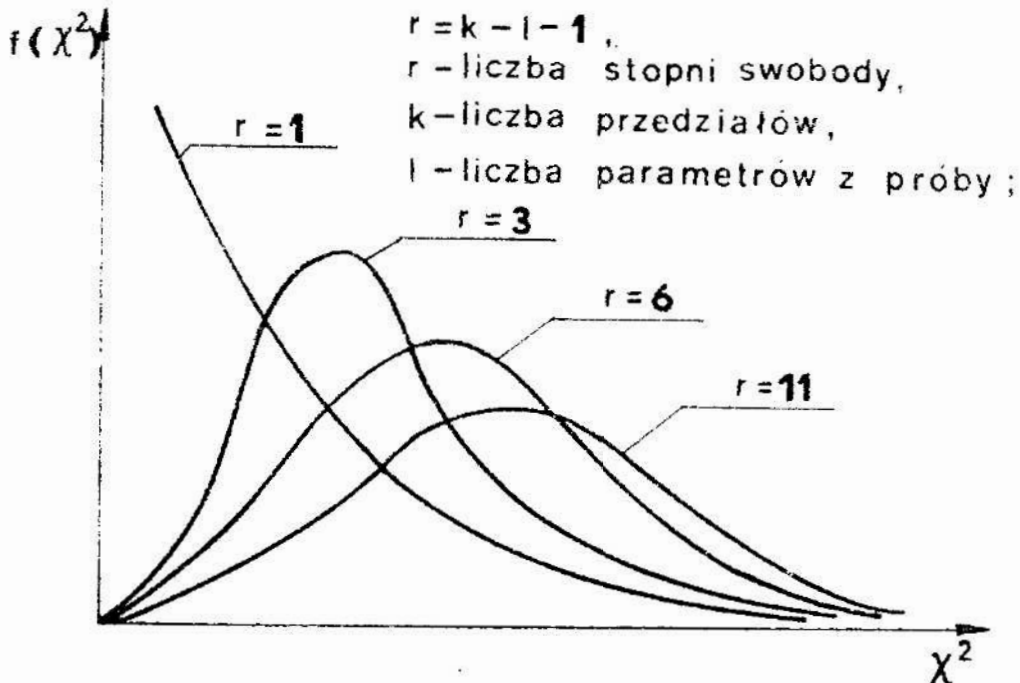
Spośród statystycznych testów zgodności na szczególną uwagę zasługuje test chi kwadrat Pearsona. Wymaga on wyznaczenia statystyki określonej równaniem (3.8) lub (3.9):

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - N p_j)^2}{N p_j}, \quad (3.8)$$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{n_j^2}{N p_j} - N, \quad (3.9)$$

gdzie: p_j - prawdopodobieństwo uzyskania wyniku w j -tym przedziale dla założonego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej X ;
pozostałe oznaczenia takie same jak w równaniu (3.6).

Statystyka ta ma rozkład χ^2 . W tabelicy 3.2 podano wartości gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu, zaś na rys. 3.2 pokazano zależność rozkładu χ^2 od ilości stopni swobody.



Rys. 3.2. Zależność gęstości prawdopodobieństwa rozkładu χ^2 od liczby stopni swobody

Liczba stopni swobody zależy od rodzaju hipotezy, ilości przedziałów k i liczby parametrów l wyznaczonych z próby

Tablica 3.2. Rozkład chi kwadrat Pearsona

α	0,99	0,95	0,90	0,80	0,50	0,20	0,10	0,05	0,01
r	$\alpha = P \left\{ \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k - 1 - 1) \right\}$; $k - 1 - 1 = r$, r - liczba stopni swobody								
1	0,0002	0,0039	0,02	0,06	0,46	1,64	2,71	3,84	6,64
2	0,02	0,10	0,21	0,45	1,39	3,22	4,61	5,99	9,21
3	0,12	0,35	0,58	1,01	2,37	4,64	6,25	7,82	11,34
4	0,30	0,71	1,06	1,65	3,36	5,99	7,78	9,49	13,28
5	0,55	1,15	1,61	2,34	4,35	7,29	9,24	11,07	15,09
6	0,87	1,64	2,20	3,07	5,35	8,56	10,65	12,59	16,81
7	1,24	2,17	2,83	3,82	6,35	9,80	12,02	14,07	18,48
8	1,65	2,73	3,49	4,59	7,34	11,03	13,36	15,51	20,09
9	2,09	3,33	4,17	5,38	8,34	12,24	14,68	16,92	21,67
10	2,56	3,94	4,87	6,18	9,34	13,44	15,99	18,31	23,21
11	3,05	4,58	5,58	6,99	10,34	14,63	17,28	19,68	24,73
12	3,57	5,23	6,30	7,81	11,34	15,81	18,55	21,03	26,22
13	4,11	5,89	7,04	8,63	12,34	16,98	19,81	22,36	27,69
14	4,66	6,57	7,79	9,74	13,34	18,15	21,06	23,68	29,14
15	5,23	7,26	8,55	10,31	14,34	19,31	22,31	25,00	30,58
16	5,81	7,96	9,31	11,15	15,34	20,46	23,54	26,30	32,00
17	6,41	8,67	10,08	12,00	16,34	21,61	24,77	27,59	33,41
18	7,01	9,39	10,86	12,86	17,34	22,76	25,99	28,87	34,80
19	7,63	10,12	11,65	13,72	18,34	23,90	27,20	30,14	36,19
20	8,26	10,85	12,44	14,58	19,34	25,04	28,41	31,41	37,57
21	8,90	11,59	13,24	15,44	20,34	26,17	29,61	32,67	38,93
22	9,54	12,34	14,04	16,31	21,34	27,30	30,81	33,92	40,29
23	10,20	13,09	14,85	17,19	22,34	28,43	32,01	35,17	41,64
24	10,86	13,85	15,66	18,06	23,34	29,55	33,20	36,41	42,98
25	11,52	14,61	16,47	18,94	24,34	30,67	34,38	37,65	44,31
26	12,20	15,38	17,29	19,82	25,34	31,79	35,56	38,88	45,64
27	12,88	16,15	18,11	20,70	26,34	32,91	36,74	40,11	46,96
28	13,56	16,93	18,94	21,59	27,34	34,03	37,92	41,34	48,28
29	14,26	17,71	19,67	22,47	28,34	35,14	39,09	42,56	49,59
30	14,95	18,49	20,60	23,36	29,34	36,25	40,26	43,77	50,98

W tablicy podano wartości $\chi^2_{1-\alpha}$ w zależności od liczby stopni swobody r i poziomu istotności α .

potrzebnych do obliczenia prawdopodobieństw p_j w równaniach (3.8) i (3.9). Im mniejsza jest wartość statystyki Pearsona tym bardziej wiarygodna jest hipoteza o tym, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X jest zgodny z rozkładem założonym. Wartość χ^2 wyznaczoną z powyższych równań porównuje się z wartością $\chi^2_{1-\alpha}$ wyznaczoną na podstawie rozkładu chi kwadrat dla $k - 1 - 1$ stopni swobody i przyjętego poziomu istotności α . Poziom istotności jest przyjętym z góry prawdopodobieństwem odrzucenia sprawdzanej hipotezy przy założeniu, że jest ona prawdziwa. Na ogół w praktyce przyjmuje się poziom istotności wynoszący $\alpha = 0,05$ lub $0,01$.

Do sporządzenia histogramu, wykresu częstości skumulowanych oraz sprawdzenia hipotezy o tym, że rozkład prawdopodobieństwa wielkości mierzonej jest rozkładem normalnym można wykorzystać mikrokomputer. W tym celu należy opracować odpowiedni algorytm i program albo skorzystać z gotowego programu STATYS napisanego w języku BASIC. Program ten oblicza wartości wybranych parametrów statystycznych, sporządza histogramy i wykres częstości skumulowanych oraz za pomocą dwóch statystycznych testów zgodności sprawdza hipotezę o tym, że rozkład prawdopodobieństwa wielkości mierzonej jest rozkładem normalnym. W programie STATYS do sprawdzenia zgodności rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej z rozkładem normalnym wykorzystano test chi kwadrat oraz dodatkowo test n omega kwadrat.

3. Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu należy dokonać wielokrotnych pomiarów wskazanego wymiaru za pomocą mikrometru, lub pomiarów innej wielkości narzędziem pomiarowym wskazanym przez prowadzącego. Wyniki pomiarów należy zestawić w tablicy, a następnie opracować zgodnie z wskazówkami zawartymi w zadaniach podanych w p.4.

Sporządzony histogram i wykres częstości skumulowanych można porównać z wykresami uzyskanymi na podstawie obliczeń przeprowadzonych za pomocą programu STATYS. Ponadto program ten można wykorzystać do sprawdzenia hipotezy o tym, że roz-

kład prawdopodobieństwa wyników pomiarów jest rozkładem normalnym.

Ze sposobem pomiaru za pomocą mikrometru trzeba zapoznać się przed ćwiczeniem korzystając z literatury [5, 15].

4. Zadania

- 1/ Dokonaj od 200 do 300 pomiarów wskazanego wymiaru i zanotuj wyniki w tabeli. Pomiarów dokonaj starannie.
- 2/ Oblicz wstępnie ilość przedziałów k i szerokość przedziałów Δx z równań (3.4) i (3.5).
- 3/ Środek obszaru zmienności $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$ wybierz jako środek jednego z przedziałów. Skoryguj wartości k i Δx , w ten sposób, aby przyjęte przedziały pokryły cały obszar zmienności od x_{\min} do x_{\max} . Wyznacz wartości graniczne wszystkich przedziałów i zanotuj w tabelicy podobnej do tabelicy 3.1.
- 4/ Oblicz wartości środkowe w każdym z przedziałów i zanotuj je w tabelicy.
- 5/ Oblicz częstości n_j występowania wyników pomiarów w każdym z przedziałów i zanotuj je w tabelicy.
- 6/ Oblicz częstości względne ν_j w każdym z przedziałów i zanotuj je w tabelicy.
- 7/ Sporządź wykres empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa /histogram/.
- 8/ Sporządź wykres empirycznej dystrybuanty /wykres częstości skumulowanych/.
- 9/ Oblicz wartość estymatora odchylenia standardowego s i wartość średniej arytmetycznej \bar{x} wyników pomiarów. Wartość estymatora odchylenia standardowego można obliczyć z mniejszej ilości wyników pomiarów np. z pierwszych 50 wyników.
- 10/ Oblicz wartość estymatora odchylenia standardowego średniej arytmetycznej $s_{\bar{x}}$
- 11/ Zaznacz na histogramie wartość średnią i wartości odpowiadające $\bar{x} \pm 3s_{\bar{x}}$.

1. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki pomiarów, obli-

czeń, sporządzone wykresy i wnioski.

Ćwiczenie nr 4

Temat: Pomiary parametrów charakteryzujących czasowy przebieg wielkości mierzonej

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie ma na celu zapoznanie studentów z pomiarami wartości chwilowej, wartości średniej i wartości skutecznej wielkości mierzonej zmiennej w czasie.

2. Podstawy teoretyczne

W wielu przypadkach pomiarom podlegają wielkości zmienne w czasie. W zależności od celu przeprowadzonych pomiarów, obserwatora dokonującego pomiaru może interesować charakter zmian wielkości mierzonej w czasie, jej wartości chwilowe, wartość średnia lub wartość skuteczna. Definicje tych pojęć podano w oparciu o pracę [1]. Czasowy przebieg wielkości określony jest matematycznie funkcją $x(t)$. Charakteryzuje on najpełniej mierzoną wielkość. Znając funkcję $x(t)$ można wyznaczyć interesujące, z punktu widzenia celu pomiaru, wartości parametrów np. wartość średnią, wartość skuteczną, itp. Niekiedy funkcja $x(t)$ może być zastąpiona ciągiem wartości $x(n \Delta t)$, przy czym $n = 0, 1, 2, \dots$, zaś Δt jest kwantem czasu. Wartość kwantu czasu Δt powinna być dobrana tak, aby zmiany wartości x w przedziale czasu Δt były pomijalnie małe z punktu widzenia celu pomiaru.

Wartość chwilowa wielkości - jest to wartość, którą funkcja $x(t)$ osiąga w rozpatrywanej chwili czasu t_0 tzn jest to wartość $x(t_0)$ lub $x(n_0 \Delta t)$.

Wartość średnia wielkości - to parametr przebiegu czasowego zdefiniowany równaniem:

$$x_{\text{sr}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt, \quad (4.1)$$

gdzie: t_1, t_2 - początek i koniec rozpatrywanego przedziału czasu,

lub

$$x_{\text{sr}} = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{i=n_1}^{n_2} x(i \Delta t) \quad (4.2)$$

gdzie n_1 określa początek, zaś n_2 koniec rozpatrywanego przedziału czasu.

Podając wartość średnią wielkości mierzonej należy podać przedział czasu, w którym dokonano uśrednienia oraz chwilę t_1 , od której rozpoczęto uśrednianie.

Wartość skuteczna wielkości - to parametr określony równaniem:

$$x_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}, \quad (4.3)$$

lub

$$x_{\text{sk}} = \sqrt{\frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{i=n_1}^{n_2} x^2(i \Delta t)}. \quad (4.4)$$

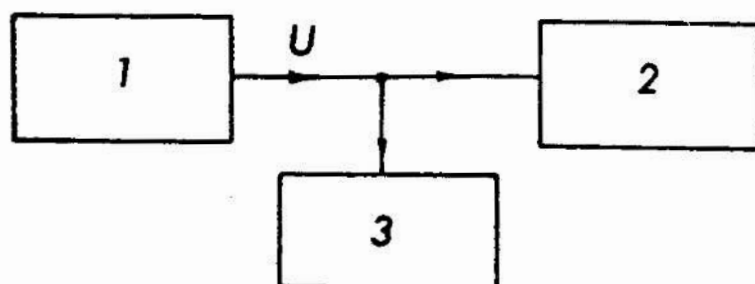
Podając wartość skuteczną wielkości, podobnie jak przy wartości średniej, należy podać okres czasu uśredniania oraz początek tego okresu.

3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy dokonać rejestracji okresowych sygnałów elektrycznych zmiennych w czasie, uzyskiwanych z generatora oraz zmierzyć za pomocą miernika wartości skuteczne

tych sygnałów. Następnie, korzystając z uzyskanych wykresów, trzeba obliczyć wartości średnie i skuteczne zarejestrowanych sygnałów dla różnych przedziałów czasu uśredniania, oraz porównać wartości skuteczne sygnałów uzyskane z obliczeń i z pomiarów.

W czasie ćwiczenia należy zestawić układ, którego schemat funkcjonalny pokazano na rys. 4.1.

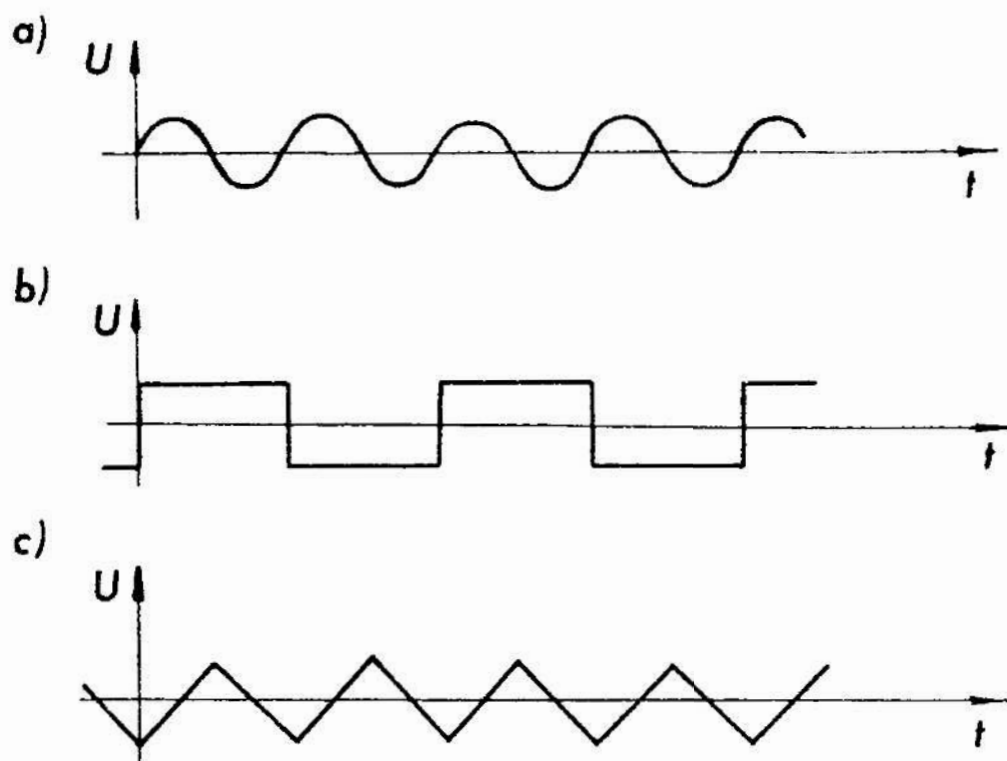


Rys. 4.1. Schemat funkcjonalny układu; 1 - generator, 2 - rejestrator, 3 - miernik wartości skutecznej

W układzie tym generator 1 wytwarza okresowe sygnały elektryczne, które następnie są rejestrowane za pomocą rejestratora 3. Miernik 2 pozwala zmierzyć wartości skuteczne sygnałów uzyskiwanych z generatora.

W celu rejestracji omówionego wyżej układu trzeba połączyć generator typu GFT-73 z rejestratorem X-Y typu KB-6801A i miernikiem typu UM-4B. Generator typu GFT-73 pozwala na uzyskanie sygnału sinusoidalnego, fali prostokątnej i sygnału piłokształtnego. Sygnały te pokazano na rysunku 4.2.

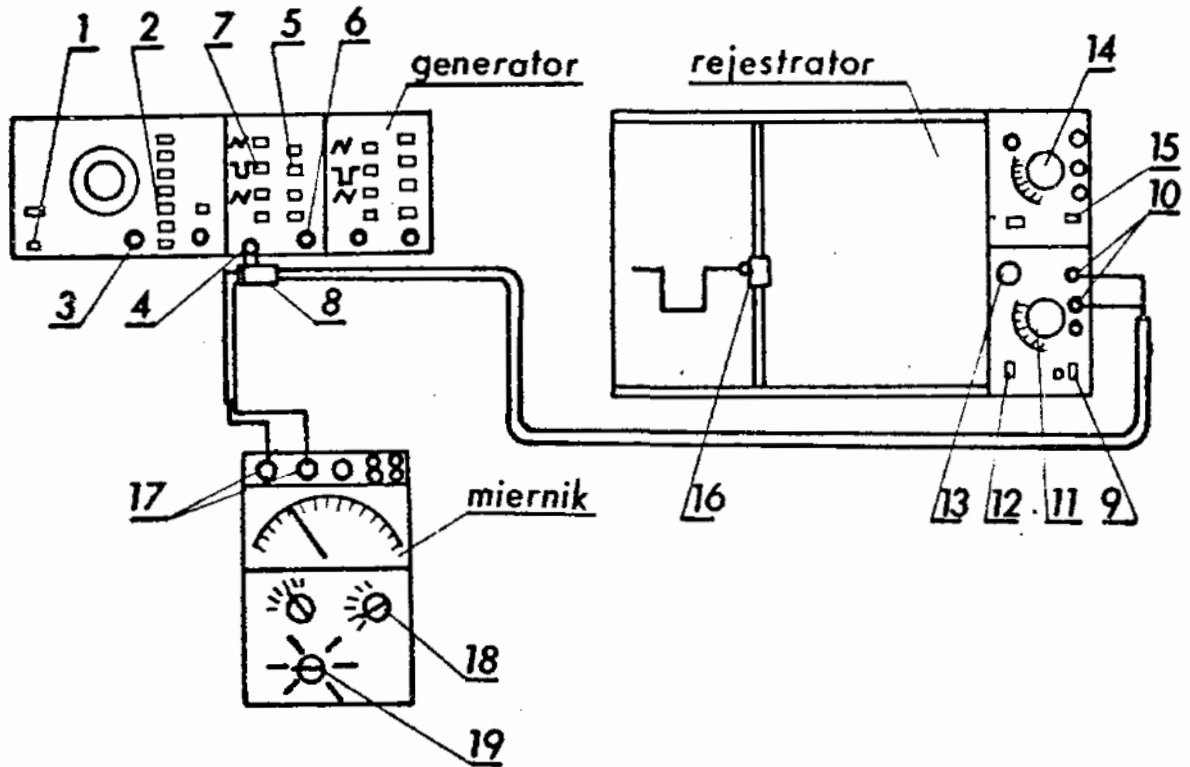
Przed przystąpieniem do rejestracji i pomiarów należy ustalić odpowiednio częstotliwość i napięcie poszczególnych sygnałów oraz ustalić odpowiednie parametry pracy rejestratora i miernika wartości skutecznej. Szczegółowy tryb postępowania w tym względzie podano w p. 3.1.



Rys. 4.2. Przebiegi czasowe napięć wytwarzanych przez generator; przebieg sinusoidalny (a), fala prostokątna (b), fala piłokształtna (c)

3.1. Przygotowanie do pomiarów

Zestawić układ tak jak pokazano to na rys. 4.3. Przełącznikami 2 i 3 generatora ustawić częstotliwość sygnału około 0,5 Hz. Przełącznikami 5 wybrać zakres amplitud 1V. Przełącznikami 7 wybrać jedną z generowanych funkcji. Przełącznikiem 11 ustalić wzmocnienie $200 \frac{\text{mV}}{\text{cm}}$, a przełącznikiem 14 prędkość przesuwu odpowiadającą wartości $0,5 \frac{\text{s}}{\text{cm}}$. Przełącznikiem 18 ustalić zakres 1,5 V, zaś przełącznikiem 19 wybrać rodzaj pracy $V \sim$. Włączyć generator do sieci przyciskiem 1. Włączyć rejestrator do sieci przyciskiem 9. Pokrętle 6 ustawić amplitudę sygnału tak aby przemieszczenie pisaka 16 mieściło się w polu rejestracji. Pokrętle 13 wyregulować położenie wartości zerowej.



Rys. 4.3. Schemat zestawionego układu; 1 - włącznik sieci generatora GFT-73, 2 - przełączniki zakresu częstotliwości, 3 - pokrętko regulacji częstotliwości, 4 - gniazdo wyjścia kanału A, 5 - przełączniki wartości amplitudy sygnału, 6 - pokrętko regulacji amplitudy, 7 - przełączniki rodzaju generowanej funkcji, 8 - trójnik, 9 - włącznik sieci rejestratora KB-6801A, 10 - zaciski wejściowe, 11 - pokrętko regulacji wzmocnienia, 12 - włącznik zapisu, 13 - pokrętko regulacji położenia pisaka w kierunku y, 14 - pokrętko regulacji prędkości w kierunku x, 15 - włącznik przesuwu w kierunku x, 16 - pisak, 17 - zaciski wejściowe miernika UM-4B, 18 - przełącznik zakresu mierzonych napięć, 19 - przełącznik rodzaju pracy.

4. Zadania

- 1/ Zarejestrować wszystkie przebiegi funkcji generowanych

przez generator.

- 2/ Zmierzyć miernikiem UM-4B wartości skuteczne sygnałów otrzymywanych z generatora przy wyłączonym rejestratorze i częstotliwości sygnałów rzędu 50 Hz.
- 3/ Na podstawie uzyskanych wykresów obliczyć wartości średnie i wartości skuteczne każdego z sygnałów przyjmując granice całkowania:
 - a/ od 0 do $\frac{T}{2}$,
 - b/ od $\frac{T}{2}$ do T,
 - c/ od 0 do T.
- 4/ Porównać uzyskane z obliczeń wartości skuteczne sygnałów z wartościami zmierzonymi.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki dokonanych pomiarów, obliczeń uzyskane wykresy oraz wnioski.

Ćwiczenie nr 5

Temat: Pomiary charakterystyk częstotliwościowych wielkości mierzonej

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie ma na celu praktyczne zapoznanie studentów z pomiarami częstości sygnałów oraz wybranych charakterystyk częstotliwościowych.

2. Podstawy teoretyczne

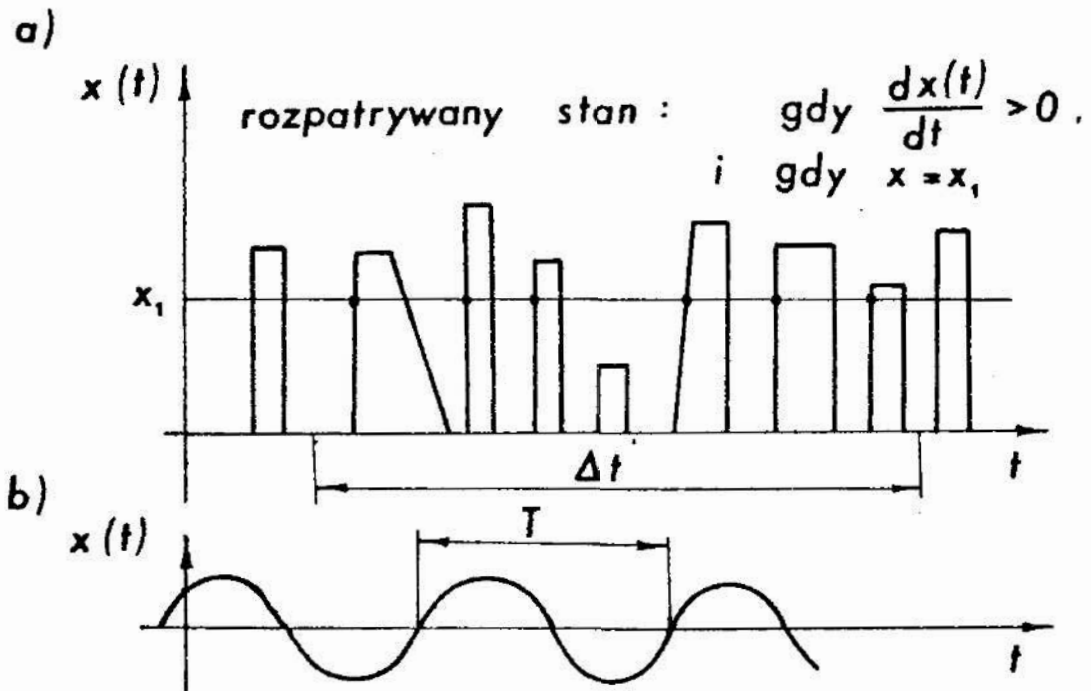
2.1. Częstość

Wielkości mierzone zmienne w czasie w wielu przypadkach mogą przyjmować takie wartości, które pod wpływem pewnego ok-

zesu czasu powtarzają się. Parametrem charakteryzującym powtarzanie się wartości danej wielkości jest częstość. Jeżeli dany stan wielkości powtórzy się w rozpatrywanym okresie czasu Δt N razy to częstość f określona jest równaniem:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad (5.1)$$

Na rys. 5.1. a rozpatrywany stan występuje $N = 6$ razy w przedziale czasu Δt .



Rys. 5.1. Przebiegi wielkości zmiennych w czasie; przebieg nieokresowy (a); przebieg okresowy (b)

Niekiedy wielkość mierzona lub odpowiadający jej sygnał pomiarowy zmieniają się wraz z upływem czasu w sposób okresowy. Oznacza to, że wielkość taką można przedstawić w postaci:

$$x(t) = x(t + nT), \quad (5.2)$$

dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, i $T > 0$,

gdzie: t - czas,

T - okres.

Parametrem charakteryzującym wielkość zmieniającą się okresowo jest częstotliwość. Częstotliwość f równa jest odwrotności okresu T . Niekiedy zamiast częstotliwości używa się pojęcia pulsacji /częstotliwości kątowej/ oznaczonej symbolem ω i określonej równaniem:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (5.3)$$

2.2. Charakterystyki częstotliwościowe

Dzięki zastosowaniu przekształcenia Fouriera wielkości mierzonej $x(t)$ zmiennej w czasie uzyskuje się możliwość analizy wielkości mierzonej w dziedzinie częstotliwości. Jak wiadomo każdą okresową funkcję $x(t)$ można zastąpić szeregiem Fouriera złożonym z sinusoid i cosinusoid o odpowiednich częstotliwościach, amplitudach i fazach. Podobnie funkcję nieokresową spełniającą warunki Dirichleta można zastąpić całką Fouriera. Szczegółowo zagadnienie przekształcenia Fouriera omówiono między innymi w pracach [1, 4].

Zależności między przebiegiem czasowym wielkości $x(t)$, a jej odwzorowaniem w dziedzinie częstotliwości określa przekształcenie Fouriera opisane równaniem:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5.4)$$

gdzie: $F(j\omega)$ - jest gęstością widmową sygnału. Gęstość widmowa sygnału dana jest równaniem:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (5.5)$$

przy czym zamiast symbolu $F(j\omega)$ na ogół stosuje się oznaczenie $F(\omega)$.

Występujące w równaniach (5.4) i (5.5) wielkości zespolone zostały wprowadzone w celu uzyskania zwartości zapisu tych równań. Część rzeczywista tych wielkości dotyczy składowych harmonicznych parzystych - cosinusoid. Natomiast część

urojona dotyczy składowych nieparzystych - sinusoid.

Gęstość widmowa sygnału można zapisać w postaci:

$$F(\omega) = \operatorname{Re} [F(\omega)] + j \operatorname{Im} [F(\omega)] , \quad (5.6)$$

gdzie: Re, Im - symbole części rzeczywistej i urojonej.

Równanie (5.6) można również przedstawić w postaci:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} , \quad (5.7)$$

gdzie:

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left\{ \operatorname{Re} [F(\omega)] \right\}^2 + \left\{ \operatorname{Im} [F(\omega)] \right\}^2} , \quad (5.8)$$

zaś

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} [F(\omega)]}{\operatorname{Re} [F(\omega)]} , \quad (5.9)$$

przy czym

$|F(\omega)|$ - nazywa się modulem gęstości widmowej sygnału albo widmem amplitudowym,

$\varphi(\omega)$ - nazywa się fazą gęstości widmowej sygnału albo widmem fazowym.

Widmo amplitudowe jest funkcją parzystą tzn. spełnia równanie:

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)| . \quad (5.10)$$

Pozwala to ograniczyć się przy analizie sygnałów tylko do części odpowiadającej pulsacjom dodatnim.

Kwadrat modułu gęstości widmowej sygnału nazywa się gęstością widmową energii i oznacza symbolem $S(\omega)$

$$S(\omega) = |F(\omega)|^2 . \quad (5.11)$$

Gęstość widmowa energii jest funkcją rzeczywistą, dodatnią i parzystą. Energia sygnału $x(t)$ określona równaniem:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

równa jest całce gęstości widmowej energii. Ilustruje to równanie (5.13):

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \quad (5.13)$$

W praktyce niekiedy określa się funkcję gęstości widmowej mocy, która jest proporcjonalna do $S(\omega)$.

3. Przebieg ćwiczenia

W czasie ćwiczenia należy zmierzyć wartość częstotliwości fali prostokątnej uzyskiwanej z wewnętrznego generatora oscyloskopu OKD-505A. Pomiaru należy dokonać za pomocą częstotściomierza cyfrowego typu PFL 23.

Ponadto należy zmierzyć wartości funkcji gęstości widmowej mocy sygnału sinusoidalnego za pomocą analizatora widna typu 01012. Sygnał sinusoidalny generowany jest przez generator typu PW-9.

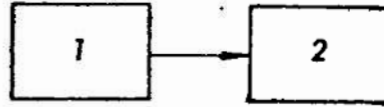
3.1. Układ do pomiaru częstotliwości

Schemat funkcjonalny układu do pomiaru częstotliwości sygnału pokazano na rys. 5.2 a. Na rys. 5.2 b pokazano schematycznie wygląd zestawionego układu.

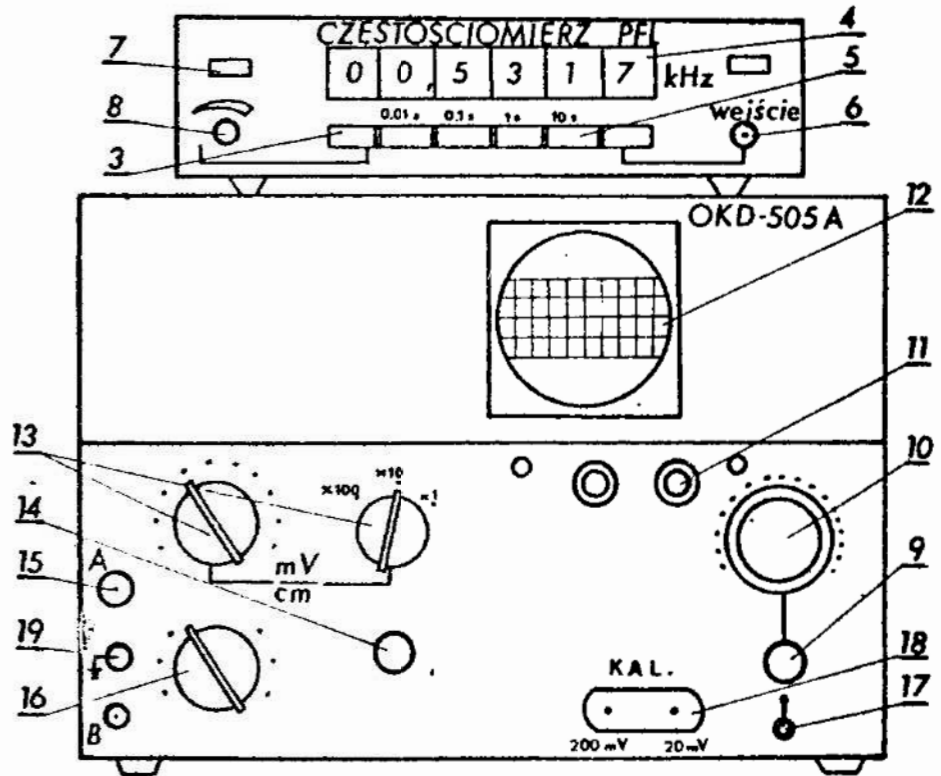
3.1.1. Przygotowanie do pomiaru

Po włączeniu przyrządów do sieci przyciskami 7 i 17 odczekać około 1 minuty. Po ukazaniu się na ekranie 12 oscyloskopu jasnej zielonej linii wyregulować ostrość i jasność pokrętłami 11. Pokrętłami 13 ustawić wzmacnienie ok. $100 \frac{mV}{cm}$. Podłączyć gniazdo 18 odpowiadające 200 mV oraz gniazdo masy 19 do gniazda wejściowego 15 oscyloskopu. Pokrętłem 16 ustawić rodzaj pracy ~ A. Pokrętłem 10 i 9 dobrać odpowiednią podstawę czasu tak, aby na ekranie ukazał się obraz mierzonego sygnału. Pokrętłem 14 wyregulować wzmacnienie. Narysować sygnał widoczny na ekranie oscyloskopu. Określić wartość podstawy czasu wykorzystując wskazanie odpowiadające położeniu

pokręta 10. a)



b)

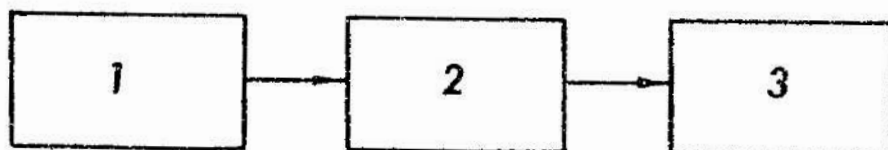


Hys. 5.2. Schemat układu do pomiaru częstotliwości sygnału; schemat funkcjonalny (a); schemat zestawionego układu (b); 1 - źródło sygnału /generator oscyloskopu/, 2 - częstotściomierz, 3 - przycisk kasowania wskazania, 4 - pole odczytowe, 5 - przyciski czasu pomiaru, 6 - gniazdo wejściowe, 7 - włącznik sieci, 8 - pokrętko regulacji czasu odczytu, 9 - pokrętko płynnej regulacji podstawy czasu, 10 - pokrętko podstawy czasu, 11 - pokrętko regulacji jasności i ostrości, 12 - ekran, 13 - pokrętkła regulacji wzmacnienia, 14 - pokrętko płynnej regulacji wzmacnienia, 15 - gniazdo wejściowe A, 16 - pokrętko wyboru rodzaju pracy, 17 - włącznik sieci oscyloskopu, 18 - gniazdo wyjściowe generatora, 19 - gniazdo masy

Oszacować częstotliwość sygnału, przy dwóch skrajnych położeniach pokrętki 9.

3.2. Układ do pomiaru gęstości widmowej mocy

Na rys. 5.3 pokazano funkcjonalny schemat układu do pomiaru gęstości widmowej mocy.



Rys. 5.3. Schemat funkcjonalny układu do pomiaru gęstości widmowej mocy; 1 - źródło sygnału /generator/, 2 - analizator widma, 3 - monitor

Na rys. 5.4 pokazano schematycznie wygląd zestawionego układu.

3.2.2. Przygotowanie do pomiaru

Włączyć włącznikiem 1 generator do sieci. Przełącznikami 3 i 7 nastawić wartość częstotliwości 798 Hz. Pokrętkami 5 wyregulować wartość amplitudy sygnału tak aby nie przekraczała 1 V. Pokrętkiem 17 nastawić zakres odpowiadający 1V. Przełącznik 15 ustawić w pozycji S, a przełącznik 16 w pozycji C. Przełącznik 25 ustawić w pozycji ZYKL. Włączyć do sieci monitor przełącznikiem 8 oraz analizator przełącznikiem 14. Odczekać ok. 3 minut. Weisnąć przycisk 21. Pokrętkami 10 i 11 wyregulować właściwe położenie obrazu na monitorze. Pokrętkiem 12 wyregulować jasność obrazu. Weisnąć przycisk 20. Do gniazda 18 przyłączyć sygnał z gniazda 6 generatora. Weisnąć przycisk 21. Pokrętkami 27 i 28 wyregulować właściwe wzmocnienie. Zaobserwować i narysować obraz z okranu monitora 9.

Uwaga: Analizator widma 01012 posiada 30 czynnych kanałów w zakresie częstotliwości środkowej od 25 Hz do 20 kHz. W każdym z kanałów wyznaczona jest wartość skuteczna

sygnału co odpowiada pierwiastkowi kwadratowemu z gęstości widmowej mocy. Wartość ta wyznaczona jest w dB, przy czym

$$\text{wartość w dB} = 20 \log_{10} \frac{x}{x_0},$$

gdzie: x - wartość skuteczna sygnału w danym kanale,
 x_0 - wartość skuteczna sygnału odniesienia.

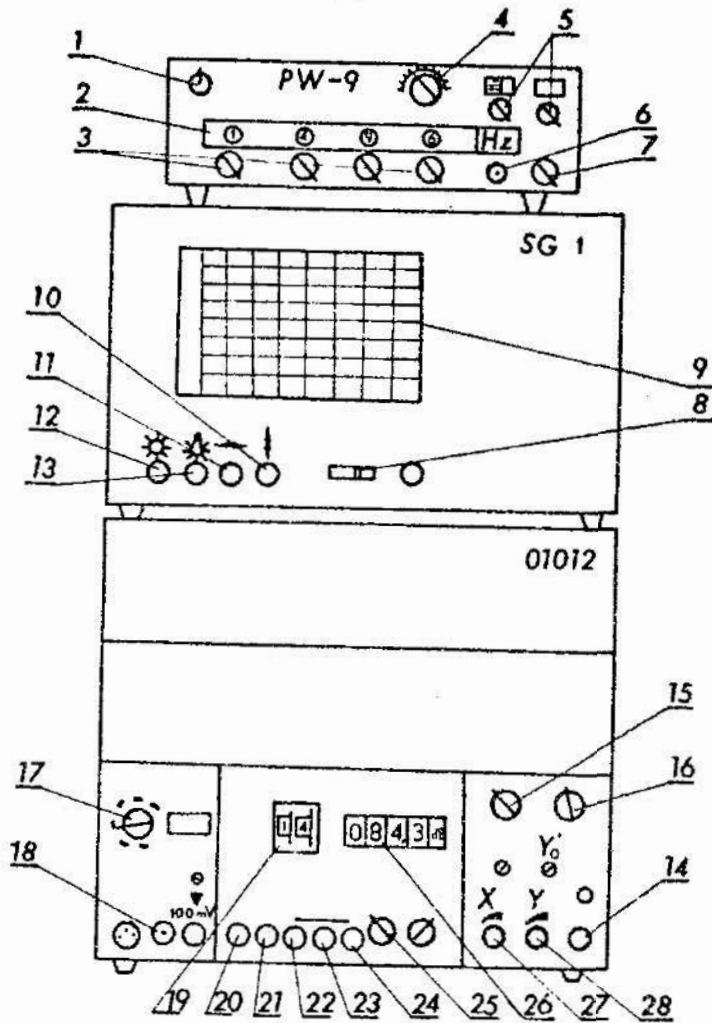
Wartością odniesienia x_0 w analizatorze typu 01012 jest wartość $1 \mu\text{V}$.

4. Zadania

- 1/ Zmierzyć wartość częstotliwości sygnału z generatora oscyloskopu OKD-505A. W tym celu należy podłączyć do wejścia 6 częstotliciomierza sygnał z gniazda 18 oscyloskopu, odpowiadający 200 mV /patrz rys. 5.2/.
 Pomiaru dokonać 10 razy. Obliczyć wartość średnią arytmetyczną i estymator odchylenia standardowego średniej arytmetycznej.
- 2/ Zmierzyć gęstość widmową mocy sygnału uzyskiwanego z generatora PW-9 za pomocą analizatora 01012.
 W tym celu należy za pomocą selektora kanałów 19 /rys. 5.4/ wybierać kolejne kanały od 1 do 30 i odczytać dla każdego wybranego kanału wartość wskazania w dB. Następnie korzystając z uwagi zawartej w p. 3.2.2 obliczyć wartości skuteczne napięcia odpowiadające poszczególnym kanałom. Posługując się obliczonymi wartościami sporządzić wykres gęstości widmowej mocy.
- 3/ Przeprowadzić dyskusję wyników uzyskanych w zad. 2.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki pomiarów, obliczenia sporządzone wykresy i wnioski.



Rys. 5.4. Schemat zestawionego układu; 1 - włącznik sieci generatora, 2 - pole odczytowe nastawionej częstotliwości, 3 - pokręta nastawcze, 4 - regulator częstotliwości, 5 - pokręta regulacji amplitudy sygnału, 6 - gniazdo wyjściowe, 7 - przełącznik krotności częstotliwości, 8 - włącznik monitora, 9 - ekran, 10 - pokrętko przesuwu pionowego, 11 - pokrętko przesuwu poziomego, 12 - regulator jasności obrazu, 13 - pokrętko oświetlenia podziałki, 14 - włącznik sieci analizatora, 15 - przełącznik trybu pracy, 16 - przełącznik rodzaju filtru dla sygnału wejściowego, 17 - przełącznik zakresu pomiarowego, 18 - gniazdo wejściowe, 19 - selektor kanałów, 20 - wyłącznik, 21 - włącznik, 22 - pomiar chwilowy, 23 - pomiar wartości maksymalnych, 24 - zatrzymanie wartości mierzonej, 25 - przełącznik rodzaju pracy, 26 - pole odczytowe, 27 - pokrętko wzmocnienia x, 28 - pokrętko wzmocnienia y.

Ćwiczenie nr 6

Temat: Wyznaczanie czułości i pobudliwości narzędzi pomiarowych

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie ma na celu zapoznanie studentów z praktycznymi sposobami wyznaczania czułości i błędu pobudliwości narzędzi pomiarowych.

2. Podstawy teoretyczne

Czułość i pobudliwość to jedne z ważniejszych właściwości metrologicznych narzędzi pomiarowych. W oparciu o normę [17] podano niżej określenia czułości, pobudliwości oraz błędu pobudliwości narzędzia pomiarowego:

- czułość narzędzia pomiarowego - właściwość narzędzia pomiarowego dla danej wartości wielkości mierzonej wyrażająca się ilorazem przyrostów wartości obserwowanej zmiennej dI i wielkości mierzonej dG

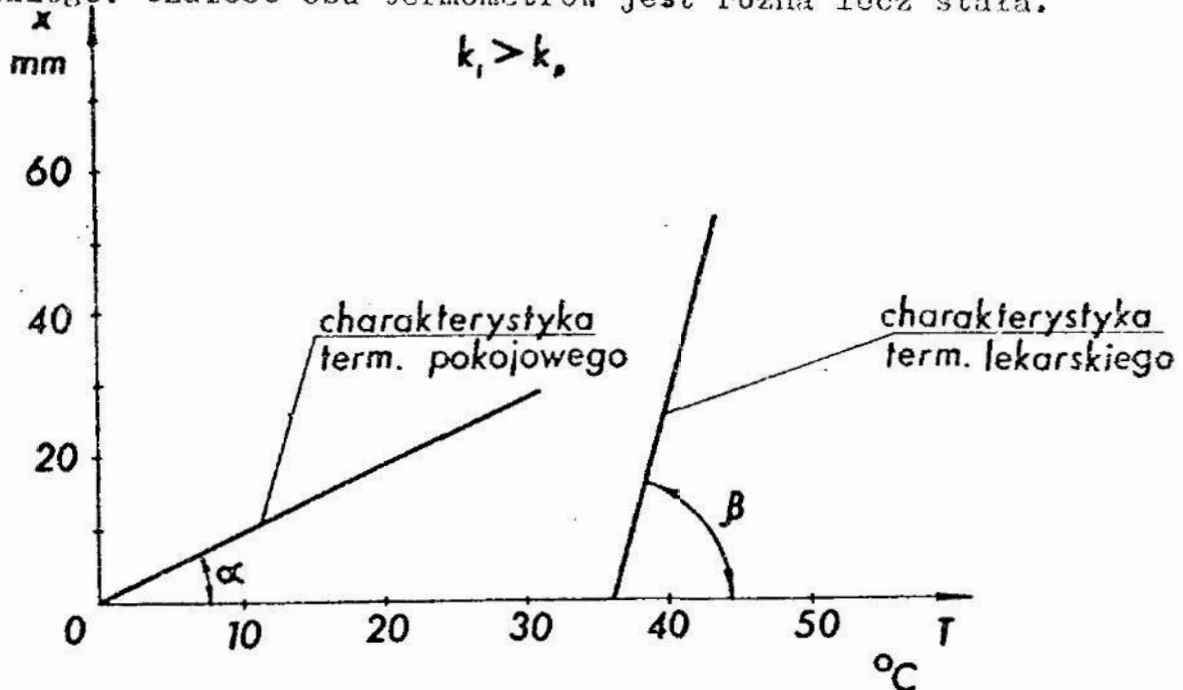
$$k = \frac{dI}{dG} , \quad (6.1)$$

- pobudliwość narzędzia pomiarowego - właściwość charakteryzująca zdolność narzędzia pomiarowego do reagowania na małe zmiany wartości wielkości mierzonej,
- błąd pobudliwości - zmiana wartości wielkości mierzonej nie wywołująca zmiany wskazania /zmiany dostrzegalnej przez przeciętnego obserwatora w określonych warunkach użytkowania narzędzia/.

W przypadku, gdy w równaniu (6.1) licznik i mianownik są wielkościami tego samego rodzaju czułość zgodnie z w.w normą nazywamy przełożeniem.

Większość narzędzi pomiarowych jest konstruowana w taki sposób, że w zakresie pomiarowym przyjmuje się czułość jako wartość stałą. Ma to tę zaletę, że podziałka takich narzędzi pomiarowych jest liniowa i na ogół regularna. Charakterystyka

statyczna takich narzędzi pomiarowych jest liniowa. Ilustruje to rys. 6.1, na którym pokazano fragmenty charakterystyk dwóch termometrów cieczowych: termometru pokojowego i termometru lekarskiego. Czulość obu termometrów jest różna lecz stała.



Rys. 6.1. Charakterystyki statyczne termometrów cieczowych

Dla termometru pokojowego zgodnie z równaniem (6.1) określa się ją jako:

$$k_p = \frac{dx}{dT} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.2)$$

gdzie: dx - przyrost słupa cieczy,
 dT - przyrost temperatury.

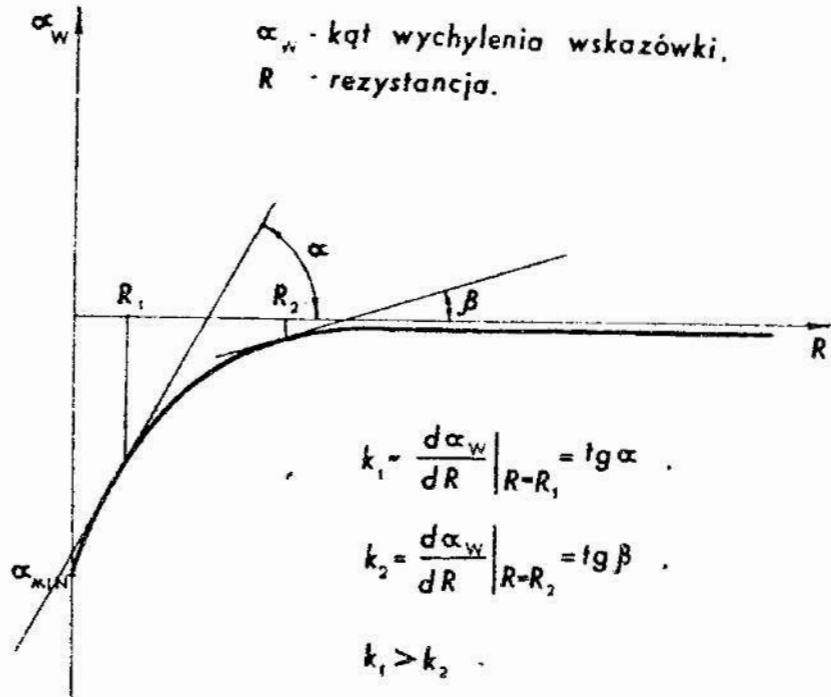
Dla termometru lekarskiego otrzymuje się odpowiednio:

$$k_l = \frac{dx}{dT} = \operatorname{tg} \beta. \quad (6.3)$$

Jednakże charakterystyki statyczne niektórych narzędzi pomiarowych są nieliniowe. Wtedy czulość narzędzia pomiarowego jest różna w różnych punktach zakresu pomiarowego. Zgodnie z równaniem (6.1) określona jest ona pochodną charakterystyki statycznej narzędzia pomiarowego.

Przykładem takiego narzędzia pomiarowego, które ma nieli-

niową charakterystykę statyczną jest omomierz szeregowy. Jego charakterystyka statyczna pokazana jest na rys. 6.2. Widać, że czułość w punkcie R_1 jest wyższa niż w punkcie R_2 .



Rys. 6.2. Charakterystyka statyczna omomierza szeregowego

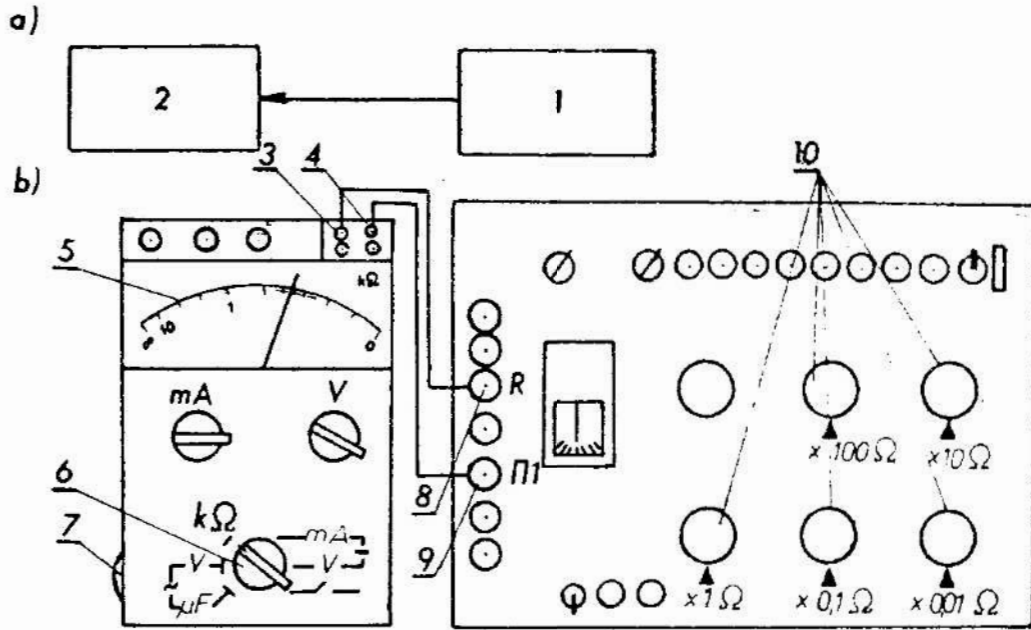
Pobudliwość narzędzia pomiarowego jest na ogół ściśle związana z czułością. Im wyższa jest czułość narzędzia pomiarowego tym na ogół wyższa jest również jego pobudliwość. Ilościowo pobudliwość może być określona za pomocą błędu pobudliwości, błędu granicznego pobudliwości lub progu pobudliwości. Definicje tych parametrów zawarto w normie [17].

3. Przebieg ćwiczenia

W czasie ćwiczenia należy wyznaczyć czułość i błąd pobudliwości w poszczególnych punktach zakresu pomiarowego omomierza szeregowego wchodzącego w skład miernika uniwersalnego typu UM-5B. Ponadto należy wyznaczyć czułość i błąd pobudliwości czujnika zegarowego typu NDAa, przeznaczonego do pomiarów długości.

3.1. Pomiar czułości i błędu pobudliwości omomierza

W celu realizacji pomiaru czułości i błędu pobudliwości omomierza szeregowego należy zestawić układ, którego schemat funkcjonalny pokazano na rys. 6.3 a, zaś wygląd zewnętrzny na rys. 6.3 b. Układ składa się z badanego omomierza 2 oraz zespołu oporników precyzyjnych 1 połączonych przewodami elektrycznymi.



Rys. 6.3. Schemat funkcjonalny układu do pomiaru czułości omomierza (a); schemat zestawionego układu (b); 1 - zespół oporników precyzyjnych, 2 - omomierz szeregowy, 3, 4 - wejściowe gniazda omomierza, 5 - podziałka, 6 - pokrętło rodzaju pracy miernika, 7 - pokrętło regulacji zera, 8, 9 - zaciski mostka prądu stałego, 10 - pokrętła regulacji rezystancji

Jako zespół oporników precyzyjnych użyć należy oporników wchodzących w skład mostka prądu stałego typu MO-62 klasy 0,1.

Cheąc zmierzyć wartość czułości w danym punkcie zakresu pomiarowego omomierza /np. dla rezystancji $100\ \Omega$ / trzeba ustawić wartość rezystancji odpowiadającą wybranemu punktowi zakresu pomiarowego za pomocą zespołu oporników. Po ustawieniu tej wartości /w naszym przykładzie wynosi ona $100\ \Omega$ / należy połączyć oporniki z wejściem omomierza. Następnie zwiększając

nieznacznie wartości rezystancji w zespole oporników precyzyjnych doprowadza się do wychylenia wskazówki omomierza o niewielki znany kąt. Wartość kąta wygodnie jest określić korzystając z regularnej podziałki miernika UM-5B dla napięć stałych. Podziałka ta zawiera 55 działek o jednakowej długości w zakresie kąta $\frac{\pi}{2}$ rad. Stąd wartość jednej działki równa jest $\frac{\pi}{110}$ rad. Znając zmianę kąta wychylenia wskazówki i odpowiadającą jej zmianę rezystancji, czułość określa się zgodnie z równaniem (6.1). Wskazane jest dwukrotne wyznaczenie czułości w danym punkcie zakresu pomiarowego. Pierwszy raz w taki sposób jak opisano to poprzednio. Drugi raz podobnie, lecz w miejscu zwiększania rezystancji zespołu oporników precyzyjnych, należy wartość tej rezystancji zmniejszyć tak, aby wskazówka wychyliła się o ten sam kąt lecz w przeciwnym kierunku. Ostatecznie czułość wyznacza się jako wartość średnią arytmetyczną z obu pomiarów.

Błąd pobudliwości wyznacza się w następujący sposób, Po ustawieniu w zespole oporników rezystancji odpowiadającej badanemu punktowi zakresu pomiarowego łączy się oporniki z wejściem omomierza. Następnie zwiększa się wartość rezystancji do chwili zaobserwowania zmiany położenia wskazówki omomierza. Za błąd pobudliwości przyjmuje się tę wartość rezystancji, której zmiana nie powodowała jeszcze zmiany wskazań.

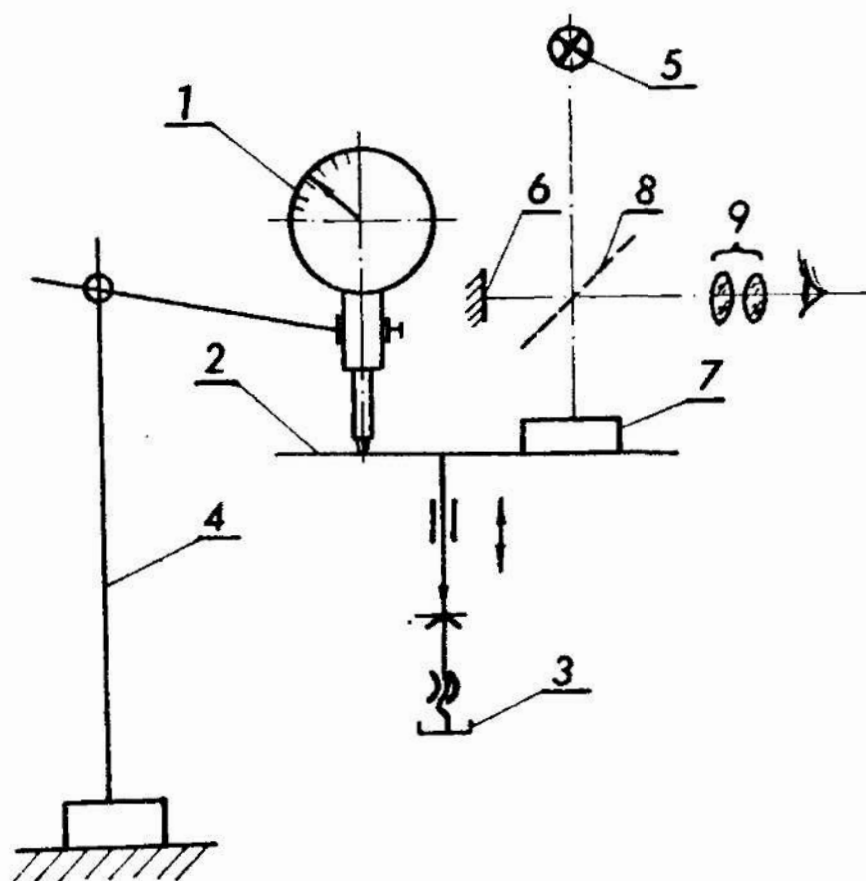
3.1.1. Przygotowanie do pomiaru

Przygotowanie do pomiaru należy przeprowadzić w następującej kolejności:

- umieścić w gniazdach wejściowych 3 i 4 omomierza przewody elektryczne,
- ustawić pokrętło 6 w pozycji $k\Omega$,
- zewrzeć wolne końce przewodów elektrycznych,
- pokrętłem 7 wyregulować wartość wskazania $0 k\Omega$,
- rozewrzeć wolne końce przewodów elektrycznych,
- pokrętłami 10 mostka prądu stałego ustawić żadaną wartość rezystancji,
- podłączyć wolne końce przewodów elektrycznych zacisków R i Π 1 mostka prądu stałego.

3.2. Pomiar czułości i błędu pobudliwości czujnika zegarowego

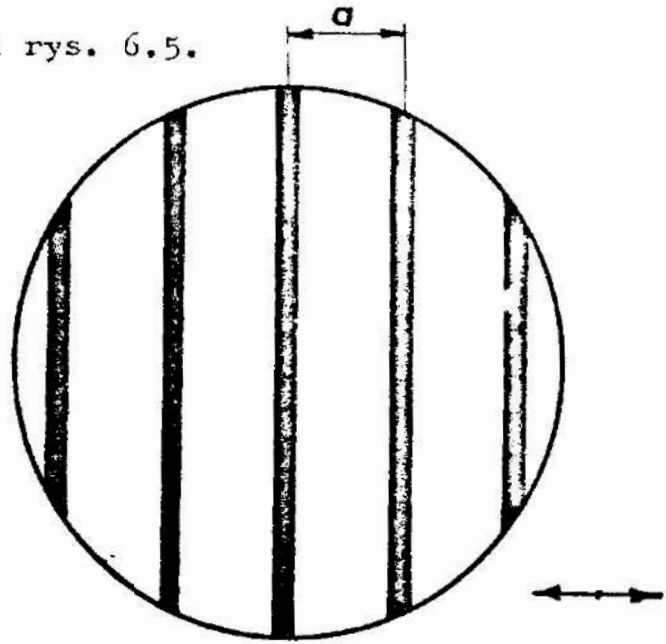
Pomiar czułości i błędu pobudliwości czujnika zegarowego wygodnie jest zrealizować wykorzystując układ, którego schemat pokazano na rys. 6.4.



Rys. 6.4. Schemat stanowiska do pomiaru czułości i pobudliwości czujnika zegarowego; 1 - badany czujnik, 2 - stolik przesuwany, 3 - pokrętło przesuwu stolika, 4 - statyw, 5 - źródło światła, 6, 7 - zwierciadła, 8 - płytka półprzezroczysta, 9 - okular

W układzie tym za pomocą pokrętła 3 można precyzyjnie przesunąć stolik 2 w kierunku pokazanym strzałką na rys. 6.4. Wraz ze stolikiem 2 będzie przemieszczać się trzpień pomiarowy czujnika 1, oraz zwierciadło 7. Zwierciadło 7 jest jednym ze zwierciadeł dwupromieniowego interferometru. Interferometr zbudowany jest ze źródła światła 5, zwierciadeł 6 i 7 płytki 8 oraz okularu 9. Obserwator patrząc w okular 9 widzi prążki in-

terferencyjne pokazane na rys. 6.5.



Rys. 6.5. Pole widzenia interferometru

Zasadę działania interferometru dwupromieniowego opisa-
no szczegółowo w pracy [14]. Prążki interferencyjne przy prze-
mieszczaniu się zwierciadła 7 wraz ze stolikiem przemieszcza-
ją się w kierunku pokazanym strzałką na rys. 6.5. Przy prze-
mieszczaniu stolika o wartość $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$, gdzie λ jest dłu-
gością fali zastosowanego światła, prążki interferencyjne
przemieszczają się o pełen okres tzn. o wartość a pokazaną na
rys. 6.5. Czułość czujnika może być zmierzona w ten sposób,
ze pokrętle 3 przemieszcza się stolik tak długo, aż wskazówka
czujnika przesunie się o jedną działkę. Przemieszczenie sto-
lika Δl mierzone jest interferometrem i określone zgodnie z
równaniem

$$\Delta l = (n + u) \frac{\lambda}{2}, \quad (6.4)$$

gdzie: n - całkowita liczba okresów a prążków interferencyj-
nych, które przemieściły się w polu widzenia inter-
ferometru, względem wybranego punktu odniesienia,
 u - ułamkowa część okresu a ; $u < 1$.

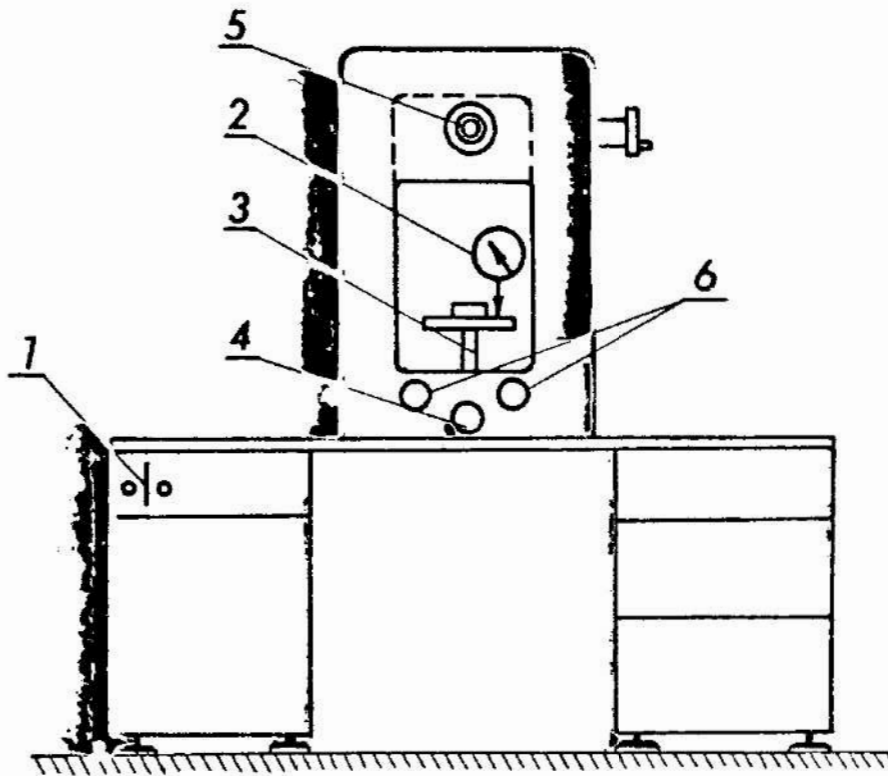
Czułość czujnika określa równanie:

$$k = \frac{\Delta W}{\Delta l}, \quad (6.5)$$

gdzie: ΔW - wartość przemieszczenia wskazówki czujnika.

Wartość przemieszczenia wskazówki czujnika może być wyrażona w jednostkach długości lub kąta.

Pomiar czułości i błędu pobudliwości należy wykonać z wykorzystaniem interferometru Köstersa. Schemat zestawionego układu z wykorzystaniem tego interferometru pokazuje rys. 6.6.



Rys. 6.6. Schemat zestawionego układu do pomiaru czułości i błędu pobudliwości czujnika zegarowego; 1 - włącznik sieci, 2 - sprawdzany czujnik, 3 - stolik, 4 - pokrętło przesuwu stolika, 5 - luneta obserwacyjna interferometru, 6 - pokrętła regulacyjne

3.2.1. Przygotowanie do pomiaru

W celu przygotowania do pomiaru czułości i pobudliwości czujnika zegarowego należy:

- włączyć interferometr do sieci włącznikiem 1 /rys. 6.6/,
- położyć na stoliku płytkę interferencyjną,

- zamocować czujnik w odpowiedniej podstawie i oprzeć trzpień czujnika o stół interferometru,
- patrząc w lunetę 5 wyregulować pokrętkami 6 pionowe położenie prążków interferencyjnych,
- zanotować długość fali światła.

4. Zadania

- 1/ Zmierzyć czułość omomierza szeregowego znajdującego się w mierniku UM-5B dla wartości rezystancji $R_1 = 100\ \Omega$,
 $R_2 = 500\ \Omega$ i $R_3 = 1000\ \Omega$
- 2/ Zmierzyć błąd pobudliwości omomierza dla rezystancji podanych w zadaniu 1.
- 3/ Zmierzyć czułość czujnika zegarowego MDAA za pomocą interferometru Köstersa. Pomiaru dokonać w trzech dowolnie wybranych punktach zakresu pomiarowego.
- 4/ Zmierzyć błąd pobudliwości czujnika zegarowego MDAA za pomocą interferometru Köstersa. Pomiaru dokonać w trzech wybranych punktach zakresu pomiarowego.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki pomiarów i obliczeń oraz niezbędne szkice i wnioski.

Ćwiczenie nr 7

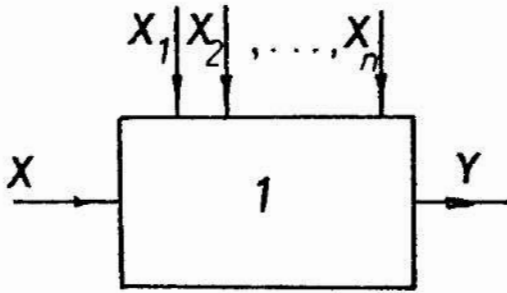
Temat: Wyznaczanie charakterystyki statycznej narzędzi pomiarowych

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodyką wyznaczania charakterystyki statycznej narzędzi pomiarowych, w postaci graficznej.

2. Podstawy teoretyczne

Proces pomiaru wybranej wielkości za pomocą przyrządu pomiarowego można zilustrować schematem pokazanym na rys.7.1.



Rys. 7.1. Schemat pomiaru wielkości X

Wielkość mierzona X jest przetwarzana dzięki przyrządowi pomiarowemu 1 na wielkość wyjściową Y dogodną dla oceny przez obserwatora wykonującego pomiar. Jednocześnie na przyrząd pomiarowy wpływają inne wielkości oznaczone symbolami od X_1 do X_n .

Można na ogół uważać, że zależność wielkości wyjściowej Y od wielkości mierzonej X oraz od wielkości wpływowych X_1 , X_2 , ..., X_n , określa równanie:

$$y = f(x, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.1)$$

przy czym małymi literami oznaczono wartości odpowiednich wielkości. Równanie (7.1) nosi nazwę równania przetwarzania. Jeżeli pomiary dokonywane będą w warunkach odniesienia to równanie (7.1) przyjmuje następującą postać:

$$y = f_0(x) . \quad (7.2)$$

Przez warunki odniesienia rozumie się takie warunki, w których wielkości X_1 , X_2 , ..., X_n przyjmują ściśle określone wartości.

Równanie (7.2) określa charakterystykę statyczną przyrządu pomiarowego. W odróżnieniu od charakterystyki dynamicznej charakterystyka statyczna nie uwzględnia zachowania się

przyrządu pomiarowego przy zmianie wartości wielkości mierzonej w czasie. Charakterystyka statyczna określa jedynie jakie wartości wielkości wyjściowej odpowiadają określonym wartościom wielkości mierzonej, w sytuacji gdy zaniknęły stany przejściowe związane ze zmianą wartości wielkości mierzonej. Pochodna charakterystyki statycznej danej równaniem (7.2) wyraża się następująco:

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{df_o(x)}{dx}, \quad (7.3)$$

i określa czułość narzędzia pomiarowego.

Konstruując przyrządy pomiarowe dąży się na ogół do tego, aby charakterystyka statyczna tych przyrządów była liniowa. Wynika to z faktu, że w przyrządach z liniową charakterystyką statyczną podziałka jest na ogół regularna, co ułatwia odczytanie wskazań oraz ich rejestrację.

Charakterystyka statyczna narzędzi pomiarowych może być wyznaczona w postaci graficznej. Istnieją trzy podstawowe sposoby wyznaczania charakterystyki statycznej w postaci graficznej:

- sposób pomiarów punktowych,
- sposób rejestracji ciągłej,
- sposób oscylograficzny.

Wszystkie trzy sposoby opisano szczegółowo w pracy [4].

W niniejszym ćwiczeniu należy wyznaczyć charakterystykę statyczną przyrządu korzystając ze sposobu pomiarów punktowych. Sposób ten polega na wyznaczeniu odpowiadających sobie wartości wielkości mierzonej i wartości wielkości wyjściowej w różnych punktach zakresu pomiarowego. Odpowiadające sobie pary tych wartości nanosi się na wykres z układem współrzędnych, a następnie łączy się je linią krzywą lub prostą. Można też dokonać odpowiedniej aproksymacji. Jeżeli istnieje obawa, że wyznaczeniu charakterystyki może towarzyszyć histereza to pomiary odpowiadających sobie wartości należy wykonać dwukrotnie. Najpierw kolejno dla wzrastających wartości wielkości mierzonej, a następnie dla malejących wartości tej wielkości.

Jednym z najprostszych sposobów aproksymacji liniowej charakterystyki statycznej przyrządu pomiarowego wyznaczonej metodą punktową jest metoda średniej opisana w pracy [11]. Jest to metoda analityczna. Polega ona na wyznaczeniu współczynników a i b prostej

$$y = ax + b, \quad (7.4)$$

aproksymującej k par odpowiadających sobie wartości x i y wyznaczonych doświadczalnie. Wartości te odpowiadające poszczególnym punktom charakterystyki na ogół obarczone są błędami i nie leżą na jednej prostej. W celu wyznaczenia współczynników a i b prostej określonej równaniem (7.4) tworzy się k równań o postaci:

$$y_i - ax_i - b = \Delta_i, \quad (7.5)$$

gdzie: y_i, x_i - odpowiadające sobie pary wartości wielkości mierzonej i wielkości wyjściowej wyznaczone doświadczalnie,

Δ_i - błąd o nieznannej wartości.

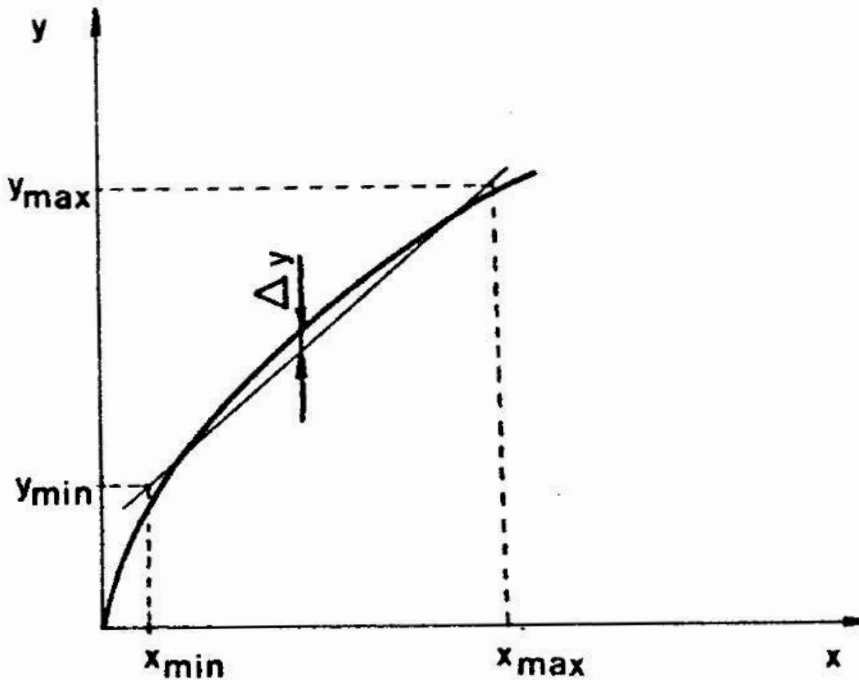
Następnie zespół równań (7.5) dzieli się na dwie grupy. Pierwsza grupa zawiera l równań. Druga grupa zawiera p równań. Jeżeli ogólna liczba równań k jest parzysta to ilości równań w obu grupach powinny być sobie równe $l = p$. Jeżeli ogólna liczba równań k jest nieparzysta to różnica między liczbą równań w pierwszej i drugiej grupie musi wynosić 1; $l - p = \pm 1$. Oczywiście musi być spełniony warunek $l + p = k$. Stosując aproksymację metodą średniej zakłada się, że suma błędów Δ_i w każdej z grup jest równa zeru. Otrzymuje się zatem układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^l (y_i - ax_i - b) = 0, \\ \sum_{i=l+1}^k (y_i - ax_i - b) = 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

z którego wyznacza się poszukiwane współczynniki a i b prostej (7.4). Bardziej ogólną metodę aproksymacji omówiono w ćwiczeniu nr 12.

Dla charakterystyk nieliniowych miarą nieliniowości charakterystyki jest współczynnik określony stosunkiem największej różnicy między tą charakterystyką a prostą aproksymującą, do zakresu wskazań przyrządu pomiarowego. Ilustruje to rys. 7.2 oraz równanie (7.7):

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y_{\max} - y_{\min}} \cdot 100\% \quad (7.7)$$



Rys. 7.2. Błąd liniowości charakterystyki statycznej

W przyrządach pomiarowych, w których zastosowano wskaźniki cyfrowe, bezpośrednie wyznaczenie charakterystyki statycznej i określenie czułości zgodnie z równaniem (7.3) może być utrudnione. Wynika to stąd, że w polu odczytowym urządzenia wskazującego obserwator widzi wynik pomiaru zakodowany najczęściej w postaci liczb. Nie ma on możliwości bezpośredniego określenia nie tylko wartości, ale nawet rodzaju wiel-

kości wyjściowej, która powoduje pojawienie się wskazań. Sytuacja taka spowodowana jest tym, że w przyrządach pomiarowych ze wskazaniem cyfrowym proces kodowania wyników pomiarów w postaci liczb jest realizowany przez sam przyrząd, a nie przez obserwatora. W przyrządach ze wskaźnikami cyfrowymi wyniki pomiarów są na ogół przedstawione za pomocą liczb w określonym systemie pozycyjnym np. dziesiętnym. Można umownie przyjąć, że wielkością wyjściową w takich przyrządach jest ogólna liczba jednostek, odpowiadających najmniejszej pozycji, zawartych w uzyskanym wskazaniu.

3. Przebieg ćwiczenia

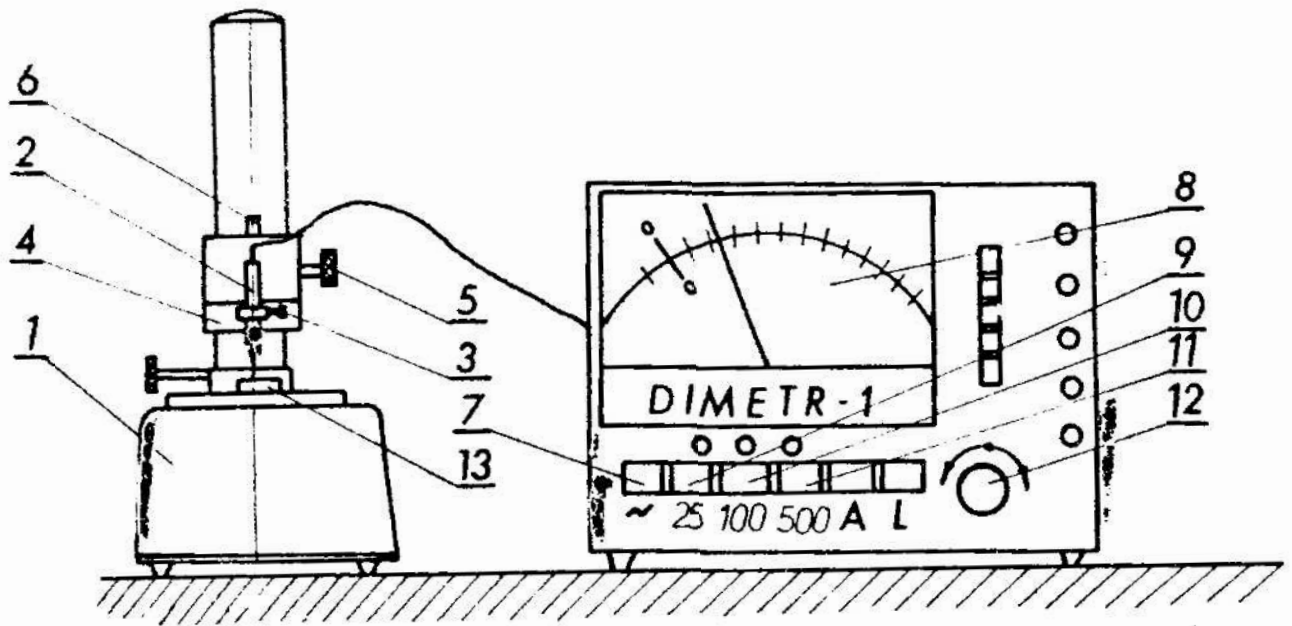
W czasie ćwiczenia należy wyznaczyć charakterystykę statyczną przyrządu pomiarowego składającego się z czujnika indukcyjnego typu MDKa-C i odpowiedniego wskaźnika. Czujnik ten może współpracować z różnymi wskaźnikami, w tym ze wskaźnikiem analogowym typu DIMETR 1 oraz ze wskaźnikiem cyfrowym typu MDNf-Fa. W ostatnim przypadku wyniki pomiarów mogą być rejestrowane za pomocą rejestratora typu VISOPRINT.

Czujnik indukcyjny typu MDKa-C wraz z odpowiednim wskaźnikiem przeznaczony jest do pomiarów długości. Jego charakterystykę statyczną należy wyznaczyć w temperaturze odniesienia odpowiadającej $20^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$. Charakterystykę tę można wyznaczyć natując wskazania uzyskane z czujnika dla określonych wartości położenia trzpienia pomiarowego. Położenie trzpienia pomiarowego można zmieniać za pomocą stosów płytek wzorcowych.

Z zasadą pracy czujnika indukcyjnego oraz ze sposobem posługiwania się płytkami należy zapoznać się korzystając z pracy [15].

3.1. Przygotowanie do pomiarów

Charakterystykę statyczną czujnika indukcyjnego wygodnie jest wyznaczyć mocując go w uchwycie podstawy pomiarowej typu MDZg, tak jak pokazuje to rys. 7.3.



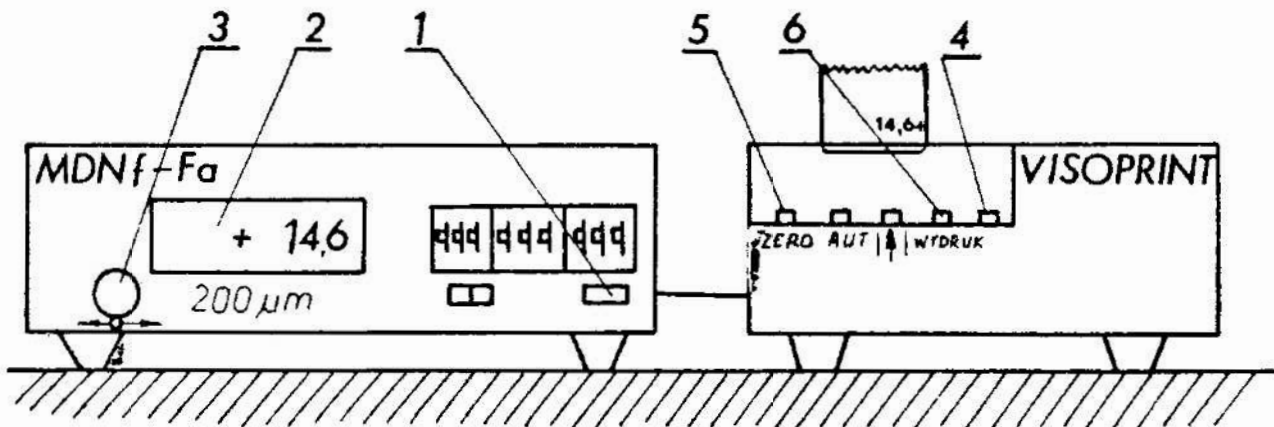
Rys. 7.3. Stanowisko do wyznaczania charakterystyki statycznej czujnika indukcyjnego; 1 - podstawa pomiarowa, 2 - czujnik indukcyjny, 3 - zacisk czujnika, 4 - pierścień regulacyjny, 5 - pokrętło blokujące, 6 - pokrętło regulacyjne, 7 - włącznik sieci, 8 - pole odczytowe wskaźnika, 9, 10, 11 - przełączniki zakresów pomiarowych, 12 - pokrętło regulacji zera, 13 - stos płytek wzorcowych /wymienny/

W tym celu należy włożyć czujnik 2 w otwór uchwyty i zacisnąć go zaciskiem 3. Po odblokowaniu pokrętła 5 wyregulować pierścieniem 4 takie położenie czujnika 2, aby odległość między powierzchnią pomiarową stolika przedmiotowego podstawy 1, a końcem trzpienia czujnika 2 wynosiła około 1 mm. Następnie należy zablokować uchwyt pokrętłem 5. Wtyczkę umieszczoną na końcu przewodu czujnika 2 podłączyć do odpowiedniego gniazda umieszczonego w płycie tylnej wskaźnika DIMETR. Wcisnąć przycisk 11.

Na powierzchni pomiarowej podstawy 1 pod trzpieniem czujnika 2 umieścić płytkę wzorcową 13 o wymiarze nominalnym 1 mm, po uprzednim oczyszczeniu płaszczyzny pomiarowej podstawy i płytki wzorcowej. Włączyć przyciskiem 7 przyrząd wskazujący do

sieci. Pokręciem 6 wyregulować takie położenie czujnika, aby wskazanie w polu odczytowym wskaźnika 8 było bliskie zera. Pokręciem 12 dokładnie wyregulować wskazanie zerowe.

W przypadku stosowania wskaźnika typu MDNF-Fa /rys. 7.4/ należy wykonać wszystkie czynności niezbędne do zamocowania czujnika indukcyjnego w podstawie pomiarowej, tak jak to opisano poprzednio.



Rys. 7.4. Schematyczny wygląd wskaźnika MDNF-Fa i rejestratora VISOPRINT; 1 - włącznik sieci wskaźnika, 2 - pole odczytowe wskaźnika, 3 - pokrętkę regulacji zera, 4 - włącznik sieci rejestratora, 5 - przycisk zerowania, 6 - przycisk wydruku

Wtyczkę umieszczoną na końcu przewodu czujnika indukcyjnego należy podłączyć do odpowiedniego gniazda umieszczonego w płycie tylnej wskaźnika MDNF-Fa. Następnie należy połączyć, odpowiednim przewodem ze złączami szufladowymi, gniazda umieszczone w płycie tylnej wskaźnika MDNF-Fa i w płycie tylnej rejestratora VISOPRINT.

Po wykonaniu tych czynności umieścić pod trzpieniem pomiarowym czujnika 2 /rys. 7.3/ płytkę wzorcową o wymiarze nominalnym 1 mm. Włączyć przyciski 1 i 4 /rys. 7.4/. Oczekać około 5 minut. Po ukazaniu się wskazania w polu odczytowym 2 /rys. 7.4/ wyregulować pokrętkę 6 /rys. 7.3/ takie położenie czujnika aby wskazanie było bliskie zera. Następnie pokrętkę 3 /rys. 7.4/ dokładnie wyregulować wskazanie zerowe i nacisnąć

przycisk 5 /rys. 7.4/.

4. Zadania

- 1/ Wyznaczyć charakterystykę czujnika indukcyjnego typu MDKa-C w połączeniu ze wskaźnikiem DIMETR 1 dla zakresów pomiarowych 500 μm , 100 μm , i 25 μm . W tym celu należy wyznaczyć wskazania przyrządu w conajmniej 10 punktach każdego zakresu pomiarowego. Dla zakresu pomiarowego 100 μm wartości wymiarów stosów wzorcowych mogą być następujące: 1 mm; 1,01 mm; 1,02 mm; 1,03 mm; 1,04 mm; 1,05 mm; 1,06 mm; 1,07 mm; 1,08 mm; 1,09 mm; 1,1 mm. Stosy należy umieszczać na stoliku w kolejności rosnącej. Wskazania przyrządu określić wartością kąta odpowiadającego wychyleniu wskazówki względem zera, lub długością łuku przebytego przez koniec wskazówki. Kąt wychylenia wskazówki może być wyrażony ilością działek podziałki wskaźnika.
- 2/ Wyznaczyć, podobnie jak w zad. 1, charakterystykę czujnika indukcyjnego typu MDKa-C w połączeniu ze wskaźnikiem cyfrowym typu MDNf-Fa. W tym celu należy wyznaczyć wskazania przyrządu w conajmniej 10 punktach zakresu pomiarowego. Wskazania należy zarejestrować wciskając, po ustaleniu się wskazania dla danego stosu płytek wzorcowych, przycisk 6 /rys. 7.4/.
- 3/ Sporządzić wykresy charakterystyk statycznych na podstawie pomiarów wykonanych w zadaniu 1 i 2 oraz określić czułość dla każdego zakresu pomiarowego. W celu sporządzenia wykresów charakterystyk statycznych należy wcześniej dokonać ich aproksymacji metodą średniej, wyznaczając proste $y = a_1 x + b_1$.
- 4/ Wyznaczyć charakterystykę czujnika MDKa-C w połączeniu ze wskaźnikiem DIMETR 1 dla zakresów pomiarowych 500 μm , 100 μm i 25 μm podobnie jak w zad. 1 z tym, że kolejne stosy płytek wzorcowych umieszczane na stoliku powinny zmniejszać wskazania przyrządu.
- 5/ Wyznaczyć charakterystykę statyczną czujnika MDKa-C w połączeniu ze wskaźnikiem cyfrowym MDNf-Fa podobnie jak w zadaniu 2, z tym, że kolejne stosy płytek wzorcowych umiesz-

- czane na stoliku powinny zmniejszać wskazanie przyrządu.
- 6/ Dokonać aproksymacji charakterystyk statycznych wyznaczonych w zad. 4 i 5 stosując metodę średniej. Sporządzić wykresy tych charakterystyk oraz określić czułość dla każdego zakresu pomiarowego.
- 7/ Porównując proste otrzymane w wyniku aproksymacji w zad. 3 i 6 określić dla każdego zakresu pomiarowego największy błąd histerezy oraz różnicę czułości przyrządu. Największy błąd histerezy Δh dla odpowiedniego zakresu pomiarowego można wyznaczyć analizując różnice wskazań otrzymane w poszczególnych punktach albo analizując równanie:

$$\Delta h = (a_1 - a_2)x + b_1 - b_2, \quad (7.8)$$

dla granicznych wartości zakresu pomiarowego. W równaniu (7.8) współczynniki a_1 i b_1 dotyczą prostej wyznaczonej w zadaniu 3, zaś współczynniki a_2 i b_2 prostej wyznaczonej w zad. 6.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki wykonanych pomiarów, obliczenia parametrów prostych aproksymujących, sporządzone wykresy i wnioski.

Ćwiczenie nr 8

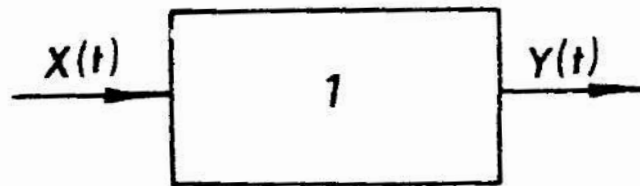
Temat: Badanie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej narzędzi pomiarowych

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodyką wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej narzędzi pomiarowych.

2. Podstawy teoretyczne

Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa przyrządu pomiarowego określa jego zdolność do reagowania na wielkość mierzoną, która zmienia się wraz z upływem czasu. Jeżeli na wejście przyrządu pomiarowego 1 podawana jest wielkość mierzona X zmienna w czasie, to wielkość wyjściowa Y również będzie funkcją czasu. Ilustruje to schemat pokazany na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Schemat ilustrujący pomiar wielkości zmiennej w czasie

Jeżeli wartości wielkości X zmieniają się zgodnie z równaniem:

$$x = A_x \sin \omega t , \quad (8.1)$$

przy czym $\omega = 2\pi f$,

gdzie: A_x - amplituda zmian wartości wielkości X ,
 f - częstotliwość zmian wartości wielkości X ,
 ω - pulsacja,
 t - czas,

to, dla szerokiej klasy przyrządów pomiarowych, wielkość $Y(t)$ będzie również zmieniała się podobnie. Opisuje to równanie:

$$y = A_y \sin(\omega t + \varphi_y), \quad (8.2)$$

gdzie: A_y - amplituda zmian wartości wielkości Y ,
 φ_y - przesunięcie fazowe wartości wielkości Y względem X .

Stosunek amplitud wielkości Y i X , przy pobudzeniu sinusoidalnym, w funkcji częstotliwości lub pulsacji, nosi nazwę charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej.

Przesunięcie fazowe φ_y jest również funkcją częstotliwości i zależność ta nosi nazwę charakterystyki fazowo-częstotliwościowej.

Jeżeli wielkość X zmienia się w czasie inaczej niż opisuje to równanie (8.1), to można ją rozłożyć na składowe harmoniczne, korzystając z przekształcenia Fouriera. Znając charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową i charakterystykę amplitudowo-fazową przyrządu pomiarowego, można określić amplitudy i przesunięcia fazowe sygnałów y_i odpowiadających poszczególnym składowym harmonicznym. Następnie stosując zasadę superpozycji w stosunku do sygnałów y_i można wyznaczyć wielkość $Y(t)$.

Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa przyrządu pomiarowego określa jego zdolność do reagowania na poszczególne składowe harmoniczne wielkości $X(t)$. Dobór przyrządu do pomiaru wielkości $X(t)$ powinien być taki, aby jego charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa zapewniała właściwe odwzorowanie wszystkich składowych wielkości mierzonej w sygnale wyjściowym $Y(t)$.

Przedstawione wyżej pojęcia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i amplitudowo-fazowej mogą być uogólnione, tak jak przedstawiono to w pracach [11, 12]. Charakterystyka częstotliwościowa $K(j\omega)$ określona jest tam jako stosunek transformaty Laplace'a $Y(s)$ wielkości wyjściowej $Y(t)$ do transformaty Laplace'a $X(s)$ wielkości mierzonej $X(t)$, przy pobudzeniu sinusoidalnym:

$$K(j\omega) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{s=j\omega} \quad (8.3)$$

Oznacza to, że charakterystyka częstotliwościowa równa jest transmitancji przyrządu pomiarowego 1 w przypadku gdy wielkość X zmienia się zgodnie z równaniem (8.1). Przy takim podejściu charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa równa jest modułowi charakterystyki częstotliwościowej. Ilustruje to równanie (8.4):

$$\frac{A_Y}{A_X} = |K(j\omega)| \quad (8.4)$$

Natomiast charakterystyka fazowo-częstotliwościowa określona jest równaniem (8.5):

$$\varphi_y = \text{arc tg} \frac{\text{Im} [K(j\omega)]}{\text{Re} [K(j\omega)]} , \quad (8.5)$$

gdzie symbole Im i Re oznaczają odpowiednio składowe urojoną i rzeczywistą wielkości zespolonej jaką jest charakterystyka częstotliwościowa.

Jak wynika z prac [4, 11] w wielu przypadkach rejestratory mogą być traktowane jako przetworniki drugiego rzędu. Analizując transmitancję operatorową takiego przetwornika można określić związki między charakterystyką amplitudowo-częstotliwościową przetwornika a jego parametrami, takimi np. jak stopień tłumienia β , stałe czasowe T_1 i T_2 , pulsacja drgań własnych nietłumionych ω_0 .

Jeżeli znany jest wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej wykonany w skali logarytmicznej, to wartości stałych czasowych przetwornika inercyjnego drugiego rzędu mogą być wyznaczone na podstawie punktu przecięcia osi pulsacji ze styczną do wykresu charakterystyki o nachyleniu -20 dB na dekadę, oraz na podstawie punktu przecięcia się tej stycznej ze styczną o nachyleniu -40 dB na dekadę. Ilustruje to rys. 8.2. W tym przypadku wartości stałych czasowych T_1 i T_2 , stopnia tłumienia β , oraz pulsacji drgań własnych nietłumionych ω_0 mogą być wyznaczone z poniższych równań:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2\pi f_1} , \quad (8.6)$$

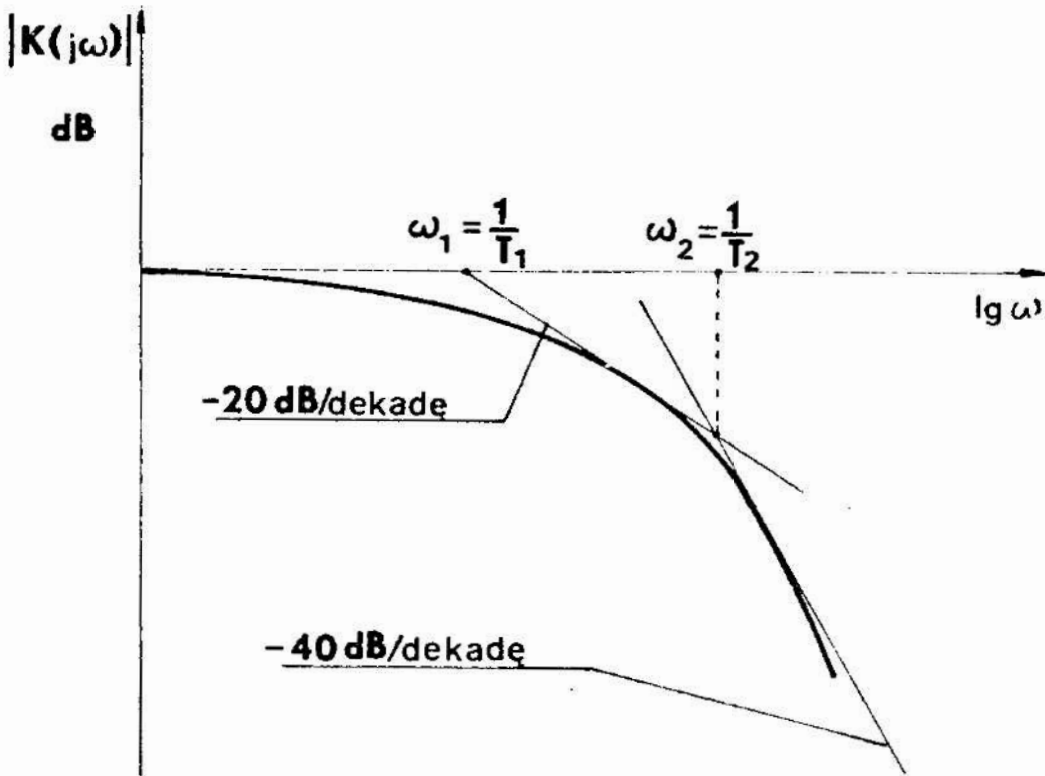
$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{2\pi f_2} , \quad (8.7)$$

$$\beta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} = \frac{f_1 + f_2}{2\sqrt{f_1 f_2}} , \quad (8.8)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{2\pi f_1}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}} , \quad (8.9)$$

lub

$$\omega_0 = \frac{\omega_2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}} = \frac{2\pi f_2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad (8.10)$$

gdzie: T_1, T_2 - stałe czasowe, ω_1, ω_2 - pulsacje załamania wyznaczone zgodnie z rys. 8.2, f_1, f_2 - częstotliwości odpowiadające pulsacjom ω_1 i ω_2 , β - stopień tłumienia, ω_0 - pulsacja drgań własnych nietłumionych.

Rys. 8.2. Wyznaczanie stałych czasowych przetwornika II rzędu

Powyższe rozważania wskazują, że charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa przyrządu pomiarowego może być podstawą do wnioskowania nie tylko o postaci sygnału wyjściowego przyrządu przy znanym sygnale wejściowym, lecz może służyć także do wyznaczenia wartości niektórych ważnych parametrów

technicznych określających dynamikę działania urządzenia.

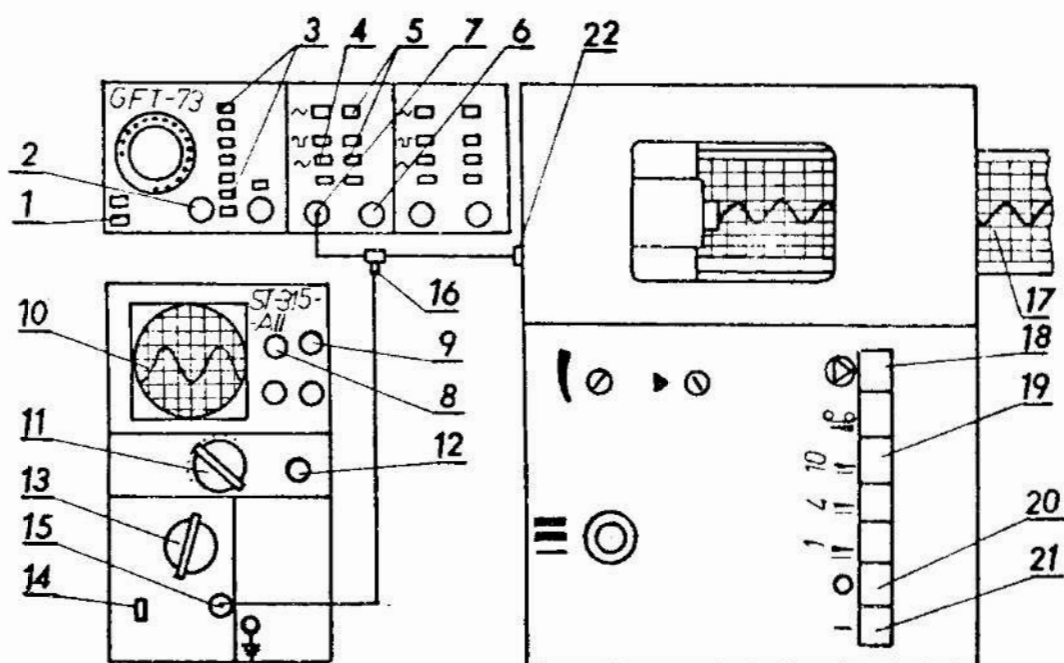
3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową rejestratora metodą punktową. Metoda ta polega na wyznaczeniu wartości stosunku amplitud A_y do A_x dla kilku lub kilkunastu wybranych częstotliwości. Następnie dokonuje się graficznego lub analitycznego wyznaczenia funkcji, która stanowi przybliżenie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości.

Wyznaczenie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej rejestratora będzie polegać na podawaniu na jego wejście napięcia zmiennego sinusoidalnie o stałej amplitudzie i rejestracji sygnału przy różnych wartościach częstotliwości. Wygląd zestawionego układu pokazano schematycznie na rys. 8.3. W skład układu wchodzi: badany rejestrator, generator typu GFT-73, oscyloskop typu ST-315-AII. Gniazdo wyjściowe generatora połączone jest z gniazdami wejściowymi badanego rejestratora i oscyloskopu za pomocą przewodów elektrycznych i złączki 16. Generator jest źródłem napięcia zmiennego sinusoidalnie. Oscyloskop służy do pomiaru amplitudy sygnału otrzymywanego z generatora.

3.1. Przygotowanie do pomiaru

Przed przystąpieniem do pomiaru należy, wykorzystując złączkę 16, połączyć przewodami elektrycznymi gniazdo wyjściowe 7 generatora z gniazdami 15 oscyloskopu i 22 rejestratora. Przełącznikami 3 i pokrętkiem 2 ustawić częstotliwość sygnału 100 Hz. Wcisnąć przełącznik 4 odpowiadający sygnałowi sinusoidalnemu. Włączyć oscyloskop do sieci pokrętkiem 8. Odczekać około 1 minuty. Pokrętkami 8 i 9 wyregulować jasność i ostrość obrazu. Wcisnąć przełącznik 5 odpowiadający amplitudzie 10 V. Ustawić przełącznik 13 w pozycji 1 V/cm. Włączyć do sieci generator włącznikiem 1. Dobrać pokrętkiem 11 odpowiednią podstawę czasu. Pokręcając pokrętkiem 6 ustalić wartość amplitudy sygnału na określonym poziomie np. 2 V. Wartość amplitudy



Rys. 8.3. Schemat zestawionego układu do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej rejestratora; 1 - włącznik sieci generatora, 2 - pokrętko regulacji częstotliwości, 3 - przełączniki skokowe częstotliwości, 4 - przełączniki rodzaju funkcji, 5 - przełączniki wartości amplitudy, 6 - pokrętko regulacji amplitudy, 7 - gniazdo sygnału wyjściowego, 8 - włącznik sieci i regulator jasności obrazu oscyloskopu, 9 - pokrętko regulacji ostrości, 10 - ekran, 11 - pokrętko podstawy czasu, 12 - pokrętko płynnej regulacji podstawy czasu, 13 - pokrętko regulacji wzmacnienia, 14 - przełącznik rodzaju pracy, 15 - gniazdo wejściowe, 16 - złączka, 17 - taśma rejestratora, 18 - przycisk zatrzymania taśmy, 19 - przycisk przesuwu taśmy z prędkością 10 mm/s, 20 - wyłącznik rejestratora, 21 - włącznik rejestratora, 22 - gniazdo wejściowe rejestratora

można określić na podstawie obserwacji wymiarów obrazu na ekranie 10 oscyloskopu. Ustawić przyciskami 3 i pokrętkiem 2 częstotliwość równą 0,2 Hz. Dobrać pokrętkiem 11 podstawę czasu. Sprawdzić amplitudę sygnału obserwując ekran oscyloskopu.

Wcisnąć przycisk 21 włączający zasilanie rejestratora. Odczekać około 1 minuty.

4. Zadania

- 1/ Zarejestrować sygnały o stałej amplitudzie i częstotliwościach równych 0,2 Hz, 0,5 Hz, 1 Hz, 2 Hz, 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz, 50 Hz, 60 Hz, 70 Hz, 80 Hz, 90 Hz, 100 Hz, 150 Hz, 200 Hz, 250 Hz, 300 Hz.

W tym celu należy każdorazowo ustawić odpowiednią wartość częstotliwości przyciskami 3 i pokrętelem 2 oraz na krótką chwilę włączyć przycisk 19. Po zakończeniu rejestracji sygnału dla danej częstotliwości wcisnąć przycisk 18.

- 2/ Dla każdej częstotliwości podanej w zad. 1 wyznaczyć stosunek A_y do A_x .
- 3/ Na podstawie wartości obliczonych w zad. 2 sporządzić wykres stosunku amplitud A_y do A_x w funkcji częstotliwości.
- 4/ Wyznaczyć wartości stosunku A_y do $A_y(0,2 \text{ Hz})$ dla wszystkich częstotliwości podanych w zad. 1.
- 5/ Wartości obliczone w zad. 4 wyrazić w decybelach uwzględniając, że wartość wyrażona w decybelach równa jest:

$$\text{wartość w dB} = 20 \log_{10} \frac{A_y}{A_y(0,2 \text{ Hz})} .$$

- 6/ Na podstawie wartości obliczonych w zad. 5 sporządzić wykres charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w układzie logarytmicznym. W tym celu na osi rzędnych należy odkładać wartości w decybelach zaś na osi odciętych wartości logarytmów dziesiętnych pulsacji.
- 7/ Wyznaczyć względne błędy δ_A rejestracji amplitudy sygnału sinusoidalnego dla częstotliwości 1 Hz, 10 Hz, 50 Hz, 100 Hz i 200 Hz. Błędy te powstają w wyniku tłumienia sygnału przez układ rejestratora i mogą być określone równaniem:

$$\delta_A = \frac{A_y(f) - A_y(0,2 \text{ Hz})}{A_y(0,2 \text{ Hz})} = \frac{A_y(f)}{A_y(0,2 \text{ Hz})} - 1 .$$

- 8/ Korzystając z wykresu sporządzonego w zad. 6 wyznaczyć pulsacje załamania ω_1 i ω_2 , a następnie stałe czasowe T_1 i T_2 . Wyznaczenia pulsacji ω_1 i ω_2 należy dokonać podobnie, jak pokazano to na rys. 8.2. Wartości stałych czasowych wyznaczyć z równań (8.6), (8.7).
- 9/ Posługując się równaniami (8.8), (8.9), (8.10) wyznaczyć wartości stopnia tłumienia β i pulsacji drgań własnych nietłumionych ω_0 .

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić zarejestrowane wykresy, obliczenia, sporządzone wykresy charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej oraz wnioski.

Ćwiczenie nr 9

Temat: Ocena informacyjnych charakterystyk pomiarów

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów ze sposobami oceny ilości informacji uzyskiwanej w procesie pomiaru.

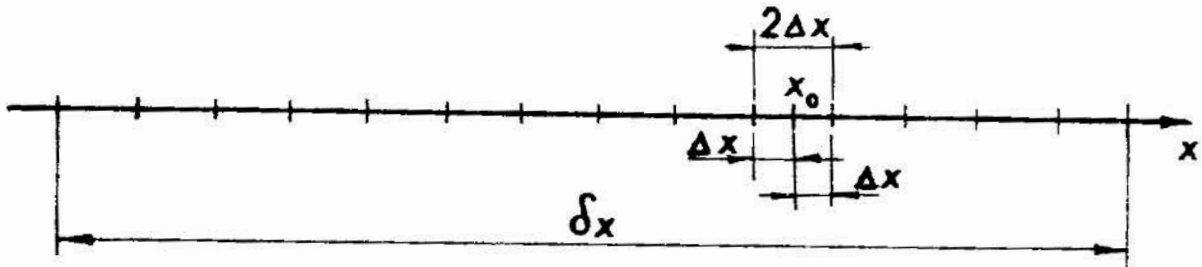
2. Podstawy teoretyczne

Pomiar ma na celu wyznaczenie przedziału wartości, w którym z dużym prawdopodobieństwem znajduje się wartość rzeczywista wielkości mierzonej. Wynik pomiaru, zapisywany na ogół w postaci

$$x_0 \pm \Delta x, \quad (9.1)$$

pozwala na określenie szerokości tego przedziału. Szerokość ta określona jest niedokładnością pomiaru i wynosi $2\Delta x$. Gwarantuje to, że wartość rzeczywista wielkości mierzonej z dużym prawdopodobieństwem znajduje się w przedziale wartości od $x_0 - \Delta x$

do $x_0 + \Delta x$. Na rys. 9.1 pokazano położenie wartości x_0 oraz przedziału nieokreśloności o szerokości $2\Delta x$ na osi liczbowej



Rys. 9.1. Położenie wyniku pomiaru na osi liczbowej

Przed pomiarem, w którym uzyskano wynik (9.1), można było przewidzieć, że wartość rzeczywista wielkości mierzonej z dużym prawdopodobieństwem znajduje się w przedziale o pewnej szerokości δx . Szerokość δx przedziału nieokreśloności przed pomiarem była duża. Pomiar doprowadził do zmniejszenia przedziału nieokreśloności z wartości δx do wartości $2\Delta x$.

Pomiar rozpatrywany z tego punktu widzenia był zatem procesem wyboru jednego z przedziałów o szerokości $2\Delta x$ zawartych w przedziale o szerokości δx . Wybór taki jest tym trudniejszy im większa jest liczba możliwych do wybrania przedziałów. Liczba ta zależy od stosunku szerokości obu przedziałów i określona jest równaniem (9.2):

$$N = \frac{\delta x}{2 \Delta x} \quad (9.2)$$

Liczba N , nazywana niekiedy ilością kwantów informacji, może być miarą ilości informacji uzyskanej w procesie pomiaru. Jest to liniowa miara ilości informacji.

Częściej stosuje się logarytmiczną miarę ilości informacji określoną równaniem (9.3):

$$I = \log_2 N = \log_2 \frac{\delta x}{2 \Delta x} \quad (9.3)$$

Zawartość /ilość/ informacji I określa liczbę tzw. dychtomii /patrz [14]/ niezbędnych do uzyskania pożądanej informacji.

Jednostką zawartości informacji jest bit. Do wyznaczenia zawartości informacji I można posłużyć się logarytmami dziesiętymi, korzystając z równania:

$$I = \log_2 N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 2} = 3,3219 \log_{10} N \quad (9.4)$$

Ilość kwantów informacji N oraz zawartość informacji I , wyznaczone są przy założeniu, że prawdopodobieństwo tego, iż wartość rzeczywista wielkości mierzonej znajdzie się w danym przedziale o szerokości $2 \Delta x$, jest jednakowe dla każdego z N przedziałów. Prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{1}{N}$.

W przypadku, gdy powyższe założenie nie jest spełnione, do oceny ilości informacji używa się miary zwanej entropią informacji. Entropia informacji H jest logarytmiczną miarą informacji uwzględniającą prawdopodobieństwo wystąpienia danego kwantu informacji. Określona jest ona równaniem (9.5):

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (9.5)$$

gdzie: p_i - prawdopodobieństwo wystąpienia i -tego kwantu informacji.

Szczegółowe informacje o wykorzystaniu tej charakterystyki zawarto w pracach [7, 11].

Parametrem charakteryzującym prędkość generowania, przesyłu, przetwarzania lub odbioru informacji jest strumień informacji C . Określa on ilość informacji generowanej, przetwarzanej, przesyłanej lub odbieranej w jednostce czasu. Wartość strumienia informacji można wyznaczyć korzystając z równania (9.6):

$$C = \frac{\log_2 N}{\Delta t} \quad (9.6)$$

gdzie: Δt - jest przedziałem czasu, w którym dokonano generacji przesyłu, przetworzenia lub odbioru informacji.

3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy wyznaczyć ilość informacji uzyskiwanej w rezultacie pomiarów długości przedmiotów za pomocą:

- przymiaru kreskowego,
- suwmiarki,
- mikrometru,
- długościomierza Abbego.

Ilość informacji należy wyznaczyć korzystając z równań (9.3) i (9.2). Niedokładność pomiarów poszczególnymi narzędziami pomiarowymi można oszacować na podstawie przybliżonego równania:

$$x \approx \pm 0,5 a \quad , \quad (9.7)$$

gdzie: a jest wartością noniusza w przypadku suwmiarki i wartością działki elementarnej w przypadku pozostałych narzędzi pomiarowych.

Ponadto należy wyznaczyć wartość strumienia informacji uzyskiwanej przy pomiarze częstości sygnału częstościomierzem typu PFL-23.

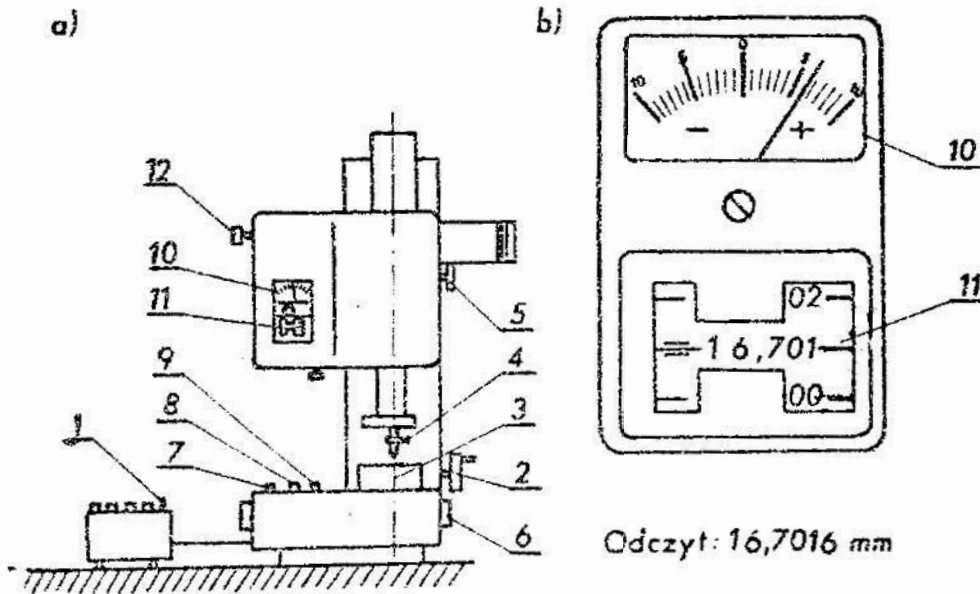
3.1. Przygotowanie do pomiarów długości długościomierzem Abbego typu P 0,1

Przed przystąpieniem do pomiarów długości przedmiotu za pomocą długościomierza Abbego, należy przemyć benzyną i przetrzeć ściereczką stolik przedmiotowy 3 oraz końcówkę pomiarową 4 /rys. 9.2/. W tym celu należy powierzchnie pomiarowe końcówki 4 i stolika 3 zwilżyć lekko benzyną i przetrzeć ściereczką, tak aby usunąć ślady tłuszczu. Następnie włącznikiem 1 włączyć przyrząd do sieci, odczekać około 1 minuty i przystąpić do zerowania przyrządu. Zerowanie należy wykonać w następującej kolejności:

1. Włączyć przycisk 8 i doprowadzić do zetknięcia się końcówki pomiarowej 4 z powierzchnią stolika 3.
2. W razie potrzeby odblokować zacisk 5 i pokrętelem 2 obracać, aż do ukazania się z lewej strony ekranu 11 wskazania 0,0;

zaciśnąć zacisk 5.

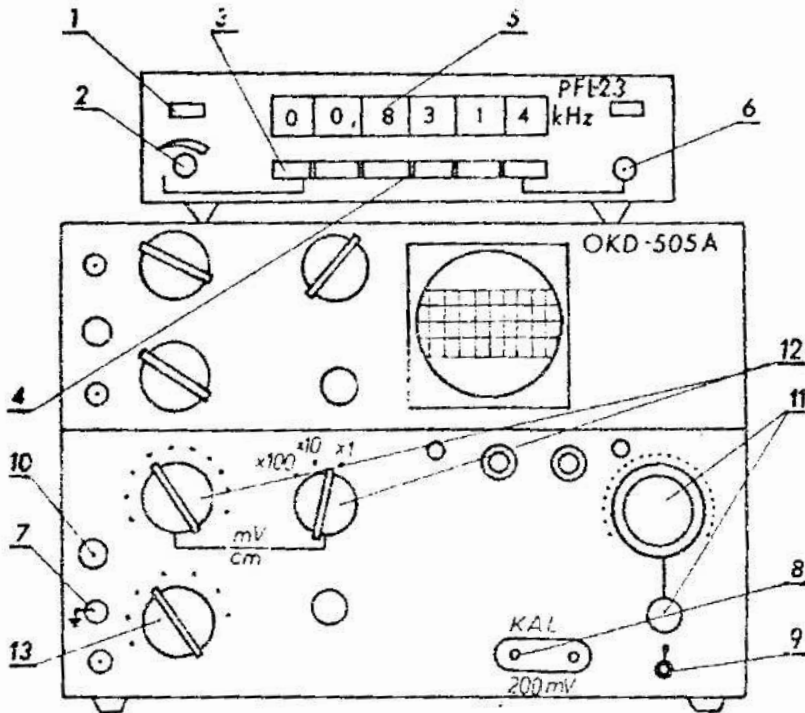
3. Pokrętle 6 doprowadzić do uzyskania na ekranie 11 wskazania 0,000.
4. Pokrętle 12 ustawić zerową kreskę podziałki widocznej z lewej strony ekranu 11 dokładnie symetrycznie między dwoma nieruchomymi kreskami..Wskaźnik 10 wskaże wtedy 0.
5. Wcisnąć na chwilę przycisk 7 i unieść trzpień z końcówką pomiarową 4 ku górze. Następnie wcisnąć przycisk 8 i poczekać aż końcówka pomiarowa 4 zetknie się ponownie z powierzchnią stolika 3. Sprawdzić czy na ekranie 11 i wskaźniku 10 są wskazania zerowe. Jeżeli wskazania są różne od zera to należy powtórzyć czynności zerowania od punktu 1 do punktu 5.
6. Wcisnąć na chwilę przycisk 7 i unieść trzpień z końcówką pomiarową 4 ku górze.



Rys. 9.2. Schematyczny wygląd długościomierza Abbego typu P 0,1 (a); pole odczytowe urządzenia (b); 1 - włącznik sieci, 2 - pokrętko przesuwu zgrubnego, 3 - stół przedmiotowy, 4 - końcówka pomiarowa, 5 - zacisk, 6 - pokrętko przesuwu dokładnego, 7 - przycisk przesuwu w górę, 8 - przycisk przesuwu w dół, 9 - przycisk przesuwu szybkiego, 10 - wskaźnik, 11 - ekran, 12 - pokrętko regulacji zera

3.2. Przygotowanie do pomiaru częstości sygnału

Gniazda 7 i 8 oscyloskopu typu OKD-505A połączyć z gniazdem wejściowym 10 /patrz. rys. 9.3/.



Rys. 9.3. Układ do pomiaru częstości sygnału; 1 - włącznik sieci częstotściomierza, 2 - pokrętko regulacji czasu odczytu, 3 - przycisk kasowania odczytu, 4 - przyciski wybierające czas pomiaru, 5 - pole odczytowe, 6 - gniazdo wejściowe, 7 - gniazdo masy oscyloskopu, 8 - gniazdo wyjściowe generatora, 9 - włącznik sieci oscyloskopu, 10 - gniazdo wejściowe oscyloskopu, 11 - pokrętko regulacji podstawy czasu, 12 - pokrętko regulacji wzmacnienia, 13 - pokrętko wyboru rodzaju pracy

Pokrętkami 12 ustawić wzmacnienie odpowiadające $100 \frac{\text{mV}}{\text{cm}}$. Pokrętkiem 13 ustawić odpowiedni rodzaj pracy. Włączyć oscyloskop włącznikiem 9 i odczekać ok. 1 minuty.

Pokrętko płynnej regulacji podstawy czasu 11 ustawić w prawym skrajnym położeniu. Obracając pokrętkiem 11 skokowo regulującym podstawę czasu, uzyskać na ekranie oscyloskopu sta-

cjonarny obraz fali prostokątnej. Zmierzyć okres obserwowanego przebiegu i wyznaczyć jego częstotliwość. Następnie pokręcić płynnej regulacji podstawy czasu 11 ustawić w lowym skrajnym położeniu. Ponownie zmierzyć okres i wyznaczyć częstotliwość obserwowanego przebiegu.

Różnicę między obliczonymi wartościami częstotliwości należy przyjąć jako szerokość przedziału nieokreśloności δx przy pomiarach częstotliwości.

Korzystając z odpowiedniego przewodu, połączyć gniazda 7 i 8 oscyloskopu OKD-505 A do gniazda wejściowego 6 częstotściomierza typu PFL-23.

Włączyć częstotściomierz przyciskiem 1. Pokręćłem 2 ustalić czas odczytu wskazania.

4. Zadania

- 1/ Ocenić, nie korzystając z narzędzi pomiarowych, długość wskazanego przedmiotu. Określić granice w jakich długość ta na pewno jest zawarta. Zanotować oszacowane wymiary graniczne. Obliczyć szerokość przedziału nieokreśloności δx jako różnicę wartości granicznych.
- 2/ Zmierzyć długość przedmiotu przymiarem kreskowym. Zanotować wynik pomiaru wraz z wartościami oszacowanych błędów granicznych.
- 3/ Zmierzyć długość przedmiotu suwmiarką. Oszacować błędy graniczne pomiaru. Zanotować wynik pomiaru.
- 4/ Zmierzyć długość przedmiotu mikrometrem. Oszacować błędy graniczne. Zanotować wynik pomiaru.
- 5/ Zmierzyć długość przedmiotu długościomierzem Abbego. W tym celu umieścić przedmiot na stoliku przyrządu i przycisnąć przycisk 8 /rys. 9.2/. Wynik odczytać na ekranie 11 i wskaźniku 10, tak jak pokazuje to rys. 9.2 b. Oszacować błędy graniczne i zanotować wynik. Wynik odczytywać po ustawieniu pokręćła 6.
- 6/ Obliczyć ilość informacji uzyskanej w pomiarach przymiarem kreskowym, suwmiarką, mikrometrem i długościomierzem Abbego.
- 7/ Zmierzyć częstotliwość sygnału otrzymanego z generatora

oscyloskopu za pomocą częstotliwościomierza PFL-23. Pomiarów dokonać przy następujących czasach pomiaru: 0,01 s; 0,1 s; 1 s; 10 s, ustalanych przyciskami 4 /rys. 9.3/. Oszacować błędy graniczne każdego z pomiarów. Można przyjąć, że błąd graniczny równy jest $\pm b$, przy czym b oznacza jednostkę na ostatnim miejscu pozycyjnym w wyniku pomiaru. Zanotować wyniki pomiarów.

- 8/ Obliczyć zgodnie z równaniem (9.6) wartości strumienia informacji uzyskanej podczas poszczególnych pomiarów w zadaniu 7. Przyjąć, że δx równe jest wartości wyznaczonej w p. 3.2.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu zamieścić wyniki pomiarów, obliczeń, spostrzeżenia i wnioski.

Ćwiczenie nr 10

Temat: Ocena błędów pomiarów bezpośrednich

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodyką wyznaczania i wprowadzania poprawek do wyników pomiarów oraz z wyznaczaniem prawdopodobieństwa wystąpienia błędów przypadkowych w pomiarach bezpośrednich.

2. Podstawy teoretyczne

W pomiarach bezpośrednich wartość wielkości mierzonej wyznaczana jest bezpośrednio jako wynik pomiaru, bez konieczności dokonywania dodatkowych obliczeń. Uzyskany w ten sposób wynik pomiaru obciążony jest błędem pomiaru wynikającym z niedoskonałości przyjętego sposobu pomiaru, niedoskonałości narzędzia pomiarowego, zmiany warunków w czasie trwania pomiaru

lub niedoskonałości zmysłów obserwatora. Najczęściej błąd pomiaru wyrażany jest w postaci błędu bezwzględnego tj. jako różnica między uzyskanym wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą wielkości mierzonej. Ilustruje to równanie (10.1):

$$\Delta = x - a , \quad (10.1)$$

gdzie: Δ - błąd pomiaru,
 x - wynik pomiaru,
 a - wartość rzeczywista wielkości mierzonej.

Aby wyznaczyć wartość błędu Δ należy znać zarówno wynik pomiaru x jak też wartość rzeczywistą wielkości mierzonej a . Wartość rzeczywista wielkości mierzonej a jest jednak na ogół nieznana. Dlatego też w celu wyznaczenia błędu Δ przyjmuje się, że a równe jest wartości poprawnej wielkości mierzonej. W wielu przypadkach można przyjąć, że błąd pomiaru Δ jest sumą systematycznego i przypadkowego błędów pomiarów, tak jak pokazuje to równanie (10.2):

$$\Delta = \Theta + \delta , \quad (10.2)$$

gdzie: Θ - systematyczny błąd pomiaru,
 δ - przypadkowy błąd pomiaru.

2.1. Błędy systematyczne

Błąd systematyczny można praktycznie wyeliminować wprowadzając do wyniku pomiaru poprawkę. Poprawka co do wartości bezwzględnej równa jest błędowi systematycznemu, różni się zaś od niego znakiem. Wartości poprawek mogą być obliczane z zależności teoretycznych lub wyznaczane doświadczalnie. Przykładem poprawki obliczanej teoretycznie jest poprawka korygująca błąd pomiaru długości powstały wskutek różnicy temperatury, w której dokonano pomiaru i temperatury odniesienia. Poprawkę tę można obliczyć, korzystając z równania (10.3):

$$p = - \alpha_l l \Delta t , \quad (10.3)$$

gdzie: p - wartość poprawki,

α_l - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału,
z którego wykonany jest przedmiot mierzony,

l - długość przedmiotu mierzonego,

Δt - różnica temperatury przedmiotu i temperatury odniesienia.

Przykładem poprawki wprowadzanej do wyniku pomiaru, wyznaczonej doświadczalnie, jest poprawka korygująca błędy pomiaru długości powstałe na skutek niewłaściwego wyregulowania narzędzia pomiarowego. Poprawkę tę, można wyznaczyć dokonując pomiaru wzorca o znanej długości. Wartość poprawki równa jest w tym przypadku różnicy między znaną wartością wymiaru wzorca i wynikiem pomiaru jego długości. Ilustruje to równanie (10.4):

$$p = w - b \quad ; \quad (10.4)$$

gdzie: p - wartość poprawki,

w - wartość wymiaru wzorca,

b - wartość wyniku pomiaru uzyskanego przy pomiarze wzorca.

W szczególnym przypadku wartość wymiaru wzorca może być równa zero. Wtedy zgodnie z równaniem (10.4) wartość poprawki równa jest:

$$p = -b \quad . \quad (10.5)$$

2.2. Błędy przypadkowe

Błędy przypadkowe, w odróżnieniu od błędów systematycznych, zmieniają się w sposób nieprzewidywalny zarówno co do wartości bezwzględnej, jak i co do znaku. Dlatego też nie można go wyeliminować z wyniku pomiaru. Można jedynie oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia tego błędu w pewnym zakresie wartości.

Z centralnego twierdzenia granicznego, które szerzej omówione w pracach [8, 10], oraz z badań doświadczalnych wynika, że czyste błędy przypadkowe, oraz wyniki pomiarów obciążone takimi błędami, można traktować jako zjawiska losowe podlegające

rozkładowi normalnemu o gęstości prawdopodobieństwa danej równaniem (10.6).

Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu, określona dla wymiaru x , dana jest równaniem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - E_x}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (10.6)$$

gdzie: $f(x)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyników pomiarów obarczonych błędami przypadkowymi,

E_x - wartość oczekiwana wyników pomiarów; jeżeli wyniki nie są obciążone błędami systematycznymi to $E_x = a$,

σ - odchylenie standardowe wyników pomiarów.

Po wprowadzeniu do równania (10.6) zmiennej standardyzowanej

$$u = \frac{x - E_x}{\sigma} \quad ; \quad (10.7)$$

otrzymuje się, dla $\sigma = 1$, gęstość prawdopodobieństwa zmiennej standaryzowanej:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} u^2 \right) \quad (10.8)$$

Wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(u)$ oraz dystrybuanty $F(u)$ podano w tablicach 10.1 i 10.2.

Na podstawie tablicy wartości dystrybuanty zmiennej standaryzowanej można określić prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru będzie zawarty w granicach od wartości x_1 do wartości x_2 . Prawdopodobieństwo to dane jest równaniem:

$$P(x_1 \leq x < x_2) = F(u_2) - F(u_1) \quad , \quad (10.9)$$

gdzie:

$$u_1 = \frac{x_1 - E_x}{\sigma} \quad , \quad u_2 = \frac{x_2 - E_x}{\sigma} \quad , \quad \text{zas}$$

$F(u)$ - wartość dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

Tablica 10.1. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego standaryzowanego

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right), \quad f(-u) = f(u)$$

u	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,3989	0,3989	0,3986	0,3982	0,3977
1	3970	3961	3951	3939	3925
2	3910	3894	3876	3857	3836
3	3814	3790	3765	3739	3712
4	3683	3653	3621	3589	3555
5	3521	3485	3448	3410	3372
6	3338	3292	3251	3209	3166
7	3123	3079	3034	2989	2943
8	2897	2850	2803	2756	2709
9	2661	2613	2565	2516	2468
1,0	2420	2371	2323	2275	2227
1	2179	2131	2083	2036	1989
2	1942	1894	1847	1804	1758
3	1714	1667	1620	1582	1539
4	1497	1450	1415	1374	1334
5	1298	1257	1219	1182	1145
6	1109	1074	1040	1006	0973
7	0940	0909	0878	0848	0818
8	0784	0754	0734	0707	0681
9	0641	0614	0608	0584	0562
1,0	0510	0515	0496	0476	0459
1	0440	0422	0404	0387	0371
2	0355	0339	0325	0310	0296
3	0285	0270	0258	0246	0235
4	0224	0213	0203	0194	0184
5	0171	0167	0159	0151	0143
6	0131	0129	0122	0116	0110
7	0107	0099	0093	0088	0084
8	0078	0075	0071	0067	0063
9	0064	0056	0053	0050	0047
1,0	0044	0042	0039	0037	0035

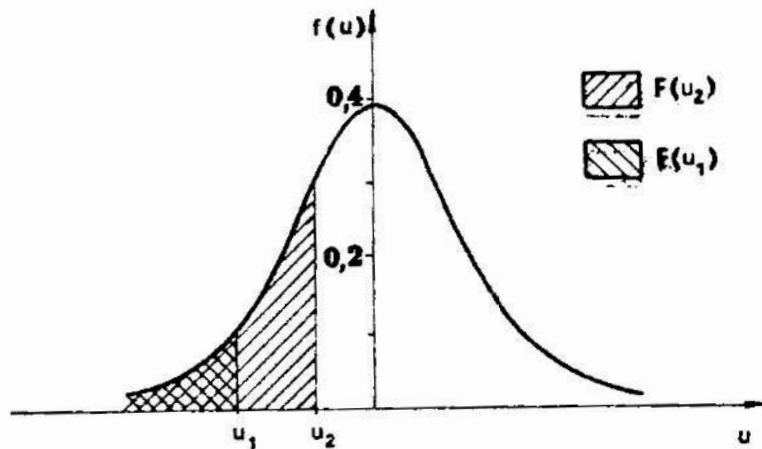
Tablica 10.2. Dystrybuanta rozkładu normalnego standaryzowanego

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du, \quad F(-u) = 1 - F(u)$$

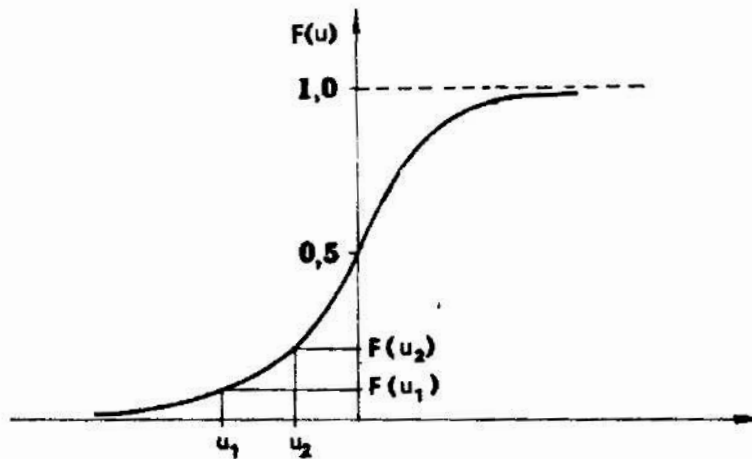
u	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,5000	0,5080	0,5160	0,5239	0,5319
1	5398	5478	5557	5636	5714
2	5793	5871	5948	6026	6103
3	6179	6255	6331	6406	6480
4	6554	6628	6700	6772	6844
5	6915	6985	7054	7123	7190
6	7257	7324	7389	7454	7517
7	7580	7642	7704	7764	7823
8	7881	7939	7995	8051	8106
9	8159	8212	8264	8315	8365
1,0	8413	8461	8508	8554	8599
1	8643	8686	8729	8770	8810
2	8849	8888	8925	8962	8997
3	9032	9066	9099	9131	9162
4	9192	9222	9251	9279	9306
5	9332	9357	9382	9406	9429
6	9452	9474	9495	9515	9533
7	9554	9573	9591	9608	9625
8	9641	9656	9671	9689	9697
9	9713	9726	9738	9750	9759
2,0	9772	9783	9793	9803	9812
1	9821	9830	9838	9846	9854
2	9861	9868	9875	9881	9887
3	9893	9898	9904	9909	9913
4	9918	9922	9927	9931	9935
5	9938	9941	9945	9948	9951
6	9953	9956	9959	9961	9963
7	9965	9967	9969	9971	9973
8	9974	9976	9977	9979	9980
9	9981	9982	9984	9985	9986
3,0	9987	9987	9988	9989	9990

Równanie (10.9) określa prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku pomiaru x w granicach od x_1 do x_2 przy pojedynczych pomiarach wielkości mierzonej. Ilustruje to rys. 10.1.

a)



b)



rys. 10.1. Wykresy funkcji rozkładu normalnego standaryzowanego; funkcja gęstości prawdopodobieństwa (a), dystrybuanta (b)

Jeżeli dokonuje się serii pomiarów wielkości mierzonej, to jako końcowy wynik pomiaru przyjmuje się na ogół wartość średniej arytmetycznej z wyników uzyskanych w poszczególnych pomiarach. Istotne jest w takim przypadku określenie przedziału wartości, w którym z dużym prawdopodobieństwem zawiera się wartość rzeczywista tej wielkości mierzonej. Przedział ten nazywany przedziałem ufności nie jest określony jednoznacznie. Najczęściej przyjmuje się, że jego środkiem jest wartość średniej arytmetycznej, a jego szerokość zależy od przyjętej wartości prawdopodobieństwa α . Prawdopodobieństwo tego, że wartość rzeczywista znajdzie się w przedziale ufności α wynosi $1 - \alpha$.

poziomem ufności.

W przypadku, gdy znana jest wartość odchylenia standardowego wyników pomiarów i słuszna jest hipoteza o normalnym rozkładzie błędów pomiarów można, przyjmując określony przedział ufności, oszacować prawdopodobieństwo tego, że wartość rzeczywista wielkości mierzonej znajduje się w tym przedziale. W tym celu należy skorzystać z równania:

$$P\left(\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2F(u_p) - 1, \quad (10.10)$$

gdzie: n - ilość pomiarów w serii,

\bar{x} - średnia arytmetyczna wyników pomiarów, zaś:

$$u_p = -u_1 = u_2. \quad (10.11)$$

Przedział ufności określony jest w postaci:

$$\left(\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \quad (10.12)$$

Oznacza to, że w przedziale tym z prawdopodobieństwem równym $2F(u_p) - 1$ znajduje się wartość rzeczywista wielkości mierzonej. Jak wynika z równania (10.10) wzrostowi szerokości przedziału ufności towarzyszy wzrost prawdopodobieństwa określonego jako poziom ufności. Jeżeli nie jest znana wartość odchylenia standardowego błędów pomiarów, a przeprowadzona seria pomiarów jest dostatecznie liczna ($n > 30$), to oszacowanie przedziału ufności dla wartości rzeczywistej wielkości mierzonej może być dokonane wystarczająco dokładnie w oparciu o równanie (10.10). W równaniu tym odchylenie standardowe zastępuje się w tym wypadku jego estymatorem. Spełnione musi być również założenie o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa błędów pomiarów.

Jeżeli ilość pomiarów w serii jest stosunkowo nieliczna, to korzystanie z równania (10.10) nie jest wskazane z uwagi na to, że granice przedziału (10.12) będą w znacznym stopniu zależne od ilości wyników pomiarów wykorzystanych do wyznaczenia wartości średniej arytmetycznej i estymatora odchylenia standardowego. W tym przypadku statystyka:

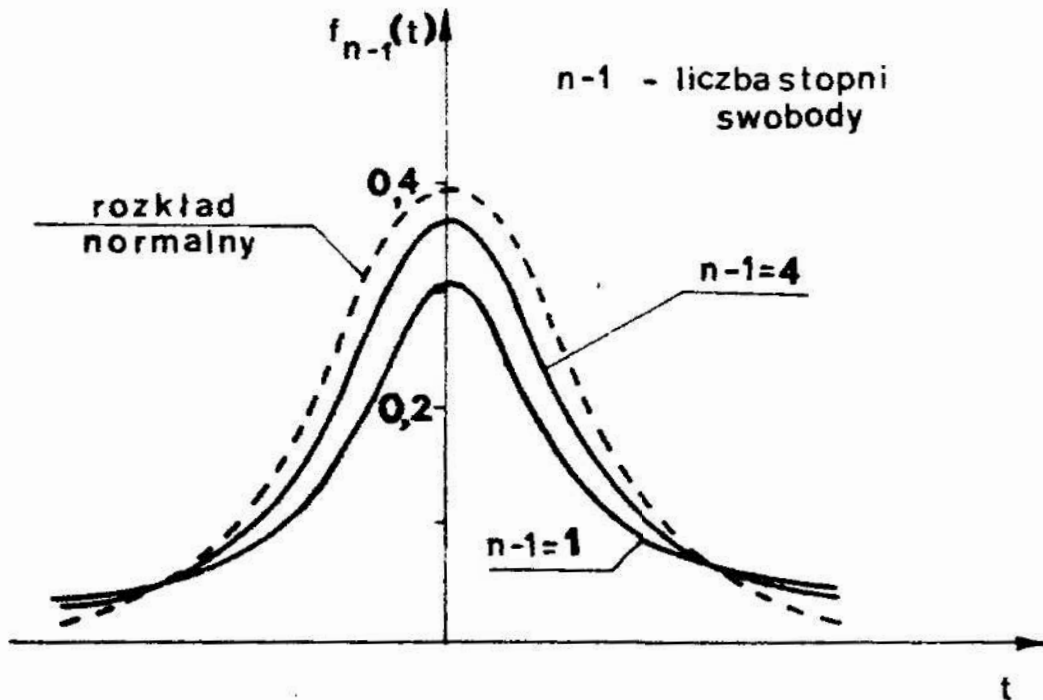
$$t = \frac{\bar{x} - E\bar{x}}{s} \sqrt{n} \quad , \quad (10.13)$$

gdzie:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad , \quad \text{zaś}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad ,$$

obliczona na podstawie wyników pomiarów x_1, x_2, \dots, x_n , ma rozkład t-Studenta z $n-1$ stopniami swobody. Na rys. 10.2 pokazano wykres gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej.



Rys. 10.2. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie t-Studenta, dla różnej ilości stopni swobody

W tabelicy 10.3 podano wartości t_{α} , dla których nierówności:

$$-t_{\alpha} < t < t_{\alpha} \quad , \quad (10.14)$$

są spełnione z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$, określanym jako poziom ufności.

Tablica 10.3. Rozkład t-Studenta

Tablica podaje wartości t_{α} w funkcji ilości stopni swobody $n-1$ i prawdopodobieństwa α

$$P(-t_{\alpha} < t < t_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

Ilość stopni swobody $n - 1$	α						
	0,60	0,40	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,993	3,499
8	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,600	2,947
16	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,877
19	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,858
20	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,841
21	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,824
22	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,810
23	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,797
24	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,787
25	0,531	0,856	1,316	1,708	2,059	2,485	2,777
30	0,530	0,854	1,310	1,697	2,041	2,457	2,729
40	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,527	0,848	1,296	1,676	1,971	2,388	2,660
120	0,526	0,845	1,289	1,658	1,919	2,358	2,617
∞	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Prawdopodobieństwo niespełnienia nierówności (10.14) wynosi α i nazywane jest poziomem istotności.

Przy nielicznej serii pomiarów, których wyniki podlegają rozkładowi normalnemu słuszne jest zatem równanie:

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha, \quad (10.15)$$

Wartość parametru t_{α} może być wyznaczona z tablicy 10.3 dla określonego poziomu ufności i danej liczby stopni swobody $n - 1$.

Wyniki pomiarów można zatem zapisać następująco:

- w przypadku, gdy ilość pomiarów w serii przekracza 30

$$\bar{x} \pm u_p \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ z prawdopodobieństwem } 2F(u_p) - 1,$$

- w przypadku, gdy ilość pomiarów w serii nie przekracza 30

$$\bar{x} \pm t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ z prawdopodobieństwem } 1 - \alpha.$$

Próbując dokonać zapisu wyniku pomiaru można, w obu przypadkach, najpierw przyjąć prawdopodobieństwo określające poziom ufności, a następnie wyznaczyć wartości graniczne przedziału ufności. Można też postąpić odwrotnie, najpierw przyjąć wartości określające granice przedziału ufności, a następnie wyznaczyć odpowiadający im poziom ufności.

3. Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu należy dokonać pomiaru długości przedmiotu, za pomocą mikrometru i za pomocą długościomierza Abbego. Dla obu serii otrzymanych wyników należy obliczyć wartości średniej arytmetycznej oraz estymatory odchylenia standardowego. Jako wynik pomiaru każdym z przyrządów, przyjąć wartość średniej arytmetycznej z uwzględnieniem poprawek wyznaczonych zgodnie z p. 3.1.

Na podstawie obliczonych wartości średniej arytmetycznej i estymatora odchylenia standardowego trzeba wyznaczyć dla pomiarów wykonanych mikrometrem prawdopodobieństwo wystąpienia błędu przypadkowego w zakresie $\pm s$, $\pm 2s$ i $\pm 3s$.

Dla pomiarów wykonanych mikrometrem oraz za pomocą długościomierza Abbego należy obliczyć wartości graniczne przedziału ufności dla następujących wartości poziomu istotności α : 0,1; 0,05; 0,01.

3.1. Przygotowanie do pomiaru

Przygotowanie do pomiaru polega na:

- wyznaczeniu temperatury przedmiotu mierzonego,
- wyznaczeniu wskazania przyrządu przy pomiarze wzorca.

3.1.1. Przygotowanie do pomiaru mikrometrem

- 1/ Za pomocą termometru stykowego zmierzyć temperaturę przedmiotu mierzonego. W tym celu zetknąć należy końcówkę termometru stykowego z przedmiotem mierzonym i po odczekaniu ok. 5 minut odczytać wskazanie termometru.
- 2/ Zmierzyć długość wzorca za pomocą mikrometru i zanotować wynik pomiaru.
- 3/ Obliczyć różnicę algebraiczną między nominalną długością wzorca i wynikiem uzyskanym przy jego pomiarze. Obliczona wartość stanowi poprawkę, którą trzeba dodać do wyniku pomiaru.
- 4/ Obliczyć różnicę algebraiczną między temperaturą odniesienia /20°C/ i temperaturę przedmiotu mierzonego. Obliczoną wartość należy pomnożyć przez wartość współczynnika rozszerzalności liniowej /dla stali $\alpha_L = 11,5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ /, oraz przez różnicę długości przedmiotu i wzorca. Otrzymana wartość jest poprawką, którą należy dodać do wyniku pomiaru.

3.1.2. Przygotowanie do pomiaru długościomierzem Abbego typu P 0,1

W celu przygotowania do pomiaru długościomierzem Abbego należy:

- 1/ Przemyć benzyną i przetrzeć ściereczką stolik i końcówkę pomiarową długościomierza. W tym celu należy powierzchnie pomiarowe końcówki 4 /rys. 9.2., ćwic. 9/ i stołika 3 zwilżyć lekko benzyną i przetrzeć ściereczką, tak aby usu-

- nać ślady tłuszczu.
- 2/ Włączyć przyrząd do sieci włącznikiem 1 i odczekać ok. 1 minuty.
 - 3/ Wyzerować przyrząd wykonując następujące czynności:
 - a/ włączyć przycisk 8 i doprowadzić do zetknięcia się końcówki pomiarowej 4 z powierzchnią stolika 3;
 - b/ w razie potrzeby odblokować zacisk 5 i pokrętłem 2 obracać, aż do ukazania się z lewej strony ekranu 11 wskazania 0,0; zablokować zacisk 5;
 - c/ obracając pokrętłem 6 doprowadzić do uzyskania na ekranie 11 wskazania 0,000;
 - d/ pokrętłem 12 ustawić zerową kreskę podziałki widocznej z lewej strony ekranu 11 dokładnie symetrycznie między dwoma nieruchomymi kreskami. Wskaźnik 10 wskaże wartość 0;
 - e/ wcisnąć na chwilę przycisk 7 i unieść trzpień pomiarowy wraz z końcówką 4 ku górze;
 - f/ wcisnąć przycisk 8 i poczekać aż końcówka pomiarowa 4 zetknie się z powierzchnią stolika 3;
 - g/ sprawdzić czy na ekranie 11 i wskaźniku 10 są wskazania zerowe; jeżeli tak nie jest to należy powtórzyć czynności zerowania od punktu a do g;
 - 4/ Wcisnąć na chwilę przycisk 7 i unieść trzpień pomiarowy wraz z końcówką 4 ku górze.
 - 5/ Zmierzyć termometrem stykowym temperaturę przedmiotu mierzonego.
 - 6/ Obliczyć różnicę między temperaturą odniesienia /20°C/ a temperaturą przedmiotu mierzonego i obliczyć poprawkę, analogicznie jak w p. 3.1.1.

4. Zadania

- 1/ Zmierzyć 41 razy długość wskazanego przedmiotu mikrometrem.
- 2/ Obliczyć wartości średniej arytmetycznej \bar{x} i estymatora odchylenia standardowego s z wyników pomiarów.
- 3/ Do wartości średniej arytmetycznej dodać obliczone wcześniej zgodnie z p. 3.1.1. poprawki; $\bar{x}_p = \bar{x} + \sum p$.
- 4/ Korzystając z tablicy dystrybucyj standardyzowanego rozkładu normalnego wyznaczyć wartości prawdopodobieństw określa-

jących możliwość wystąpienia wartości rzeczywistej wielkości mierzonej w następujących zakresach: $\pm s$, $\pm 2s$; $\pm 3s$, w stosunku do wartości obliczonej w zadaniu 3. W tym celu należy posłużyć się tablicą 10.2 i równaniem (10.10).

- 5/ W oparciu o równanie (10.15) i tablicę 10.3 rozkładu t-Studenta wyznaczyć granice przedziału ufności, między którymi zawarta jest wartość rzeczywista wielkości mierzonej, dla następujących wartości poziomu istotności: $\alpha = 0,1$;
 $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$.

- 6/ Na podstawie obliczeń wykonanych w zad. 3, 4, 5 zanotować wynik pomiaru długości przedmiotu w postaci:

$$\bar{x}_p \pm \Delta_{gr}, \quad P_g = P(\bar{x}_p - \Delta_{gr} < a < \bar{x}_p + \Delta_{gr}),$$

gdzie $\pm \Delta_{gr}$ określa wartości graniczne przedziału ufności, zaś P_g jest prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,99.

- 7/ Zmierzyć 10 razy długość wskazanego przedmiotu długościomierzem Abbego typu P 0,1. Odczytu dokonać po odpowiednim ustawieniu pokrętła 6 /rys. 9.2/.
- 8/ Obliczyć wartości średniej arytmetycznej \bar{x} i estymatora odchylenia standardowego s z wyników pomiarów uzyskanych w zad.7.
- 9/ Do wartości średniej arytmetycznej dodać obliczoną wcześniej, zgodnie z p. 3.1.2, poprawkę.
- 10/ Sprawdzić wskazanie zerowe przyrządu i w razie potrzeby wprowadzić do wyniku pomiaru poprawkę spowodowaną zmianą wskazania zerowego.
- 11/ Obliczyć granice przedziału ufności, między którymi zawarta jest wartość rzeczywista wielkości mierzonej długościomierzem Abbego, dla następujących wartości poziomu istotności: $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$. W tym celu należy postępować podobnie jak w zadaniu 5.
- 12/ Zanotować wynik zgodnie z wymaganiami podanymi w zad. 6.
- 13/ Porównać wynik pomiarów długości mikrometrem, zapisany w zad. 6, z wynikiem pomiarów długościomierzem Abbego zanotowanym w zad. 12. Porównać wartości graniczne przedziałów ufności obliczone w zadaniach 5 i 11 dla tych samych poziomów istotności α .

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki dokonanych pomiarów, zanotować wyniki przeprowadzonych obliczeń oraz sformułować wnioski dotyczące dokładności przeprowadzonych pomiarów.

Ćwiczenie nr 11

Temat: Ocena błędów pomiarów pośrednich

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie studentów z metodyką oceny błędów pomiarów pośrednich.

2. Podstawy teoretyczne

W pomiarze pośrednim wartość wielkości mierzonej wyznacza się dokonując odpowiednich obliczeń na wartościach innych wielkości, które zostały zmierzone bezpośrednio. Przykładem takiego pomiaru może być pomiar gęstości ciała na podstawie pomiarów jego masy i objętości.

Wartość wielkości mierzonej określona jest w pomiarach pośrednich równaniem:

$$x = f(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (11.1)$$

gdzie: x - wartość wielkości mierzonej,

a_1, a_2, \dots, a_n - wartości wielkości na podstawie, których wyznacza się wartość wielkości mierzonej.

Jeżeli przy pomiarach wartości a_1, a_2, \dots, a_n zostały popełnione błędy $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n$, to wartość x wyznaczona z równania (11.1) będzie obciążona błędem Δx . Ilustruje to równanie (11.2):

$$x + \Delta x = f(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_n + \Delta a_n). \quad (11.2)$$

Aby wyznaczyć związek między błędem Δx i błędami cząstkowymi $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n$, można, tak jak to pokazano w pracy [14], rozłożyć funkcję daną równaniem (11.2) w szereg Taylora. Ograniczając się jedynie do składników tego szeregu zawierających błędy cząstkowe w pierwszej potęgze uzyskuje się przybliżoną zależność:

$$\Delta x \approx \frac{\partial f}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} \Delta a_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \Delta a_n, \quad (11.3)$$

gdzie: $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ - pochodne cząstkowe funkcji f po poszczególnych zmiennych.

Z uwagi na to, że wartości błędów cząstkowych mogą być inne w kolejnych pomiarach, w praktyce wygodniej jest operować granicznymi wartościami błędów cząstkowych. W takim przypadku równanie (11.3) przyjmie postać:

$$\Delta x_{\varepsilon} \approx \pm \left(\left| \frac{\partial f}{\partial a_1} \Delta a_{1\varepsilon} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial a_2} \Delta a_{2\varepsilon} \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial a_n} \Delta a_{n\varepsilon} \right| \right), \quad (11.4)$$

gdzie: Δx_{ε} - graniczne wartości błędu Δx ,
 $\Delta a_{1\varepsilon}, \Delta a_{2\varepsilon}, \dots, \Delta a_{n\varepsilon}$ - graniczne wartości błędów cząstkowych.

Błędy cząstkowe charakteryzują się tym, że mogą przyjmować wartości w zakresie między dwiema wartościami granicznymi. Na ogół obie granice błędu cząstkowego są równe co do wartości bezwzględnej. Jeżeli tak nie jest to w równaniu (11.4) jako wartość graniczną błędu cząstkowego trzeba przyjąć tę, której moduł jest większy. W tym przypadku wartości Δx_{ε} obliczone zgodnie z równaniem (11.4) będą prawdziwymi rzeczywistymi wartościami granicznymi błędu Δx .

W przypadku, gdy należy ustalić związek odchylenia standardowego błędu pomiaru wartości wielkości mierzonej z odchyleniami standardowymi błędów cząstkowych można skorzystać z równania:

$$\sigma_x \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right)^2}, \quad (11.5)$$

gdzie: σ_x - odchylenie standardowe błędu pomiaru wartości x ,
 σ_{a_i} - odchylenie standardowe błędów cząstkowych.

Równanie (11.5) pozwala wyznaczyć odchylenie standardowe błędów pomiarów wielkości mierzonej pośrednio.

Podstawowe równania wykorzystywane do obliczania wartości błędów bezwzględnych i błędów względnych wielkości mierzonych pośrednio zestawiono w tabelicy 11.1. Podobne równania można wyprowadzić korzystając z przybliżonej równości (11.3) dla innych postaci funkcji występujących w pomiarach pośrednich.

3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy zmierzyć gęstość wskazanego przedmiotu oraz wyznaczyć wartości błędów granicznych pomiaru gęstości. Pomiar dokonywany jest metodą pośrednią. Za pomocą wagi wyznaczana jest masa przedmiotu zaś objętość obliczana jest na podstawie pomiarów jego wymiarów. Gęstość wyznaczana jest jako stosunek masy i objętości przedmiotu.

Błędy graniczne pomiaru gęstości należy wyznaczyć na podstawie granicznych wartości błędów pomiaru masy i błędów wymiarów liniowych. Można przyjąć, że wartości graniczne błędów cząstkowych dane są równaniem:

$$\Delta a_{ig} = \pm 3s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.6)$$

gdzie: s_i - estymator odchylenia standardowego wyników pomiarów wartości a_i ,

Δa_{ig} - graniczne błędy pomiarów wartości a_i .

Ponadto w czasie ćwiczenia należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia błędów w określonym przedziale wartości zakładając, że błąd pomiaru podlega normalnemu rozkładowi prawdopodobieństwa.

Tablica 11.1. Podstawowe równania wykorzystywane do obliczania błędów pomiarów wielkości mierzonych pośrednio

Lp	Postać funkcji	Błąd bezwzględny Δx	Błąd względny $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$
1	$x = ca$ c - stała	$\Delta x = c \Delta a$	$\epsilon_x = \frac{\Delta a}{a} = \epsilon_a$
2	$x = a_1 + a_2$	$\Delta x = \Delta a_1 + \Delta a_2$	$\epsilon_x = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{a_1 + a_2}$
3	$x = a_1 - a_2$	$\Delta x = \Delta a_1 - \Delta a_2$	$\epsilon_x = \frac{\Delta a_1 - \Delta a_2}{a_1 - a_2}$
4	$x = a_1 a_2$	$\Delta x = a_2 \Delta a_1 + a_1 \Delta a_2$	$\epsilon_x = \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2} = \epsilon_{a_1} + \epsilon_{a_2}$
5	$x = \frac{a_1}{a_2}$	$\Delta x = \frac{\Delta a_1}{a_2} - \frac{a_1 \Delta a_2}{a_2^2}$	$\epsilon_x = \frac{\Delta a_1}{a_1} - \frac{\Delta a_2}{a_2} = \epsilon_{a_1} - \epsilon_{a_2}$
6	$x = a^c$ c - stała	$\Delta x = c a^{c-1} \Delta a$	$\epsilon_x = c \frac{\Delta a}{a} = c \epsilon_a$
7	$x = c^a$ c - stała; $c > 0$	$\Delta x = c^a \Delta a \ln a$	$\epsilon_x = \Delta a \ln a = a \epsilon_a \ln a$
8	$x = \log_c a $ c - stała; $c > 0$	$\Delta x = \frac{\Delta a}{a \ln c}$	$\epsilon_x = \frac{\epsilon_a}{(\ln c)(\log_c a)}$

4. Zadania

- 1/ Dokonać pomiarów masy wskazanego przedmiotu za pomocą wagi laboratoryjnej. Pomiarów dokonać pięciokrotnie notując wynik każdego pomiaru.
- 2/ Obliczyć wartość średnią arytmetyczną i wartość estymatora odchylenia standardowego wyników pomiarów uzyskanych w zadaniu 1. Oszacować błędy graniczne pomiaru masy dokonanego w zadaniu 1.
- 3/ Dokonać pomiarów wymiarów liniowych przedmiotu za pomocą mikrometru. Pomiarów należy dokonać pięciokrotnie dla każdego wymiaru notując wyniki poszczególnych pomiarów.
- 4/ Obliczyć wartości średnich arytmetycznych i estymatorów odchylenia standardowych wymiarów mierzonych w zadaniu 3. Oszacować błędy graniczne pomiarów wymiarów liniowych dokonanych w zadaniu 3.
- 5/ Zapisać równanie wyrażające zależność gęstości przedmiotu od jego masy i wymiarów liniowych. Zapisać równanie wyrażające zależność błędu granicznego pomiaru gęstości od granicznych błędów pomiaru masy i granicznych błędów pomiaru wymiarów liniowych przedmiotu /patrz równanie (11.4) w p.2/. Zapisać równanie wyrażające zależność odchylenia standardowego błędu pomiaru gęstości od odchylenia standardowych błędów pomiarów masy i wymiarów liniowych /patrz równanie (11.5) w p.2/.
- 6/ Korzystając z wartości średnich arytmetycznych wyników pomiarów masy i wymiarów liniowych wyznaczyć średnią wartość gęstości przedmiotu.
- 7/ Korzystając z oszacowanych w zadaniach 2 i 4 wartości błędów granicznych pomiarów masy i wymiarów liniowych obliczyć, zgodnie z przybliżonym równaniem (11.4), błędy graniczne pomiaru gęstości przedmiotu.
- 8/ Korzystając z oszacowanych w zadaniach 2 i 4 wartości błędów granicznych pomiarów masy i wymiarów liniowych wyznaczyć:
 - graniczne wartości masy przedmiotu,
 - graniczne wartości objętości przedmiotu.
 Następnie dzieląc maksymalną masę przedmiotu przez mini-

malną objętość oraz minimalną masę przez maksymalną objętość przedmiotu, wyznaczyć wartości graniczne gęstości przedmiotu. Obliczyć różnicę wyznaczonych wartości granicznych gęstości przedmiotu i porównać ją z wartością błędu granicznego otrzymanego w sposób przybliżony w zadaniu 7.

- 9/ Korzystając z obliczonych w zad. 2 i 4 estymatorów odchylenia standardowych błędów cząstkowych obliczyć estymator odchylenia standardowego błędów pomiaru gęstości.
- 10/ Zakładając, że rozkład błędów pomiaru gęstości jest rozkładem normalnym i korzystając z dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego /tabl. 10.2 w ćwiczeniu 10/ wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia błędu pomiaru gęstości przedmiotu w granicach $\pm \frac{\Delta \bar{\rho}}{2}$. Symbol $\pm \Delta \bar{\rho}$ oznacza wartości graniczne błędu gęstości obliczone w zadaniu 7.
- 11/ Wyprowadzić równania podane w rubrykach 4, 5 i 6 tabeli 11.1 lub inne równania wskazane przez prowadzącego ćwiczenia.
- 12/ Korzystając z tabeli 11.1 przeprowadzić dyskusję błędów pomiaru gęstości dwóch ciał o jednakowych masach. Pierwsze ciało jest kulą, a drugie sześciianem. Objętość pierwszego ciała jest o połowę mniejsza od objętości drugiego ciała.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki pomiarów, przeprowadzone obliczenia oraz niezbędne szkice i wnioski.

Ćwiczenie nr 12

Temat: Apryksymacja wyników pomiarów metodą najmniejszych kwadratów

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie studentów z

metodyką aproksymacji wyników pomiarów metodą najmniejszych kwadratów.

2. Podstawy teoretyczne

Z problemem aproksymacji wyników pomiarów spotykamy się wtedy, gdy zależność między wielkościami X i Y wyznaczona w procesie pomiaru, jest statystycznie zniekształcona i gdy chcemy ją, zależność przybliżyć prostą funkcją. Ta ostatnia zależność między wielkościami X i Y otrzymana w wyniku pomiaru ma postać wykresu lub tabeli, w której przyporządkowano wzajemnie pary wartości x i y .

Niech zależność między wielkościami X i Y , otrzymana w rezultacie pomiaru, będzie zależnością funkcyjną daną równaniem:

$$y = f(x), \quad (12.1)$$

przy czym symbolami x i y oznaczone wartości odpowiednio X i Y wielkości.

Aproksymacja oznaczać będzie postępowanie zmierzające do zastąpienia tej zależności inną, na ogół prostszą funkcją daną równaniem:

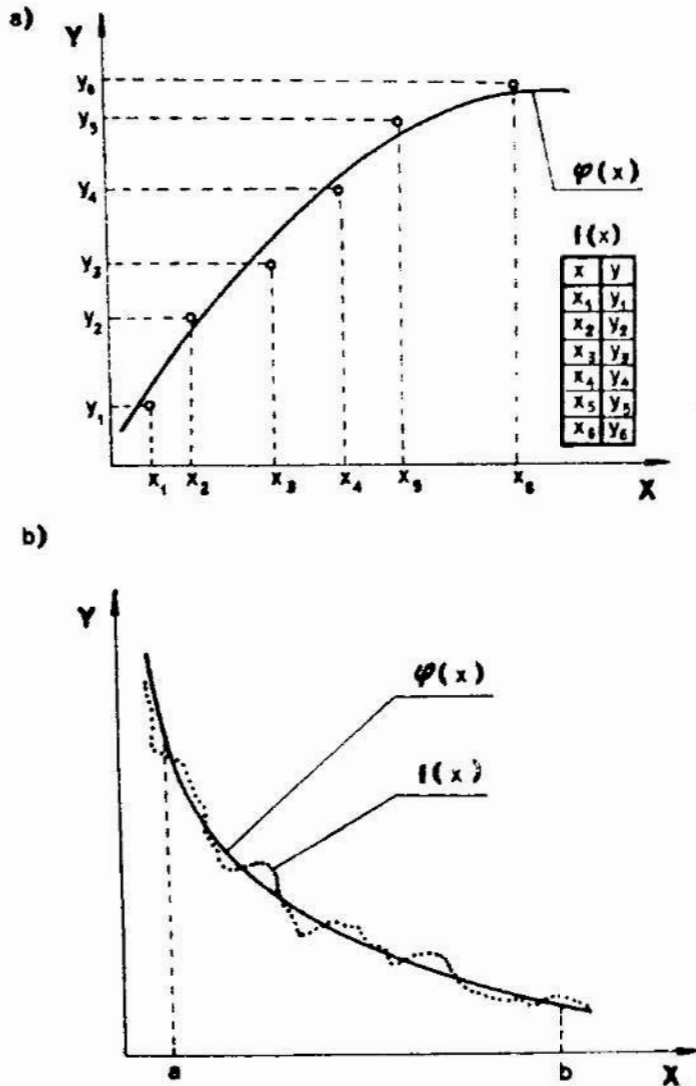
$$y = \psi(x). \quad (12.2)$$

Funkcja $f(x)$ nazywa się funkcją aproksymowaną, a funkcja $\psi(x)$ funkcją aproksymującą. Procedura aproksymacji ma sens tylko wówczas, gdy funkcja aproksymująca $\psi(x)$ jest prostszą funkcją z jakichś względów w porównaniu z funkcją $f(x)$. Na ogół funkcja $\psi(x)$ jest prostszą funkcją niż funkcja aproksymowana, co umożliwia jej praktyczne wykorzystanie.

Aproksymacja dokonuje się w pewnym przedziale wartości argumentu x . Funkcja aproksymowana może być określona we wszystkich punktach tego przedziału lub tylko w niektórych. Jeżeli funkcja (12.1) określona jest jedynie dla niektórych wartości argumentu x , to podaje się ją na ogół w postaci tabeli przyporządkowującej wzajemnie określone pary wartości x i y lub w postaci punktów na wykresie. Na rys. 12.1 pokazano wykresy

funkcji aproksymującej.

W szczególnym przypadku funkcja (12.1) może być jedną z realizacji funkcji losowej.



Rys. 12.1. Wykresy funkcji aproksymujących wyniki pomiarów: aproksymacja funkcji określonej w wybranych punktach (a), aproksymacja funkcji ciągłej (b)

Aproksymacja może być stosowana także dla funkcji wielu zmiennych.

2.1. Postać funkcji aproksymującej

Wybór postaci funkcji aproksymującej uzależniony jest od celu, dla którego przeprowadza się aproksymację. Postać ta może wynikać z przesłanek teoretycznych lub z doświadczeń praktycznych.

czas eksperymentu przebiegu funkcji aproksymowanej.

Na ogół jako funkcji aproksymujących używa się wielomianów, funkcji wykładniczych, trygonometrycznych itp. Pewne wskazówki co do wyboru postaci funkcji aproksymującej może dać tzw. metoda wyrównywania opisana w pracy [2].

Po dokonaniu wyboru postaci funkcji aproksymującej np.:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k, \quad (12.3)$$

dalsze postępowanie polega na wyznaczeniu wartości współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$.

2.2. Kryterium aproksymacji

W aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów dąży się do zastąpienia funkcji aproksymowanej $f(x)$ taką funkcją aproksymującą $\varphi(x)$ o danej postaci, aby w przypadku gdy funkcja jest określona we wszystkich punktach rozpatrywanego przedziału argumentu $x \in \langle a, b \rangle$, wartość E uzyskana zgodnie z równaniem:

$$E = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx, \quad (12.4)$$

była najmniejsza.

Jeżeli funkcja aproksymowana jest określona tylko dla wybranych wartości x_i argumentu x , to poszukuje się takiej funkcji $\varphi(x)$, dla której suma:

$$S = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2, \quad (12.5)$$

osiąga minimum.

2.3. Wyznaczanie wartości współczynników funkcji aproksymującej

Wyznaczanie wartości współczynników funkcji aproksymującej

cej danej np. równanie (12.3) polega na rozwiązaniu układu równań, który:

- dla funkcji określonej we wszystkich punktach przedziału $\langle a, b \rangle$ ma postać:

$$\frac{\partial H}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial H}{\partial a_k} = 0 \quad (12.6)$$

- dla funkcji określonej w poszczególnych punktach ma postać:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad (12.7)$$

Jeżeli postać funkcji aproksymującej $\Psi(x)$ będzie zła, to może okazać się, że układy równań (11.6) i (11.7) nie mogą być rozwiązane metodami analitycznymi. W tym przypadku należy korzystać z metod numerycznych.

3. Przebieg ćwiczenia

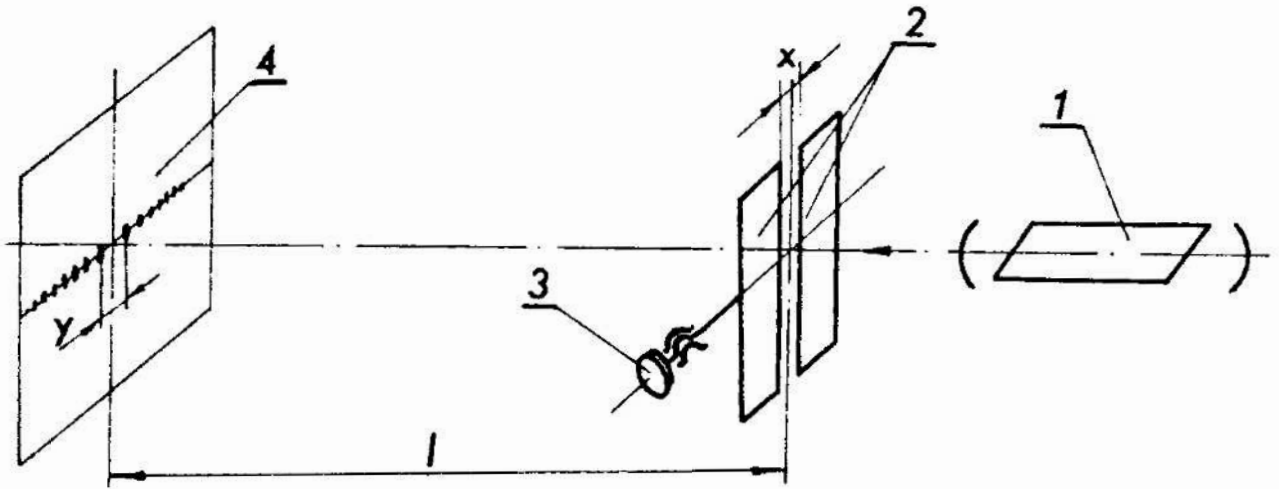
W ćwiczeniu stosując aproksymację metodą najmniejszych kwadratów, należy wyznaczyć zależność między odległością prędków w obrazie dyfrakcyjnym Fraunhofera, a wymiarem obiektu uginającego światło.

Schemat układu do wyznaczania tej zależności pokazano na rys. 12.2. Światło z lasera 1 przechodzi przez szczelinę o szerokości x w przysłonie 2, ulegając ugięciu i tworząc obraz dyfrakcyjny na ekranie 4. Odległość y między dwoma minimum pierwszego rzędu w obrazie dyfrakcyjnym zależy od szerokości szczeliny x i może być zmierzona np. za pomocą przyrządu kreślakowego. Można wykazać, że zgodnie z teorią dyfrakcji zależność między szerokością szczeliny x i odległością y wyraża równanie:

$$y = \frac{2 \lambda l}{x} \quad (12.8)$$

gdzie: λ - długość fali światła,

l - odległość ekranu od szczeliny.



Rys. 12.2. Schemat układu do obserwacji zjawiska dyfrakcji światła spójnego; 1 - laser, 2 - przysłona, 3 - śruba mikrometryczna, 4 - ekran.

Powyższą zależność można ustalić także doświadczalnie mierząc wymiar y oraz szerokość szczeliny x . Zmian szerokości szczeliny, w układzie pokazanym na rys. 12.2, dokonuje się śrubą mikrometryczną 3. Zależność (12.8), przy założeniu, że długość fali światła λ i odległość l są niezmiennie, jest równaniem hiperboli. W ograniczonym zakresie wartości x można tę zależność przybliżyć prostą o równaniu:

$$y = ax + b, \quad (12.9)$$

gdzie: a - współczynnik kierunkowy prostej,
 b - stała.

Współczynniki a i b prostych aproksymujących można wyznaczyć za pomocą programu Δ PRO napisanego w języku BASIC.

4. Zadania

- 1/ Włączyć laser i narysować obraz dyfrakcyjny dla szczeliny o szerokości $x = 0,05$ mm.
- 2/ Zmierzyć odległości y między minimami pierwszego rzędu w obrazie dyfrakcyjnym dla następujących wartości szerokości

- szczeliny: 0,05 mm, 0,08 mm, 0,10 mm, 0,12 mm i 0,15 mm.
- 3/ Dokonać aproksymacji uzyskanych wyników metodą najmniejszych kwadratów, przyjmując jako funkcję aproksymującą prostą daną równaniem (12.9).
- 4/ Dokonać aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów, funkcji danej równaniem (12.8), w zakresie argumentu $x \in < 0,05 \text{ mm}, 0,15 \text{ mm} >$, przyjmując $\lambda = 0,6328 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$ i $l = 500 \text{ nm}$.
Jako funkcję aproksymującą przyjąć prostą (12.9).
- 5/ Narysować w układzie Oxy funkcje aproksymujące uzyskane z zadań 3 i 4 oraz nanieść punkty uzyskane z pomiarów wykonanych w zad. 2.

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki pomiarów, niezbędne wykresy, szkice, obliczenia i wnioski.

Ćwiczenie nr 13

Temat: Interpolacja paraboliczna wyników pomiarów

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z metodyką interpolacji wielomianem stopnia n , $n+1$ punktów, t.j. przyporzędowanych wzajemnie par wartości, określonych w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy.

2. Podstawy teoretyczne

Problem interpolacji wyników pomiarów pojawia się wtedy, gdy wyznaczenie zależności między dwiema zmiennymi x i y , określonymi np. w kartezjańskim układzie współrzędnych Oxy opiera się na pewnej skończonej ilości punktów /t.j. par kartezyj x_j, y_j uzyskanych z pomiarów. Często wartości x_j, y_j są nie

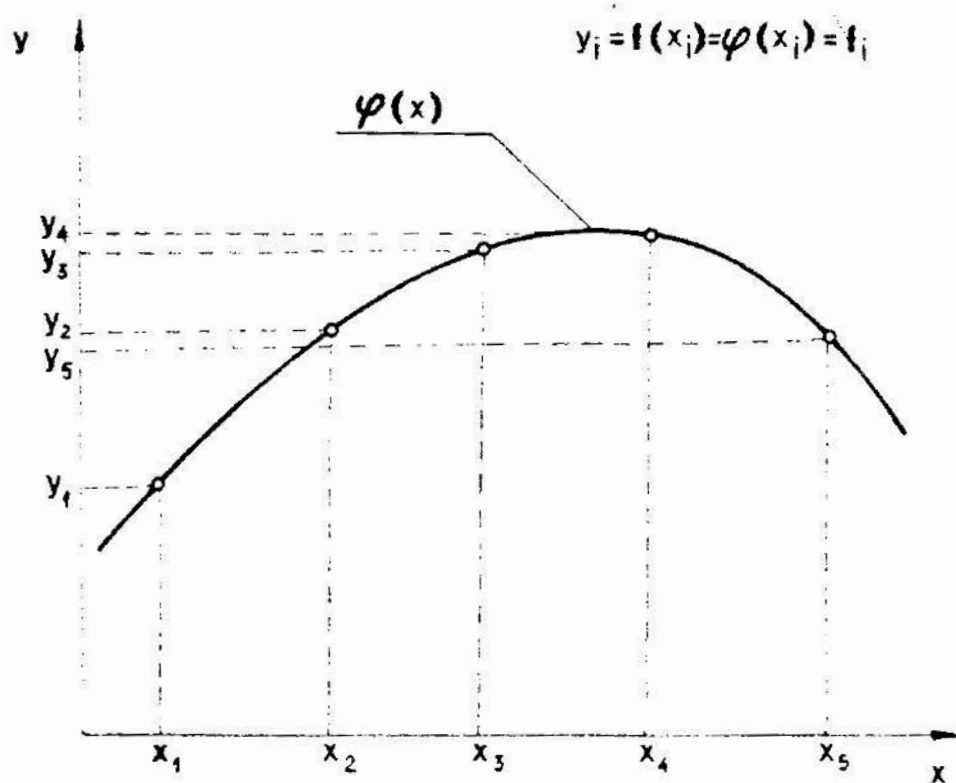
są zmiennymi przyjąć dla x_i i y_i wartości x_i i y_i i dla x i y
 licznosc między zmiennymi x i y i dla x i y
 pomocą aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów.
 Jednak wartości x_i i y_i w pomiarze błędne i nie można
 naczyń wystarczająco dokładnie.
 nym i korzystnym uzyskanie takiej funkcji $\varphi(x)$
 następujące równania:

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (13.1)$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Tak dobraną funkcję $\varphi(x)$ nazywamy funkcją interpolacyjną, a
 proces jej wyznaczania nazywa się interpolacją. Wartości $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$
 noszą nazwę węzłów interpolacji.

Funkcja interpolacyjna, w odróżnieniu od funkcji
 mającej, charakteryzuje się tym, że jej wartości w
 węzłach interpolacji x_0, x_1, \dots, x_n są równe
 wartościom oryginalnym w
 węzłach. Ilustruje to rys. 13.1



Rys. 13.1. Wykres funkcji interpolacyjnej

W przypadku gdy funkcja interpolacyjna określona jest wielomianem stopnia n :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad ; \quad (13.2)$$

to proces wyznaczania funkcji $\varphi(x)$ nazywa się interpolacją paraboliczną.

Zgodnie z pracą [2] słuszne jest twierdzenie: jakkolwiek dana jest funkcja $f(x)$ i jakkolwiek wybrane są węzły interpolacji x_0, x_1, \dots, x_n , zawsze istnieje jedyny wielomian stopnia n , który w tych punktach przybiera te same wartości co dana funkcja $f(x)$.

Do znajdowania tego wielomianu można posłużyć się wzorem interpolacyjnym Lagrange'a:

$$\varphi(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_n(x)f_n \quad ; \quad (13.3)$$

gdzie:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad ; \quad (13.4)$$

oraz

$$f_i = f(x_i) \quad . \quad (13.5)$$

W przypadku gdy ilość węzłów interpolacji jest niewielka wyznaczenie funkcji $\varphi(x)$ nie nastręcza większych trudności, zaś w przypadku, gdy ilość węzłów interpolacji jest duża do wyznaczenia funkcji $\varphi(x)$ wskazane jest wykorzystanie komputera, z uwagi na potrzebę wykonania znacznej ilości działań arytmetycznych. Można np. skorzystać z gotowego programu INTERPOLO.

Do wyznaczania funkcji interpolacyjnej można także wykorzystywać inne wzory interpolacyjne np. wzory interpolacyjne Newtona, wzór Stirlinga, wzór Bessela.

Jeżeli poszukiwaną zależność między zmiennymi x i y można wyrazić za pomocą analitycznej funkcji $f(x)$ różniczkowalnej dostateczną ilość razy to błąd interpolacji $\Delta I(x)$ można wyrazić następująco:

$$\Delta I(x) = |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{X \in I} |f^{(n+1)}(X)| \prod_{k=0}^n |x-x_k|, \quad (13.6)$$

gdzie: $f^{(n+1)}(X)$ - pochodna funkcji $f(x)$ rzędu $n + 1$,

X - wartość zmiennej x z interwału I ,

I - najmniejszy interwał argumentu zawierający wartość x oraz wszystkie wartości $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$,

$\prod_{k=0}^n$ - symbol iloczynu.

3. Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia należy dokonać pomiarów zarysu paraboloidy obrotowej za pomocą dużego mikroskopu warsztatowego oraz dokonać interpolacji wyników pomiarów. Można wykorzystać program INTERPOLO.

Ponadto należy dokonać interpolacji parabolicznej funkcji cosinus i obliczyć największą wartość błędu interpolacji.

3.1. Przygotowanie do pomiarów

Wskazany przez prowadzącego przedmiot należy umieścić na stoliku przedmiotowym mikroskopu. Następnie trzeba przesunąć stolik tak, aby zarys przedmiotu widoczny był w polu widzenia mikroskopu. Można to stwierdzić włączając oświetlenie mikroskopu i obserwując obraz widoczny w okularze mikroskopu. Na rys. 13.2 pokazano przykładowy zarys przedmiotu widoczny w polu widzenia mikroskopu.

Szczegółowo z budową dużego mikroskopu warsztatowego i jego obsługą można zapoznać się korzystając z prac [5, 15].

4. Zadania

- 1/ Za pomocą dużego mikroskopu warsztatowego zmierzyć współrzędne x_i i y_i trzech punktów wskazanego zarysu. Węzły interpolacji x_0, x_1, x_2 wybrać tak, aby różnice $x_{i+1} - x_i$ były równe około 1 mm.

- 2/ Dokonać interpolacji parabolicznej punktów wyznaczonych w zad. 1 korzystając z równania (13.3).
- 3/ Sprawdzić czy inne punkty zarysu spełniają równanie wyznaczone w zadaniu 2. W tym celu należy wybrać dwa punkty, położone między węzłami interpolacyjnymi, w równej odległości od każdego z sąsiednich węzłów i wyznaczyć ich współrzędne za pomocą mikroskopu.
- Następnie korzystając z równania wyznaczonego w zadaniu 2 obliczyć współrzędne y_i tych punktów podstawiając do równania zmierzone wartości współrzędnych x_i . Wyznaczyć różnice zmierzonych i obliczonych wartości współrzędnych y_i .
- 4/ Dokonać interpolacji parabolicznej trzech punktów o podanych współrzędnych

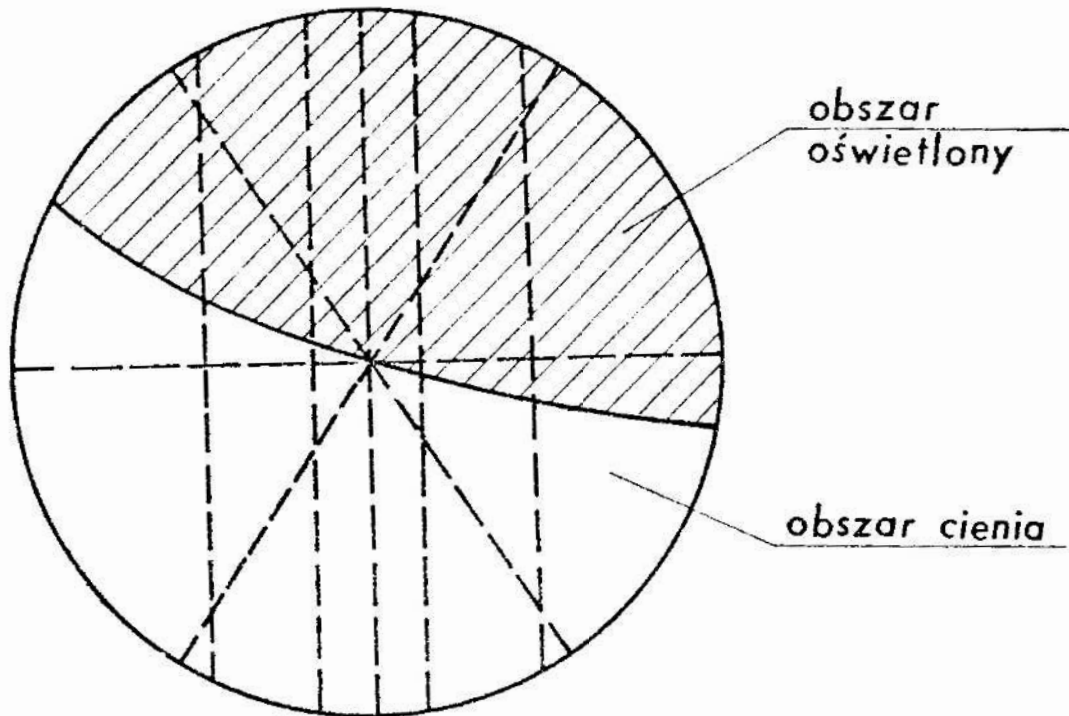
$$P_1\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}; 0\right), P_2(0; 1), P_3\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}; 0\right).$$

Punkty te są punktami funkcji $\cos x$.

- 5/ Wyznaczyć różnicę między wartością $\cos \frac{\sqrt{\pi}}{9}$ i wartością wyznaczoną z funkcji interpolacyjnej otrzymanej w zad. 4 dla argumentu x odpowiadającego $\frac{\sqrt{\pi}}{9}$ rad. W podobny sposób wyznaczyć różnice dla kątów $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ rad, $\frac{7}{18}\sqrt{\pi}$ rad i $\frac{\sqrt{\pi}}{180}$ rad.
- 6/ Wykonać rysunek funkcji $\cos x$ i funkcji interpolacyjnej wyznaczonej w zad. 4 w zakresie argumentu

$$x \in \left\langle -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right\rangle.$$

- 7/ Obliczyć wartość błędu interpolacji ΔI dla wartości kątów podanych w zad. 5 wykorzystując nierówność (13.6). Porównać obliczoną wartość z wartościami uzyskanymi w zadaniu 5.
- 8/ Opracować algorytm wyznaczania wielomianu interpolacyjnego według wzoru Lagrange'a jeżeli ilość węzłów interpolacji wynosi 3.
- 9/ Korzystając z algorytmu opracowanego w zadaniu 8 napisać program obliczeń numerycznych pozwalających wyznaczać wielomian interpolacyjny na podstawie trzech węzłów interpolacji. Program napisać w języku BASIC.



Rys. 13.2. Pole widzenia mikroskopu pomiarowego podczas obserwacji przedmiotu o kształcie paraboloidalnym

5. Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić wyniki przeprowadzonych pomiarów, obliczenia oraz niezbędne szkice i wykresy. Ponadto w sprawozdaniu należy przedstawić opracowaną sieć działań i program obliczeń numerycznych przeznaczony do wyznaczania wielomianu interpolacyjnego, a także własne spostrzeżenia i wnioski.

Literatura

1. Bracewell R.: Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania, WNT, Warszawa 1968.
2. Bronsztejn I.N., Siemiendiajew K.A.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, PWN, Warszawa 1968.
3. Deutsch R.: Teoria estymacji, PWN, Warszawa 1969.
4. Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii, WNT, Warszawa, 1979.
5. Karpiński T., Kacalak W., Lukianowicz Cz.: Ćwiczenia laboratoryjne z metrologii mechanicznej, WNT, Warszawa 1976.
6. Krasovskij G.I., Filaretov G.F.: Planировanie eksperymentu, Izdatelstwo BGU im. V.I.Lenina, Minsk 1982.
7. Krauss M., Woschni B.G.: Systemy pomiarowo-informacyjne, PWN, Warszawa 1979.
8. Mańczak K.: Technika planowania eksperymentu, WNT, Warszawa 1976.
9. Obalski J.: Zasady międzynarodowego układu jednostek miar SI, WNT, Warszawa 1970.
10. Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa 1972.
11. Piotrowski J.: Podstawy metrologii, PWN, Warszawa 1977.
12. Romer E.: Miernictwo przemysłowe, PWN, Warszawa 1970.
13. Teoria pomiarów, praca zbiorowa pod redakcją H. Szydłowskiego, PWN, Warszawa 1974.
14. Tomaszewski A.: Podstawy nowoczesnej metrologii, WNT, Warszawa 1978.
15. Praca zbiorowa: Poradnik metrologa warsztatowego, WNT Warszawa 1973.
16. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 23 czerwca 1966 roku w sprawie ustalenia legalnych jednostek miar, Dziennik Ustaw nr 25/1966 r. poz. 154.
17. PN-71/N-02050. Metrologia. Nazwy i określenia.

Spis treści

Wstęp	3
1. Ćwiczenie nr 1. Zastosowanie układu SI w pomiarach wybranych wielkości fizycznych	5
2. Ćwiczenie nr 2. Wyznaczanie wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego wielkości mierzonej	10
3. Ćwiczenie nr 3. Wyznaczanie rozkładu częstości względ- nych wartości wielkości mierzonej	16
4. Ćwiczenie nr 4. Pomiar parametrów charakteryzujących czasowy przebieg wielkości mierzonej	24
5. Ćwiczenie nr 5. Pomiar charakterystyk częstotliwości- wych wielkości mierzonej	29
6. Ćwiczenie nr 6. Wyznaczanie czułości i pobudliwości narzędzi pomiarowych	38
7. Ćwiczenie nr 7. Wyznaczanie charakterystyki statycz- nej narzędzi pomiarowych	46
8. Ćwiczenie nr 8. Badanie charakterystyki amplitudowo- -częstotliwościowej narzędzi pomiarowych	56
9. Ćwiczenie nr 9. Ocena informacyjna charakterystyk po- miarów	63
10. Ćwiczenie nr 10. Ocena błędów pomiarów bezpośrednich..	70
11. Ćwiczenie nr 11. Ocena błędów pomiarów pośrednich	84
12. Ćwiczenie nr 12. Aproksymacja wyników pomiarów meto- dą najmniejszych kwadratów ,.....	89
13. Ćwiczenie nr 13. Interpolacja paraboliczna wyników po- miarów	95
14. Literatura	101