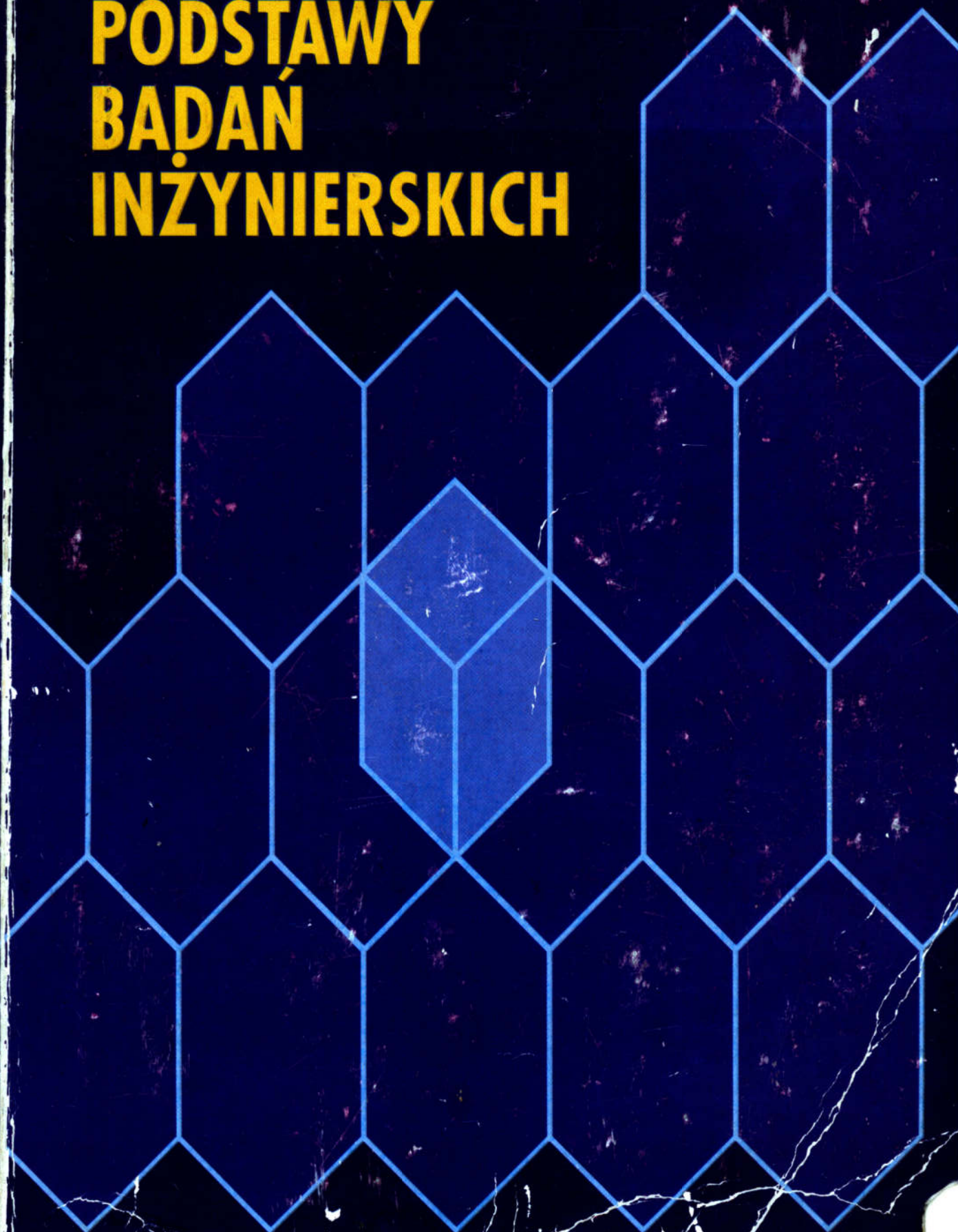


**LEON KUKIEŁKA**

**PODSTAWY  
BADAŃ  
INŻYNIERSKICH**



**POLITECHNIKA KOSZALIŃSKA**

**LEON KUKIEŁKA**

**PODSTAWY  
BADAŃ  
INŻYNIERSKICH**

**KOSZALIN, 2000**



**Podręcznik Wydziału Mechanicznego**

**ISBN 83-88283-26-X**

**Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej**  
*Prof. dr hab. inż. Szymon Pałkowski*

**Recenzenci**

*Prof. dr hab. inż. Wojciech Tarnowski*  
*Prof. dr inż. dr h.c. Kazimierz Wieczorowski*

**Redaktor**

*Dr inż. Bronisław Słowiński*

**Projekt okładki**

*Tadeusz Walczak*

**WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ**  
**75-620 Koszalin, ul. Raclawicka 15-17**

---

**Koszalin 2000, wyd. I, ark. wyd. 15,75, format B-5, nakład 600 egz.**  
**Druk: POLIMER**

# SPIS TREŚCI

Przedmowa .....	11
<b>1. WSTĘP .....</b>	<b>13</b>
<b>2. POJĘCIA PODSTAWOWE .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1. Identyfikacja, symulacja i analiza .....</b>	<b>17</b>
<b>2.2. Obiekt badań .....</b>	<b>18</b>
<b>2.3. Przykłady obiektów badań .....</b>	<b>19</b>
2.3.1. Proces technologiczny jako obiekt badań .....	19
2.3.2. Proces separacji kamieni jako obiekt badań .....	20
<b>2.4. Układ eksperymentu .....</b>	<b>21</b>
<b>2.5. Model podstawowy .....</b>	<b>21</b>
<b>2.6. Zależność funkcyjna i statystyczna .....</b>	<b>22</b>
<b>2.7. Model scalony .....</b>	<b>22</b>
<b>2.8. Kategorie modelu matematycznego .....</b>	<b>23</b>
<b>3. ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA .....</b>	<b>24</b>
<b>3.1. Wprowadzenie .....</b>	<b>24</b>
<b>3.2. Podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia .....</b>	<b>24</b>
3.2.1. Zdarzenia losowe .....	24
3.2.2. Algebra zdarzeń .....	25
3.2.3. Zmienna losowa .....	28
<b>3.3. Definicje prawdopodobieństwa .....</b>	<b>39</b>
3.3.1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa .....	39
3.3.2. Geometryczna definicja prawdopodobieństwa .....	30
3.3.3. Statystyczna definicja prawdopodobieństwa .....	31
3.3.4. Współczesna definicja prawdopodobieństwa .....	33
<b>3.4. Podstawowe właściwości funkcji prawdopodobieństwa .....</b>	<b>33</b>
<b>3.5. Funkcje zmiennej losowej .....</b>	<b>35</b>
<b>3.6. Parametry opisowe rozkładu prawdopodobieństwa         zmiennej losowej .....</b>	<b>38</b>
3.6.1. Wartość przeciętna i średnia arytmetyczna .....	39
3.6.2. Wariancja, rozstęp, odchylenie średnie, współczynnik zmienności i odchylenie przeciętne .....	40
3.6.3. Momenty .....	44
3.6.4. Regresja i wariancja resztowa .....	50
3.6.5. Korelacja. Stosunek korelacyjny i współczynnik korelacji .....	54

<b>3.7. Wybrane zagadnienia z teorii procesów stochastycznych .....</b>	<b>54</b>
3.7.1. Charakterystyki procesu stochastycznego .....	55
3.7.2. Stacjonarność procesu .....	57
3.7.3. Ergodyczność procesu .....	58
<b>4. ROZKŁADY ZMIENNEJ LOSOWEJ .....</b>	<b>61</b>
<b>4.1. Rozkład empiryczny .....</b>	<b>61</b>
4.1.1. Histogram .....	62
4.1.2. Dystrybuanta empiryczna .....	62
4.1.3. Poligon .....	63
<b>4.2. Współczynnik skośności i spłaszczenia .....</b>	<b>64</b>
<b>4.3. Podstawowe rozkłady zmiennych losowych .....</b>	<b>65</b>
4.3.1. Rozkłady zmiennych losowych dyskretnych .....	65
4.3.1.1. Rozkład dwupunktowy .....	66
4.3.1.2. Rozkład dwumianowy .....	66
4.3.1.3. Rozkład Poissona .....	67
4.3.2. Rozkłady zmiennych losowych ciągłych .....	68
4.3.2.1. Rozkład trójkątny .....	69
4.3.2.2. Rozkład prostokątny .....	70
4.3.2.3. Rozkład normalny (Gausa) .....	71
4.3.2.4. Dwuwymiarowy rozkład normalny .....	74
4.3.2.5. Rozkład logarymiczno-normalny .....	76
4.3.2.6. Rozkład $\chi^2$ (chi-kwadrat) .....	76
4.3.2.7. Rozkład $t$ Studenta (W. Gosseta) .....	80
4.3.2.8. Rozkład $F$ Snedecora .....	82
4.3.2.9. Rozkład z Fishera .....	83
<b>4.4. Wybrane zastosowania rozkładów .....</b>	<b>84</b>
<b>5. ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ .....</b>	<b>85</b>
<b>5.1. Wprowadzenie .....</b>	<b>85</b>
<b>5.2. Wybrane zagadnienia z teorii estymacji .....</b>	<b>86</b>
5.2.1. Estymacja punktowa .....	87
5.2.2. Właściwości najlepszego estymatora .....	87
5.2.2.1. Estymator nieobciążony .....	88
5.2.2.2. Estymator zgodny .....	89
5.2.2.3. Estymator efektywny .....	89
5.2.3. Ocena parametrów rozkładu zmiennej losowej .....	89
5.2.3.1. Metoda momentów Pearsona .....	90
5.2.3.2. Metoda największej wiarygodności .....	91
5.2.3.3. Metoda najmniejszych kwadratów .....	92



5.2.4. Estymacja przedziałowa .....	93
5.2.4.1. Przedział ufności dla wartości przeciętnej .....	93
5.2.4.2. Przedział ufności dla wariancji .....	95
5.2.4.3. Przedział ufności dla funkcji regresji .....	95
<b>5.3. Weryfikacja hipotez statystycznych .....</b>	<b>97</b>
5.3.1. Testy parametryczne .....	99
5.3.1.1. Eliminacja błędów grubych .....	99
5.3.1.2. Testy równości wariancji w różnych populacjach normalnych .....	101
5.3.2. Testy nieparametryczne .....	103
5.3.2.1. Porównanie rozkładu empirycznego z teoretycznym .....	103
5.3.2.2. Test Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych .....	109
<b>6. WYZNACZANIE CZYNNIKÓW NA WEJŚCIU     OBIEKTU BADAŃ .....</b>	<b>111</b>
<b>6.1. Badania rozpoznawcze .....</b>	<b>112</b>
<b>6.2. Program statyczny randomizowany kompletny .....</b>	<b>113</b>
<b>6.3. Programy statyczne randomizowane blokowe .....</b>	<b>116</b>
6.3.1. Program statyczny randomizowany blokowy kompletny .....	116
6.3.2. Program statyczny randomizowany blokowy niekompletny zrównoważony i częściowo zrównoważony .....	118
<b>6.4. Programy statyczne randomizowane kwadratowe .....</b>	<b>120</b>
6.4.1. Program statyczny randomizowany kwadrat łaciński .....	120
6.4.2. Program statyczny randomizowany kwadrat grecko-łaciński .....	125
<b>6.5. Program statyczny randomizowany sześcián łaciński .....</b>	<b>128</b>
<b>6.6. Program statyczny randomizowany prostokąt Youdena .....</b>	<b>131</b>
<b>6.7. Program statyczny randomizowany „bilans losowy” .....</b>	<b>135</b>
<b>6.8. Programy Placketta-Burmana .....</b>	<b>143</b>
<b>6.9. Przykład wyznaczania zbioru czynników na wejściu obiektu         przy wykorzystaniu programu statycznego randomizowanego,         kwadratu grecko-łacińskiego 5x5 .....</b>	<b>147</b>
<b>6.10. Grupowanie czynników wejściowych .....</b>	<b>152</b>

<b>7. MODEL MATEMATYCZNY OBIEKTU BADAŃ .....</b>	<b>158</b>
<b>7.1. Modele liniowe ze względu na współczynniki .....</b>	<b>159</b>
7.1.1. Wielomiany algebraiczne liniowe .....	159
7.1.2. Wielomiany algebraiczne kwadratowe .....	160
7.1.3. Wielomiany algebraiczne stopnia m .....	161
7.1.4. Funkcja logarytmiczna i trygonometryczna .....	162
<b>7.2. Modele nieliniowe ze względu na współczynniki .....</b>	<b>162</b>
7.2.1. Funkcja wykładnicza .....	162
7.2.2. Funkcja potęgowa i ułamkowa .....	163
7.2.3. Funkcje hybrydowe .....	164
<b>7.3. Przekształcanie funkcji nieliniowych ze względu na współczynniki .....</b>	<b>165</b>
7.3.1. Linearyzacja funkcji wykładniczej .....	165
7.3.2. Linearyzacja funkcji potęgowej .....	166
7.3.3. Linearyzacja funkcji ułamkowej .....	166
7.3.4. Linearyzacja funkcji hybrydowych .....	167
<b>7.4. Normowanie zmiennych wejściowych .....</b>	<b>170</b>
<b>7.5. Renormowanie zmiennych wejściowych .....</b>	<b>175</b>
<b>7.6. Dobór postaci modelu matematycznego .....</b>	<b>176</b>
<b>8. IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ FUNKCJI KORELACJI .....</b>	<b>179</b>
<b>8.1. Statystyczne metody identyfikacji obiektów wielowymiarowych .....</b>	<b>179</b>
<b>8.2. Metoda funkcji korelacji .....</b>	<b>180</b>
8.2.1. Założenia .....	180
8.2.2. Doświadczalne wyznaczanie funkcji korelacji .....	181
8.2.3. Wyznaczanie charakterystyk złożonego obiektu dynamicznego ..	182
8.2.4. Sygnały wejściowe nieskorelowane .....	185
8.2.5. Sygnały wejściowe skorelowane .....	190
<b>9. IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ ANALIZY REGRESJI .....</b>	<b>192</b>
<b>9.1. Opis metody .....</b>	<b>192</b>
<b>9.2. Zasada najmniejszej sumy kwadratów .....</b>	<b>193</b>
<b>9.3. Przekształcenie funkcji wykładniczej i potęgowej .....</b>	<b>197</b>
<b>9.4. Udoskonalona zasada najmniejszej sumy kwadratów .....</b>	<b>198</b>
<b>9.5. Minimalna suma modułów błędów jako kryterium szacowania parametrów modelu .....</b>	<b>200</b>

---

<b>10. IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ ANALIZY CZYNNIKOWEJ .....</b>	<b>203</b>
10.1. Wprowadzenie .....	203
10.2. Konieczna liczba powtórzeń .....	204
10.3. Programy statyczne zdeterminowane .....	207
10.3.1. Dwupoziomowy plan całkowity .....	208
10.3.2. Dwupoziomowe plany ułamkowe .....	216
10.3.3. Plany trójpoziomowe .....	218
10.3.4. Plany pięciopoziomowe kompozycyjne .....	224
10.3.4.1. Programy ortogonalne .....	227
10.3.4.2. Programy rotalne .....	229
<b>11. IDENTYFIKACJA SILNIE NIELINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH METODĄ PRZEKSZTAŁCANIA MODULACYJNEGO .....</b>	<b>234</b>
11.1. Wprowadzenie .....	234
11.2. Układ mechaniczny i jego nieliniowości .....	235
11.3. Model nominalny układu mechanicznego .....	236
11.4. Model matematyczny układu mechanicznego .....	237
11.5. Identyfikacja układu dynamicznego .....	241
11.6. Metody identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych .....	243
11.7. Metoda funkcji modulującej .....	244
11.8. Przekształcenie modulacyjne funkcji .....	246
11.8.1. Przekształcenie modulacyjne funkcji zdeterminowanej .....	246
11.8.2. Przekształcenie modulacyjne funkcji losowej .....	247
11.8.3. Postać funkcji modulującej .....	249
11.9. Algorytm identyfikacji silnie nieliniowego układu mechanicznego .....	250
11.9.1. Schemat procesu identyfikacji w przypadku modelu zdeterminowanego .....	252
11.9.2. Schemat procesu identyfikacji w przypadku modelu losowego .....	253
11.9.3. Identyfikacja układów w przypadku występowania zakłóceń .....	255
11.9.3.1. Model prosty i odwrotny w przypadku występowania zakłóceń .....	255
11.9.3.2. Schemat identyfikacji układu, gdy zakłócany jest sygnał wejściowego .....	257



11.9.3.3. Schemat identyfikacji układu, gdy zakłócone są sygnały wejściowy i wyjściowy .....	258
11.9.4. Identyfikacja wielomasowych, nieliniowych układów mechanicznych .....	260
<b>11.10. Wybór funkcji jakości modelu matematycznego .....</b>	<b>263</b>
<b>11.11. Metody szukania minimum funkcji jakości .....</b>	<b>264</b>
11.11.1. Procedura analityczna I .....	265
11.11.2. Procedura analityczna II .....	266
11.11.3. Procedura iteracyjna .....	266
<b>11.12. Typy nieliniowych równań różniczkowych opisujących układ             mechaniczny .....</b>	<b>268</b>
11.12.1. Zastępowanie zależności nieliniowej wielomianem .....	268
11.12.2. Opis układu dynamicznego w przypadku zdeterminowanym .....	269
11.12.3. Opis układu dynamicznego w przypadku losowym .....	272
11.12.3.1. Przekształcanie losowego równania różniczkowego w różniczkowe równanie zdeterminowane .....	272
11.12.3.2. Wyznaczanie momentów statystycznych drugiego rzędu .....	274
11.12.3.3. Typ nieliniowości równania .....	277
<b>11.13. Zalety i wady metody przekształcania modulacyjnego .....</b>	<b>278</b>
<b>12. PRZYKŁAD PEŁNEJ ANALIZY WYNIKÓW             DOŚWIADCZENIA .....</b>	<b>280</b>
<b>12.1. Określenie zbiorów czynników badanych, stałych,             zakłócających i wynikowych .....</b>	<b>284</b>
<b>12.2. Ustalenie przedziału zmienności czynników badanych .....</b>	<b>285</b>
<b>12.3. Przyjęcie klasy modelu matematycznego obiektu badań .....</b>	<b>285</b>
<b>12.4. Kodowanie czynników badanych .....</b>	<b>287</b>
<b>12.5. Realizacja badań właściwych - plan eksperymentu .....</b>	<b>291</b>
<b>12.6. Wyniki eksperymentu .....</b>	<b>293</b>
<b>12.7. Eliminacja wyników obarczonych błędem grubym.....</b>	<b>294</b>
<b>12.8. Obliczenie wariancji międzywierszowej i odchylenia             standardowego .....</b>	<b>296</b>
<b>12.9. Sprawdzenie jednorodności wariancji w próbie .....</b>	<b>298</b>
<b>12.10. Obliczenie współczynników w funkcji regresji .....</b>	<b>299</b>
<b>12.11. Analiza statystyczna funkcji regresji .....</b>	<b>305</b>

12.12. Badanie istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej .....	309
12.13. Sprawdzenie adekwatności modelu matematycznego .....	315
12.14. Odkodowanie funkcji regresji .....	316
12.15. Określenie przedziału ufności funkcji regresji .....	319
<b>13. OPTIMALIZACJA OBIEKTU NA PODSTAWIE MODELU MATEMATYCZNEGO .....</b>	<b>327</b>
13.1. Wprowadzenie .....	327
13.2. Model matematyczny procesu nagniatania .....	328
13.3. Optymalizacja procesu nagniatania .....	332
13.3.1. Przykład 1 .....	333
13.3.2. Przykład 2 .....	336
13.4. Polioptymalizacja procesu nagniatania .....	339
13.5. Zakończenie .....	343
<b>14. KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE BADAŃ INŻYNIERSKICH .....</b>	<b>344</b>
14.1. Program EUREKA .....	344
14.2. Program EXCEL .....	344
14.3. Program MATHCAD .....	344
14.4. Program MATLAB .....	345
14.5. Program STATBAZ .....	347
14.6. Program STATGRAF .....	347
14.7. Program STATISTICA .....	348
14.8. Programy graficzne WK-GRAF i TB-WYKRES .....	349
14.9. Program POLIOPT .....	352
14.10. Program CADEX .....	354
14.11. Program PLANEKS-STAT .....	356
14.12. Przykład komputerowego wspomagania badań .....	358
14.13. Podsumowanie .....	372
<b>15. TABLICE STATYSTYCZNE .....</b>	<b>373</b>
15.1. Gęstość rozkładu normalnego .....	373
15.2. Dystrybuanta rozkładu normalnego .....	374
15.3. Kwantyle rozkładu normalnego .....	375
15.4. Wartości krytyczne $t(P, n)$ rozkładu $t$ Studenta .....	376
15.5. Wartości krytyczne $\chi^2(\alpha, r)$ rozkładu $\chi^2$ .....	377

15.6. Wartości krytyczne $F(\alpha, r_1, r_2)$ rozkładu $F$ .....	381
15.7. Wartości krytyczne $z(\alpha, r_1, r_2)$ rozkładu $z$ Fishera .....	386
15.8. Wartości krytyczne $B$ statystyki Grubbsa .....	389
15.9. Wartości krytyczne $m_1(\alpha, k, c_1)$ i $m_2(\alpha, k, c_1)$ testu Bartletta .....	390
15.10. Wartości pomocnicze $c = c_1^3 / k^2$ testu Bartletta .....	392
15.11. Wartości krytyczne $g(\alpha, k, n)$ testu Cochran .....	393
15.12. Wartości krytyczne statystyki $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$ .....	394
15.13. Wartości krytyczne $b_4^+(\alpha, n)$ statystyki $B_4^+$ .....	395
15.14. Wartości krytyczne $b_6^+(\alpha, n), b_7^+(\alpha, n), b_8^+(\alpha, n)$ statystyk $B_6^+, B_7^+, B_8^+$ .....	396
15.15. Wartości krytyczne $D_n(\alpha)$ .....	397
15.16. Rozkład $K(y)$ Kolmogorowa .....	398
15.17. Wartości krytyczne statystyki $D_{n,m}(\alpha)$ Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych .....	399
15.18. Wartości funkcji Laplace'a .....	403
15.19. Liczby losowe .....	405
<b>LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA</b> .....	407



## PRZEDMOWA

Obecnie często znajdujemy się w sytuacji braku opisu matematycznego rozważanego obiektu badań, co uniemożliwia jego analizę, optymalizację lub sterowanie. Powstaje więc zagadnienie tworzenia modelu matematycznego rozważanego obiektu. Powszechna tendencja do automatyzacji procesów, ich złożona struktura, ograniczony czas na podjęcie decyzji i ograniczone nakłady na badania powodują, że najczęściej rezygnuje się z dokładnego opisu obiektu, za pomocą modeli deterministycznych, opartych na znajomości wszystkich, zachodzących w nim zjawisk. Poszukuje się natomiast modeli przybliżonych - statystycznych, opisujących dany obiekt z zadowalającą, narzuconą z góry dokładnością. Wprowadzenie automatycznego projektowania przy użyciu środków komputerowych związane jest również z koniecznością budowy adekwatnych modeli matematycznych. Modele takie mogą powstać w wyniku zastosowania właściwych metod identyfikacji.

Prawidłowe i szybkie tworzenie takich modeli utrudnia brak publikacji omawiających te zagadnienia w sposób kompleksowy i możliwie wyczerpujący.

Książka pt. "Podstawy badań inżynierskich" ma na celu wypełnienie luki, jaka istnieje dotychczas w tej dziedzinie. Książka jest próbą przeprowadzenia syntezy i systematycznego wykładu z podstaw rachunku prawdopodobieństwa, podstawowych metod statystyki matematycznej, metod identyfikacji i planowania doświadczeń, pozwalających na samodzielnie tworzenie przez Czytelnika modeli matematycznych obiektów wielowymiarowych, przy założeniu, że są to obiekty stacjonarne. Szczególną uwagę zwrócono na obiekty nieliniowe. Następnie, w oparciu o opracowane modele matematyczne - określenie stanu polioptymalnego lub optymalnego rozważanego obiektu. Cały ten proces jest wspomagany komputerem osobistym klasy IBM, przy wykorzystaniu dostępnych, specjalistycznych programów komputerowych: CADEX [53], PLANEKS-STAT [22], STATISTIKA [62], TB-WYKRES [1], POLIOPT [2, 64] i WK-GRAF [14]. Zagadnienia te stanowią zwykle przedmiot oddzielnych specjalistycznych publikacji. Uzupełnieniem niniejszej książki będzie inna książka autora pt. "Podstawy badań inżynierskich - materiały pomocnicze do wykładów", zawierająca liczne przykłady praktycznej implementacji omawianych teorii do identyfikacji procesów wytwarzania, eksploatacji urządzeń, zarządzania i badania rynku.

Kolejne rozdziały niniejszej książki, logicznie uporządkowane i wzajemnie uzupełniające się, tworzą podstawę do konstruowania modeli dowolnego wielowymiarowego, stacjonarnego obiektu nieliniowego, ich upraszczania i weryfikacji.

Książka pt. "Podstawy badań inżynierskich" powstała w oparciu o wykłady przedmiotu pod tym samym tytułem, prowadzone od wielu lat przez Autora w Wyższej Szkole Inżynierskiej (obecnie Politechnika Koszalińska). Przy jej opracowaniu zostało wykorzystane ponad dwudziestoletnie doświadczenie, jakie Autor nabył w dziedzinie identyfikacji obiektów wielowymiarowych. Treść książki jest również wynikiem badań prowadzonych przez Autora w latach 1978-84 pod kierownictwem naukowym prof. dr inż. dr h. c. Kazimierza Wieczorowskiego z Politechniki Poznańskiej, dotyczących wykorzystania statystycznej teorii planowania eksperymentu i opracowania wyników w zastosowaniu do procesu nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem. W książce wykorzystano także wyniki badań prowadzonych przez Autora w latach 1984-85 i w roku 1992 w Ecole Centrale de Lyon.

Autor wyraża serdeczne podziękowanie wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania tej książki, w szczególności prof. dr inż. dr h. c. Kazimierzowi Wieczorowskiemu za inspirację jej opracowania i życzliwy stosunek do Autora oraz niezwykle cenne uwagi, które pozwoliły nadać książce ostateczny kształt.

Szczególne podziękowanie składam drugiemu recenzentowi książki prof. dr hab. inż. Wojciechowi Tarnowskiemu, kierownikowi Katedry Systemów Sterowania Politechniki Koszalińskiej, wybitnemu specjalście z zakresu podstaw konstrukcji maszyn oraz automatyki i robotyki, za podjęcie się trudu merytorycznej i formalnej jej oceny.

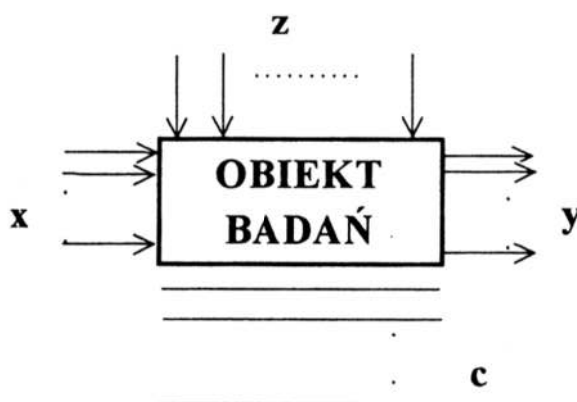
Lipiec 1999 r

Autor

# 1

## WSTĘP

Podstawą statystycznych metod identyfikacji obiektów wielowymiarowych jest rozpatrywanie rzeczywistych obiektów jako procesów losowych, statystycznych. Wykorzystując cybernetyczną zasadę "czarnej skrzynki" (rys. 1.1), tj. braku pełnej znajomości mechanizmów obiektu, poszukuje się związków pomiędzy zmiennymi wyjściowymi  $y$  a zmiennymi wejściowymi  $x$  (które są znane i można nimi sterować), przy założeniu występowania czynników stałych  $c$  i czynników zakłócających  $z$  (które mogą być mierzalne lecz niesterowalne lub niemierzalne i niesterowalne).



Rys. 1.1. Obiekt badań jako "czarna skrzynka":  $x$  - wielkości wejściowe sterowalne,  $z$  - zakłócenia,  $c$  - czynniki stałe,  $y$  - wyjścia [15].

Zadanie to należy rozwiązać tak, aby dla zadanych wartości wejściowych  $x$ , wartość wyjścia  $y'$ , obliczona na podstawie opracowanego modelu matematycznego nie różniła się istotnie (w sensie statystycznym) od wyjścia  $y$  obiektu rzeczywistego (rys. 1.2).



Rys. 1.2. Zasada budowy modelu matematycznego obiektu badań [15].



Z powyższych względów, w niniejszej pracy zrezygnowano z deterministycznych metod tworzenia modeli matematycznych. Skoncentrowano się natomiast na metodach statystycznych. Szczególną uwagę zwrócono na nieliniowe obiekty wielowymiarowe, ze względu na ich powszechne występowanie w praktyce. Podobnie także jest również uzasadnione tym, że wykorzystanie proponowanych metod do opisu obiektów liniowych jest trywialne, gdyż obiekty liniowe są szczególnymi przypadkami obiektów nieliniowych. Ze względu na złożoność obliczeń statystycznych oraz powszechną dostępność komputerów osobistych klasy IBM, cały proces tworzenia opisu matematycznego obiektu zwykle jest wspomagany komputerem, przy wykorzystaniu dostępnych, specjalistycznych programów komputerowych CADEX [53] i PLANEKS-STAT [22].

Książka jest próbą przeprowadzenia syntetycznego i systematycznego wykładu podstawowych metod statystyki matematycznej oraz metod identyfikacji i planowania doświadczeń, pozwalających na samodzielnie tworzenie przez Czytelnika modeli matematycznych nieliniowych obiektów wielowymiarowych, a następnie określenie ich stanu polioptymalnego lub optymalnego.

Na początku książki wyjaśniono podstawowe pojęcia takie jak: identyfikacja, symulacja, analiza, obiekt badań, model matematyczny obiektu badań, model podstawowy, model scalony, układ eksperymentu, zależność statystyczna i funkcyjna.

W rozdziale 3 podano niezbędne wiadomości uzupełniające z matematyki współczesnej, dotyczącej rachunku prawdopodobieństwa. Najpierw zdefiniowano podstawowe pojęcia takie jak: zdarzenia losowe, zmienne losowe i procesy losowe oraz przedstawiono niezbędne definicje i twierdzenia. Omówiono podstawowe funkcje zmiennej losowej oraz parametry opisowe jej rozkładu. Wprowadzono pojęcie momentów i dokonano ich podziału.

W kolejnym rozdziale przedstawiono wiadomości dotyczące rozkładów zmiennych losowych, niezbędne do identyfikacji wielowymiarowych obiektów badań. Podano sposoby wizualizacji rozkładu empirycznego oraz opisano podstawowe jego miary. Przedstawiono również najczęściej spotykane rozkłady zmiennych losowych skokowych i ciągłych. Podano również wzory na dystrybucję i gęstość prawdopodobieństwa tych rozkładów.

Rozdział 5 dotyczy elementów statystyki matematycznej w zakresie niezbędnym do zrozumienia materiału zawartego w dalszej części książki. Przedstawiono wybrane zagadnienia z teorii estymacji. Określono cechy najlepszego estymatora. Omówiono metody tworzenia parametrów rozkładu zmiennej losowej za pomocą zbioru wartości w próbie. Przedstawiono sposoby wyznaczania przedziału ufności dla: wartości przeciętnej, wariancji i funkcji regresji. Podano najważniejsze testy parametryczne i nieparametryczne.

W rozdziale 6 przedstawiono programy badań rozpoznawczych, stosowanych w celu eliminacji nieistotnych czynników wejściowych oraz nieistotnych interakcji tych czynników. Podano również zastosowanie metody analizy wymiarowej do zmniejszania liczby czynników istotnych, poprzez tworzenie liczb bezwymiarowych.

Rozdział 7 dotyczy doboru klasy modelu matematycznego do opisu badanego obiektu. Najpierw przedstawiono najważniejsze klasy modeli matematycznych będących liniową kombinacją nieznanymi współczynników. Dalej opisano modele nieliniowe ze względu na współczynniki oraz sposoby ich linearyzacji. Podano również metody normowania i renormowania modeli oraz zasady wyboru najlepszego modelu.

Kolejne cztery rozdziały dotyczą metod identyfikacji stacjonarnych obiektów wielowymiarowych. W rozdziale 8 opisano metodę funkcji korelacji służącej do wyznaczania charakterystyk dynamicznych na podstawie tzw. eksperymentu biernego, tzn. obserwacji wejść i wyjść obiektu podczas jego normalnej pracy, bez ingerowania w warunki eksploatacji. Rozdział 9 dotyczy metody analizy regresji służącej do identyfikacji statycznych charakterystyk złożonych obiektów badań w warunkach eksperymentu biernego. W rozdziale 10 opisano metodę analizy czynnikowej opartej na metodzie analizy regresji. Metoda ta zajmuje centralną pozycję wśród metod wyznaczania charakterystyk statycznych opartych na eksperymencie czynnym tzn. zawierającym planowanie eksperymentu. Rozdział 11 zawiera metodę przekształcania modulacyjnego, służącej do identyfikacji modeli matematycznych w postaci nieliniowych równań różniczkowych (w tym również nieliniowych ze względu na współczynniki), opisujących silnie nieliniowe, wielomasowe układy mechaniczne, zawierające nieliniowości typu „luz” i „tarcie suche”.

Dla zilustrowania zastosowania metod statystycznych do rozwiązywania konkretnych problemów doświadczeń w rozdziale 12 podano przykład z badań nad procesem nagniatania tocznego z przepływem prądu elektrycznego. W tym celu zastosowano metodę analizy czynnikowej opisując kolejne etapy prowadzące do otrzymania równania regresji.

W rozdziale 13 pokazano jak wykorzystać wyprowadzone równanie regresji w celu określenia stanu optymalnego lub polioptymalnego badanego obiektu. Podano dwa przykłady określania stanu optymalnego oraz jeden przykład określania stanu polioptymalnego.

W rozdziale 14 przedstawiono najważniejsze programy komputerowe wspomagające badania inżynierskie, ułatwiające realizację eksperymentów, zgodnie z zasadami teorii planowania badań doświadczalnych, a także statystyczne opracowanie otrzymanych wyników, ich optymalizację lub przedstawianie w postaci

równań regresji, wykresów i tablic. Przedstawiono również przykład komputerowego wspomagania badań inżynierskich przy wykorzystaniu programu PLANEKS-STAT.

Załącznik zawiera tablice statystyczne i tablice liczb losowych, niezbędne do samodzielnej identyfikacji obiektów przez Czytelnika.

Książkę kończy wykaz literatury uzupełniającej.

# 2

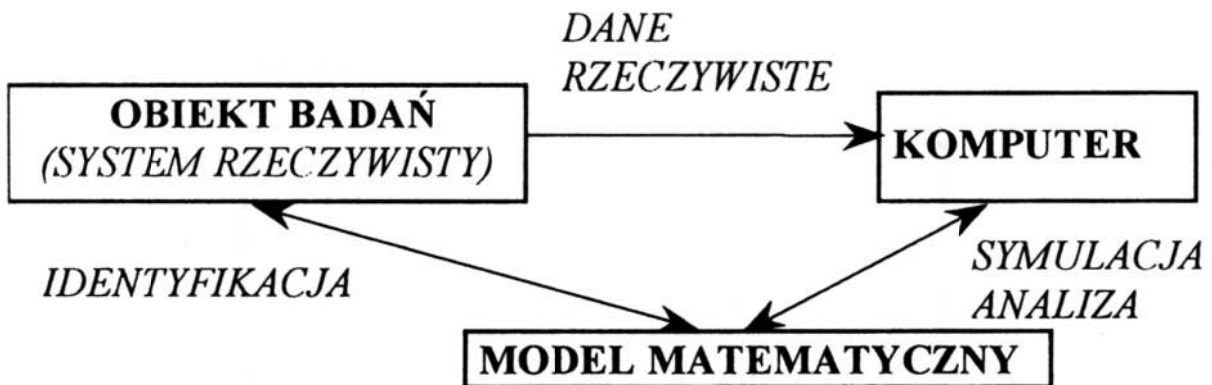
## POJĘCIA PODSTAWOWE

---

Rozdział ten jest wstępem do statystycznych metod tworzenia modeli matematycznych obiektów wielowymiarowych. Zawiera on wyjaśnienie podstawowych pojęć takich jak identyfikacja, symulacja, analiza, obiekt badań, model matematyczny obiektu badań, model podstawowy, model scalony, układ eksperymentu, zależność statystyczna i funkcyjna.

### 2.1. Identyfikacja, symulacja i analiza

Wyrażenie "identyfikacja i symulacja" oznacza zestaw działań związanych z konstruowaniem statystycznych modeli obiektu badań i symulowania ich na komputerze. Z tej definicji wynika, że mamy do czynienia z trzema głównymi elementami - *obiektem badań* (systemem rzeczywistym), *modelem matematycznym* i *komputerem*. *Identyfikacja* dotyczy zależności pomiędzy obiektem a modelem, natomiast *symulacja* i *analiza* związana jest głównie z zależnościami pomiędzy komputerem a modelem (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Podstawowe elementy oraz relacje identyfikacji i symulacji lub analizy.

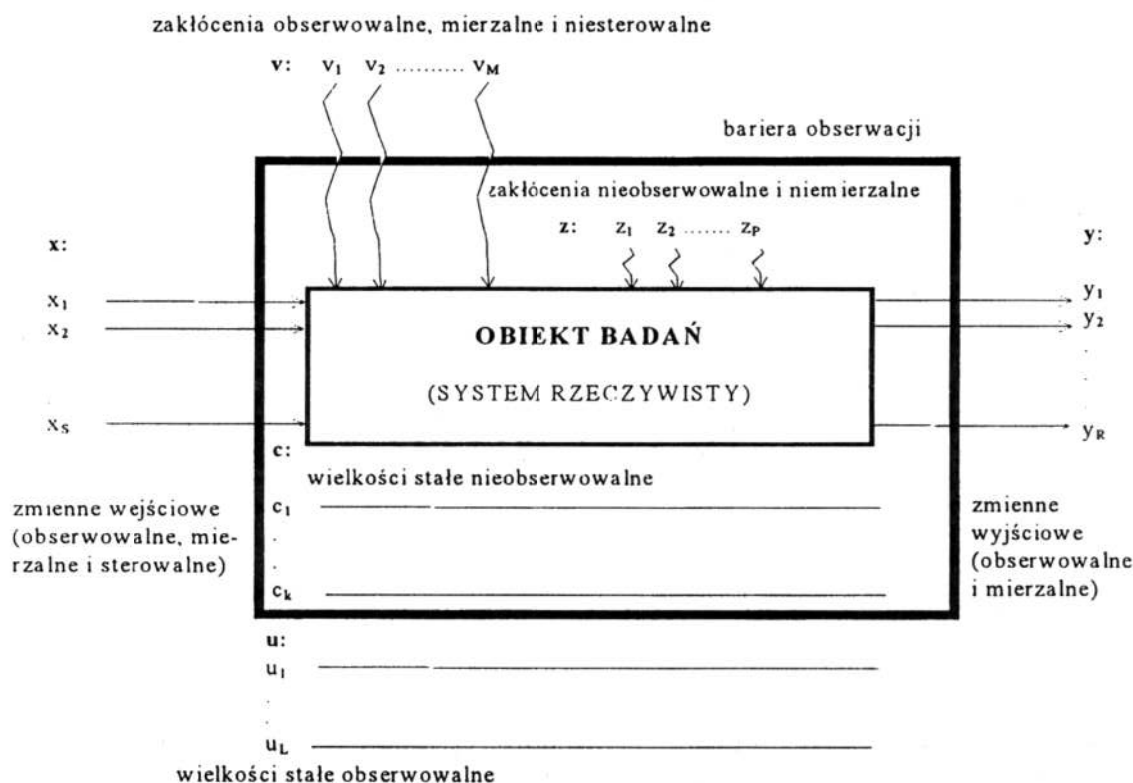
W procesie opracowywania modelu matematycznego występuje pięć elementów: obiekt badań, układ eksperymentu, model podstawowy, model scalony i komputer.

## 2.2. Obiekt badań

*Obiektem badań* (systemem rzeczywistym) nazywa się interesującą nas część świata rzeczywistego. Obiekt badań jest źródłem danych obserwowalnych i mierzalnych lub niemierzalnych oraz nieobserwowalnych i niemierzalnych. Obiekt może być *naturalny*, np. system fizyczny, biologiczny lub ekologiczny, *sztuczny*, np. system operacyjny komputera lub *mieszany*, zawierający elementy zarówno naturalne jak i sztuczne, np. procesy wytwarzania, procesy eksploatacji, gospodarstwo rolne, systemy: transportowe, miejskie lub światowe.

Obiekt badań możemy sobie wyobrazić tak, jak to pokazano na rys. 2.2, gdzie strzałki przedstawiają zmienne opisowe (między którymi mogą występować zależności przyczynowo-skutkowe), które są ważne dla zrozumienia opisu i/lub kontroli systemu.

Zmienne opisowe obiektu można podzielić na obserwowalne i nieobserwowalne. Zmienne obserwowalne mogą być mierzalne, sterowalne lub niesterowalne. *Zmiennymi mierzalnymi* nazywamy te zmienne, którym odpowiadają istniejące mierniki, które mają możliwość rejestrowania odczytów. Natomiast *zmienne niemierzalne* są to takie zmienne, które w chwili obecnej nie mogą być zmierzone z założoną dokładnością. *Zmienne sterowalne* są to takie zmienne, których wartości można zmieniać. *Zmiennych niesterowalnych* nie można zmieniać.



Rys. 2.2. Złożony obiekt badań.



Wszystkie wielkości występujące w złożonym obiekcie badań można także podzielić na sześć grup:

- wielkości wejściowe obserwowalne, mierzalne i sterowalne, umożliwiające celowe oddziaływanie na obiekt, przedstawione wektorem  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_S\}$ ,
- wielkości wejściowe obserwowalne, mierzalne, lecz niesterowalne, stanowiące zakłócenia obiektu, przedstawione wektorem  $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_M\}$ ,
- wielkości wejściowe nieobserwowalne i niesterowalne, stanowiące zakłócenia obiektu, przedstawione wektorem  $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_P\}$ ,
- wielkości wejściowe stałe mierzalne i sterowalne, np. stałe warunki realizacji procesu, przedstawione wektorem  $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_L\}$ ,
- wielkości wejściowe stałe (niemierzalne i niesterowalne), przedstawione wektorem  $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_K\}$ ,
- wielkości wyjściowe obserwowalne i mierzalne, przedstawione wektorem  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_R\}$ , które są rezultatem wartości przyjmowanych przez wielkości wejściowe, stałe i zakłócenia.

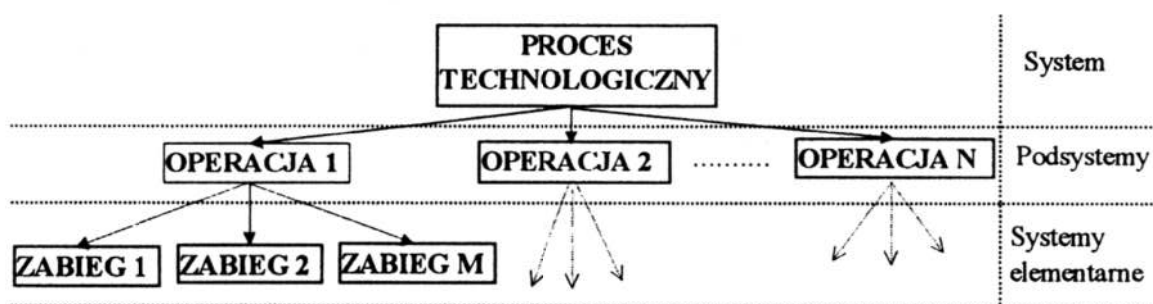
Zmienne wejściowe rozpatruje się jako *przyczyny*, a zmienne wyjściowe jako *skutki*.

W następnym podpunkcie przedstawionych zostanie kilka przykładów obiektów badań.

## 2.3. Przykłady obiektów badań

### 2.3.1. Proces technologiczny jako obiekt badań

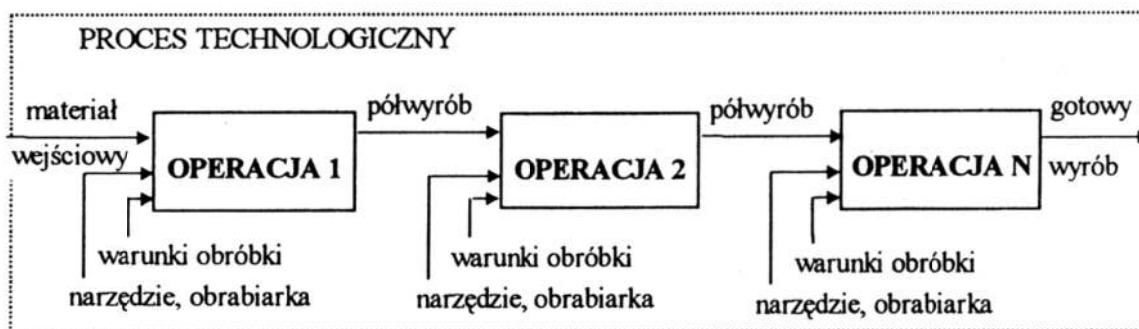
Proces technologiczny traktować można jako system składający się z szeregu podsystemów, którymi są operacje technologiczne. Poszczególne zabiegi technologiczne można uznać za systemy elementarne (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Schemat procesu technologicznego jako system [48].

Proces technologiczny rozważać można również jako system cybernetyczny wejście-wyjście (WE/WY), przy czym wejście stanowi materiał przeznaczony do

realizacji procesu (półwyrób), natomiast wyjście - gotowy wyrób po realizacji określonego procesu technologicznego. Uwzględniając w systemie procesu technologicznego podsystemy, czyli operacje technologiczne, schemat cybernetyczny procesu przedstawić można w sposób pokazany na rys. 2.4. Analizując przedstawiony schemat można stwierdzić, że proces technologiczny w ujęciu cybernetycznym traktowany jest jako szereg następujących po sobie operacji, z których wyjście poprzedniej operacji jest częścią wejścia do następnej. Ponadto z przedstawionego schematu wynika, że zarówno proces technologiczny, jak i operacje są obiektami wielowymiarowymi w ujęciu cybernetycznym.

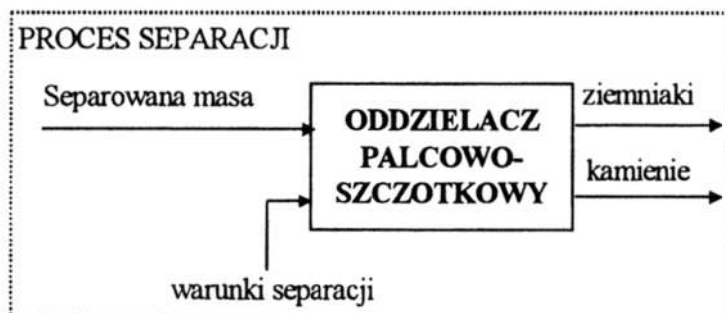


Rys. 2.4. Schemat procesu technologicznego w ujęciu cybernetycznym [48].

Przykładowo materiał wejściowy, czy też półwyrób posiadają już narzucone z poprzedniej operacji pewne cechy jakościowe (chropowatość powierzchni, dokładność, stan odkształceń, stan naprężeń, itd.), które mają wpływ na realizację analizowanej kolejnej operacji.

### 2.3.2. Proces separacji kamieni jako obiekt badań

Na rysunku 2.5 przedstawiony jest schematycznie proces oddzielania kamieni od bulw ziemniaka na oddzielaczu palcowo-szczotkowym, jako obiekt badań.



Rys. 2.5. Schemat procesu separacji kamieni na oddzielaczu palcowo-szczotkowym jako obiekt badań.

Konieczność separacji kamieni wynika z faktu, że maszyny do zbioru ziemniaków nie zapewniają dostatecznej ich czystości. Jednym z najprostszych oddzielaczy mechanicznych jest oddzielacz palcowo-szczotkowy [9].

Ogólny wskaźnik dokładności oddzielania zależy od następujących czynników:

- odległość szczotki od taśmy  $h$ ,
- sztywność palców taśmy  $R$ ,
- kąt pochylenia poprzecznego taśmy  $\alpha$ ,
- kąt pochylenia podłużnego taśmy  $\beta$ ,
- kąt ustawienia szczotki względem taśmy  $\gamma$ ,
- prędkość obwodowa szczotki  $v_s$ ,
- prędkość przesuwu taśmy  $v_t$ ,
- natężenie podawania separowanej masy  $\dot{m}$ ,
- udział kamieni w separowanej masie  $u_k$ ,
- kształt i wielkość kamieni  $G_k(l_k, w_k, h_k)$ ,
- kształt i wielkość ziemniaków  $G_z(l_z, w_z, h_z)$ .

## 2.4. Układ eksperymentu

Układ eksperymentu opisuje ograniczony zbiór warunków, w którym system rzeczywisty będzie obserwowany lub w których realizowany będzie eksperyment. Ponieważ układ eksperymentu związany jest z możliwą obserwacją systemu rzeczywistego, więc dla stosunkowo prostego modelu można utworzyć pary wejścia-wyjścia, które są zgodne, w obrębie pewnego kryterium porównawczego, ze wszystkimi parami wejścia-wyjścia układu. W przypadku, gdy zachodzi ta zgodność, mówimy że model jest *zasadny* dla tego eksperymentu.

## 2.5. Model podstawowy

Obiekt przedstawiony na rys. 2.2 jest obiektem wielowymiarowym o  $(S+M+P+K+L)$  wejściach i  $R$  wyjściach. Wielkości te są powiązane równaniami obiektu, które można symbolicznie zapisać w postaci zależności:

$$y = f(c, u, x, h, z), \quad (2.1)$$

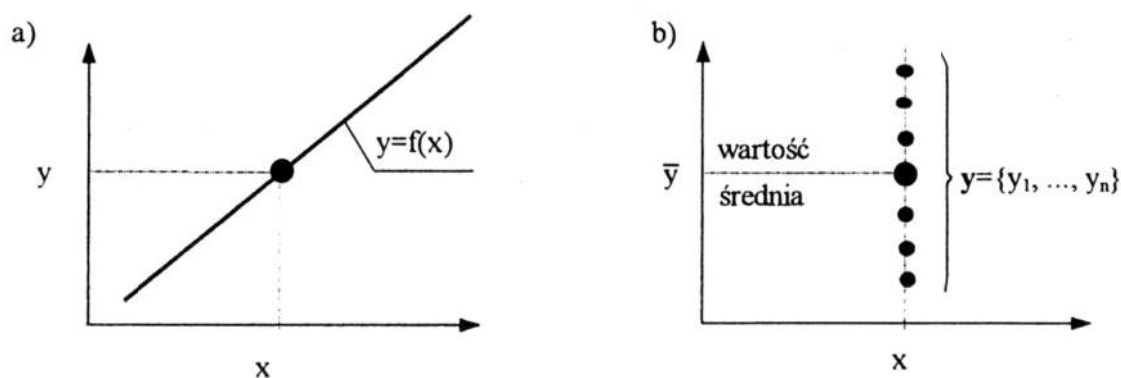
która jest *modelem matematycznym obiektu*.

*Modelem podstawowym* nazywamy model, który pozwoli uzyskać wszystkie relacje wejścia-wyjścia systemu rzeczywistego, czyli jest on *zasadny* dla wszystkich dopuszczalnych układów eksperymentów.

W rzeczywistości jednak, w przypadku złożonych obiektów, opis modelu podstawowego w postaci relacji (2.1) nie jest nigdy znany, chociaż pewne aspekty jego opisu mogą być przyjęte jako znane. Poza tym relacja (2.1) ma wartość tylko teoretyczną, ponieważ praktycznie nie znamy jej argumentów  $c$  i  $z$ . Z powodu nadmiaru elementów i interakcji stopień złożoności modelu podstawowego, mierzony pracochłonnością niezbędnych eksperymentów i mocą obliczeniową wymaganą dla skonstruowania i symulacji tego modelu, może być niezmiernie duży.

## 2.6. Zależność funkcyjna i statystyczna

Ze względu na to, że na wynik eksperymentu wpływa wiele czynników zakłócających, których nie można z eksperymentu wyeliminować ani też przewidzieć skutków ich działania, jednemu zbiorowi wartości zmiennych wejściowych  $x$  odpowiadać może kilka wartości zmiennej wyjściowej  $y$ . Zależności tego typu nazywamy **zależnościami statystycznymi**, w odróżnieniu od **zależności funkcyjnych** (deterministycznych), w których każdemu zbiorowi wartości zmiennych wejściowych  $x$  odpowiada tylko jedna wartość zmiennej wyjściowej  $y$  (rys. 2.6), zgodnie z zależnością  $y=f(x)$ .



Rys. 2.6. Zależność funkcyjna (a) i statystyczna (b).

## 2.7. Model scalony

Mając sprecyzowany układ eksperymentu z interesującym nas punktu widzenia, poszukujemy stosunkowo prostego modelu, który będzie zasadny dla tego modelu.

Taki stosunkowo prosty model nazywany jest *modelem scalonym*, ponieważ często model ten jest skonstruowany przez scalenie komponentów i odpowiednie

uproszczenie interakcji, na bazie modelu podstawowego lub wyobrażenia eksperymentatora o systemie rzeczywistym.

## 2.8. Kategorie modelu matematycznego

Większość podstawowych klasyfikacji związana jest z podstawą czasu, na której występują zdarzenia modelu. *Model jest ciągły w czasie*, jeżeli opis czasu dokonuje się w sposób ciągły. *Model jest dyskretny w czasie*, jeżeli czas płynie skokowo - wartości całkowite reprezentują wielokrotności pewnej określonej jednostki czasu [70].

Druga kategoria związana jest z zakresami wartości przyjmowanych przez zmienne opisowe. *Model jest dyskretny w stanie*, jeżeli jego zmienne przyjmują zbiór wartości dyskretnych, *ciągły w stanie*, jeżeli ich zakresy mogą być przedstawione za pomocą liczb rzeczywistych lub ich przedziałów i *zmienny w stanie*, jeżeli zawiera on oba rodzaje zmiennych [70].

Modele ciągłe w czasie mogą być dalej dzielone na *klasy dyskretnych zdarzeń i równań różniczkowych*. Model opisany za pomocą równań różniczkowych jest modelem ciągłym w czasie i ciągłym w stanie, w którym zmiany stanu są ciągłe [70].

Trzecia kategoria w opisie modelu zawiera zmienne losowe. *W modelu deterministycznym* zmienne losowe nie występują, natomiast *model probabilistyczny* lub *stochastyczny* zawiera co najmniej jedną taką zmienną [70].

Czwarta metoda klasyfikacji związana jest z tym, w jaki sposób w modelu jest brane pod uwagę współdziałanie systemu rzeczywistego z jego otoczeniem. *Model nazywamy autonomicznym*, jeżeli przyjęto w nim, że system rzeczywisty jest izolowany od wszelkich działań ze strony swojego otoczenia. Natomiast *model jest nieautonomiczny*, gdy znajduje się on pod wpływem otoczenia. Posiada on wtedy *zmienne wejściowe*, których wartości nie są przez model kontrolowane, lecz na które musi on reagować [70].

Piąta kategoria związana jest z tym, czy reguły interakcji modelu są ściśle zależne od czasu. *Model jest niezmienny w czasie*, jeżeli reguły interakcji są całkowicie zależne tylko od wartości, które mogą przyjmować zmienne opisowe. Z drugiej strony, w *modelu zmiennym w czasie*, czas może całkowicie wejść jako argument do reguł interakcji, które mogą być różne w różnym czasie [70].

Szósta kategoria modeli związana jest z tym, czy na ich reakcje wywiera czy też nie wywiera wpływu historia. Obecnie zmienność czasu i pamięć są pojęciami powiązanymi. Model zmienny w czasie może być wyrażony bez zależności od czasu przez włączenie czasu jako zmiennej opisowej [70].



# 3

## ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

---

### 3.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną jedynie te podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia materiału zawartego w następnych rozdziałach. Wyczerpujący wykład z zakresu rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć w pracach [11, 74].

**Rachunek prawdopodobieństwa** jest gałęzią matematyki i zajmuje się wykrywaniem oraz badaniem prawidłowości wśród wielkości losowych to jest wśród: **zdarzeń losowych, zmiennych losowych i procesów losowych** (zwanych również **procesami stochastycznymi**). Na podstawie znajomości rozkładów prawdopodobieństwa pewnych wielkości losowych wyznacza się rozkłady prawdopodobieństwa innych wielkości losowych, powiązanych z pierwszymi w określony sposób.

### 3.2. Podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia

#### 3.2.1. Zdarzenie losowe

Przez **zdarzenie losowe**, lub krótko **zdarzenie**, rozumie się każde zjawisko, które przy realizowaniu określonego zespołu warunków może zajść lub nie. Zrealizowanie określonego zespołu warunków nazywa się **doświadczeniem**. Wyniki realizacji doświadczenia nazywa się **zdarzeniami**. Jeśli wynik realizacji doświadczenia czy obserwacji jest niepewny, to mamy do czynienia ze **zdarzeniem losowym**. Podstawowym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa, które nie jest definiowane, jest **zbiór E zdarzeń elementarnych** e stanowiący zbiór wszystkich możliwych elementarnych, niepodzielnych wyników doświadczeń, czy obserwacji. **Zdarzenia złożone**, lub krótko **zdarzenia**, polegają na zajściu jednego zdarzenia z pewnej liczby zdarzeń elementarnych i są podzbiorami zbioru zdarzeń elementarnych. Na przykład, jeżeli zbiór E zdarzeń elementarnych zawiera N elementów  $e_1, e_2, \dots, e_N$ , to zbiór Z zdarzeń przypadkowych zawiera  $2^N$  zdarzeń: jedno zdarzenie niemożliwe (zbiór pusty U), N zdarzeń jednoelementowych,  $N(N-1)/2$  zdarzeń dwuelementowych, ..., N zdarzeń (N-1) elementowych i jedno zdarzenie pewne (cały zbiór E).

### 3.2.2. Algebra zdarzeń

*Sumą zdarzeń* nazywamy zdarzenie B składające się z tych wszystkich zdarzeń elementarnych, które należą co najmniej do jednego zdarzenia ze zbioru zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_K$ . Suma zdarzeń jest oznaczana wzorami:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K \quad \text{lub} \quad B = \bigcup_{i=1}^K A_i . \quad (3.1)$$

Sumie zdarzeń odpowiada podzbiór zbioru E zdarzeń elementarnych złożony z tych zdarzeń elementarnych, które należą przynajmniej do jednego ze zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_K$ .

*Iloczynem zdarzeń* nazywamy zdarzenie B składające się z tych zdarzeń elementarnych, które należą do każdego ze zbioru  $A_1, A_2, \dots, A_K$ . Iloczyn zdarzeń jest oznaczony wzorami:

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_K \quad \text{lub} \quad B = \bigcap_{i=1}^K A_i . \quad (3.2)$$

Iloczynowi zdarzeń odpowiada podzbiór zbioru E zdarzeń elementarnych złożony z tych zdarzeń elementarnych, które należą jednocześnie do każdego ze zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_K$ .

*Różnicą zdarzeń*  $A_1$  i  $A_2$  nazywamy zdarzenie B złożone z tych zdarzeń elementarnych, które należą do zdarzenia  $A_1$ , lecz nie należą do zdarzenia  $A_2$ . Różnica zdarzeń jest oznaczana wzorem:

$$B = A_1 - A_2 . \quad (3.3)$$

Inaczej mówiąc, różnicą zdarzeń  $A_1$  i  $A_2$  jest zdarzenie B polegające na tym, że zdarzenie  $A_1$  nastąpi a zdarzenie  $A_2$  nie nastąpi.

*Dopełnieniem zdarzenia* A nazywamy zdarzenie  $\bar{A}$  złożone z tych wszystkich zdarzeń elementarnych, które nie należą do zdarzenia A, a więc:

$$\bar{A} = E - A . \quad (3.4)$$

*Zdarzenie niemożliwe* V jest to podzbiór zbioru E nie zawierający żadnego elementu zbioru E.

*Zdarzenie pewne* U jest to podzbiór zbioru E zawierający wszystkie elementy zbioru E.

Dwa zdarzenia  $A_1$  i  $A_2$  nazywają się *zdarzeniami przeciwnymi*, jeżeli:

$$A_1 \cup A_2 = U \quad \text{oraz} \quad A_1 \cap A_2 = V. \quad (3.5)$$

Zdarzenie pewne i zdarzenie niemożliwe są zdarzeniami przeciwnymi. Otrzymywanie zdarzenia przeciwnego przez zaprzeczenie zdarzenia danego nazywa się negacją i oznacza kreską nad symbolem zdarzenia. Symbol  $\bar{E}_1$  oznacza więc zdarzenie przeciwne do zdarzenia  $E_1$ .

Mówimy, że zdarzenie  $E_1$  zawiera się w  $E_2$  lub że  $E_1$  *implikuje* (pociąga)  $E_2$ , jeżeli gdy zajdzie  $E_1$ , zajście  $E_2$  jest zdarzeniem pewnym. Na oznaczenie implikacji używa się zapisu:

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{lub} \quad E_1 \Rightarrow E_2. \quad (3.6)$$

Pojęcie implikacji można zdefiniować za pomocą iloczynu i negacji:

$$E_1 \subset E_2 = \bar{E}_1 \cap E_2. \quad (3.7)$$

Dwa zdarzenia  $E_1$  i  $E_2$  nazywają się *zdarzeniami równoważnymi* jeśli:

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{oraz} \quad E_2 \subset E_1. \quad (3.8)$$

Zdarzenia równoważne oznacza się  $E_1 = E_2$ .

Dwa zdarzenia  $E_1$  i  $E_2$  noszą nazwę *zdarzeń wyłączających się*, jeżeli:

$$E_1 \cap E_2 = V. \quad (3.9)$$

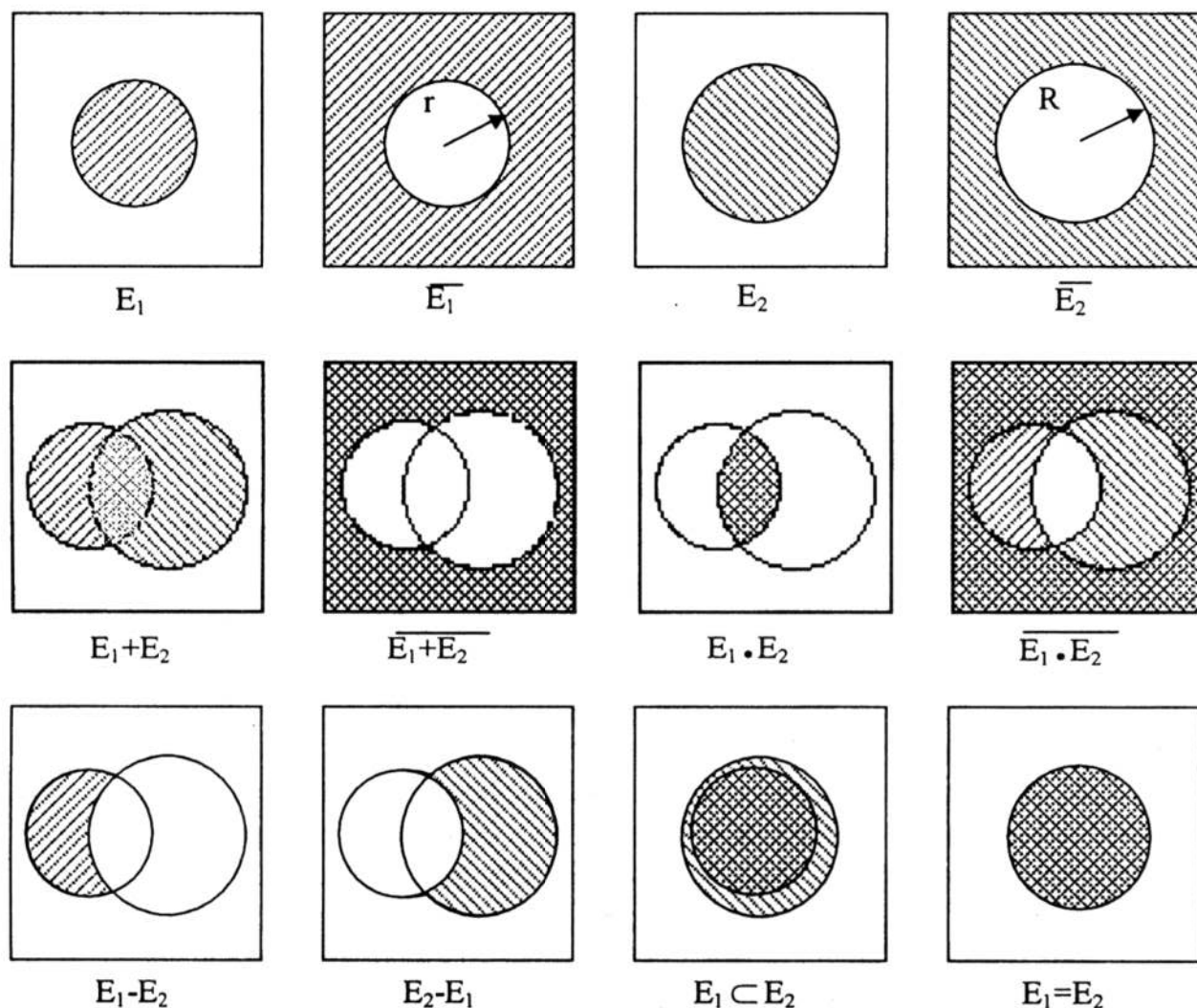
Do poglądowego przedstawienia działań i relacji dotyczących zdarzeń: suma, iloczyn, różnica oraz negacja, implikacja i równoważność wykorzystuje się tzw. **diagramy Eulera**, przedstawione na rysunku 3.1.

Dany jest kwadrat, wewnątrz którego znajdują się dwa okręgi odpowiednio o promieniu  $r$  i  $R$ , gdzie  $r < R$ . W obrębie kwadratu obiera się jakiś punkt. Symbolem  $E_1$  oznaczono zdarzenie polegające na tym, że punkt ten znajdzie się wewnątrz okręgu o średnicy  $r$ , a symbolem  $E_2$  zdarzenie polegające na tym, że punkt ten znajdzie się wewnątrz okręgu o średnicy  $R$ .

W ogólnej teorii rachunku prawdopodobieństwa żąda się, aby zbiór  $Z$  wszystkich zdarzeń miał dwie właściwości:

- a) dopełnienie  $\bar{A}$  każdego zdarzenia  $A$  należało do zbioru zdarzeń  $Z$ ,
- b) suma każdego skończonego lub przeliczalnego ciągu zdarzeń należała do zbioru zdarzeń  $Z$ .

Jeżeli pewien zbiór  $Z$  zawiera zdarzenia  $e_1, e_2, \dots$  oraz zbiór ten zawiera również: zdarzenie pewne  $U$ , zdarzenie niemożliwe  $V$ , sumę zdarzeń  $e_1 \cup e_2 \cup \dots$ , iloczyn zdarzeń  $e_1 \cap e_2 \cap \dots$  i różnicę dowolnej pary zdarzeń ze zbioru  $e_1, e_2, \dots$ , to zbiór  $Z$  nazywamy **borelowskim ciałem zdarzeń** (i oznaczamy również przez  $\mathcal{B}$ ), a jego elementy **zbiorami borelowskimi**. Każdy element zbioru  $Z$ , utworzonego z podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych, nazywa się **zdarzeniem losowym**. Oznacza to, że za zbiór zdarzeń przyjmuje się najmniejsze przeliczalnie addytywne ciało podzbiorów zawierające w przypadku prostej (jednowymiarowej przestrzeni zdarzeń elementarnych  $E$ ) wszystkie zbiory  $\{e: e < a\}$  stanowiące półproste  $(-\infty, a)$ , natomiast w przypadku wielowymiarowym (wielowymiarowej przestrzeni zdarzeń elementarnych  $E$ ) wszystkie zbiory o postaci  $\{e_1, e_2, \dots, e_N: e_1 < a_1, e_2 < a_2, \dots, e_N < a_N\}$ .



Rys. 3.1. Diagramy Eulera [11].

### 3.2.3. Zmienna losowa

**Zmienna losowa** jest jednym z podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa. Zmienna losowa jest to wielkość, która w wyniku realizacji doświadczenia przybiera jedną i tylko jedną wartość ze zbioru możliwych wartości. Zmienną losową oznacza się na ogół wielkimi literami alfabetu:  $X, Y, \dots$ . Wartości, jakie te zmienne przybierają, nazywa się realizacjami zmiennych losowych lub krótko realizacjami i oznacza odpowiednio małymi literami  $x, y, \dots$

Zmienna losowa  $X$  jest to funkcja rzeczywista  $X=X(e)$  określona na zbiorze  $E$  zdarzeń elementarnych  $e$ , mająca właściwość **mierzalności**, tzn. że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zbiór tych zdarzeń elementarnych  $e$ , dla których  $X(e) < x$  jest **zbiorem mierzalnym**, a więc jest zdarzeniem należącym do zbioru zdarzeń  $Z$ , czyli:

$$\{e: X(e) < x\} \in Z. \quad (3.10)$$

Zmienną losową jest więc każda funkcja rzeczywista mierzalna względem ciała zdarzeń. W każdym doświadczeniu występuje szereg wielkości o charakterze zmiennych, które mogą przyjmować różne wartości. Są to na przykład właściwości badanych procesów, błędy pomiarów, charakterystyki opisujące zależności między badanymi właściwościami lub zjawiskami. Wartości liczbowe, które przybierają te wielkości w doświadczeniu, nie są wyłącznie skutkiem systematycznego oddziaływania różnych czynników wynikających z istoty eksperymentu. Wpływają na nie również różnego rodzaju czynniki przypadkowe (zakłócające), których nie można z doświadczenia wyeliminować ani też przewidzieć skutków ich działania. Oddziaływanie czynników zakłócających powoduje, że rezultat obserwacji jest zawsze zmienną losową, tzn. wielkością, która pod wpływem różnorodnych czynników przypadkowych może przyjmować różne wartości, przy czym wcześniej nie wiadomo jakie. Zmienne losowe mogą być **ciągłe** albo **nieciągłe** (dyskretne, skokowe). Zmienna losowa jest ciągła, jeżeli może przyjmować dowolne wartości liczbowe z pewnego wyróżnionego przedziału liczbowego, przy czym w szczególności może to być przedział nieskończony. W przeciwieństwie do tego, zmienna losowa nieciągła przybiera wartości wyrażające się tylko niektórymi liczbami rzeczywistymi z określonego przedziału. Przykładem tego typu zmiennej losowej może być ilość cząsteczek jonizujących, emitowanych przez określoną substancję w jednostce czasu. Wielkość ta może wyrażać się tylko bądź zerem (w przypadku braku promieniowania jonizującego), bądź też kolejnymi liczbami naturalnymi, w zależności od aktywności badanej substancji i przyjętej jednostki czasu. Niemożliwe jest tu natomiast uzyskanie wartości ułamkowych.



Uogólnieniem jednowymiarowej zmiennej losowej  $X(e)$  jest wielowymiarowa zmienna losowa  $X_1(e), X_2(e), \dots, X_N(e)$ . Wielowymiarową zmienną losową jest uporządkowany zespół funkcji rzeczywistych  $X_1(e), X_2(e), \dots, X_N(e)$  określony na zbiorze  $E$  zdarzeń elementarnych, mających **właściwość mierzalności**, tzn. że dla każdego zespołu liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_N$  zbiór tych zdarzeń elementarnych  $e$ , dla których  $X_1(e) < x_1, X_2(e) < x_2, \dots, X_N(e) < x_N$  jest zbiorem mierzalnym, a więc jest zdarzeniem należącym do zbioru  $Z$ , czyli:

$$\{e: X_1(e) < x_1, X_2(e) < x_2, \dots, X_N(e) < x_N\} \in Z. \quad (3.11)$$

W dalszych rozważaniach wielowymiarowa zmienna losowa  $X_1(e), X_2(e), \dots, X_N(e)$  będzie również oznaczana po prostu  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

### 3.3. Definicje prawdopodobieństwa

#### 3.3.1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Do liczbowej oceny możliwości zajścia zdarzenia przypadkowego stosuje się termin **prawdopodobieństwa**. Autorem klasycznej definicji prawdopodobieństwa jest P. C. Laplace. Podał ją w 1812 r. w pracy "Théorie analytique des probabilités". Jeśli zdarzenie  $E$  rozkłada się na  $n$  wykluczających się wzajemnie i jednakowo możliwych zdarzeń elementarnych, spośród których  $m$  sprzyja zajściu interesującego nas zdarzenia  $A$ , to prawdopodobieństwem  $P(A)$  zajścia dowolnego zdarzenia  $A$  nazywa się stosunek liczby  $m$  doświadczeń sprzyjających temu zdarzeniu do ogólnej liczby  $n$  zdarzeń elementarnych (doświadczeń) tej samej klasy:

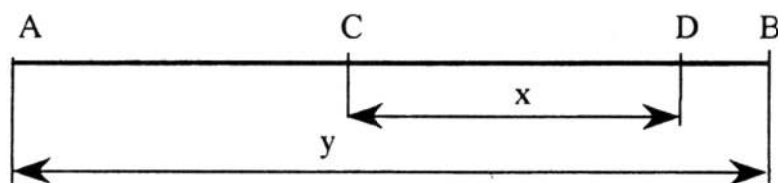
$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.12)$$

Sformułowana przez Laplace'a klasyczna definicja prawdopodobieństwa posiada trzy poważne wady. Pierwsza z nich polega na tym, że definicja ta jest *tautologią*. Oznacza to, że w definicji użyte jest słowo definiowane bowiem zdarzenia jednakowo możliwe to nic innego jak zdarzenia jednakowo prawdopodobne. Druga wada polega na tym, że definicja wymaga, aby zbiór zdarzeń sprzyjających zajściu danego zdarzenia  $A$  i zbiór wszystkich możliwych zdarzeń zawierały skończoną liczbę elementów. W przeciwnym bowiem razie klasyczna definicja prawdopodobieństwa traci sens. Trzecią wadą klasycznej definicji prawdopodobieństwa jest to, że żąda ona znajomości zbioru zdarzeń sprzyjających zajściu danego zdarzenia  $A$  i zbioru wszystkich możliwych zdarzeń, związanych z realizacją doświadczenia, w wyniku którego może wystąpić zdarzenie  $A$ .

Poszczególne wady doprowadziły do innych sformułowań definicji prawdopodobieństwa.

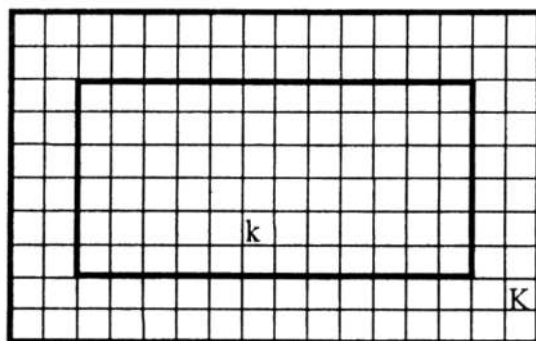
### 3.3.2. Geometryczna definicja prawdopodobieństwa

Wyobraźmy sobie na przykład, że na prostej dane są cztery punkty A, C, D, B (rys. 3.2). Punkty te wyznaczają pewien zbiór odcinków. Wybierzmy dwa spośród nich, a mianowicie odcinki AB i CD. Odcinek CD leży wewnątrz odcinka AB. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa nie daje odpowiedzi na następujące pytanie. Jeśli wiadomo, że wewnątrz odcinka AB wybrano pewien punkt, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że punkt ten został wybrany wewnątrz odcinka CD? Bowiem, ilość punktów należących do pewnego odcinka nie może być wyrażona liczbą skończoną, natomiast klasyczna definicja wymaga obliczenia ułamka. Intuicja podsuwa nam proste rozwiązanie. Przypuśćmy, że długość odcinka  $AB=y$ , zaś  $CD=x$ . Wówczas szukane prawdopodobieństwo wynosi:  $P(A)=x/y$ .



Rys. 3.2. Ilustracja do przykładu pierwszego.

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład. Na rysunku 3.3 są dwa prostokąty. Mniejszy z nich leży całkowicie wewnątrz większego. Oznaczmy mniejszy prostokąt literą  $k$ , większy zaś - literą  $K$ . Należy znaleźć prawdopodobieństwo  $P$ , zdarzenia  $A$ , polegającego na tym, że wybrany dowolny punkt należący do  $K$  będzie również należał do  $k$ .



Rys. 3.3. Ilustracja do przykładu drugiego [11].

Oznaczmy literą  $m$  liczbę kwadratów pokrywających prostokąt  $K$ , zaś literą  $n$  liczbę kwadratów pokrywających prostokąt  $k$ . Wówczas  $P(A)=m/n=72/160=9/20$ . Liczby  $m$  i  $n$  są miarami powierzchni obu prostokątów.

Te spostrzeżenia pozwalają sformułować tzw. **geometryczną definicję prawdopodobieństwa**. Jeśli  $Q$  i  $q$  są to dwa zbiory z przestrzeni  $r$ -wymiarowej oraz jeśli  $g \subset Q$ , to prawdopodobieństwo ( $A$ ) tego, że dowolny punkt należący do  $Q$  będzie również należał do  $q$ , równa się stosunkowi miar zbiorów  $q$  do  $Q$ , czyli:

$$P(A)=q/Q. \quad (3.13)$$

### 3.3.3. Statystyczna definicja prawdopodobieństwa

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa nie posiada dwóch pierwszych wad definicji klasycznej, posiada jednak wadę trzecią. Dla obliczenia prawdopodobieństwa w oparciu o definicję geometryczną, z równania (3.13), należy znać miary zbiorów  $q$  i  $Q$ , co w praktyce na ogół nie jest możliwe. Natomiast obliczenie prawdopodobieństwa z definicji klasycznej, tj. z równania (3.12), wymaga znajomości wszystkich możliwych zdarzeń danego typu. W celu określenia wszystkich zdarzeń należy przeprowadzić całkowite doświadczenie. Jednak przeprowadzenie pełnych doświadczeń dla całej populacji generalnej nie jest możliwe, chociażby ze względu na ograniczenia nakładów, jakie możemy przeznaczyć na badania - ograniczenia pieniędzy, pracochłonności, złożoności i czasu. Możliwe jest zbadanie jedynie ograniczonej liczby zdarzeń elementarnych. W tym celu rozpatrzmy następujący przykład. W urnie znajduje się 12 kul białych i 20 czarnych. Jeśli skład urny jest znany, to w oparciu o klasyczną definicję prawdopodobieństwa, bez przeprowadzania jakichkolwiek doświadczeń, możemy powiedzieć, że jeśli  $A$  oznacza wyciągnięcie z urny kuli białej, to  $P(A)=12/20=3/5$ . Powstaje jednak pytanie jak określić prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jeśli skład urny jest nieznan. Aby odpowiedzieć na to pytanie, przeprowadźmy następujące doświadczenie. Z urny wielokrotnie wyciągamy jedną kulę, oglądamy jej barwę, notujemy wynik i wkładamy kulę z powrotem do urny. Jeśli po każdorazowym wyciągnięciu i włożeniu kuli do urny wstrząśniemy urnę kilkakrotnie, to będziemy mogli uważać, że każdej kuli zapewniłyśmy jednakową szansę wyciągnięcia. Stosunek ilości wyciągniętych kul białych do ogólnej liczby ciągnięć będzie częstością zdarzenia  $A$ . Okazuje się jednak, że w miarę powiększania się liczby doświadczeń wahania częstości będą stawały się coraz mniejsze, oscylując wokół pewnej stałej liczby  $p$ . Tą nieznaną liczbą  $p$  jest prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ , czyli stosunek kul białych do wszystkich kul, znajdujących się w urnie.

Z tych względów stosuje się również **statystyczną, czyli częstościową definicję prawdopodobieństwa**. Prawdopodobieństwem statystycznym  $f_A$  zajęcia

zdarzenia A nazywa się stosunek liczby  $N_A$  doświadczeń, w których pojawi się zdarzenie A do ogólnej liczby doświadczeń  $N$ ,

$$f_A = \frac{N_A}{N}, \quad (3.14)$$

gdzie  $N$  jest liczebnością próbki (ogólną liczbą doświadczeń),  $N_A$  jest liczebnością empiryczną (częstością empiryczną). Tak obliczone prawdopodobieństwo nazywa się również częstością względną (liczebnością względną). Częstość względną zdarzenia dąży do pewnej wartości w miarę zwiększania ogólnej liczby doświadczeń  $N$ .

Jednym z podstawowych problemów obliczania prawdopodobieństwa ze wzoru (3.14) jest określenie liczebności próbki. Bowiem w miarę wzrostu liczby powtórzeń (próbki) wzrasta precyzja obliczenia  $f_A$ . Wzrastają również koszty badania. Istnieje zatem pewna granica liczebności próby, której nie należy przekraczać. Liczebność ta ustalana jest na podstawie teorii pobierania prób [67] (pkt. 10.1).

### 3.3.4. Współczesna definicja prawdopodobieństwa

Nowe, coraz szersze i dotyczące bardziej skomplikowanych problemów zastosowania rachunku prawdopodobieństwa w praktyce oraz konieczność wprowadzenia nowego aparatu badawczego, wiązały się z koniecznością stworzenia, na bazie istniejącego dorobku probabilistycznego, samodzielnej gałęzi wiedzy i odrębnej dyscypliny naukowej. Inicjatorem współczesnego rachunku prawdopodobieństwa jest Bernstein, a ostateczna jego koncepcja została wprowadzona przez Kołmogorowa. Współczesny rachunek prawdopodobieństwa opiera się na twierdzeniach teorii mnogości i teorii miary. Zaproponowany przez Kołmogorowa system pewników, stanowiących fundament rachunku prawdopodobieństwa jest następujący.

*Pewnik I.* Każdemu zdarzeniu  $A$ , wchodzącemu w skład borelowskiego ciała zdarzeń, przyporządkowana jest pewna liczba  $P(A)$ . Liczba ta czyni zadość warunkowi:

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad (3.15)$$

i nazywa się prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ .

*Pewnik II.* Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego  $E$  równa się jedności:

$$P(E) = 1. \quad (3.16)$$

*Pewnik III.* Prawdopodobieństwo sumy skończonej lub przeliczalnej ilości parami wyłączających się zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$  równa się sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = P(A_1) \cup P(A_2) \cup \dots \cup P(A_N) = \bigcup_{n=1}^N P(A_n). \quad (3.17)$$

Powyższe trzy pewniki noszą nazwę **systemu pewników rachunku prawdopodobieństwa** lub inaczej **aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa**.

### 3.4. Podstawowe właściwości funkcji prawdopodobieństwa

*Zdarzenia niezależne.* Zdarzenia  $A$  i  $B$  nazywa się niezależnymi, jeśli pojawienie się jednego z nich nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia drugiego. Jeśli prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  nie zależy od zajścia zdarzenia  $B$ , zaś zajście zdarzenia  $B$  nie zależy od  $A$ , to:

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B). \quad (3.18)$$

*Zdarzenie niemożliwe  $U$ ,* jest to zdarzenie, które na pewno nie zajdzie, i ma prawdopodobieństwo równe 0, czyli:

$$P(U) = 0. \quad (3.19)$$

*Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń.* Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń niezależnych  $A$  i  $B$  równe jest iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń:

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B). \quad (3.20)$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego iloczyn wielu zdarzeń niezależnych  $A_1 A_2 \dots A_N$  równy jest iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N) = P(A_1) \cap P(A_2) \cap \dots \cap P(A_N) = \prod_{i=1}^N P(A_i). \quad (3.21)$$

Dotychczas mówiliśmy o prawdopodobieństwie  $P(A)$  zajścia zdarzenia  $A$ , zwanym **prawdopodobieństwem bezwarunkowym**. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  przy warunku, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywa się **prawdopodobieństwem warunkowym** (lub **względny**) i oznaczane jest  $P(A|B)$ . Prawdopodobieństwa zdarzeń warunkowych  $P(A|B)$  i  $P(B|A)$  określają wzory:



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (3.22)$$

Na podstawie wzorów (3.22) otrzymuje się wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego iloczyn dwóch dowolnych zdarzeń A i B:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B|A). \quad (3.23)$$

Jeśli zdarzenia A i B są zdarzeniami niezależnymi, to  $P(A|B) = P(A)$  i  $P(B|A) = P(B)$ , więc  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia stanowiącego iloczyn wielu zdarzeń zależnych  $A_1 A_2 \dots A_N$  wynosi:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N) &= P(A_1 | A_2 \cap \dots \cap A_N) \cap P(A_2 | A_3 \cap \dots \cap A_N) \cap \dots \\ &\cap P(A_{N-1} | A_N) \cap P(A_N) = \\ &= P(A_1) \cap P(A_2 | A_1) \cap P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cap \dots \\ &\cap P(A_N | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{N-1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

*Prawdopodobieństwo całkowite.* Dane jest zdarzenie A i wzajemnie wyłączające się zdarzenia  $E_1, E_2, \dots, E_N$ . Załóżmy, że zdarzenia A może zajść tylko łącznie z jednym ze zdarzeń  $E_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Zatem:

$$A = A \cap E_1 \cup A \cap E_2 \cup \dots \cup A \cap E_N. \quad (3.25)$$

Ponieważ zgodnie z założeniem zdarzenia  $E_1, E_2, \dots, E_N$  wyłączają się wzajemnie, więc zdarzenia  $A \cap E_1 \cup A \cap E_2 \cup \dots \cup A \cap E_N$  są również zdarzeniami wyłączającymi się. Stąd:

$$P(A) = P(A \cap E_1) \cup P(A \cap E_2) \cup \dots \cup P(A \cap E_N) = \bigcap_{i=1}^N P(A \cap E_i). \quad (3.26)$$

Ze wzoru (3.23) na prawdopodobieństwo iloczynu dwóch dowolnych zdarzeń wynika, że:

$$P(A \cap E_i) = P(E_i) \cap P(A|E_i). \quad (3.27)$$

więc ostatecznie otrzymuje się następujący wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(E_i) \cap P(A|E_i). \quad (3.28)$$

*Wzór Bayesa.* Wzór Bayesa pozwala obliczyć prawdopodobieństwo, że zaszło jedno z wzajemnie wyłączających się zdarzeń  $E_1, E_2, \dots, E_N$ , jeśli wiadomo, że zaszło zdarzenie  $A$ . Wzór ten ma postać:

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i) \cap P(A|E_i)}{P(E_1) \cap P(A|E_1) \cup P(E_2) \cap P(A|E_2) \cup \dots \cup P(E_N) \cap P(A|E_N)}. \quad (3.29)$$

### 3.5. Funkcje zmiennej losowej

Podstawowymi funkcjami zmiennej losowej jest **dystrybuanta** i **gęstość prawdopodobieństwa**.

Przyporządkowując każdemu punktowi  $x$  osi  $Ox$  pewną wartość, określimy na zbiorze  $(a, b)$  funkcję całkowalną  $f(x)$ . Zwykle jest ona funkcją ciągłą i nazywa się **gęstością prawdopodobieństwa** lub krótko **gęstością** (rys. 3.4). Sama krzywa gęstości rozkładu ciągłego jest bezpośrednio mało przydatna. Z probabilistycznego punktu widzenia interesująca jest głównie powierzchnia pod tą krzywą. Jak widać z rysunku 3.3 przechodząc od  $x$  ujemnych do dodatnich obserwujemy ciągle narastanie (kumulowanie się) tej powierzchni (prawdopodobieństwa). W skrajnych przypadkach powierzchnia ta przyjmuje następujące wartości - w  $-\infty$  wynosi zero, a w odległości  $+\infty$  równa jest jedności. Funkcja określająca narastanie prawdopodobieństwa w zależności od punktu osi  $Ox$  nazywa się **dystrybuantą**.

**Dystrybuanta** jest najbardziej ogólną charakterystyką określającą rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej. **Dystrybuanta  $F(x)$  jednowymiarowej zmiennej losowej  $X(e)$**  przedstawia prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że zmienna losowa  $X(e)$  przyjmie wartość mniejszą od określonej liczby  $x$ :

$$F(x) = P(\{e: X(e) < x\}). \quad (3.30)$$

Na podstawie dystrybuanty można łatwo określić prawdopodobieństwo, że  $X(e)$  znajdzie się w przedziale  $x_1 \leq X(e) < x_2$ , ze wzoru:

$$P(\{e: x_1 \leq X(e) < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1). \quad (3.31)$$

Dystrybuanta  $F(x)$  jest funkcją określoną w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ , monotoniczną niemalejącą i przynajmniej lewostronnie ciągłą, przy czym:

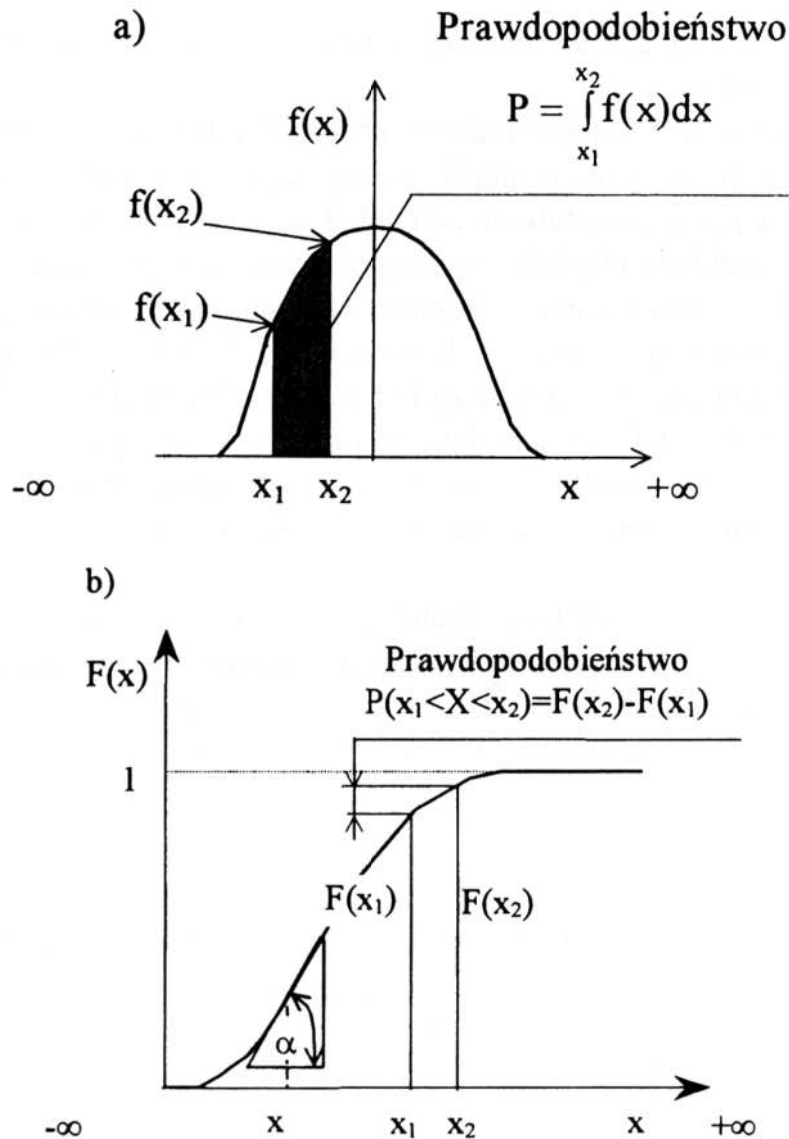
$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1, \quad (3.32)$$

zgodnie z definicją prawdopodobieństwa.

W przypadku, gdy zmienna losowa jest ciągła i różniczkowalna, to istnieje funkcja  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (3.33)$$

będąca gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  (rys. 3.4a). W interpretacji geometrycznej wartość funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x$  jest równa tangensowi kąta nachylenia krzywej do dystrybuanty w rozpatrywanym punkcie:  $f(x) = \operatorname{tg} \alpha = dF(x)/dx$  (rys. 3.4b).



Rys. 3.4. Gęstość prawdopodobieństwa  $f(x)$  (a) i dystrybuanta  $F(x)$  (b) rozkładu prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej  $X$ .

Ponieważ funkcja  $F(x)$  jest niemalejąca, więc:

$$f(x) \geq 0, \quad (3.34)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (3.35)$$

Prawdopodobieństwo tego, że  $X(e)$  jest zawarte w przedziale  $x_1 < X(e) < x_1 + dx$  wynosi:

$$P(\{e: x_1 \leq X(e) < x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (3.36)$$

**Dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej**  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  przedstawia prawdopodobieństwo zdarzenia losowego polegającego na tym, że wielowymiarowa zmienna losowa przyjmie wartość w obszarze  $X_i < x_i$ , dla  $i=1, 2, \dots, N$ :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_N < x_N). \quad (3.37)$$

**Gęstością prawdopodobieństwa**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  **wielowymiarowej zmiennej losowej**  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  nazywamy pochodną mieszaną dystrybuanty w punkcie  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial^k F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}. \quad (3.38)$$

Funkcja  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest nieujemną funkcją rzeczywistą i która spełnia następującą relację:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_N} \dots \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N,$$

oczywiście:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1. \quad (3.39)$$

Prawdopodobieństwo tego, że wielowymiarowa zmienna losowa  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  przyjmie wartość w uogólnionym wielowymiarowym prostokącie, wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
 P(x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, \dots, x_N \leq X_N < x_N + \Delta x_N) = \\
 = \int_{x_N}^{x_N + \Delta x_N} \dots \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Ogólnie, prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa wielowymiarowa  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  przyjmie wartość w obszarze mierzalnym  $\Omega$ , wynosi:

$$P[(X_1, X_2, \dots, X_N) \in \Omega] = \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (3.41)$$

Gęstość prawdopodobieństwa  $f(x_i)$  dla jednowymiarowej zmiennej losowej  $X_i$  można znaleźć całkując wielowymiarową gęstość prawdopodobieństwa  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , w całym obszarze zmienności pozostałych zmiennych:

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_2 \dots dx_N \quad (3.42)$$

Taką gęstość nazywa się również **gęstością brzegową**.

Zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_N$  nazywa się **stochastycznie niezależnymi**, jeśli zachodzi równość:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = F(x_1)F(x_2) \dots F(x_N) \quad (3.43)$$

**Gęstość prawdopodobieństwa warunkowego** zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , przy danych  $X_{k+1}=x_{k+1}, \dots, X_N=x_N$ , wyraża się wzorem:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_N) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)}{f(x_{k+1}, \dots, x_N)}, \quad (3.44)$$

przy czym:

$$f(x_{k+1}, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (3.45)$$

### 3.6. Parametry opisowe rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

Dla opisu rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej wprowadza się liczby charakteryzujące w pewien sposób zbiór wartości, jakie może przybierać zmienna losowa. Liczby te nazywa się parametrami opisowym lub krótko parametrami. Największe znaczenie praktyczne mają dwie grupy parametrów. Do pierwszej grupy zalicza się parametry reprezentujące przeciętną wartość zmiennej losowej, do drugiej grupy natomiast - parametry dające wyobrażenie o tym,



jak bardzo poszczególne wartości zmiennej losowej odchylają się od tej przeciętnej wartości. Najważniejszymi parametrami, należącymi do pierwszej grupy, są tak zwana **wartość przeciętna i średnia arytmetyczna**. W drugiej grupie, najważniejszymi parametrami są **wariancja, rozstęp, odchylenie średnie, współczynnik zmienności i odchylenie przeciętne**.

### 3.6.1. Wartość przeciętna i średnia arytmetyczna

**Wartość przeciętną**  $E(X)$  nazywa się również **wartością oczekiwaną, wartością średnią** albo **nadzieją matematyczną** zmiennej losowej  $X$ .

**Wartością przeciętną** zmiennej losowej skokowej  $X$  nazywa się sumę iloczynów wszystkich możliwych jej wartości  $x_i$  przez odpowiadające im prawdopodobieństwa  $P(x_i)$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot P(x_i), \quad (3.46)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę wszystkich możliwych wartości zmiennej skokowej  $X$ . Do oznaczenia wartości oczekiwanej stosuje się również symbole  $\mu_x$ ,  $m_x$  i  $M_x$ . W przypadku jednej zmiennej stosuje się po prostu symbole  $\mu$ ,  $m$  i  $M$ .

**Wartością przeciętną** zmiennej losowej ciągłej nazywa się całkę określoną z iloczynu gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  przez wartość zmiennej  $x$  obliczoną w przedziale  $-\infty$  do  $+\infty$ ,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (3.47)$$

**Średnią arytmetyczną**  $\bar{X}$  zmiennej losowej skokowej uporządkowanej w szeregu rozdzielczy (pkt. 4.1) można obliczyć ze wzoru:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad (3.48)$$

gdzie  $f_i$  oznacza liczebność względną przedziału,  $x_i$  jest środkiem przedziału,

$$N = \sum_{i=1}^n f_i.$$

Gdy dane nie są uporządkowane w szeregu rozdzielczym, wówczas:  $f_i=1$ , ponieważ każda z danych ma liczebność jeden, zaś średnią arytmetyczną w próbie  $\bar{X}$  oblicza się ze wzoru:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3.49)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę przeprowadzonych obserwacji. Wartość oczekiwana  $\bar{X}$  jest równa w przybliżeniu wartości średniej w próbce:  $\bar{X} \cong E(X)$ .

**Twierdzenia o wartości przeciętnej.** *Twierdzenie 1.* Wartość przeciętna stałej równa się tej stałej:

$$E(C) = C. \quad (3.50)$$

*Twierdzenie 2.* Wartość przeciętna sumy dwóch zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  równa się sumie wartości przeciętnych tych zmiennych:

$$E(X \cup Y) = E(X) \cup E(Y). \quad (3.51)$$

*Twierdzenie 3.* Wartość przeciętna sumy dowolnej skończonej liczby zmiennych losowych równa się sumie wartości przeciętnych tych zmiennych:

$$E(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_N) = \bigcup_{i=1}^N E(X_i). \quad (3.52)$$

*Twierdzenie 4.* Wartość przeciętna iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  równa się iloczynowi wartości przeciętnych tych zmiennych:

$$E(X \cap Y) = E(X) \cap E(Y). \quad (3.53)$$

Twierdzenie 4 łatwo jest uogólnić na iloczyn dowolnej skończonej liczby zmiennych losowych, który równa się iloczynowi wartości przeciętnych tych zmiennych:

$$E(X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_N) = \bigcap_{i=1}^N E(X_i).$$

### 3.6.2. Wariancja, rozstęp, odchylenie średnie, współczynnik zmienności i odchylenie przeciętne

Dla oceny **rozproszenia** (lub inaczej **dyspersji** albo **odchyleń**) wartości zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej stosuje się pojęcia **wariancji**, **rozstępu**, **odchylenia średniego** i **odchylenia przeciętnego**.

**Wariancją zmiennej losowej  $X$  nieciągłej** nazywa się wartość oczekiwaną kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości oczekiwanej  $E(X)$ :

$$\text{var}(X) = E[X - E(X)]^2. \quad (3.54)$$

Do oznaczenia wariancji zmiennej losowej  $X$  stosuje się również symbole:  $\sigma_x^2$ ,  $D^2(X)$  i  $V(X)$  lub w przypadku jednej zmiennej losowej:  $\sigma^2$ ,  $D^2$  i  $V$ .

Jeśli  $X$  jest zmienną losową typu skokowego, mogącą przybierać skończoną liczbę wartości  $X_i$  ( $i=1,2, \dots, N$ ) z prawdopodobieństwami odpowiednio  $P(X_i)$ , to:

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^N [X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i). \quad (3.55)$$

Jeśli natomiast  $X$  jest skokową zmienną losową, która może przybierać przeliczalny zbiór wartości, to:

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [X_i - E(X)]^2 \cdot P(X_i). \quad (3.56)$$

przy założeniu, że szereg stojący po prawej stronie równości (3.56) jest zbieżny.

Jeśli  $X$  jest zmienną losową typu ciągłego, a  $f(x)$  jest gęstością prawdopodobieństwa tej zmiennej, to:

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x) dx. \quad (3.57)$$

**Twierdzenia o wariancji.** *Twierdzenie 1.* Wariancja stałej równa się zeru:

$$\text{var}(C) = 0. \quad (3.58)$$

*Twierdzenie 2.* Wariancja iloczynu stałej  $C$  przez zmienną losową  $X$  równa się iloczynowi kwadratu tej stałej przez wariancję zmiennej losowej  $X$ :

$$\text{var}(C \cdot X) = C^2 \cdot \text{var}(X). \quad (3.59)$$

*Twierdzenie 3.* Wariancja sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  jest równa sumie wariancji tych zmiennych. Dowód: na podstawie wzoru (3.54) wariancja sumy dwóch zmiennych wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}\text{var}(X \cup Y) &= E\{[(X \cup Y) - E(X \cup Y)]^2\} = E\{([X - E(X)] \cup [Y - E(Y)])^2\} = \\ &= E\{[X - E(X)]^2\} \cup 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \cup E\{[Y - E(Y)]^2\} = \\ &= \text{var}(X) \cup 2 \text{cov}(X, Y) \cup \text{var}(Y),\end{aligned}$$

gdzie  $\text{cov}(X, Y)$  jest tzw. kowariancją dwóch zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ , czyli średnia arytmetyczna iloczynu odchyleń wartości zmiennych od ich średnich arytmetycznych. Ponieważ dla zmiennych stochastycznie niezależnych  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , więc:

$$\text{var}(X \cup Y) = \text{var}(X) \cup \text{var}(Y). \quad (3.60)$$

*Twierdzenie 4.* Wariancja sumy  $N$  niezależnych zmiennych losowych  $X_i$  jest równa sumie wariancji tych zmiennych:

$$\text{var}\left(\bigcup_{i=1}^N X_i\right) = \bigcup_{i=1}^N \text{var}(X_i). \quad (3.61)$$

*Twierdzenie 5.* Wariancja różnicy dwóch niezależnych zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  jest równa sumie wariancji tych zmiennych:

$$\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) \cup \text{var}(Y). \quad (3.62)$$

*Twierdzenie 6.* Wariancja sumy  $N$  iloczynów stałych  $C_i$  przez niezależną zmienną losową  $X_i$  jest równa sumie iloczynów kwadratów stałej  $C_i$  przez wariancję zmiennej  $X_i$ :

$$\text{var}(C_1 \cap X_1 \cup C_2 \cap X_2 \cup \dots \cup C_N \cap X_N) = \bigcup_{i=1}^N C_i^2 \cap \text{var}(X_i). \quad (3.63)$$

*Twierdzenie 7.* Jeżeli zmienna losowa  $X$  ma wariancję  $\text{var}(X)$ , to zmienna losowa  $(X-C)$ , gdzie  $C$  jest dowolną stałą, ma wariancję równą  $\text{var}(X)$ .

Można dowieść, że wariancja jest równa różnicy między wartością oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej a kwadratem jej wartości oczekiwanej:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \quad (3.64)$$

Zależność ta jest dogodna przy obliczaniu wariancji i jest często wykorzystywana.

Dokonajmy teraz operacji **unormowania (standaryzacji)** zmiennej losowej  $X$  o wartości oczekiwanej  $m_x$  i wariancji  $\sigma_x^2$ . Unormowanie polega na przekształceniu liniowym zmiennej losowej  $X$  w nową zmienną losową  $X^u$  zgodnie ze wzorem:

$$X^u = \frac{X - m_x}{\sigma_x}. \quad (3.65)$$

Unormowana zmienna losowa  $X^u$  ma wartość oczekiwaną równą zero:

$$E(X^u) = \frac{E(X) - m_x}{\sigma_x} = 0, \quad (3.66)$$

i wariancję równą jeden:

$$\text{var}(X^u) = E\left[\left(\frac{X - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right] = \frac{E[(X - m_x)^2]}{\sigma_x^2} = 1. \quad (3.67)$$

Współczynnik korelacji  $R_{X_1 X_2}$  dwóch zmiennych losowych  $X_1$  i  $X_2$  jest kowariancją unormowanych zmiennych  $X_1^u$  i  $X_2^u$ :

$$R_{X_1 X_2} = \text{cov}(X_1^u, X_2^u), \quad (3.68)$$

i dlatego nazywany jest również **kowariancją unormowaną**.

**Rozstępem  $R$  (rozpiętością lub obszarem zmienności)** nazywa się różnicę między największą i najmniejszą wartością zmiennej losowej:

$$R = X_{\max} - X_{\min}. \quad (3.69)$$

Bardziej dokładną miarą dyspersji zmiennej losowej jest **odchylenie średnie**  $\sigma(X)$  (zwane również **standardowym** lub **kwadratowym**) zmiennej losowej, który jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}. \quad (3.70)$$

Do oznaczenia odchylenia średniego stosuje się również symbol  $D(X)$  lub  $D$ .

Dla rozkładów doświadczalnych **skorygowaną wariancję w próbce** oznacza się przez  $S^2$  i określa jako sumę kwadratów odchylen wartości obserwowanych od ich wartości oczekiwanej, dzieloną przez wyrażenie  $(N-1)$ :



$$S^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}, \quad (3.71)$$

gdzie  $N-1=f$  oznacza liczbę stopni swobody.

**Odchylenie średnie** ma wówczas postać:

$$S(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}. \quad (3.72)$$

Oprócz odchylenia standardowego oblicza się **współczynnik zmienności V**, który jest stosunkiem odchylenia standardowego do średniej arytmetycznej:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}}. \quad (3.73)$$

**Odchylenie przeciętne zmiennej losowej X** nazywa się wartość przeciętną bezwzględnego odchylenia wartości zmiennej losowej od wartości przeciętnej  $E(X)$ . Oznaczając odchylenie przeciętne literą  $d$ , otrzymuje się dla zmiennej losowej skokowej:

$$d = \sum_{-\infty < X_i < \infty} |X_i - E(X)|P(X_i), \quad (3.74)$$

lub

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E(X)|f(x)dx, \quad (3.75)$$

dla zmiennej losowej ciągłej.

### 3.6.3. Momenty

Omówione w pkt. 3.6.1 i 3.6.2 parametry opisowe: wartość przeciętna, wariancja i odchylenie przeciętne należą do wspólnej grupy parametrów, zwanych **momentami**. Momenty dzielą się na: **momenty absolutne** i **względne** oraz na **momenty zwykłe** i **centralne**.

**Momentem absolutnym rzędu  $k$**  nazywa się wartość przeciętną zmiennej losowej  $|X - C|^k$ , gdzie  $C$  oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, zwaną punktem odniesienia, natomiast  $k$  jest liczbą naturalną:  $E(|X - C|^k)$ .

**Momentem względnym rzędu  $k$**  lub krótko - momentem rzędu  $k$  nazywa się wartość przeciętną zmiennej losowej  $(X-C)^k$ :  $E[(X-C)^k]$ .

Momenty, których punkt odniesienia  $C=0$ , nazywają się momentami zwykłymi. Momenty te oznacza się zwykle symbolem  $m_k$ , to znaczy:

$$m_k = E(X^k). \quad (3.76)$$

Wówczas:

$$m_k = \sum_{-\infty < X_i < \infty} X_i^k P(X_i), \quad (3.77)$$

gdy zmienna losowa  $X$  jest zmienną skokową, lub

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad (3.78)$$

gdy zmienna losowa jest ciągła.

Omówiona w pkt. 3.6.1 wartość przeciętna  $E(X)$  jest momentem zwykłym pierwszego rzędu, więc:  $m_1 = E(X^1) = E(X)$ .

Momenty, których punkt odniesienia  $C=E(X)$ , nazywają się **momentami centralnymi**. Momenty centralne oznacza się na ogół symbolem  $\mu_k$ , zatem:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = E(X - m_1)^k. \quad (3.79)$$

Dla zmiennych losowych skokowych  $k$ -ty moment centralny wyraża się wzorem:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]^k P(X = X_i), \quad (3.80)$$

zaś w przypadku zmiennych losowych ciągłych:

$$\mu_k = \int_a^b [X - E(X)]^k f(x) dx. \quad (3.81)$$

Przykładem momentu centralnego absolutnego pierwszego rzędu jest odchylenie przeciętne. Wariancja jest przykładem momentu centralnego drugiego rzędu. Wariancja jest momentem względnym.

**Momentem względnym rzędu  $l+k$**  dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$  nazywamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $[(X - C)^l (Y - D)^k]$ :

$$E[(X - C)^l (Y - D)^k]. \quad (3.82)$$

Liczby  $l$  i  $k$  mogą przybierać dowolne wartości ze zbioru liczb całkowitych nieujemnych. Liczby  $C$  i  $D$ , są dowolnymi liczbami i nazywają się **współrzędnymi punktu odniesienia**.

Momenty, których współrzędne punktu odniesienia  $C=D=0$ , nazywają się **momentami zwykłymi**. Momenty te oznacza się na ogół symbolem  $m_{lk}$ . Zatem:

$$\begin{aligned} m_{lk} = E(X^l Y^k) &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow +\infty}} \sum_{a \cdot x_i \cdot b} \sum_{c \cdot y_j \cdot d} X_i^l Y_j^k P(X_i, Y_j) = \\ &= \sum_i \sum_j X_i^l Y_j^k P(X_i, Y_j), \end{aligned} \quad (3.83)$$

gdy zmienna losowa  $(X, Y)$  jest skokowa, oraz

$$m_{lk} = E(X^l Y^k) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{\substack{c \rightarrow -\infty \\ d \rightarrow +\infty}} \int_a^b \int_c^d x^l y^k f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^l y^k f(x, y) dx dy, \quad (3.84)$$

gdy zmienna losowa  $(X, Y)$  jest ciągła.

Najczęściej korzysta się z **momentów pierwszego i drugiego rzędu**. Momentami pierwszego rzędu są wartości oczekiwane zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ :

$$m_{10} = E(X^1 Y^0) = E(X), \quad (3.85)$$

oraz

$$m_{01} = E(X^0 Y^1) = E(Y). \quad (3.86)$$

**Moment drugiego rzędu** określony wzorem:

$$m_{11} = E(X^1 Y^1) = E(XY), \quad (3.87)$$

nazywa się **momentem mieszanym**. Pozostałe dwa momenty drugiego rzędu wyrażają się wzorami:

$$m_{02} = E(X^0 Y^2) = E(Y^2), \quad (3.88)$$

$$m_{20} = E(X^2 Y^0) = E(X^2). \quad (3.89)$$

Momenty, których współrzędne punktu odniesienia  $C=E(X)$  oraz  $D=E(Y)$ , nazywają się **momentami centralnymi**, które oznacza się zwykle symbolem  $\mu_{lk}$ .  
Zatem:

$$\mu_{lk} = E[(X - m_{10})^l (Y - m_{01})^k]. \quad (3.90)$$

Mamy więc:

$$\mu_{10} = E[(X - m_{10})^1 (Y - m_{01})^0] = 0, \quad (3.91)$$

oraz

$$\mu_{01} = E[(X - m_{10})^0 (Y - m_{01})^1] = 0. \quad (3.92)$$

Duże znaczenie w dalszych rozważaniach będą miały trzy momenty centralne drugiego rzędu. Momenty:

$$\mu_{20} = E[(X - m_{10})^2] = \text{var}(X), \quad (3.93)$$

$$\mu_{02} = E[(Y - m_{01})^2] = \text{var}(Y). \quad (3.94)$$

są to wariancje zmiennej losowej  $X$  i zmiennej losowej  $Y$  (por. (3.54)). Mieszany moment centralny drugiego rzędu:

$$\mu_{11} = E[(X - m_{10})(Y - m_{01})] = \text{cov}(X, Y), \quad (3.95)$$

nosi nazwę **kowariancji** i jest również oznaczany symbolem  $C(X, Y)$ .

Momenty centralne dwuwymiarowej zmiennej losowej można wyrazić za pomocą momentów zwykłych, na przykład:

$$\mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01}, \quad (3.96)$$

$$\mu_{20} = m_{20} - m_{10}^2, \quad (3.97)$$

$$\mu_{02} = m_{02} - m_{01}^2, \quad (3.98)$$

i na odwrót.

Dla kowariancji można udowodnić następujące ważne **twierdzenie**. Jeżeli zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne, to kowariancja  $\text{cov}(X, Y)$  tych zmiennych





$$R_{X_1, X_2, \dots, X_N} = \begin{bmatrix} R_{X_1 X_1}, R_{X_1 X_2}, \dots, R_{X_1 X_N} \\ R_{X_2 X_1}, R_{X_2 X_2}, \dots, R_{X_2 X_N} \\ \dots \\ R_{X_N X_1}, R_{X_N X_2}, \dots, R_{X_N X_N} \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Macierz współczynników korelacji jest symetryczna, a jej elementy diagonalne zgodnie ze wzorami (3.100) i (3.103) wynoszą:

$$R_{X_i X_i} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.105)$$

a pozostałe elementy są zawarte w przedziale  $[-1, +1]$ .

Obok momentów dotychczas zdefiniowanych istnieją tzw. **momenty warunkowe**. Są to momenty jednej ze zmiennych  $X, Y$  przy założeniu, że pozostała zmienna przybrała pewną określoną wartość. Najczęściej korzysta się z dwóch momentów warunkowych - **warunkowej wartości oczekiwanej** i **warunkowej wariancji**. Jeżeli zmienna  $(X, Y)$  jest ciągła, to parametry te, jako momenty warunkowe zmiennej losowej  $Y$ , są określone następującymi wzorami:

$$E(Y|X = x) = m_{01}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy} = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy, \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(Y|X = x) = m_{10}(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [y - m_{10}(x)]^2 f(x, y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [y - m_{01}(x)]^2 f(y|x)dy. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Analogiczną parę wzorów można napisać dla zmiennej  $X$ .

Gdy zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne, to:

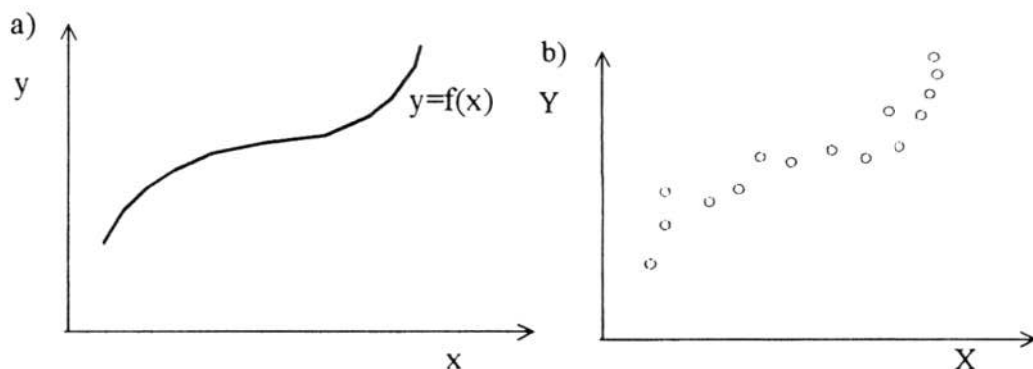
$$E(Y|X = x) = m_{01}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} yf_1(x)f_2(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(y)dy} = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy = m_{01}. \quad (3.108)$$

### 3.6.4. Regresja i wariancja resztowa

W analizie matematycznej używa się pojęcia **zależności funkcyjnej**, której istotą jest jednoznaczne przyporządkowanie wartościom zmiennych zależnych  $x_i$  jednej określonej wartości zmiennej zależnej  $y$ . W przypadku dwuwymiarowym zależność tę zapisuje się jako:  $y=f(x)$  (rys. 3.5a). Jak już wspomniano we wstępie, w praktyce bardzo rzadko można obserwować zależności funkcyjne, ponieważ na ogół nie udaje się usunąć wpływu czynników przypadkowych, zakłócających. Z reguły zależności występujące w praktyce są właśnie **zależnościami stochastycznymi**, tzn. **niejednoznacznymi** (rys. 3.5b).

Istotą zależności stochastycznej pewnej zmiennej losowej  $Y$  od zmiennej losowej  $X$  jest jednoznaczna zależność rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y$  od wartości  $x$  przybranej przez zmienną losową  $X$ . Pojęcie zależności stochastycznej jest więc pojęciem ogólniejszym od zależności funkcyjnej. Z punktu widzenia badań inżynierskich najbardziej interesuje nas wartość oczekiwana zmiennej losowej  $Y$  przy warunku  $X=x$ . W dwuwymiarowym rozkładzie zmiennej  $(X,Y)$  warunkowa wartość oczekiwana  $E(Y|X = x)$  jest jakąś funkcją zmiennej  $X$ . Można więc napisać:

$$E(Y|X = x) = g_1(x). \quad (3.109)$$



Rys. 3.5. Zależność funkcyjna (a) i stochastyczna (b).

Zastępując we wzorze (3.109) wyrażenie  $E(Y|X = x)$  symbolem  $y$  otrzymamy równanie:

$$y = g_1(x), \quad (3.110)$$

które w statystyce matematycznej nosi nazwę **funkcji regresji pierwszego rodzaju** zmiennej  $Y$  względem zmiennej  $X$  lub **teoretycznej funkcji regresji**. Określenie “funkcja regresji” wprowadził F. Galton przy badaniu zależności

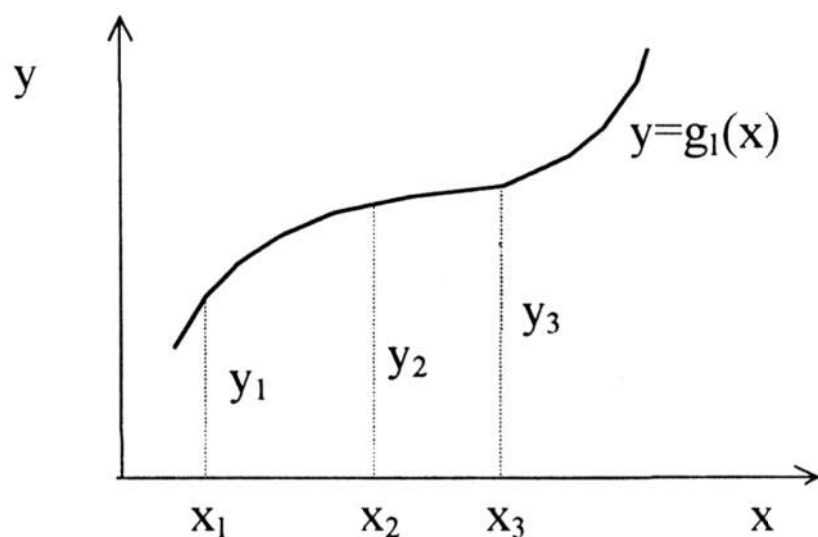
między wzrostem ojca i syna, dla podkreślenia tendencji cofania się (ang. regress) wzrostu syna ku przeciętnemu wzrostowi ojców [40]. Zatem funkcja regresji jest funkcją przedstawiającą warunkową wartość oczekiwaną. Jeżeli zmienna  $(X, Y)$  jest ciągła, to obrazami geometrycznymi funkcji (3.99) jest linia zwana **linią regresji pierwszego rodzaju** (rys. 3.6).

Linie regresji pierwszego rodzaju mają tę właściwość, że wartość oczekiwana kwadratu odchylenia wartości zmiennej  $Y$  od tej linii jest równa minimum:

$$E[Y - g(x)]^2 = \min . \quad (3.111)$$

Stąd:

$$g(x) = E(Y|X = x) \quad \text{oraz} \quad \text{var}(Y|X = x) = \min . \quad (3.112)$$



Rys. 3.6. Linia regresji  $Y$  względem  $X$ .

Powyższe rozważania można uogólnić na zmienną wielowymiarową. W tym przypadku istotą zależności stochastycznej pewnej zmiennej losowej  $Y$  od zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_N$  jest jednoznaczna zależność rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Y$  od wartości  $x_i$  przybranych przez zmienne losowe  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). W  $N+1$  wymiarowym rozkładzie zmiennych  $(X_1, X_2, \dots, X_N, Y)$  warunkowa wartość oczekiwana  $E(Y|X_i = x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , jest jakąś funkcją zmiennych  $X_i$ . Można więc napisać:

$$E(Y|X_i = x_i) = g_1(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N . \quad (3.113)$$

Zastępując we wzorze (3.113) wyrażenie  $E(Y|X_i = x_i)$  symbolem  $y$  otrzymamy równanie:

$$y = g_1(x_i), i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.114)$$

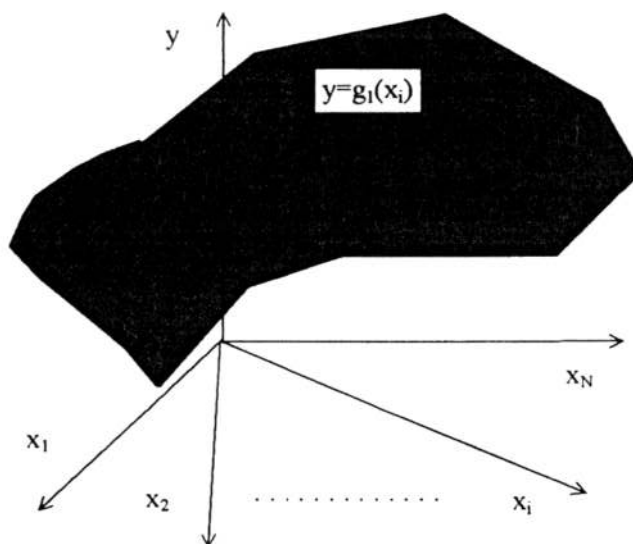
które jest **funkcją regresji pierwszego rodzaju** zmiennej  $Y$  względem zmiennych  $X_i$  lub **teoretyczną funkcją regresji**. Jeżeli zmienna  $(X_1, X_2, \dots, X_N, Y)$  jest ciągła, to obrazami geometrycznymi funkcji (3.114) jest hiperpowierzchnia zwana **hiperpowierzchnią regresji pierwszego rodzaju** (rys. 3.7).

Hiperpowierzchnie regresji pierwszego rodzaju mają tę właściwość, że wartość oczekiwana kwadratu odchylenia wartości zmiennej  $Y$  od tej hiperpowierzchni jest równa minimum:

$$E[Y - g_1(x_i)]^2 = \min. \quad (3.115)$$

Stąd:

$$g_1(x_i) = E(Y|X_i = x_i) \quad \text{oraz} \quad \text{var}(Y|X_i = x_i) = \min. \quad (3.116)$$

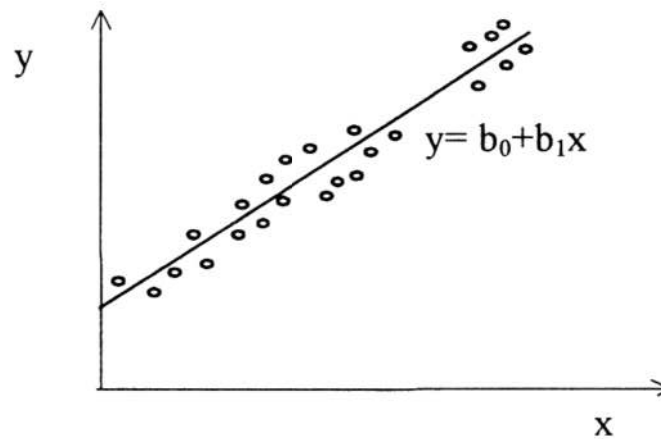


Rys. 3.7. Hiperpowierzchnia regresji  $Y$  względem  $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ .

W praktyce na ogół nie jesteśmy w stanie wyznaczyć dokładnie funkcji regresji. Zazwyczaj dysponujemy tylko zbiorowością próbną pochodzącą ze zbiorowości generalnej. Na podstawie rozkładu punktów tzw. smugi, wysuwa się hipotezę, że funkcja regresji należy do określonej klasy funkcji:

$$\hat{y} = \hat{y}(x; b_0, b_1, \dots, b_K), \quad (3.117)$$

liniowych względem parametrów  $b_0, b_1, \dots, b_K$ , gdzie znak “^” oznacza funkcję regresji.



Rys. 3.8. Wyniki eksperymentu zależności  $y$  od  $x$ .

Na rysunku 3.8 przedstawiono przykładowy punktowy wykres rozrzutu wyników eksperymentu. Smuga punktów na wykresie układa się wzdłuż linii prostej. Można zatem wysunąć hipotezę, że  $g(x)$  należy do zbioru funkcji liniowych. Nazwijmy  $i$ -tą **resztą regresji  $Y$  względem  $X$**  lub krótko **resztą** wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$r_i = y_i - g_1(x_i), \quad (3.118)$$

która jest realizacją zmiennej losowej  $R=Y-g_1(x)$  zwanej **błędem losowym** lub **błędem resztowym regresji  $Y$  względem  $X$** .

Jako miary rozproszenia punktów wokół linii regresji używa się tzw. **wariancji resztowej  $\text{var}(R)$**  określonej wzorem:

$$\text{var}(R) = E(R^2) = E(Y - y)^2. \quad (3.119)$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji resztowej nazywa się **standardowym błędem oceny** lub **średnim błędem resztowym** i oznacza przez  $\sigma_{21}$  dla regresji  $Y$  względem  $X$ :

$$\sigma_{21} = \sqrt{\mu_{02} - b_{21}\mu_{11}}, \quad (3.120)$$

gdzie  $b_{21}$  jest parametrem równania regresji.



### 3.6.5. Korelacja. Stosunek korelacyjny i współczynnik korelacji

Korelację (zależność) między zmiennymi losowymi można określić badając **stosunek korelacyjny i współczynnik korelacji**.

*Stosunek korelacyjny*  $\eta$  jest zdefiniowany wzorem:

$$\eta^2 = 1 - \frac{\text{var}(R)}{\text{var}(Y)}, \quad (3.121)$$

gdzie  $\text{var}(R)=\text{var}(Y-y)$  jest wariacją resztową. Jeżeli  $Y-y=0$ , wówczas  $\text{var}(Y)=0$  i  $\eta=1$ , a zależność łącząca zmienne losowe  $X$  i  $Y$  jest zależnością funkcyjną. Gdy  $\eta \neq 0$  to zmienne są ze sobą skorelowane, natomiast gdy  $\eta=0$ , to zmienne są nieskorelowane.

*Współczynnik korelacji*  $\rho$ , przy założeniu że obie linie regresji są liniowe, wyraża się wzorem:

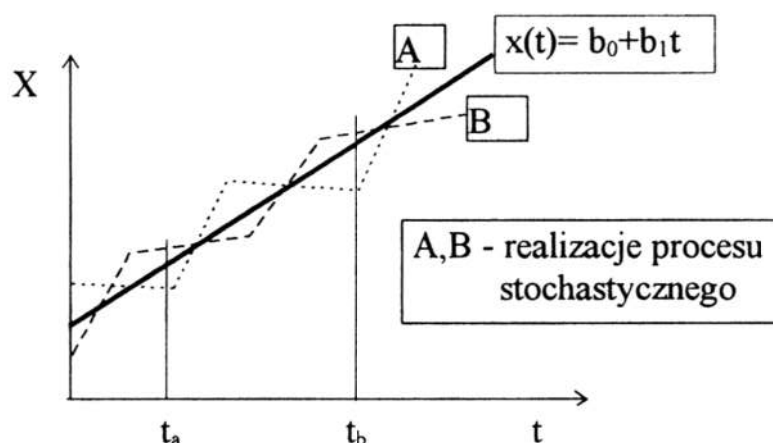
$$\rho = \pm \sqrt{b_{12}b_{21}}, \quad (3.122)$$

i zawiera się w przedziale  $-1 \leq \rho \leq +1$ . Gdy  $\rho > 0$ , to między zmiennymi  $X$  i  $Y$  zachodzi korelacja dodatnia. Wówczas wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost wartości oczekiwanej drugiej zmiennej. Gdy  $\rho < 0$  zachodzi korelacja ujemna i wówczas wzrost wartości jednej zmiennej powoduje zmniejszanie się wartości oczekiwanych drugiej zmiennej. Gdy  $\rho^2=1$  to dwie linie regresji pokrywają się.

### 3.7. Wybrane zagadnienia z teorii procesów stochastycznych

Proces stochastyczny jest uogólnieniem pojęcia zmiennej losowej. **Procesem stochastycznym**  $X(t, e)$  nazywa się zbiór zmiennych losowych  $X(e)$  zależnych od parametru czasu  $t$ , należącego do pewnego zbioru liczb rzeczywistych  $t \in (t_a, t_b)$ . Proces stochastyczny można również określić jako zbiór losowych funkcji czasu przyporządkowanych zdarzeniom elementarnym  $e$ . Przy ustalonym parametrze  $t=t_0$  proces stochastyczny jest zmienną losową  $X(t_0, e)$ . Przy ustalonym zdarzeniu elementarnym  $e=e_0$  proces stochastyczny  $X(t, e_0)$  jest funkcją czasu  $X(t)$  określoną dla  $t \in (t_a, t_b)$  zwaną **realizacją procesu stochastycznego** (rys. 3.9).

Proces stochastyczny  $X(t)$  nazywamy gaussowskim, jeżeli wszystkie wielowymiarowe zmienne losowe  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$  utworzone z procesu stochastycznego mają rozkład normalny. **Uporządkowany** zespół jednowymiarowych procesów stochastycznych nazywa się **wielowymiarowym procesem stochastycznym**.



Rys. 3.9. Graficzna ilustracja procesu stochastycznego i jego realizacji.

Procesy stochastyczne dzieli się na następujące cztery klasy:

1. Procesy dyskretne o czasie dyskretnym,
2. Procesy ciągłe o czasie dyskretnym,
3. Procesy dyskretne o czasie ciągłym,
4. Procesy ciągłe o czasie ciągłym.

Procesy 1 i 2 nazywane są też *ciągami losowymi*, natomiast procesy 3 i 4 - *procesami stochastycznymi właściwymi*.

Pełna znajomość procesu stochastycznego jest rzadko możliwa. Dlatego też w praktyce proces opisuje się za pomocą charakterystyk.

### 3.7.1. Charakterystyki procesu stochastycznego

Najważniejszymi charakterystykami procesu stochastycznego są: **gęstość prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe, funkcja korelacji własnej i funkcja korelacji wzajemnej.**

N-wymiarową gęstością prawdopodobieństwa procesu stochastycznego  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)$  dla dowolnego ciągu czasów  $t_1, t_2, \dots, t_N$  jest wielowymiarowa funkcja gęstości:

$$f_N(x_1(t_1); x_2(t_2); \dots; x_N(t_N)). \quad (3.123)$$

Wartością oczekiwaną procesu stochastycznego  $X(t)$  jest wyrażenie:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1, t) dx_1 = m_x(t). \quad (3.124)$$

Wariancją procesu stochastycznego  $X(t)$  nazywa się wyrażenie:

$$\begin{aligned} \text{var}[X(t)] &= E\langle \{X(t) - E[X(t)]\}^2 \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - E[X(t)]\}^2 f_1(x, t) dx = \sigma_x^2(t). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Odchylenie standardowe procesu stochastycznego  $X(t)$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji procesu.

Funkcją korelacji własnej procesu stochastycznego  $X(t)$  nazywa się wyrażenie:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= E\langle \{X(t_1) - E[X(t_1)]\} \{X(t_2) - E[X(t_2)]\} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m_X(t_1)] [x_2 - m_X(t_2)] f(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli  $t_1 = t_2 = t$ , to:  $K_X(t_1, t_2) = K_X(t, t) = \text{var}[X(t)]$ , zgodnie ze wzorem (3.125).

Unormowaną funkcją korelacji własnej procesu stochastycznego  $X(t)$  nazywa się wyrażenie:

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_2) K_X(t_1, t_2)}} = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \sigma_X(t_2)}, \quad (3.127)$$

przy czym wartość tej funkcji mieści się w przedziale  $[0, 1]$ . Oczywiście, jeśli  $t_1 = t_2 = t$ , to:  $R_X(t_1, t_2) = 1$ .

Związki między dwoma procesami stochastycznymi  $X(t)$  i  $Y(t)$  charakteryzuje funkcja korelacji wzajemnej:

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1, t_2) &= E\langle \{X(t_1) - E[X(t_1)]\} \{Y(t_2) - E[Y(t_2)]\} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t_1)] [y - m_Y(t_2)] f(x, t_1; y, t_2) dx dy. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Unormowaną funkcją korelacji wzajemnej nazywa się wyrażenie:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_2) K_Y(t_1, t_2)}} = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \sigma_Y(t_2)}, \quad (3.129)$$

przy czym wartość tej funkcji jest zawarta w przedziale  $[-1, +1]$ .

### 3.7.2. Stacjonarność procesu

Najważniejszą właściwością procesu stochastycznego jest zależność lub niezależność charakterystyk statystycznych od czasu. W związku z tym rozróżnia się procesy stochastyczne stacjonarne i niestacjonarne. **Proces stochastyczny nazywamy stacjonarnym**, jeśli wszystkie wielowymiarowe rozkłady i parametry rozkładu  $N$ -wymiarowej zmiennej losowej  $X_1(t_1), X_2(t_2), \dots, X_N(t_N)$  nie zależą od czasu. W teorii procesów stochastycznych rozróżnia się pojęcie **procesu stacjonarnego w węższym i szerszym sensie**.

Proces stochastyczny nazywamy **stacjonarnym w węższym sensie**, jeśli wszystkie wielowymiarowe gęstości prawdopodobieństwa zależą tylko od wzajemnej odległości chwil  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , nie zależą natomiast od nich samych, czyli nie zależą od przesunięcia wszystkich chwil o tę samą wartość  $t_0$ :

$$f_N(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) = f_N(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0; \dots; x_N, t_N + t_0). \quad (3.130)$$

Ze wzoru (3.130) wynika, że jednowymiarowa gęstość procesu stacjonarnego nie zależy od czasu, gdyż:

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, t_1 + t_0) = f_1(x_1), \quad (3.131)$$

natomiast dwuwymiarowa gęstość procesu stacjonarnego zależy od różnicy  $t_2 - t_1 = \tau$ :

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_2(x_1, t_1 + t_0; x_2) = f_2(x_1, x_2, \tau). \quad (3.132)$$

Przy badaniach rozkładów procesu stochastycznego określa się wartość oczekiwaną, wariancję i funkcje korelacyjne procesu. Podstawiając wzory (3.131) i (3.132) do wzorów (3.124), (3.125) i (3.126) otrzymuje się odpowiednio:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = m_X = \text{const}, \quad (3.133)$$

$$\text{var}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X)^2 f_1(x_1) dx_1 = \sigma_X^2 = \text{const}, \quad (3.134)$$

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X)(x_2 - m_X) f_1(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = K_X(\tau), \quad (3.135)$$

z których wynika, że wartość oczekiwana i wariancja procesu stacjonarnego są stałe, natomiast funkcja korelacji własnej zależy tylko od różnicy chwil  $\tau = t_2 - t_1$ .

Analogicznie można podać warunki stosowania wzoru dla funkcji korelacji wzajemnej dwóch procesów  $X(t)$  i  $Y(t)$ , w postaci:

$$K_{XY}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^0(t, e) y^0(t + \tau, e) dt, \quad (3.146)$$

gdzie  $x^0(t, e)$  i  $y^0(t, e)$  są realizacjami procesów centralnych  $X^0(t)$  i  $Y^0(t)$ .



# 4

## ROZKŁADY ZMIENNYCH LOSOWYCH

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną jedynie te wiadomości dotyczące rozkładów zmiennych losowych i podstawowe rozkłady tych zmiennych, które są niezbędne do identyfikacji wielowymiarowych obiektów badań. Pod pojęciem **rozkładu zmiennej losowej** rozumie się funkcję określającą związek między wartościami zmiennej losowej a częstością pojawiania się tych wartości, względnie szansą ich otrzymania.

### 4.1. Rozkład empiryczny

Wyniki doświadczenia uporządkowane w formie **szeregu rozdzielczego** tworzą tak zwany **rozkład empiryczny**, czyli rozkład badanej zmiennej w badanej próbie. Szereg rozdzielczy jest właśnie funkcją, która przyporządkowuje każdej wyróżnionej wartości badanej zmiennej losowej częstość występowania w próbie (tablica 4.1).

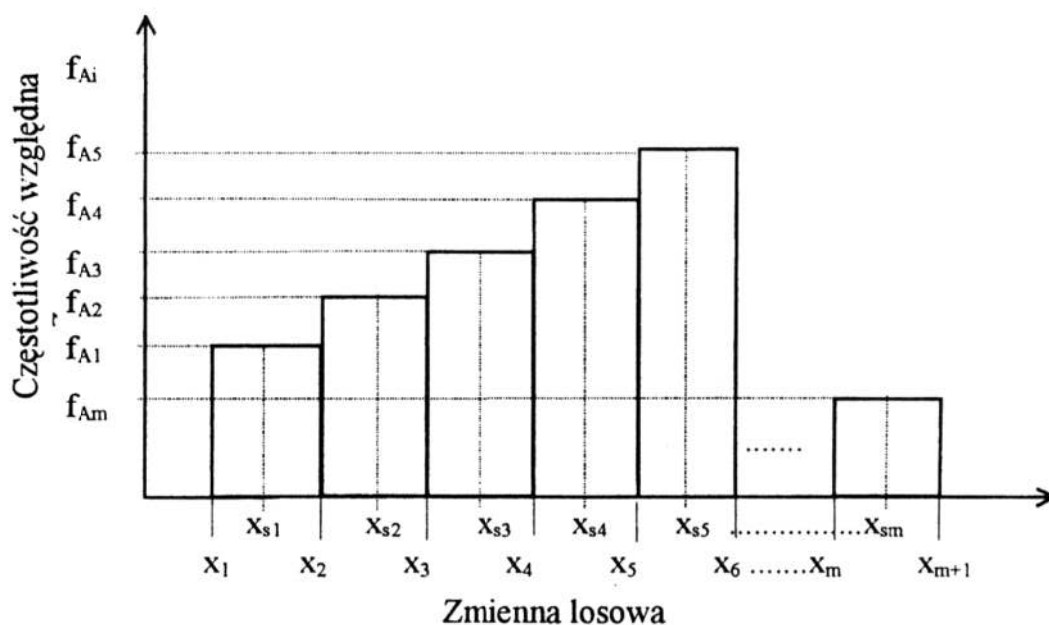
Tablica 4.1. Szereg rozdzielczy wyników badań zmiennej losowej  $X$ .

Numer klasy	Przedziały zmienności		Środki przedziałów	Liczba obserwacji	Częstości względne	$x_{si}n_i$
	dolny	górny				
1	2	3	4	5	6	7
1	$x_1$	$x_2$	$x_{s1}$	$n_1$	$f_{A1}=n_1/n$	$x_{s1}n_1$
2	$x_2$	$x_3$	$x_{s2}$	$n_2$	$f_{A2}=n_2/n$	$x_{s1}n_1$
3	$x_3$	$x_4$	$x_{s3}$	$n_3$	$f_{A3}=n_3/n$	$x_{s1}n_1$
4	$x_4$	$x_5$	$x_{s4}$	$n_4$	$f_{A4}=n_4/n$	$x_{s1}n_1$
5	$x_5$	$x_6$	$x_{s5}$	$n_4$	$f_{A5}=n_5/n$	$x_{s1}n_1$
.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
m	$x_m$	..... $x_{m+1}$	$x_{sm}$	$n_m$	$f_{Am}=n_m/n$	$x_{s1}n_1$

Otrzymane wyniki dają się również przedstawić w formie graficznej. Najpopularniejszym, graficznym sposobem przedstawienia rozkładu zmiennej losowej jest diagram zwany **histogramem**.

### 4.1.1. Histogram

Budowa histogramu jest przedstawiona na rys. 4.1. Na osi odciętych zaznacza się przedziały klasowe (w ogólnym przypadku, o różnej długości). Nad każdym z tych przedziałów buduje się prostokąt, którego pole jest proporcjonalne do częstości względnej (według wzoru (3.14)) przyporządkowanej danemu przedziałowi.



Rys. 4.1. Histogram zmiennej losowej.

Innymi sposobami równoważnymi wizualizacji rozkładu empirycznego jest **dystrybuanta empiryczna** i **poligon** (nazywany również **wielobok liczebności** lub **wielobok częstości**).

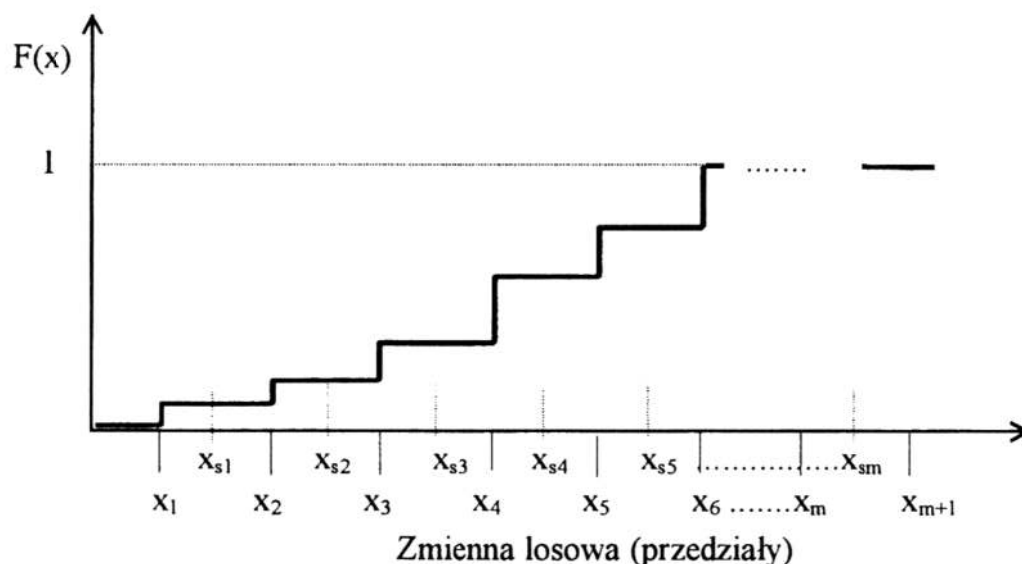
### 4.1.2. Dystrybuanta empiryczna

Dystrybuanta empiryczna jest funkcją odpowiadającą skumulowanemu histogramowi. Wartość dystrybuanty empirycznej w dowolnym punkcie  $X_0$  można wyrazić wzorem:

$$F(X_0) = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{n} = \sum_{i=1}^m f_{Ai}, \quad (4.1)$$

przez  $n_i$  oznaczono liczebności przedziałów klasowych (liczbę obserwacji) zawierających liczby, z których żadna nie przewyższa  $X_0$ , przez  $n$  - liczebność próby.

Wykres dystrybuanty empirycznej przedstawia rys. 4.2.



Rys. 4.2. Dystrybuanta empiryczna.

#### 4.1.3. Poligon

Poligon jest wykresem uzyskanym w ten sposób, że na osi odciętych zaznacza się środki przedziałów klasowych. Nad każdym z nich naniesiony jest punkt oddległy od osi rzędnych o wartość odpowiedniej częstości względnej. Otrzymane punkty łączymy między sobą linią łamaną (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Poligon empiryczny.

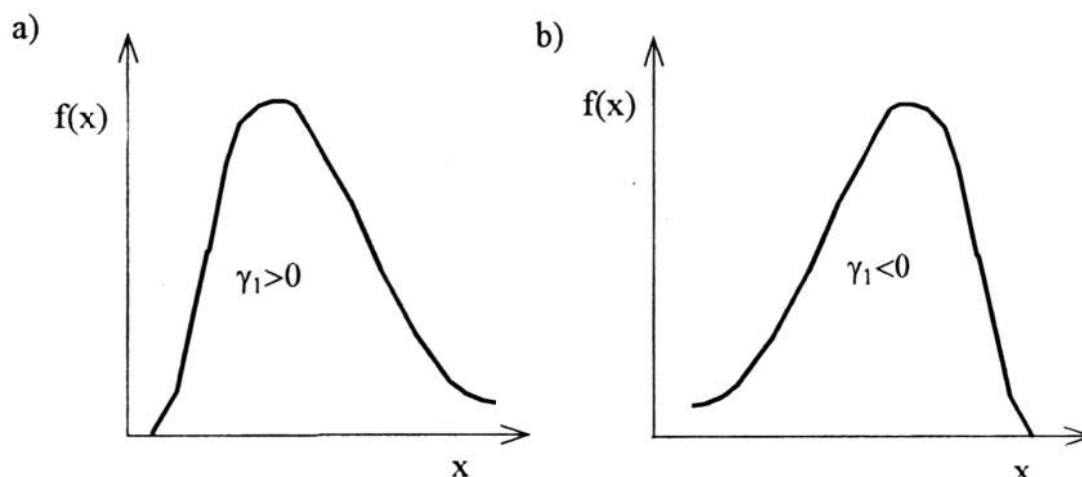
## 4.2. Współczynnik skośności i spłaszczenia

Miarą skośności rozkładu zmiennej losowej jest **współczynnik skośności (asymetrii)**, natomiast miarą stopnia spłaszczenia krzywej w pobliżu jej środka jest **współczynnik spłaszczenia (ekscesu)**.

**Współczynnik skośności**  $\gamma_1$  względem średniej arytmetycznej jest to iloraz trzeciego momentu centralnego przez trzecią potęgę odchylenia standardowego:

$$\gamma_1 = a_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (4.2)$$

Jest to więc trzeci moment centralny (pkt. 3.6.3) w jednostkach standardowych. Jeżeli ramię rozkładu znajduje się po prawej stronie punktu odpowiadającego maksimum krzywej gęstości, wówczas rozkład taki nazywa się rozkładem o skośności dodatniej ( $\gamma_1 > 0$ , rys. 4.4a). W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z rozkładem o skośności ujemnej ( $\gamma_1 < 0$ , rys. 4.4b).

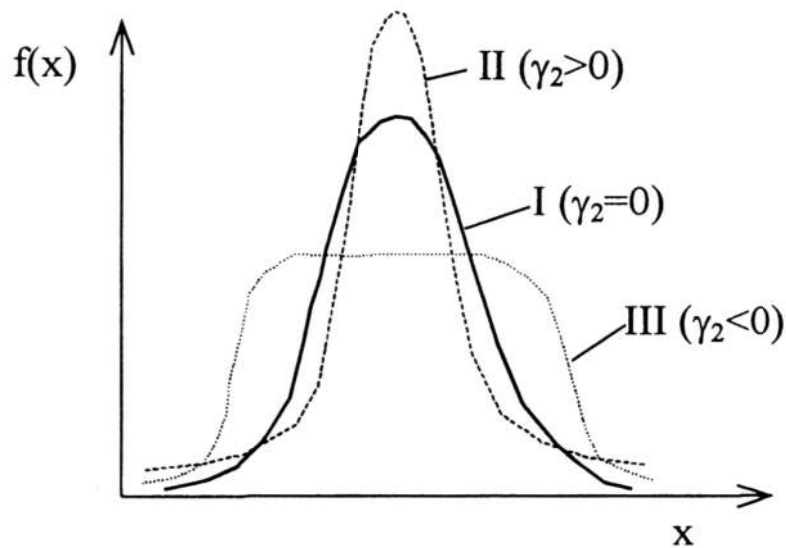


Rys. 4.4. Rozkłady o skośności dodatniej (a) i ujemnej (b).

**Współczynnik spłaszczenia**  $\gamma_2$  jest czwartym momentem centralnym w jednostkach standardowych określony wzorem:

$$\gamma_2 = a_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \quad (4.3)$$

Na rys. 4.5 przedstawiono krzywą rozkładu normalnego ( $\gamma_2=0$ , krzywa I), rozkład o spłaszczeniu dodatnim w porównaniu ze spłaszczeniem krzywej normalnej ( $\gamma_2>0$ , krzywa II) oraz rozkład o spłaszczeniu ujemnym ( $\gamma_2 < 0$ , krzywa III).



Rys. 4.5. Rozkłady zmiennej losowej o różnym współczynniku spłaszczenia.

### 4.3. Podstawowe rozkłady zmiennych losowych

#### 4.3.1. Rozkłady zmiennych losowych dyskretnych

Przypomnijmy, że zmienna losowa dyskretna (skokowa, nieciągła) może przybierać wartości wyrażające się tylko liczbami rzeczywistymi. Zatem w wyniku doświadczenia można otrzymać jedynie ciąg liczb  $X_1, X_2, \dots, X_n$  w którym każda wartość  $X_i$  jest ściśle określona i nie istnieje możliwość uzyskania wyników pośrednich. Każdej liczbie  $X_i$  można przyporządkować odpowiednie prawdopodobieństwo. Zapisuje się to następująco:

$$p_i = P(X = X_i), \quad (4.4)$$

przy czym  $p_i$  jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa  $X$  przyjmie wartość równą liczbie  $X_i$ . Musi być przy tym spełniony warunek:

$$\sum_i p_i = 1. \quad (4.5)$$

W dalszej części niniejszego punktu przedstawione zostaną wybrane rozkłady zmiennej losowej skokowej.

#### 4.3.1.1. Rozkład dwupunktowy

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwupunktowy, jeżeli może przyjmować tylko dwie wartości: bądź zero (oczekiwane zdarzenie nie zostało zrealizowane) bądź jeden (oczekiwane zdarzenie zaszło), a prawdopodobieństwo określane jest wzorem:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - p, \\ P(X = 1) &= p. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą odpowiednio:

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1 - p). \quad (4.7)$$

#### 4.3.1.2. Rozkład dwumianowy

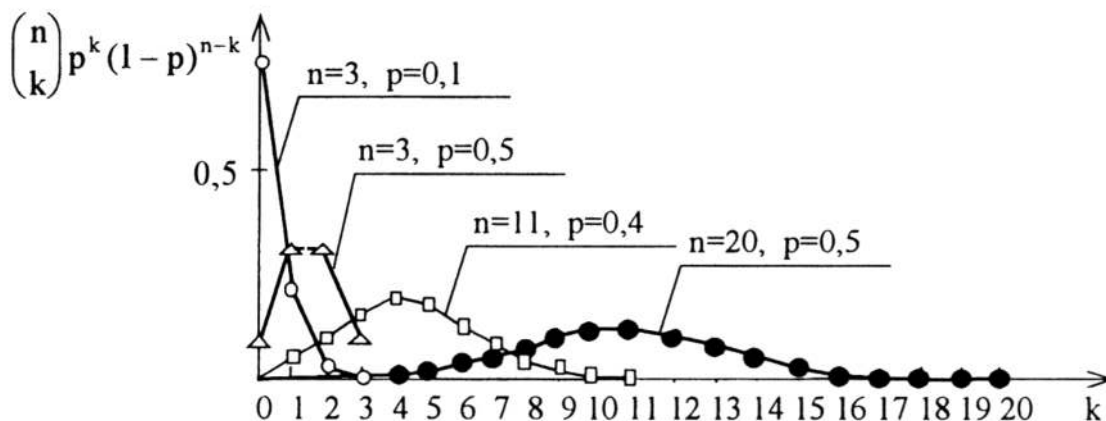
Zmienna losowa  $X$  ma rozkład dwumianowy (Bernoulliego), jeżeli może przyjmować wartości  $0, 1, \dots, n$ , a funkcja prawdopodobieństwa określona jest wzorem:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (4.8)$$

Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą odpowiednio:

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1 - p). \quad (4.9)$$

Na rys. 4.6 przedstawione są rozkłady kilku zmiennych losowych o różnych wartościach parametrów  $p$  i  $n$ .



Rys. 4.6. Wykresy funkcji prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego czterech zmiennych losowych.



W obliczeniach związanych z rozkładem dwumianowym korzysta się z tablic podających prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$  próbkach w zależności od prawdopodobieństwa  $p$  uzyskania sukcesu w jednej próbie. Tablice są opracowane dla wartości parametrów  $p < 0,5000$  i  $k = 0, 1, \dots, n$ , przy czym ilość prób  $n$  jest zwykle kilkudziesiąt.

#### 4.3.1.3. Rozkład Poissona

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona, jeżeli może przyjmować nieujemne wartości całkowite, a funkcja prawdopodobieństwa określana jest wzorem:

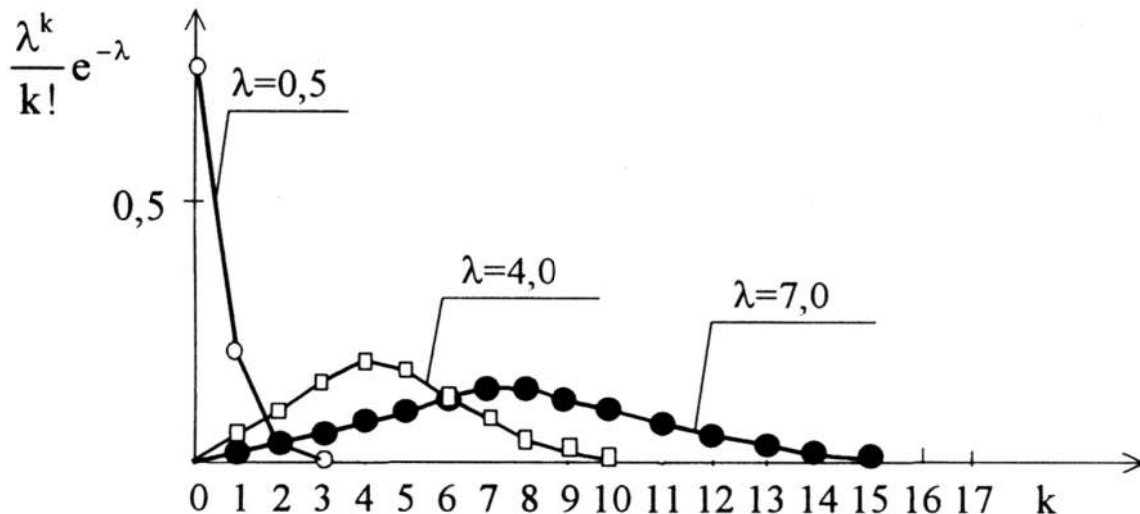
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

przy czym  $\lambda$  jest pewną stałą dodatnią.

Wartość oczekiwana i wariancja mają tę samą wartość:

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda. \quad (4.11)$$

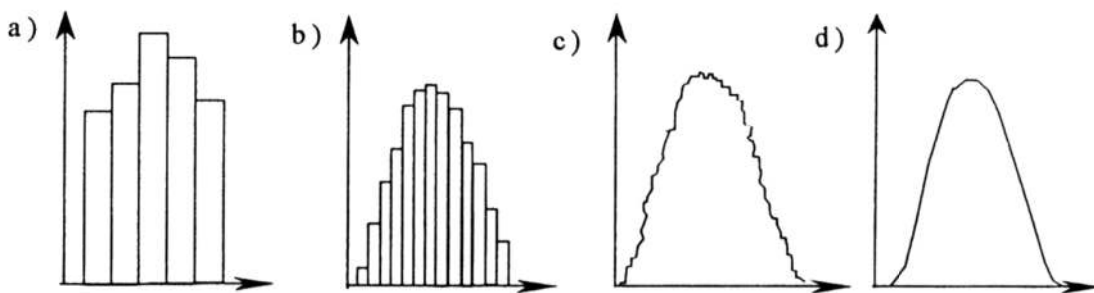
Na rys. 4.7 jest przedstawionych kilka rozkładów dla różnych wartości parametru  $\lambda$ .



Rys. 4.7. Wykresy funkcji prawdopodobieństwa rozkładu Poissona trzech zmiennych losowych.

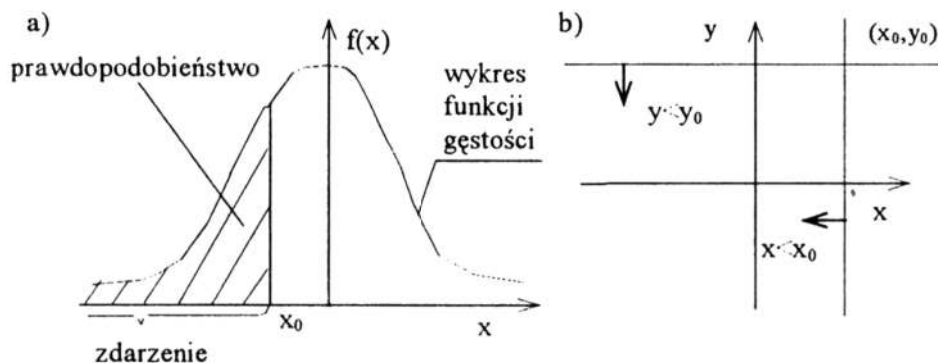
### 4.3.2. Rozkłady zmiennych losowych ciągłych

W przypadku zmiennych losowych skokowych model teoretyczny jest w zasadzie identyczny z modelem empirycznym. W przypadku zmiennych losowych ciągłych kształt histogramu zmiennej losowej zależy od liczby pomiarów. Jeżeli będzie się zwiększać liczbę pomiarów, zmniejszając jednocześnie długość przedziałów klasowych, to okaże się, że histogram stawać się będzie coraz to bardziej regularną krzywą (rys. 4.8). W granicznym przypadku otrzyma się krzywą gładką (rys. 4.8d) stanowiącą obraz pewnej sytuacji hipotetycznej (zbiór wartości zmiennej losowej jest równoliczny ze zbiorem punktów osi liczbowej).



Rys. 4.8. Wpływ liczby pomiarów na kształt histogramu.

W takiej sytuacji występuje zbyt duża liczba liczb, którym należałoby przyporządkować prawdopodobieństwo. Dlatego też wprowadza się pojęcie **zdarzenia**. **Zdarzeniem** nazywa się zbiór wszystkich wartości  $X$  takich, że dla każdej wartości  $x_0$ ,  $x < x_0$ . Zatem dla zmiennej losowej ciągłej zdarzeniem jest półprosta ograniczona z prawej strony (rys. 4.9a). Tak zdefiniowanemu zdarzeniu można przypisać określone prawdopodobieństwo. Przyporządkowując każdemu punktowi  $x_0$  osi  $OX$  powierzchnię, określa się na zbiorze  $(a,b)$  funkcję całkowalną  $f(x)$ , nazywaną **gęstością prawdopodobieństwa** lub **gęstością** (rys. 4.9a).



Rys. 4.9. Zdarzenie, prawdopodobieństwo i gęstość prawdopodobieństwa dla jednej zmiennej ciągłej (a) oraz zdarzenie dla dwóch zmiennych losowych ciągłych (b).

Funkcja  $f(x)$  może mieć dowolną postać analityczną. Musi być jednak spełniony warunek:

$$\int_a^b f(x)dx = 1, f(x) \geq 0. \quad (4.12)$$

W przypadku rozpatrywania rozkładu dwóch zmiennych losowych ciągłych  $X$  i  $Y$  jako zdarzenie losowe przyjmuje się równoczesne spełnienie dwóch nierówności:  $x < x_0$  i  $y < y_0$ , co określa wycinek płaszczyzny (rys. 4.9b). Sama krzywa gęstości rozkładu ciągłego jest bezpośrednio mało przydatna. Z probabilistycznego punktu widzenia interesująca jest głównie powierzchnia pod tą krzywą. Jak wiadomo (pkt. 3.5) funkcja określająca narastanie prawdopodobieństwa w zależności od punktu osi  $OX$  nazywa się **dystrybuantą**. Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej jest uogólnieniem dystrybuanty zmiennej losowej skokowej. Dokonuje się tego przez zastąpienie sumy całką z gęstości rozkładu prawdopodobieństwa:

$$F(X_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx. \quad (4.13)$$

Podstawowymi własnościami dystrybuanty są:

1. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą i przynajmniej lewostronnie ciągłą.
2.  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ .
3. Różnica  $F(b) - F(a)$  przedstawia prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa przyjmie wartość z przedziału  $[a, b)$ .

W dalszej części niniejszego punktu przedstawione zostaną wybrane rozkłady zmiennych losowych ciągłych.

#### 4.3.2.1. Rozkład trójkątny

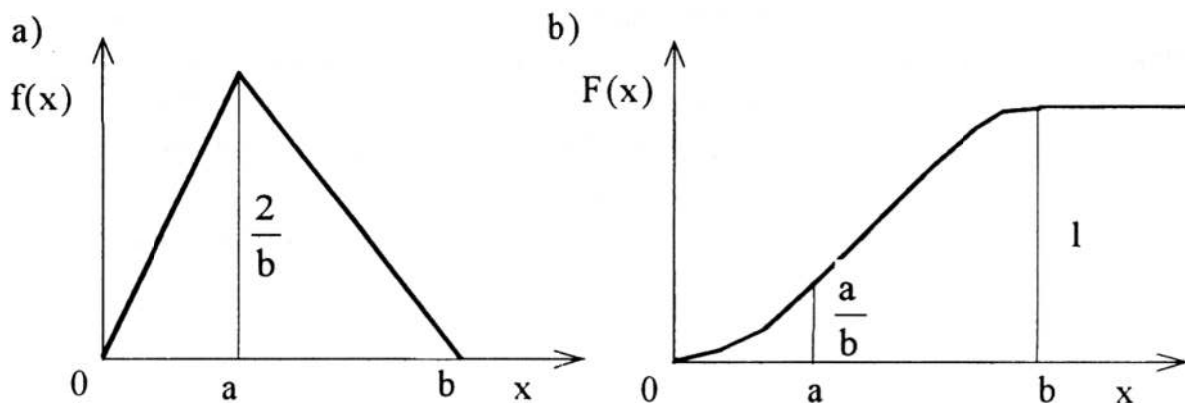
W rozkładzie trójkątnym gęstość rozkładu jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ \frac{2x}{ab}, & \text{dla } 0 \leq x \leq a \\ \frac{2x}{ab - b^2} + \frac{2}{b - a}, & \text{dla } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{dla } x > b. \end{cases} \quad (4.14)$$

Po podstawieniu wzoru (4.14) do wzoru (4.13) otrzymuje się następującą zależność na dystrybuantę rozkładu trójkątnego:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ \frac{x^2}{ab}, & \text{dla } 0 \leq x \leq a \\ \frac{x^2 a^2}{ab - b^2} + \frac{2(x-a)}{b-a} + \frac{a}{b}, & \text{dla } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{dla } x > b. \end{cases} \quad (4.15)$$

Wykresy funkcji  $f(x)$  i  $F(x)$  przedstawione są na rysunkach 4.10a i 4.10b.



Rys. 4.10. Wykresy funkcji gęstości (a) i dystrybuanty (b) rozkładu trójkątnego.

#### 4.3.2.2. Rozkład prostokątny

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład prostokątny (jednostajny), jeżeli może przyjmować wartość z pewnego skończonego przedziału  $[a,b]$ , a funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{dla } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \quad (4.16)$$

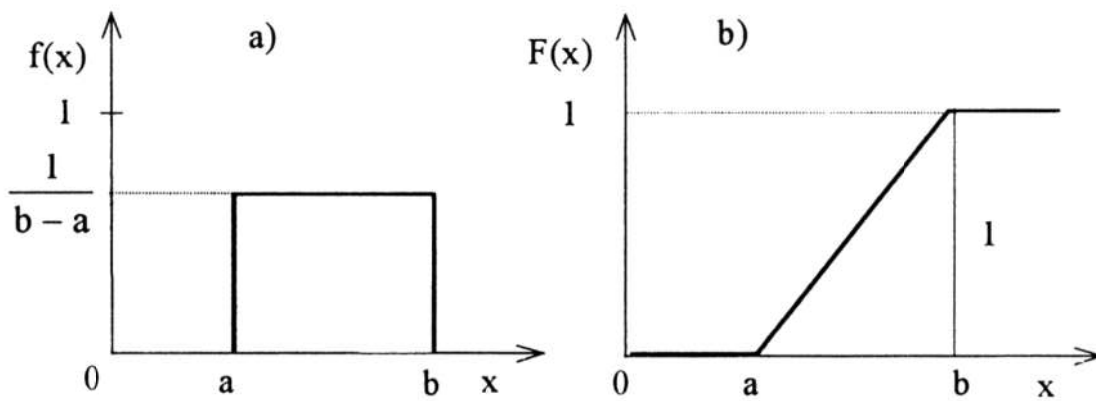
Wartość oczekiwana i wariancja wynoszą odpowiednio:

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (4.17)$$

Dystrybuanta określona jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{dla } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{dla } x > b. \end{cases} \quad (4.18)$$

Wykresy funkcji gęstości i dystrybuanty przedstawione są odpowiednio na rys. 4.11a i 4.11b.



Rys. 4.11. Wykresy funkcji gęstości (a) i dystrybuanty rozkładu prostokątnego.

#### 4.3.2.3. Rozkład normalny (Gausa)

Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny, jeżeli może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste, a jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

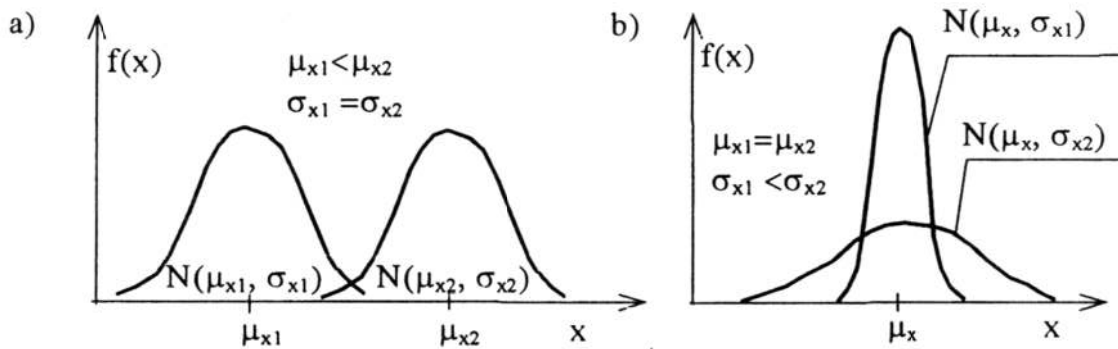
$$F(x) = P\{X < x\} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx. \quad (4.19)$$

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie normalnym dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right], \sigma_x > 0. \quad (4.20)$$

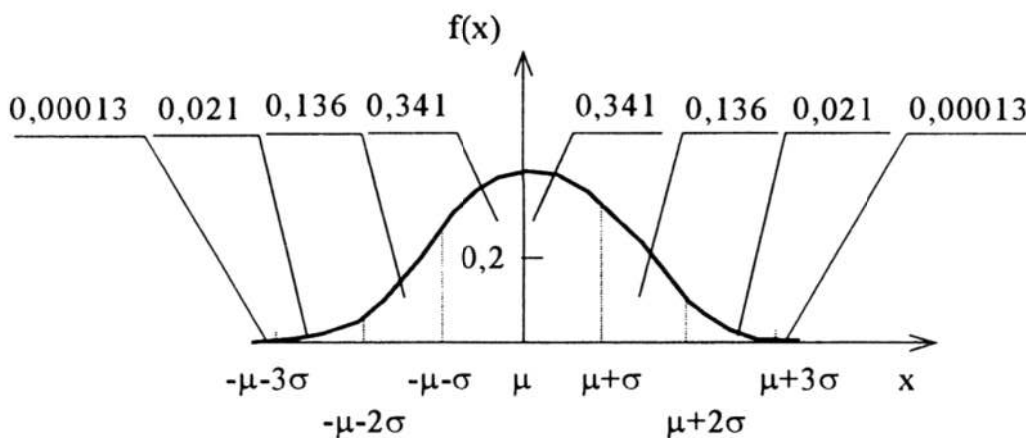
Rozkład normalny zależy od dwóch parametrów: wartości oczekiwanej  $\mu_x$  i wariancji  $\sigma_x^2$  lub odchylenia standardowego  $\sigma_x$ . W skrócie rozkład normalny ozna-

cza się przez  $N(\mu_x, \sigma_x)$ . Funkcja gęstości osiąga wartość maksymalną w punkcie  $x=\mu_x$  wynoszącą:  $f(\mu_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$ . Krzywa  $f(x)$  rozkładu normalnego jest symetryczna i jednomodalna. Punkt  $x=\mu_x$  jest jednocześnie **wartością oczekiwaną**, **medianą** i **wartością modalną**. Na lewo i na prawo od swego maksimum krzywa gęstości rozkładu normalnego stale opada, zbliżając się asymptotycznie do osi odciętych. Punkty przegięcia krzywej gęstości rozkładu normalnego mają odcięte  $\mu_x \pm \sigma_x$ . Na rysunku 4.12a przedstawiono dwa wykresy rozkładu normalnego o jednakowej wariancji i różnej wartości odchylenia standardowego. Na rysunku 4.12b przedstawione są dwa wykresy rozkładu normalnego mające identyczną wartość oczekiwaną i różną wartość odchylenia standardowego.



Rys. 4.12. Przykładowe wykresy funkcji gęstości rozkładu normalnego.

Na rysunku 4.13 podane są prawdopodobieństwa zdarzenia, że  $x$  przybierze wartość w określonych granicach dla rozkładu normalnego  $N(\mu; \sigma)$ .



Rys. 4.13. Prawdopodobieństwa zdarzenia, że  $x$  przybierze wartość w określonych granicach.



Z uwagi na to, że dystrybuanta jest funkcją nieelementarną, wartości jej zostały stabilizowane. Aby móc skorzystać z tych danych należy przekształcić zmienną losową  $X$  o parametrach  $\mu_x$  i  $\sigma_x$  na zmienną losową  $U$ , która ma również rozkład normalny o parametrach  $\mu=0$  i  $\sigma=1$ . Zmienna ta nazywa się **zmienną standaryzowaną** lub **unormowaną**. Standaryzacji dokonuje się za pomocą wzoru:

$$U = \frac{X - \mu_x}{\sigma}, \quad (4.21)$$

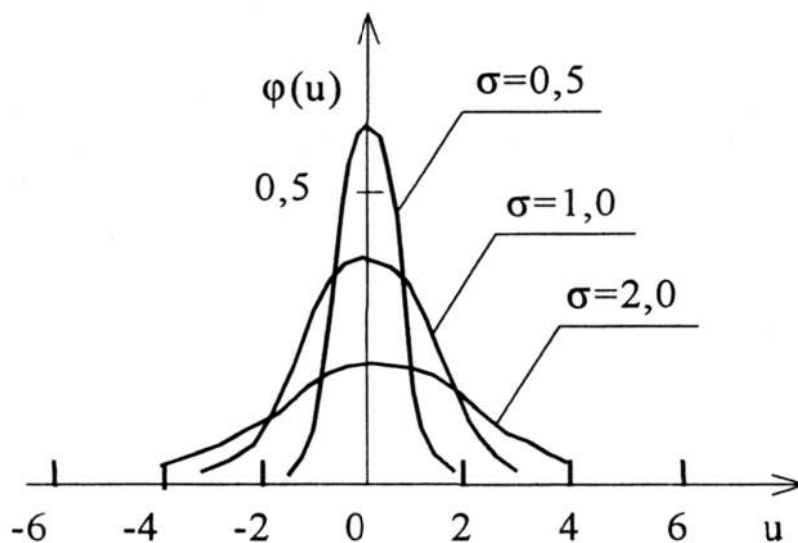
otrzymując unormowaną (lub standaryzowaną) zmienną losową  $U$  o gęstości rozkładu:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad (4.22)$$

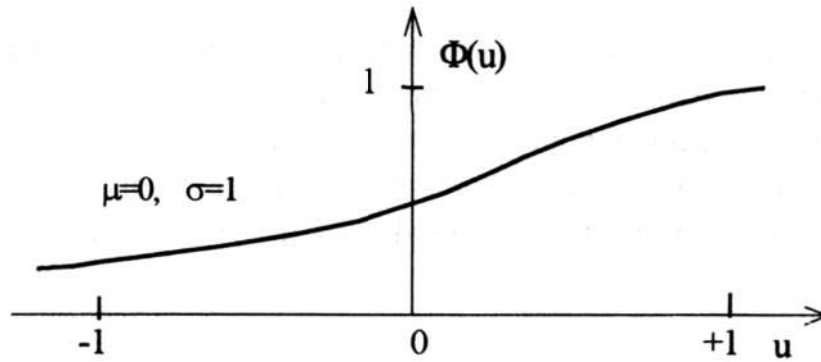
i dystrybuancie:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \quad (4.23)$$

Wykresy funkcji  $\varphi(u)$  (tzw. krzywa Gaussa) i  $\Phi(u)$  przedstawione są odpowiednio na rys. 4.14 i 4.15.



Rys. 4.14. Wykresy funkcji gęstości  $\varphi(u)$  rozkładu Gaussa trzech zmiennych losowych  $N(0; 0,5)$ ,  $N(0; 1,0)$  i  $N(0; 2,0)$ .



Rys. 4.15. Wykres dystrybuanty  $\Phi(u)$  zmiennej losowej o rozkładzie Gaussa.

Pomiędzy gęstościami  $f(x)$  i  $\varphi(u)$  oraz dystrybuantami  $F(x)$  i  $\Phi(u)$  zachodzą następujące związki:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x} \varphi(u) \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma} \right), \quad (4.24)$$

$$F(x) = \Phi(u) \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma} \right). \quad (4.25)$$

Kwantylem rzędu  $p$  zmiennej losowej  $U$  nazywa się taką liczbę  $u_p$ , że:

$$P\{U < u_p\} = p. \quad (4.26)$$

Kwantylem rzędu  $p$  zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie normalnym  $N(\mu_x, \sigma_x)$  jest liczba  $x_p = \mu_x + \sigma_x u_p$ .

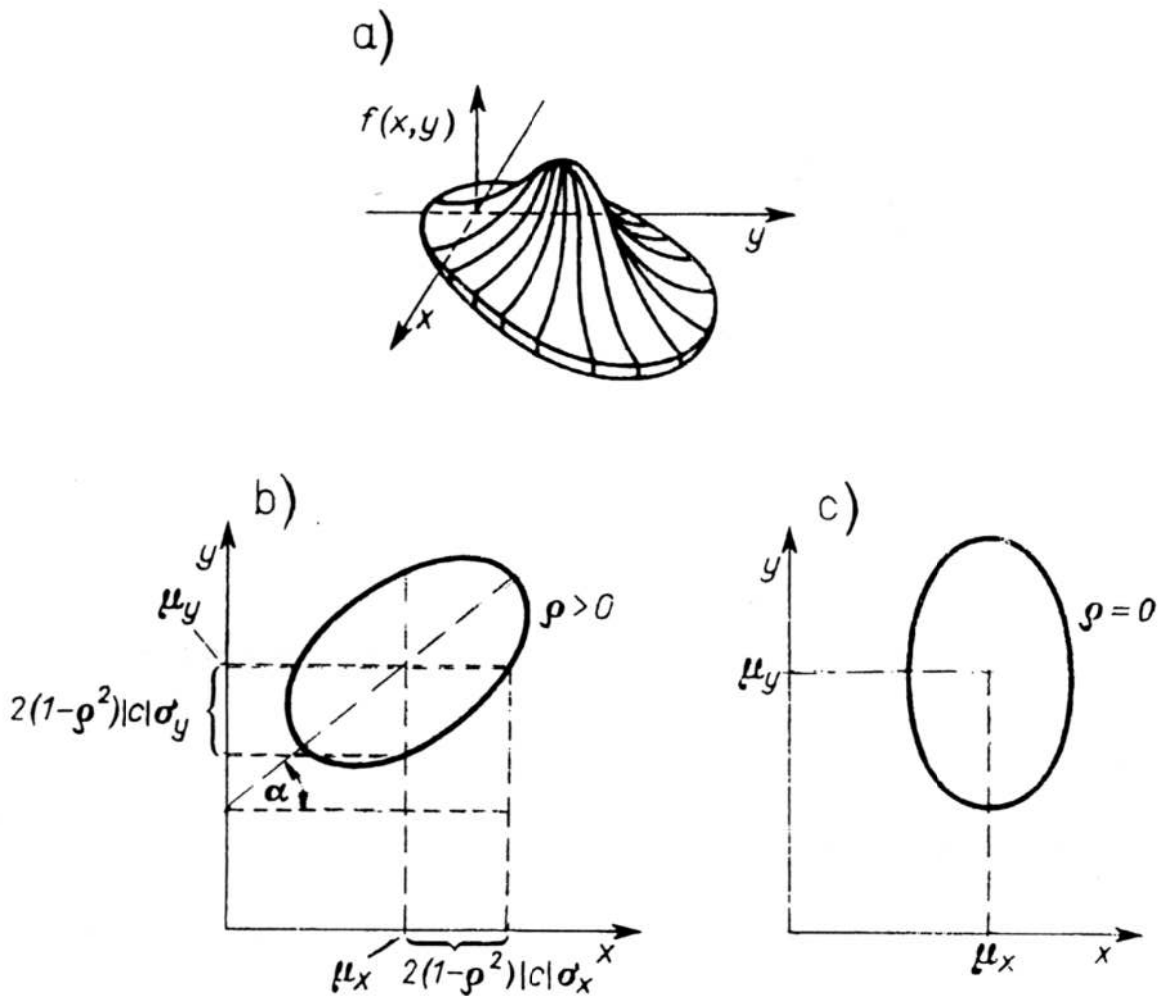
Rozkład normalny należy do najważniejszych rozkładów teoretycznych. W praktyce często spotykamy się z rozkładami zbliżonymi do normalnego.

#### 4.3.2.4. Dwuwymiarowy rozkład normalny

Gęstość rozkładu normalnego dwuwymiarowej zmiennej losowej opisuje funkcja:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \frac{2(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\}. \quad (4.27)$$

Wykres tej funkcji przedstawia rys. 4.16a. Rozkłady łączne dwóch zmiennych losowych odgrywają bardzo ważną rolę w doświadczalnictwie. Gęstość tego rozkładu jest funkcją pięciu parametrów:  $\mu_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\sigma_y$  oraz  $\rho$ . Parametr  $\rho$  jest **współczynnikiem korelacji**. Wykres funkcji  $f(x,y)$  rozpięty jest nad elipsą, której położenie na płaszczyźnie  $Oxy$  przedstawia rys. 4.16b. Maksimum gęstości pokrywa się ze środkiem elipsy, którym jest punkt  $(\mu_x, \mu_y)$ . Jeżeli przez  $\alpha$  oznaczy się kąt pomiędzy wielką osią elipsy i dodatnim kierunkiem osi  $Ox$ , to  $\operatorname{tg}2\alpha = 2\rho\sigma_x\sigma_y / (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ . Gdy  $\rho \rightarrow 1$ , wówczas elipsy stają się coraz węższe wskazując na tendencję do skupiania się masy prawdopodobieństwa wzdłuż wielkiej osi elipsy. Jeżeli  $\rho = 0$ , to mówimy, że zmienny losowe  $x$  i  $y$  są nieskorelowane (w przypadku rozkładu normalnego są one zarazem niezależnymi). Brak korelacji przejawia się na rysunku tym, że osie symetrii elipsy są prostopadłe (równoległe) do odpowiednich osi układu współrzędnych (rys. 4.16c).



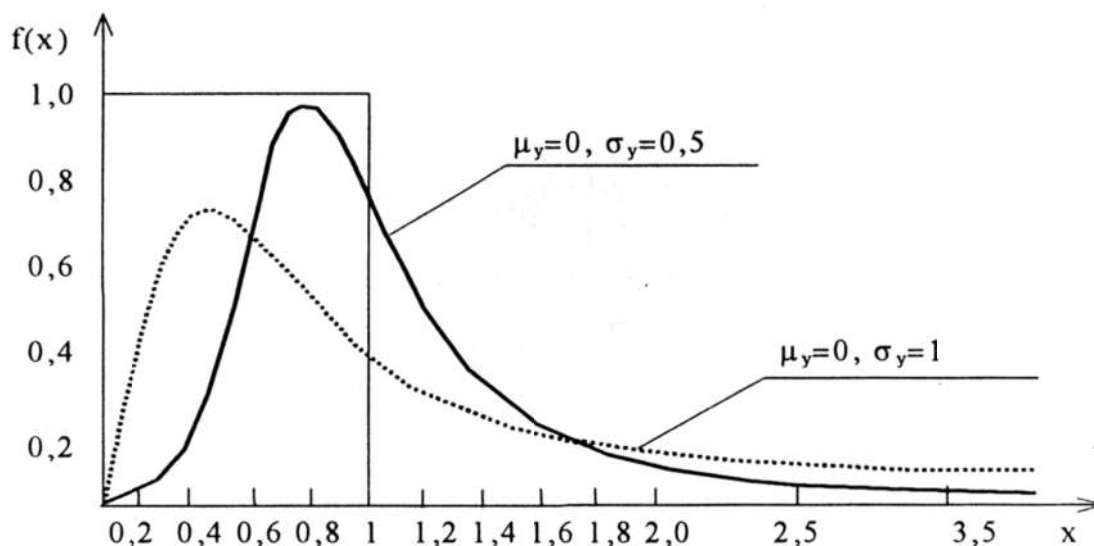
Rys. 4.16. Wykres funkcji  $f(x,y)$  (a) i wykresy elips na płaszczyźnie  $Oxy$  dla różnych wartości współczynnika korelacji  $\rho$  (b i c).

#### 4.3.2.5. Rozkład logarytmiczno-normalny

Zmienna losowa  $x$  ma rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach  $\mu_y$  i  $\sigma_y$ , jeżeli zmienna losowa  $y=\ln x$  ma rozkład normalny o parametrach  $\mu_y$  i  $\sigma_y$ . Z tej definicji otrzymuje się następujący wzór na gęstość rozkładu logarytmiczno-normalnego:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad x > 0. \quad (4.28)$$

Rozkład ten może być stosowany tylko do takich przypadków, w których zmienna losowa przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Wykres funkcji  $f(x)$  przedstawiony jest na rys. 4.17.



Rys. 4.17. Wykres gęstości zmiennej losowej o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

#### 4.3.2.6. Rozkład $\chi^2$ (chi-kwadrat)

Jeżeli niezależne zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_N$  mają jednakowy rozkład normalny o parametrach  $\mu=0$  i  $\sigma=1$ , to zmienna losowa

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad (4.29)$$

jest nazywana zmienną o rozkładzie chi kwadrat. Zmienna ta przyjmuje tylko wartości nieujemne. Rozkład zmiennej losowej  $\chi^2$  charakteryzuje się tylko jednym parametrem  $N$ , określającym liczbę niezależnych składników w sumie (4.29), zwanym liczbą stopni swobody.

Zmienna losowa  $\chi_N^2$  ma rozkład chi kwadrat o  $N$  stopniach swobody, jeżeli jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$F_N(x) = P\{\chi_N^2 < x\} = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} \int_0^x u^{N/2-1} e^{-u/2} du, \quad x \geq 0, \quad (4.30)$$

natomiast funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest określona wzorem:

$$f(\chi^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} (\chi^2)^{N/2-1} e^{-\chi^2/2}, & \text{dla } \chi^2 > 0, \\ 0, & \text{dla } \chi^2 \leq 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

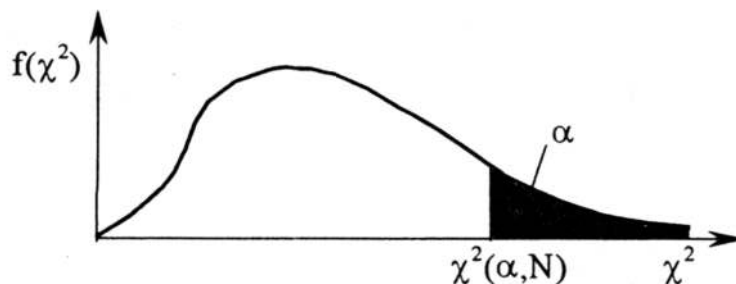
gdzie  $u$  jest zmienną losową o rozkładzie  $N(0,1)$ , a  $\Gamma$  jest funkcją gamma (całką Eulera drugiego rodzaju) o postaci:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad 0 < x < \infty. \quad (4.32)$$

Liczbę  $\chi_N^2(\alpha, N)$  taką, że:

$$P\{\chi_N^2 \geq \chi^2(\alpha, N)\} = \alpha, \quad (4.33)$$

nazywa się wartością krytyczną rozkładu chi kwadrat (rys. 4.18), zaś  $\chi^2(\alpha, N)$  jest kwantylem rzędu  $1-\alpha$  rozkładu chi kwadrat o  $N$  stopniach swobody.



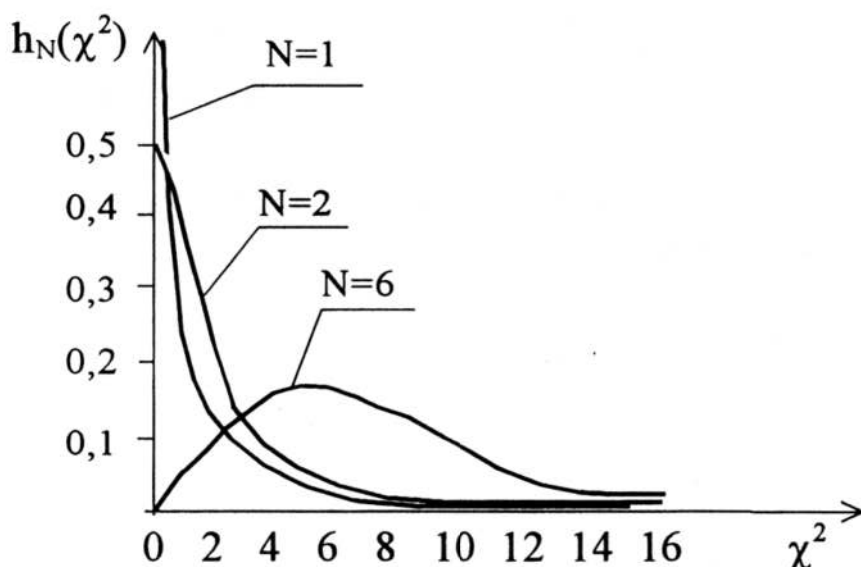
Rys. 4.18. Wartość krytyczna  $\chi^2(\alpha, N)$  rozkładu chi kwadrat.

Wykresy gęstości  $h_N(\chi^2)$  rozkładu chi kwadrat dla  $N=1, 2$  i  $6$  przedstawia rys. 4.19. Gęstość rozkładu  $\chi^2$  jest bardzo asymetryczna dla małych wartości  $N$ . W miarę wzrostu  $N$  asymetria rozkładu zmniejsza się. Dla  $N \leq 2$  gęstość  $h_N(\chi^2)$  jest funkcją monotoniczną malejącą. Dla  $N > 2$  gęstość  $h_N(\chi^2)$  ma maksimum w punkcie  $\chi^2 = N - 2$ .

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych losowych  $\chi_N^2$  wynoszą:

$$E(\chi_N^2) = N, \quad (4.34)$$

$$\text{var}(\chi_N^2) = 2N. \quad (4.35)$$



Rys. 4.19. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa rozkładu chi kwadrat dla  $N=1, 2$  i  $6$  stopni swobody.

Rozkład  $\chi^2$  jest zwykle stabilizowany dla liczby stopni swobody nie przekraczającej 30. Dlatego też w przypadku bardziej licznych prób wykorzystuje się zmienną losową  $\sqrt{2\chi^2}$ , która ma rozkład normalny o parametrach  $\mu = \sqrt{2N-1}$  i  $\sigma^2=1$ . Wówczas:

$$\chi_\alpha^2 = \frac{(U_\alpha + \sqrt{2N-1})^2}{2}, \quad (4.36)$$



gdzie:

$\chi_\alpha^2$  - wartość zmiennej losowej, której odpowiada prawdopodobieństwo

$$\alpha = P(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2),$$

$U_\alpha$  - wartość zmiennej standaryzowanej normalnej  $U$ , dla której

$$\alpha = P(U \geq U_\alpha).$$

Dla rozkładu  $\chi^2$  istnieją dwa rodzaje tablic:

1. Tablice zawierające wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, N)$ , przy zadanym prawdopodobieństwie  $\alpha$  i stopni swobody  $N$ ,
2. Tablice podające wartości dystrybuanty  $P(\chi_N^2 < \chi^2)$  w zależności od  $\chi^2$  oraz ilości stopni swobody  $N$ .

Jeżeli zmienne losowe  $\chi_N^2$  i  $\chi_M^2$  są niezależne, to suma tych zmiennych ma również rozkład chi kwadrat o  $(N+M)$  stopniach swobody:

$$\chi_N^2 + \chi_M^2 = \chi_{N+M}^2. \quad (4.37)$$

Zmienna losowa  $U$  według wzoru:

$$U^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2, \quad (4.38)$$

utworzona z ciągu  $N$  niezależnych zmiennych losowych normalnych  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , o jednakowych rozkładach  $N(\mu, \sigma)$  o znanych parametrach  $\mu$  i  $\sigma$  ma rozkład chi kwadrat o  $N$  stopniach swobody, zgodnie ze wzorem definicyjnym (4.29).

Zmienna losowa  $U$  według wzoru:

$$U^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{N} (X_1 + X_2 + \dots + X_N), \quad (4.39)$$

utworzona z ciągu  $N$  niezależnych zmiennych losowych normalnych  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , o jednakowych rozkładach  $N(\mu, \sigma)$  o znanym parametrze ma rozkład chi kwadrat o  $N-1$  stopniach swobody. Bowiem w sumie (4.39) występuje  $(N-1)$  składników niezależnych, natomiast składnik  $\bar{X}$  wyraża się poprzednimi.

#### 4.3.2.7. Rozkład $t$ Studenta (W. Gosseta)

Zmienna losowa według wzoru:

$$t_N = \frac{U}{\sqrt{\chi_N^2}} \sqrt{N}, \quad (4.40)$$

gdzie  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{N}$  ma rozkład normalny  $N(0, 1)$ , a  $\chi_N^2$  ma rozkład chi kwadrat o  $N$  stopniach swobody, nazywa się zmienną losową Studenta o  $N$  stopniach swobody. Student jest pseudonimem W. Gosseta. Rozkład Studenta jest symetryczny i niezależny od parametru  $\sigma$ . Zmienna losowa Studenta oznaczana jest małą literą  $t$ .

Dystrybuanta zmiennej losowej  $t$  wyraża się wzorem:

$$F(t) = P\{t < x\} = \frac{2}{\sqrt{N}B(1/2, N/2)} \int_{-\infty}^t \frac{dt}{(1+t^2/N)^{(N+1)/2}}, \quad (4.41)$$

natomiast funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest określona wzorem:

$$f(t) = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(N+1)]}{\Gamma(\frac{1}{2}N)\sqrt{N\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{N}\right)^{-\frac{1}{2}(N+1)}, \quad \text{dla } -\infty < t < +\infty, \quad (4.42)$$

gdzie  $\Gamma(x)$  jest funkcją gamma według wzoru (4.32),  $B(p, q)$  jest funkcją beta (całką Eulera pierwszego rodzaju) o postaci:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (4.43)$$

Między funkcjami beta i gamma zachodzi następujący związek:

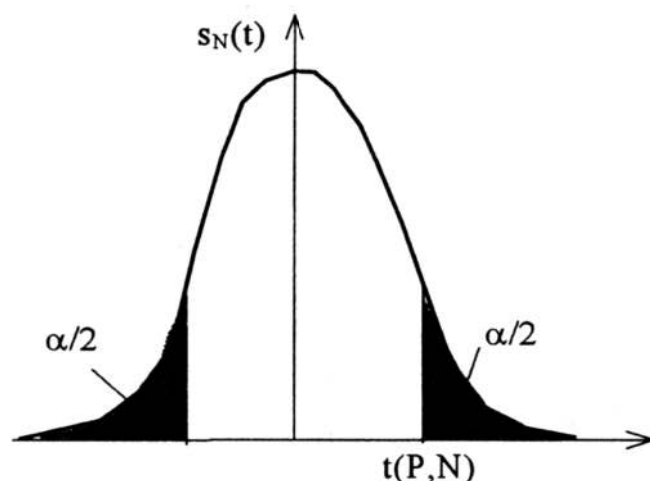
$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (4.44)$$

pozwalający wyrazić jedną funkcję za pomocą drugiej.

Liczbę  $t(P, N)$  taką, że:

$$P\{|t_N| > t(P, N)\} = P, \quad P \leq 0,5, \quad (4.45)$$

nazywa się wartością krytyczną rozkładu zmiennej losowej  $t_N$  (rys. 4.20).



Rys. 4.20. Wartość krytyczna  $t(\alpha, N)$  rozkładu Studenta.

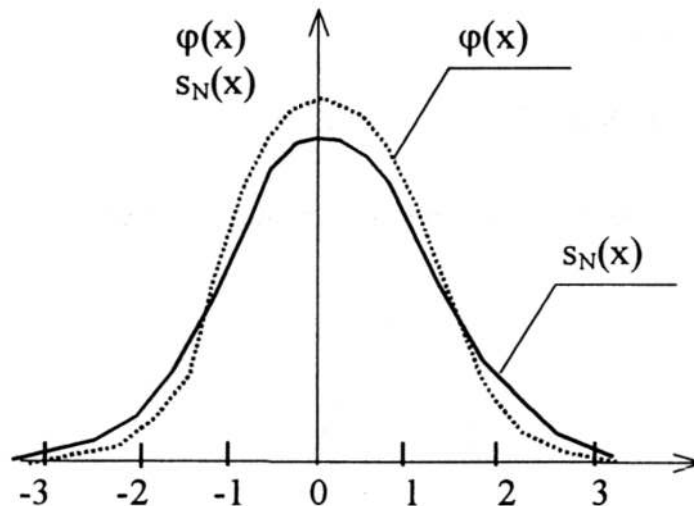
Jeżeli zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny o parametrach  $\mu_x$  i  $\sigma_x$ , to średnia arytmetyczna  $\bar{X}$  obliczona z  $N$ -elementowej próby ma również rozkład normalny. Rozkład średniej określony jest dopiero wówczas, gdy znane są dokładnie wartości obydwu parametrów w zbiorowości generalnej. Przy czym, jeżeli próba pochodzi ze zbiorowości normalnej, to charakterystyka:

$$t_{N-1} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s_x} \sqrt{N-1}, \quad (4.46)$$

nazywa się zmienną losową Studenta o  $N-1$  stopniach swobody.

Dystrybuantę rozkładu Studenta z  $N$  stopniami swobody oznacza się  $S_N(x)$ , natomiast gęstość prawdopodobieństwa  $s_N(x)$ . Gęstość  $s_N(x)$  zmiennej losowej  $t$  jest zbliżona do rozkładu normalnego  $\varphi(x)$ , lecz jest bardziej spłaszczona (rys. 4.21). Dla  $N > 30$  można zastąpić tablice rozkładu Studenta przez tablice rozkładu normalnego  $N(0,1)$ .

Rozkład  $t$  Studenta jest częstym rozkładem różnych statystyk.



Rys. 4.21. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa  $\varphi(x)$  unormowanego rozkładu normalnego i  $s_N(x)$  rozkładu Studenta o liczbie stopni swobody  $N=4$ .

#### 4.3.2.8. Rozkład $F$ Snedecora

Zmienna losowa  $F_{M,N}$  ma rozkład  $F$  Snedecora (Fishera-Snedecora lub krótko: rozkład  $F$ ) o  $(M,N)$  stopniach swobody, jeżeli jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$P\{F_{M,N} < x\} = \frac{\Gamma\left(\frac{M+N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} M^{M/2} N^{N/2} \int_0^x t^{M/2-1} (N+Mt)^{(M+N)/2} dt, \quad x \geq 0, \quad (4.47)$$

natomiast funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma postać:

$$f(F_{M,N}) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(M+N)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{2}M\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}N\right)} \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{2}M} \cdot \frac{F^{\frac{1}{2}(M-2)}}{\left(1+\frac{M}{N}F\right)^{\frac{1}{2}(M+N)}}, & \text{dla } F > 0, \\ 0, & \text{dla } F \leq 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

Liczbę  $F(\alpha, M, N)$  taką, że:

$$P\{F_{M,N} \geq F(\alpha, M, N)\} = \alpha, \quad (4.49)$$

nazywa się wartością krytyczną rozkładu  $F$ .

Jeżeli  $\chi_M^2$  i  $\chi_N^2$  są zmiennymi losowymi niezależnymi stochastycznie o rozkładach chi kwadrat odpowiednio o  $M$  i  $N$  stopniach swobody, to zmienna losowa zdefiniowana wzorem:

$$F_{M,N} = \frac{\frac{1}{M} \chi_M^2}{\frac{1}{N} \chi_N^2}, \quad (4.50)$$

ma rozkład  $F$  Snedecora o  $(M,N)$  stopniach swobody i nazywa się statystyką  $F$  Snedecora.

Rozkład charakterystyki  $F$  zależy od trzech parametrów:  $\alpha$ ,  $M$  i  $N$  i został stabilizowany. W tablicach podaje się wartości krytyczne  $F(\alpha, M, N)$ , dla których zachodzi związek (4.49).

#### 4.3.2.9. Rozkład z Fishera

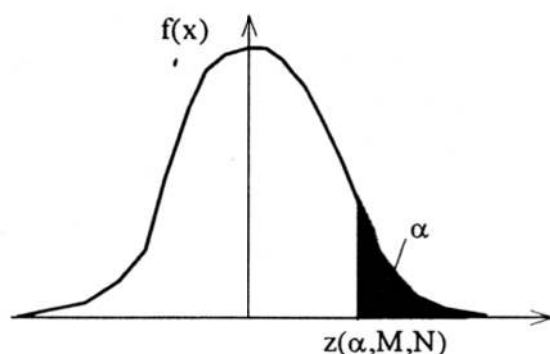
Zmienna losowa  $Z_{M,N}$  ma rozkład Fishera o  $(M,N)$  stopniach swobody, jeżeli jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

$$F(x) = P\{Z_{M,N} < x\} = \frac{2M^{M/2} N^{N/2}}{B(M/2, N/2)} \int_{-\infty}^x \frac{e^{Mz} dz}{(Me^{2z} + N)^{(M+N)/2}}. \quad (4.51)$$

Liczbę  $z(\alpha, M, N)$  taką, że:

$$P\{Z_{M,N} \geq z(\alpha, M, N)\} = \alpha, \quad (4.49)$$

nazywa się wartością krytyczną rozkładu z Fishera (rys. 4.22).



Rys. 4.21. Wartość krytyczna  $z(\alpha, M, N)$  rozkładu z Fishera.

Jeżeli zmienna losowa  $F_{M,N}$  ma rozkład  $F$  Snedecora o  $(M,N)$  stopniach swobody, to zmienna losowa:

$$Z_{M,N} = \frac{1}{2} \ln F_{M,N}, \quad (4.49)$$

ma rozkład z Fishera o  $(M,N)$  stopniach swobody.

#### 4.4. Wybrane zastosowania rozkładów

Rozkład dwupunktowy stosowany jest dla dwu zdarzeń wzajemnie wykluczających się. Najbardziej elementarnym przykładem zdarzeń tego typu jest wynik rzutu monetą. Jeżeli moneta jest dokładnie symetryczna to można przyjąć, że wyrzucenie orła lub reszki jest jednakowo prawdopodobne i wynosi  $p=0,5$ .

Rozkład dwumianowy można stosować w tych wszystkich przypadkach, kiedy wyniki eksperymentów dają się formułować w terminach "sukces" - "porażka". Na przykład do kontroli ilości braków wytwarzanego produktu.

Rozkład Poissona może być stosowany do kontroli jakości produkcji, przy czym, podobnie jak rozkład dwumianowy, może odnosić się do cech niemierzalnych, jakościowych. Rozkład Poissona stosuje się wówczas, gdy liczba zdarzeń jest bardzo duża, natomiast nie jest dostępna informacja ani o liczbie zdarzeń, ani o prawdopodobieństwie tego zdarzenia. Klasycznym przykładem może być obserwacja rozpadu promieniotwórczego jąder. Liczba jąder w badanej próbce jest zwykle bardzo duża, rzędu  $10^{20}$ , natomiast liczba zaobserwowanych rozpadów bardzo mała.

Rozkład prostokątny można stosować w takich przypadkach, gdy nic nie wiemy o wartości parametru, który należy oszacować, a można przypuszczać, że każda wartość tego parametru z jakiegoś przedziału jest jednakowo możliwa.

Rozkład normalny ma bardzo duże znaczenie praktyczne, gdyż w praktyce często spotykamy się z rozkładami zbliżonymi do normalnego. Jest on rozkładem granicznym sumy niezależnych zmiennych losowych.

Rozkład logarytmiczno-normalny pozwala rozszerzyć teorię zmiennych o rozkładach normalnych również na te zmienne losowe, które lepiej są przybliżane przez rozkład logarytmiczno-normalny.



# 5

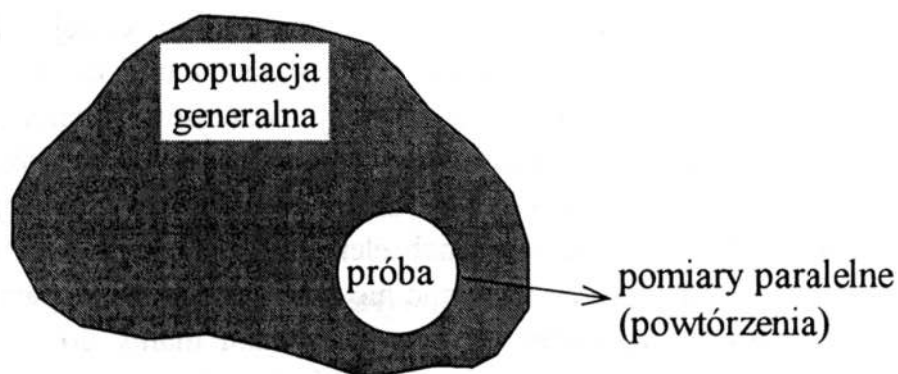
## ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

---

### 5.1. Wprowadzenie

W rozdziale 3 zostały omówione podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa. Wynika z niego, że rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się wykrywaniem i badaniem prawidłowości wśród wielkości losowych, którymi są: zdarzenia losowe, zmienne losowe i procesy losowe (zwane również procesami stochastycznymi). Na podstawie znajomości rozkładów prawdopodobieństwa pewnych wielkości losowych wyznacza się rozkłady prawdopodobieństwa innych wielkości losowych, powiązanych z pierwszymi w określony sposób. Zatem rozpatrywane tam zagadnienia dotyczyły zawsze pewnego zbioru danych, który był charakteryzowany za pomocą parametrów: średnich, dyspersji, momentów. Bardzo często jednak zbadanie określonej cechy całej zbiorowości jest bardzo trudne lub wręcz niemożliwe, na przykład ze względów ekonomicznych, długi okres zbierania danych lub konieczność zniszczenia całej partii towaru. Wówczas wnioskowanie dotyczące całej zbiorowości (tak zwane *wnioskowanie statystyczne*) odbywa się na podstawie *próbki* będącej częścią tej populacji (rys. 5.1). Czasami pomiary dla identycznych warunków powtarza się, realizując tzw. *pomiary paralelne*.

**Zbiorowość generalna** (albo **populacja generalna**) jest to określony na podstawie merytorycznych przesłanek zbiór elementów lub zdarzeń, w odniesieniu do którego formułujemy wnioski wynikające z doświadczenia. **Próba** (albo **zbiorowość** lub **populacja próbna**) jest to podzbiór zbiorowości generalnej, który podlega badaniu i na podstawie którego formułuje się wnioski dotyczące zbiorowości generalnej.



Rys. 5.1. Ilustracja pojęć populacji, próby i pomiarów paralelnych [48].

Zatem *statystyka matematyczna* zajmuje się metodami wnioskowania o rozkładach pewnych wielkości losowych na podstawie obserwacji próby, będącej pewną realizacją tych wielkości losowych. Takie wnioskowanie uogólniające jest jednak niepewne i należy się liczyć z ryzykiem popełnienia błędu. Zadaniem statystyki jest również obliczenie ryzyka popełnienia błędu. Warunkiem formułowania poprawnych wniosków odnośnie do zbiorowości generalnej jest *reprezentatywność próby*, to znaczy, że musi ona zachowywać wszystkie właściwości zbiorowości generalnej. W zagadnieniach praktycznych nie ma na ogół możliwości sprawdzenia, czy warunek ten jest ściśle spełniony. Przyjmuje się, że dla zapewnienia reprezentatywności próby wystarcza spełnienie dwóch warunków możliwych do zrealizowania w praktyce, tj. próba powinna być *losowa* (zapewniająca każdemu elementowi zbiorowości generalnej jednakową szansę dostania się do próby) i *dostatecznie liczna*. Dział statystyki matematycznej traktujący o zasadach i metodach gromadzenia i analizy danych statystycznych pochodzących z populacji generalnej nazywany jest *metodami reprezentacyjnymi*. Formalną podstawą tego działu jest *teoria pobierania prób* [67]. Jeżeli zaliczenie elementu zbiorowości generalnej do próby jest zależne w pewnym stopniu od wartości cechy, będącej przedmiotem badania, to próba jest *tendencyjna*. Na ogół przyjmuje się, że dla zapewnienia reprezentatywności próby wystarcza spełnienie dwóch warunków możliwych do zrealizowania w praktyce tj. próba powinna być *losowa* i *dostatecznie liczna*.

Ogólnie *statystykę matematyczną* (wnioskowanie statystyczne) można podzielić na *estymację* i *weryfikację hipotez statystycznych*. Zagadnienia te będą dalej szczegółowo omawiane.

## 5.2. Wybrane zagadnienia z teorii estymacji

*Teoria estymacji (szacowania)* zajmuje się wnioskowaniem o właściwościach rozkładu prawdopodobieństwa zbiorowości generalnej na podstawie próby. W teorii estymacji postuluje się znajomość klasy rozkładów, do której należy niezany rozkład badanej zbiorowości generalnej, i na podstawie próby ustala się, z którym rozkładem mamy do czynienia w badanej zbiorowości generalnej. Elementy klasy możliwych rozkładów zbiorowości generalnej mogą się różnić tylko wartościami parametrów. Wówczas mamy do czynienia z *estymacją parametryczną*. W bardziej złożonych przypadkach elementy klasy możliwych rozkładów zbiorowości generalnej mogą się różnić nie tylko wartościami parametrów, lecz także postacią funkcji rozkładu. W tym przypadku mamy do czynienia z *estymacją nieparametryczną*.

*Teorię estymacji* dzieli się na dwa zasadnicze działy: *estymację punktową* i *estymację przedziałową*. W przypadku estymacji punktowej znajduje się pewną funkcję próby i wartość tej funkcji przyjmuje się za najlepsze oszacowanie praw-

dziwej wartości parametru zbiorowości generalnej. W przypadku estymacji przedziałowej znajduje się na podstawie próby pewien przedział liczbowy, który zawiera w sobie prawdziwą wartość parametru zbiorowości generalnej, z przyjętym z góry prawdopodobieństwem.

W przypadku estymacji nieparametrycznej, gdy zwykle szacuje się postać funkcyjną dystrybuanty, stosuje się z reguły estymację przedziałową, podając pewne pasmo, w którym mieści się prawdziwa dystrybuanta zbiorowości generalnej, z przyjętym z góry prawdopodobieństwem.

### 5.2.1. Estymacja punktowa

W wyniku przeprowadzenia badań  $n$ -elementowej próby, dysponuje się pewnymi informacjami o zbiorowości generalnej. W celu uzyskania oszacowań parametrów rozkładu cechy w zbiorowości generalnej, informacje te należy poddać ocenie. Wszystkie wielkości obliczone na podstawie próby są *funkcjami wartości w próbie* lub krótko *funkcjami próby*. Każdą funkcję próby nazywamy *charakterystyką*. Często stosuje się równorzędny termin *statystyka*. Charakterystyka (statystyka), która służy do oszacowania nieznanego parametru rozkładu zmiennej losowej lub nieznanego momentu nosi nazwę *estymatora* tego parametru lub momentu.

Problem szacowania parametrów rozkładu można przedstawić następująco. Rozkład rozpatrywanej zbiorowości generalnej  $X$  jest scharakteryzowany za pomocą dystrybuanty  $F(x; q_1, q_2, \dots, q_K)$  o nieznanach parametrach  $q_1, q_2, \dots, q_K$ . Na przykład w celu określenia rozkładu normalnego należy wyznaczyć dwa parametry  $q_1 = \mu$  i  $q_2 = \sigma^2$ . Dla próby losowej  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  tworzy się statystyki  $S_1, S_2, \dots, S_K$  będące funkcjami zmiennej losowej  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Statystyki  $S_k$ , służące do oszacowania nieznanego parametru  $q_k$ , nazywa się *estymatorami* parametrów  $q_k$  i oznacza się symbolem  $\hat{Q}_k$ :

$$S_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_N) = \hat{Q}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.1)$$

Powstaje zatem problem wyboru najlepszego estymatora w oparciu o określone kryteria.

### 5.2.2. Właściwości najlepszego estymatora

W teorii estymacji wyodrębnia się trzy najważniejsze właściwości, jakimi powinien cechować się estymator, by jego przydatność do konstrukcji testu była możliwie największa. Estymator powinien być: *nieobciążony*, *zgodny* i *efektywny*.

### 5.2.2.1. Estymator nieobciążony

Oznaczmy przez  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  realizacje zmiennej losowej  $X$  składające się na  $N$  elementową próbę. Jeżeli posługując się jedną ze znanych metod oszacuje się parametr  $Q_k$  zmiennej losowej  $X$  za pomocą estymatora  $\hat{Q}_k$ , to uzyskana ocena odbiegać będzie zazwyczaj od wartości prawdziwej  $Q_k$ . Pożądanym jest jednak, aby wartość oczekiwana tych oszacowań rozważana na zbiorze wszystkich możliwych prób, była równa wartości prawdziwej  $Q_k$ :

$$E(\hat{Q}_k) = Q_k. \quad (5.2)$$

Estymator mający tę własność nazywa się *estymatorem nieobciążonym*. Wówczas *obciążenie estymatora*  $\Delta\hat{Q}_k$ , będące różnicą:

$$\Delta\hat{Q}_k = E(\hat{Q}_k) - Q_k, \quad (5.3)$$

wynosi zero  $\Delta\hat{Q}_k = 0$ .

Stosując metodę największej wiarygodności (patrz pkt. 5.2.3.2) do rozkładu normalnego otrzymuje się następujące oceny o największej wiarygodności:

$$\hat{\mu}_x = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5.4)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.5)$$

Okazuje się, że estymacja wartości oczekiwanej jest oceną *nieobciążoną*, gdyż:

$$E(\hat{\mu}_x) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(x_i) = \frac{1}{N} N\mu_x = \mu_x,$$

a więc warunek (5.2) jest spełniony. Natomiast estymacja wariancji jest oceną *obciążoną*. W celu przeprowadzenia dowodu obliczmy wartość oczekiwaną estymatora według wzoru (5.5), otrzymując:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_x^2) &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right] = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i - \mu_x) - (\bar{x} - \mu_x)]^2\right\} = \\ &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 - 2(\bar{x} - \mu_x) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x) + (\bar{x} - \mu_x)^2\right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[(x_i - \mu_x)^2] - E[(\bar{x} - \mu_x)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_x^2 - \frac{1}{N} \sigma_x^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 \neq \sigma_x^2.$$

Zatem obciążenie estymatora zgodnie ze wzorem (5.3) wynosi:

$$\Delta \hat{\sigma}_x^2 = E(\hat{\sigma}_x^2) - \sigma_x^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 - \sigma_x^2 = -\frac{1}{N} \sigma_x^2.$$

Wynika stąd, że estymator nieobciążony wariancji ma postać:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.6)$$

Wszystkie oceny momentów podane w tabelicy 5.1, są ocenami nieobciążonymi.

### 5.2.2.2. Estymator zgodny

Jeżeli przy nieograniczonym wzroście liczebności próby oszacowanie  $\hat{Q}_k$  nieznanego parametru  $Q$  zbliża się do wartości prawdziwej z prawdopodobieństwem równym jeden

$$P(\hat{Q}_k \rightarrow Q_k) = 1, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

to taki estymator nazywa się *zgodnym*.

Obydwie oceny wariancji obciążona (wzór 5.5) i nieobciążona (wzór 5.6) są estymatorami zgodnymi.

### 5.2.2.3. Estymator efektywny

Spośród kilku możliwych estymatorów za najlepszy uznaje się ten, który wykazuje mniejszy rozrzut wartości otrzymanych na podstawie wszystkich możliwych prób. Ponieważ miarą rozrzutu jest wariancja, zatem *najefektywniejszy* jest ten estymator nieobciążony, który ma najmniejszą *wariancję* spośród wszystkich estymatorów nieobciążonych.

### 5.2.3. Ocena parametrów rozkładu zmiennej losowej

Najważniejszymi metodami estymacji punktowej dla wyznaczenia  $K$  nieznanych parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_K$  funkcji rozkładu  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_K)$  są metoda momentów, wprowadzona przez K. Pearsona (1894 r.), metoda największej wiarygod-



ności, wprowadzona przez R. A. Fishera (1912 r.) i metoda najmniejszych kwadratów.

### 5.2.3.1. Metoda momentów Pearsona

W metodzie Pearsona wykorzystuje się pojęcie  $k$ -tego momentu względem punktu  $c$  (por. pkt. 3.6.3). Momenty te zdefiniowane są następującymi wzorami dla zmiennych losowych typu ciągłego:

$$E[(x - c)^k] = \int_a^b (x - c)^k f(x; a_1, a_2, \dots, a_k) dx. \quad (5.8)$$

W szczególności, gdy  $c=0$ , momenty nazywa się *zwykłymi* i oznacza symbolem  $m_k$ . Moment zwykły rzędu 1-go jest wartością przeciętną zmiennej losowej. Jeżeli  $c=m_1=\mu_x$ , momenty nazywają się *centralnymi*.

Tablica 5.1. Podstawowe momenty rozkładu i ich odpowiedniki w próbie

Rząd momentu	Rodzaj momentu	Moment w zbiorowości generalnej	Moment w próbie	Zastosowanie
1	Zwykły (wartość przeciętna)	$E(x) = \mu_x = \int x f(x) dx$	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	Miara położenia
2	centralny (wariancja)	$D^2(x) = \mu_2 = \sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx$	$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$	Miara rozproszenia
3	centralny (kowariancja, moment mieszany)	$cov(x, y) = \mu_{11} = \int (x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y) f(x, y) dx dy$	$cov(x, y) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	Nieznormalizowana miara liniowości rozkładu
4	centralny	$\mu_3 = \int (x - \mu_x)^3 f(x) dx$	$\mu_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3$	Nieznormalizowana miara asymetrii rozkładu

Znajomość momentów może być bezpośrednio wykorzystana do znalezienia parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_k$  funkcji rozkładu  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$  zmiennej losowej. Znajomość pierwszego momentu zwykłego (wartości przeciętnej) i drugiego mo-



mentu centralnego (wariancji) wystarcza do jednoznacznego określenia wszystkich parametrów rozkładu jednowymiarowej zmiennej losowej normalnej. Jeżeli zmienna losowa jest dwuwymiarowa, wówczas dodatkowo potrzebna jest znajomość drugiego centralnego momentu mieszanego.

Zaproponowana przez Pearsona praktyczna metoda znajdowania nieznanymi parametrów rozkładu polega na przyrównywaniu pewnej liczby momentów w próbie do odpowiednich momentów rozkładu, będących znanymi funkcjami nieznanymi parametrów rozkładu. Najczęściej spotykane momenty zestawione są w tabelicy 5.1. W metodzie Pearsona ilość przyrównywalnych momentów w próbie (estymatorów) musi się równać liczbie nieznanymi parametrów rozkładu. Rozwiązując otrzymany układ równań uzyskuje się szukane oceny tych parametrów.

Metoda momentów charakteryzuje się dużą prostotą, jednak daje estymatory niekiedy silnie obciążone w próbach o małej obserwacji.

### 5.2.3.2. Metoda największej wiarygodności

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_N$  będą realizacjami zmiennej losowej  $x$  składającymi się na  $N$ -elementową próbę. W metodzie największej wiarygodności przyjmuje się taką hipotezę o wartości nieznanymi parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_K$ , która daje największą gęstość prawdopodobieństwa (lub prawdopodobieństwo) otrzymania w wyniku pomiarów takich wartości  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , które faktycznie otrzymano w próbie.

W statystyce matematycznej funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla próby nosi nazwę *funkcji wiarygodności* i jest oznaczana przez  $L$ .

Jeżeli zmienna losowa  $x$  jest typu ciągłego z gęstością  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_K)$  będącą funkcją  $K$  nieznanymi parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_K$  to funkcją wiarygodności nazywa się iloczyn:

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i, a_1, \dots, a_K) = f(x_1, a_1, \dots, a_K) f(x_2, a_1, \dots, a_K) \dots f(x_N, a_1, \dots, a_K), \quad (5.9)$$

natomiast dla zmiennej losowej skokowej przyjmuje się:

$$L = \prod_{i=1}^N p_i(a_1, \dots, a_K) = P(x = x_1) P(x = x_2) \dots P(x = x_N), \quad (5.10)$$

gdzie  $P(x=x_i)$  jest funkcją parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_K$ .

Metoda największej wiarygodności polega na dobraniu wartości ocen nieznanymi parametrów  $a_1, a_2, \dots, a_K$  przy których funkcja  $L$  staje się największe. Ponieważ  $\ln L$  osiąga największą wartość dla tych samych wartości na  $a_i$  co  $L$ , więc dla

znalezienia parametrów  $a_i$  pozostaje rozwiązać  $K$  równań z  $K$  niewiadomymi, zwanych *równaniami wiarygodności*:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0, \\ \cdot \\ \frac{\partial \ln L}{\partial a_K} = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

gdzie:

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \ln[f(x_i, a_1, \dots, a_K)] = \ln[f(x_1, a_1, \dots, a_K)] + \\ + \ln[f(x_2, a_1, \dots, a_K)] + \dots + \ln[f(x_N, a_1, \dots, a_K)],$$

dla zmiennej losowej ciągłej,

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \ln[p_i(a_1, \dots, a_K)] = \ln[P(x = x_1)] + \\ + \ln[P(x = x_2)] + \dots + \ln[P(x = x_N)],$$

dla zmiennej losowej skokowej.

### 5.2.3.3. Metoda najmniejszych kwadratów

W metodzie najmniejszych kwadratów oceny parametrów wyznacza się jako ich wartości minimalizujące sumę kwadratów odchyłeń poszczególnych wartości zmierzonych od wartości oceny parametru, podzielonych przez odchylenia standardowe poszczególnych pomiarów, ze wzoru:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma_i} \right)^2 = \text{minimum}. \quad (5.12)$$

Obliczając pochodną wyrażenia (5.12) i przyrównując do zera otrzymuje się:

$$-2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma_i} = 0. \quad (5.13)$$

Rozwiązując równanie (5.13) otrzymuje się ocenę parametru  $\mu$  jako średnią ważoną z poszczególnych pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.14)$$

Występujące we wzorze (5.14) wielkości odwrotnie proporcjonalnie do kwadratów odchyleń standardowych nazywają się wagami pomiarów.

#### 5.2.4. Estymacja przedziałowa

Omówiona estymacja punktowa umożliwiła podanie, na podstawie próby  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , oceny wartości nieznanego parametru w postaci jednej liczby, to jest estymatora  $\hat{Q}_k$ . Powstaje jednak pytanie, jaka jest dokładność tej estymacji? Pewną odpowiedź daje estymacja przedziałowa, w której wyznacza się przedziały ufności wprowadzone przez J. Neymana.

Ogólna idea metody Neymana, zwanej metodą przedziałów ufności, polega na wyznaczeniu granic przedziału  $Q_k^d(\alpha, \hat{Q}_k)$  i  $Q_k^g(\alpha, \hat{Q}_k)$  w oparciu o arbitralnie ustaloną wielkość prawdopodobieństwa popełnienia omyłki  $\alpha$ , oraz znany rozkład charakterystyki  $\hat{Q}_k$  będącej estymatorem nieznanego parametru  $Q$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że  $Q$  należy do przedziału  $[Q_k^d, Q_k^g]$  określone jest wzorem:

$$P(Q_k^d \leq Q_k \leq Q_k^g) = 1 - \alpha. \quad (5.15)$$

Przedział  $[Q_k^d, Q_k^g]$  nazywa się *przedziałem ufności*, wartość  $\alpha$  - *poziom istotności*, wartość  $(1-\alpha)$  - *poziomem ufności*, a wielkości  $Q_k^d(\alpha, \hat{Q}_k)$  i  $Q_k^g(\alpha, \hat{Q}_k)$  - odpowiednio dolną i górną *granicą ufności*. Przy łącznym rozważaniu więcej niż jednego parametru mówi się o *obszarach ufności*.

##### 5.2.4.1. Przedział ufności dla wartości przeciętnej

Ponieważ wnioskowanie dotyczące populacji odbywa się na podstawie próby, bardzo rzadko będzie miał miejsce przypadek, kiedy średnia z populacji  $\mu$  jest

równa średniej  $\bar{x}$  z próby. Można jednak oszacować przedział ufności, w którym będzie mieściła się średnia z populacji.

Przy wyznaczaniu przedziału ufności dla wartości przeciętnej  $\mu$  można znaleźć się w jednej z dwóch sytuacji:

- 1) Dyspersja populacji generalnej  $\sigma$  jest znana lub próba jest dostatecznie liczna. W praktyce przyjmuje się, że próba jest dostatecznie liczna, gdy liczba pomiarów  $N > 30$ .
- 2) Dyspersja populacji generalnej  $\sigma$  nie jest znana a liczebność próby  $N \leq 30$ .

W pierwszym przypadku przedział ufności określa się z zależności:

$$\bar{x} - z_{\alpha} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (5.16)$$

gdzie  $z_{\alpha}$  jest wartością standaryzowaną zmiennej losowej o rozkładzie normalnym  $N(0,1)$  ( $z_{\alpha} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} \sqrt{N}$ ). Wzór (5.16) może być również stosowany

wówczas, gdy liczba obserwacji jest na tyle liczna, że można przyjąć założenie o równości odchyłeń standardowych w próbie i w populacji generalnej  $\sigma_x \approx s_x$ .

W praktyce, najczęściej mamy do czynienia z drugim przypadkiem. Wówczas zmienną losową  $z_{\alpha}$  o rozkładzie normalnym, zastępuje się zmienną losową o rozkładzie  $t$ -Studenta, a przedział ufności dla średniej w populacji generalnej ustala się na podstawie wzoru:

$$\bar{x} - t_{\alpha;f} \frac{s_x}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha;f} \frac{s_x}{\sqrt{N-1}}, \quad (5.17)$$

gdzie  $\bar{x}$  - wartość średnia obliczona na podstawie próbki,  $s_x$  - odchylenie standardowe w próbie,  $t_{\alpha;f}$  - wartość tabelaryczna testu  $t$  Studenta dla określonego poziomu istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody  $f=N-1$ .

Ważnym problemem jest dobór liczności próbki oraz ustalenie poziomu istotności  $\alpha$ . Ze wzoru (5.13) wynika, że wielkość przedziału ufności dla wartości  $\mu$  zależy od liczby obserwacji. Im większa jest liczba  $N$  tym węższy jest przedział ufności. Natomiast poziom istotności  $\alpha$  określa prawdopodobieństwo tego, że średnia z populacji mieści się w określonym przedziale ufności. Zwiększając zaufanie do przedziału, poszerzamy go i czynimy mniej oznaczonym. Najczęściej stosowane są następujące wartości poziomu istotności:

- $\alpha=0,1$  (prawdopodobieństwo 90%),
- $\alpha=0,05$  (prawdopodobieństwo 95%),

$\alpha=0,01$  (prawdopodobieństwo 99%),  
 $\alpha=0,001$  (prawdopodobieństwo 99,9%).

Wybór poziomu istotności jest subiektywny i zależy od rodzaju prowadzonych badań. Przykładowo, w badaniach związanych z technologią budowy maszyn przyjmuje się najczęściej poziomy istotności równe 0,05 lub 0,1.

#### 5.2.4.2. Przedział ufności dla wariancji

Znane są dwa sposoby wyznaczania przedziału ufności dla wariancji. W pierwszym sposobie wykorzystuje się test  $F$  Snedecora i otrzymuje następujące oszacowanie:

$$\frac{1}{F_{\alpha, r_1, r_2 = \infty}} s_x^2 < \sigma_x^2 < s_x^2 F_{\alpha, r_1 = \infty, r_2}, \quad (5.18)$$

gdzie  $\alpha$  jest poziomem istotności,  $F_{\alpha, r_1, r_2}$  jest wartością krytyczną testu  $F$  Snedecora,  $r_1$  i  $r_2$  są liczbami stopni swobody.

W drugim sposobie wyznaczania przedziału ufności dla wariancji  $\sigma_x^2$  zbiorowości generalnej  $X$  o rozkładzie normalnym  $N(\mu_x, \sigma_x)$  wykorzystuje się związek rozkładu  $F$  Snedecora z rozkładem chi kwadrat. Szacowanie przedziału ufności opiera się na stwierdzeniu, że zmienna losowa  $rs_x^2 / \sigma_x^2$  o  $r$  stopniach swobody, gdzie  $r=N-1$ , ma rozkład chi kwadrat o  $(N-1)$  stopniach swobody. Przedział ufności określa się ze wzoru:

$$\frac{r}{\chi_{\alpha; r}^2} s_x^2 < \sigma_x^2 < \frac{r}{\chi_{1-\alpha; r}^2} s_x^2, \quad (5.19)$$

gdzie  $\chi_{\alpha; r}^2$  jest wartością krytyczną (kwantylem rzędu  $1-\alpha$ ) rozkładu chi kwadrat o  $r$  stopniach swobody.

#### 5.2.4.3. Przedział ufności dla funkcji regresji

W niniejszym punkcie wyznaczmy przedział ufności dla funkcji regresji, na poziomie istotności  $\alpha$ , dla prognozowanej wartości wyjścia  $\hat{y}$  odpowiadającej wartościom wejść  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ .

Oznaczając:

$$\{\mathbf{k}\} = [k_0 \quad k_1 \quad \dots \quad k_K]^T. \quad (5.20)$$

$$[\tilde{\mathbf{X}}] = \begin{bmatrix} x_{10} & \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1K} \\ x_{20} & \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & \tilde{x}_{N1} & \tilde{x}_{N2} & \dots & \tilde{x}_{NK} \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{\mathbf{x}}\} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n]^T, \quad (5.21)$$

równanie regresji przyjmie postać:

$$\hat{y} = [\tilde{\mathbf{X}}]\{\mathbf{k}\}. \quad (5.22)$$

Ponieważ  $\{\mathbf{k}\}$  jest zmienną losową wielowymiarową o rozkładzie normalnym, przy założeniu rozkładu normalnego zakłóceń, więc  $\hat{y}$  jest również zmienną losową o rozkładzie normalnym o wartości oczekiwanej:

$$\mathbf{E}(\hat{y}) = \mathbf{E}([\tilde{\mathbf{X}}]\{\mathbf{k}\}) = [\tilde{\mathbf{X}}]\mathbf{E}(\{\mathbf{k}\}) = [\tilde{\mathbf{X}}]\{\bar{\mathbf{k}}\}, \quad (5.23)$$

i wariancji:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{y}) &= \mathbf{E}\{[\hat{y} - \mathbf{E}(\hat{y})][\hat{y} - \mathbf{E}(\hat{y})]^T\} = \\ &= \mathbf{E}\{(\hat{y})^T (\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})(\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})^T (\hat{y})\} = \\ &= (\hat{y})^T \mathbf{E}\{(\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})(\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})^T\} \hat{y}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ponieważ:

$$\mathbf{E}\{(\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})(\{\mathbf{k}\} - \{\bar{\mathbf{k}}\})^T\} = \text{cov}(\{\mathbf{k}\}) = ([\tilde{\mathbf{X}}]^T [\tilde{\mathbf{X}}])\sigma^2, \quad (5.25)$$

gdzie nieznaną wartość wariancji  $\sigma^2$  zastępuje się jej estymatorem:

$$\sigma_{\hat{y}-\hat{y}}^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n [\hat{y}_i(k_0, k_1, \dots, k_n) - \bar{y}_i]^2. \quad (5.26)$$

Przedział ufności dla prognozowanej wartości wyjścia równa się:

$$\hat{Y} \pm t_{kr(\alpha, f=n-m)} \sigma_{\hat{y}-\hat{y}}^2 \sqrt{\{\tilde{\mathbf{x}}\}^T ([\tilde{\mathbf{X}}]^T [\tilde{\mathbf{X}}])^{-1} \{\tilde{\mathbf{x}}\}}, \quad (5.27)$$

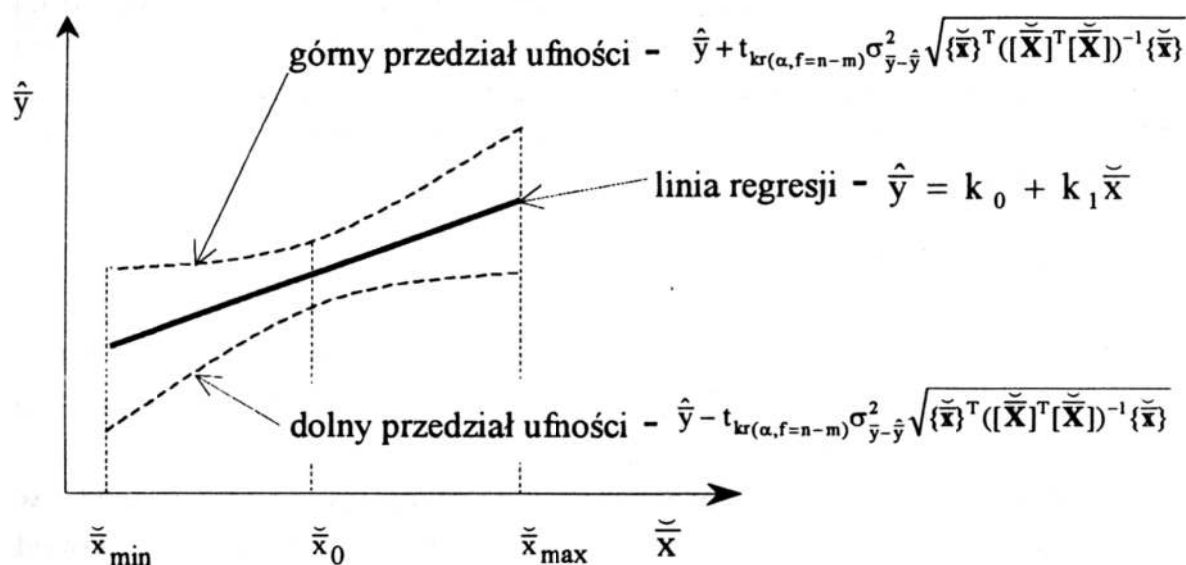
gdzie:

$\hat{Y}$  - wartość oczekiwana, obliczona z równania regresji,



$t_{kr}(\alpha, f = n - m)$  - wartość krytyczna rozkładu testu t-Studenta (tablica 15.4) dla poziomu istotności  $\alpha$  i stopni swobody  $f = n - m$ ,  
 $n$  - liczba prób,  
 $m$  - liczba wyrazów równania regresji łącznie z wyrazem wolnym,  
 $([\bar{\bar{X}}]^T [\bar{\bar{X}}])^{-1}$  - macierz kowariancji,  
 $\{\bar{\bar{x}}\}$  - wektor kolumnowy zmiennych wejściowych (czynników badanych).

Jak wynika ze wzoru (5.27) przedział ufności nie jest stały i zależy nie tylko od macierzy kowariancji  $([\bar{\bar{X}}]^T [\bar{\bar{X}}])^{-1}$  lecz także od wartości wektora wejść  $\{\bar{\bar{x}}\}$ . Na rysunku 5.2. przedstawiono przykładowo przedziały ufności dla funkcji regresji jednowymiarowej typu:  $\hat{y} = k_0 + k_1 \bar{x}$ .



Rys. 5.2. Przedziały ufności funkcji regresji jednowymiarowej.

Przedziały ufności dla funkcji regresji jednowymiarowej noszą nazwę *krzywych ufności funkcji regresji*, natomiast dla funkcji regresji wielowymiarowej – *hiperpowierzchni ufności funkcji regresji*.

### 5.3. Weryfikacja hipotez statystycznych

Teoria weryfikacji (sprawdzania) hipotez statystycznych zajmuje się tworzeniem reguł umożliwiających rozstrzygnięcie, czy dana hipoteza statystyczna jest słuszna, czy nie. Przez *hipotezę statystyczną* rozumie się hipotezę dotyczącą

parametrów lub postaci rozkładu określonego zbioru. Postępowanie, której celem jest sprawdzenie hipotezy nazywa się *testem*.

Testy dzieli się na *parametryczne* i *nieparametryczne*. Testy parametryczne (zwane testami istotności) służą do weryfikacji hipotez o nieznanym parametrach rozkładu zmiennej losowej przy założeniu, że znana jest postać funkcyjna dystrybuanty. Testy nieparametryczne (zwane również testami zgodności) dotyczą rozkładu badanego zbioru.

W ogólnej teorii weryfikacji hipotez statystycznych stawia się zadanie podjęcia decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy. Hipotezę sprawdzaną, mówiącą, że wartość nieznanego parametru  $Q$  rozkładu zbiorowości generalnej wynosi  $Q_0$ , nazywa się *hipotezą zerową* i oznacza przez:

$$H_0: Q = Q_0. \quad (5.28)$$

Pozostałe przeciwstawne hipotezy ze zbioru hipotez dopuszczalnych będą stanowiły *złożoną hipotezę alternatywną*. Na przykład hipotezą alternatywną będzie hipoteza przyjmująca, że wartość oczekiwanego parametru  $Q$  jest różna od  $Q_0$ . Dla uproszczenia, przyjmijmy, że hipoteza alternatywna jest prostą hipotezą alternatywną o postaci:

$$H_1: Q = Q_1. \quad (5.29)$$

Hipotezę zerową  $H_0$  sprawdza się na podstawie  $N$ -elementowej próby, będącej realizacją zmiennej losowej  $X$ . Tworzy się pewną statystykę  $\hat{Q}$  stanowiącą estymator nieznanego parametru  $Q$ .

Test istotności umożliwia jedynie *odrzucenie* hipotezy sprawdzanej  $H_0$ , w sytuacji, gdy prawdopodobieństwo zaobserwowanego zdarzenia jest mniejsze od przyjętego poziomu istotności  $\alpha$ . Natomiast, jeżeli prawdopodobieństwo zaobserwowanego zdarzenia jest większe od poziomu istotności  $\alpha$ , to można jedynie stwierdzić, że zaobserwowane zdarzenie nie przeczy hipotezie  $H_0$ .

Przy sprawdzaniu hipotez statystycznych mogą być popełnione dwa rodzaje błędów:

- błąd I rodzaju: Odrzuca się hipotezę zerową  $H_0$ , choć w rzeczywistości jest ona słuszna (prawdziwa).
- błąd II rodzaju: Przyjmuje się hipotezę zerową  $H_0$  w przypadku, gdy jest ona fałszywa (nie słuszna).

Ideę tych pojęć wyjaśnia schemat na rysunku 5.3.

		hipoteza	
		prawdziwa	falszywa
hipoteza	przyjęta		Błąd II rodzaju
	odrzucona	Błąd I rodzaju	

Rys. 5.3. Rodzaje błędów popełnianych podczas weryfikacji hipotez.

### 5.3.1 Testy parametryczne

#### 5.3.1.1. Eliminacja błędów grubych

W trakcie prowadzenia doświadczeń i różnego rodzaju pomiarów wartości niektórych wyników mogą znacznie odbiegać od wyników pozostałych. Mogą to być błędne wyniki spowodowane przyczynami przypadkowymi albo błędami w doświadczeniu lub pomiarze. Powstaje zatem problem eliminacji wyników obarczonych błędem grubym. W opracowanych sposobach postępowania zakłada się, że zmienne losowe  $X_i$  są niezależne o rozkładzie normalnym  $N(\mu_i, \sigma)$ . Ze względu na to, że najczęściej parametry rozkładu  $\mu_i$  i  $\sigma$  nie są znane stosuje się następujące sposoby odrzucania błędnych wyników: statystykę Grubbsa oraz statystyki  $B_4^+$ ,  $B_6^+$ ,  $B_7^+$ ,  $B_8^+$ .

#### Statystyka Grubbsa [15].

1. Na podstawie wyników doświadczeń (pomiarów) określa się wartość średnią i odchylenie średnie w próbce:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad (5.30)$$

2. Tworzy się bezwymiarowy ułamek – statystykę:

$$B = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{S}, \quad (5.31)$$

gdzie  $x_{\max}$  oznacza największą wartość spośród wyników doświadczeń.

3. Na podstawie tablic statystycznych 15.8 odczytuje się wartość krytyczną  $B_{kr}(n,P)$ , w zależności od liczby doświadczeń  $n$  i poziomu ufności  $P=1-\alpha$ .
4. Jeżeli  $B > B_{kr}(n,P)$ , to wynik  $x_{\max}$  jest obarczony błędem grubym i należy go odrzucić.
5. Analogicznie, w celu oceny najmniejszego wyniku  $x_{\min}$  oblicza się statystykę:

$$B = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{S}, \quad (5.32)$$

i jeżeli  $B > B_{kr}(n,\alpha)$ , to wynik  $x_{\min}$  należy odrzucić.

**Statystyki  $B_4^+$ ,  $B_6^+$ ,  $B_7^+$ ,  $B_8^+$  [71].**

1. Na podstawie wyników doświadczeń (pomiarów) uporządkowanych w ciąg niemalejący  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  określa się wartość średnią i odchylenie średnie w próbce:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad (5.33)$$

2. Tworzy się jedną z następujących statystyk:

$$\begin{aligned} B_4^+ &= \frac{x_n - \bar{x}}{S}, & B_6^+ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}, \\ B_7^+ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}, & B_8^+ &= \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

3. Na podstawie tablic statystycznych (15.13 i 15.14) odczytuje się wartość krytyczną  $b_i(\alpha,n)$ , w zależności od liczby doświadczeń  $n$  i poziomu istotności  $\alpha$ .
4. Jeżeli  $B_i^+ > b_i^+(\alpha,n)$ , to wynik  $x_n$  jest obarczony błędem grubym i należy go odrzucić.
5. Analogicznie, w celu oceny minimalnego wyniku oblicza się statystyki:

$$\begin{aligned} B_4^- &= \frac{x_1 - \bar{x}}{S}, & B_6^- &= \frac{x_1 - x_2}{x_n - x_1}, \\ B_7^+ &= \frac{x_1 - x_2}{x_n - x_2}, & B_8^+ &= \frac{x_1 - x_3}{x_n - x_1}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Jeżeli  $B_i^- < b_i^-(\alpha, n)$ , to wynik  $x_i$  należy odrzucić, gdzie  $b_i^-(\alpha, n) = -b_i^+(\alpha, n)$ .

### 5.3.1.2. Testy równości wariancji w różnych populacjach normalnych

Niech będzie danych  $n$  zbiorowości normalnych o licznosciach równych odpowiednio  $r_1, \dots, r_n$  i wariancjach:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$ , których estymatorami są

$s_1^2 = s_2^2 = \dots = s_n^2$ ,  $s_i^2 = \frac{1}{r_i - 1} \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ . Sprawdzana jest prawdziwość hipotezy,

że na poziomie istotności  $\alpha$ , wariancje te są sobie równe,  $H: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$ .

W doświadczalnictwie, w celu weryfikacji prawdziwości hipotezy  $H$ , najczęściej stosuje się testy:

1. Bartletta, gdy licznosci  $r_i$  rozpatrywanych zbiorowości (po eliminacji błędów grubych) nie są sobie równe  $r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n$ ,
2. Cochra, gdy licznosci  $r_i$  wszystkich  $n$  zbiorowości (po eliminacji błędów grubych) są sobie równe  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ ,
3. Hartleya, gdy licznosci  $r_i$  wszystkich  $n$  zbiorowości (po eliminacji błędów grubych) są sobie równe  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ .

**Test Bartletta.** Hipotezę  $H$  weryfikuje się zwykle za pomocą statystyki [71]:

$$M = N \ln \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n v_i s_i^2 \right) - \sum_{i=1}^n v_i \ln s_i^2, \quad (5.36)$$

gdzie:

$$v_i = r_i - 1, \quad N = \sum_{i=1}^n v_i, \quad s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{v_i}, \quad (5.37)$$

zaś  $r_i$  jest licznoscią  $i$ -tej próbki,  $y_{ij}$  –  $j$ -ta obserwacja w próbce z  $i$ -tej populacji.

Jeżeli  $M \geq m_1(\alpha, k, c_1)$  dla wszystkich  $c_1$  odczytanych z tablicy 15.9, dla liczby stopni swobody  $k=n$  i przy założonym poziomie istotności  $\alpha$ , weryfikowaną hipotezę odrzucamy. Jeżeli  $M < m_2(\alpha, k, c_1)$  dla wszystkich  $c_1$ , nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. Przy czym  $m_1(\alpha, k, c_1)$  i  $m_2(\alpha, k, c_1)$  są pewnymi funkcjami tablicowanymi. W obu przypadkach testowanie zostaje zakończone. Natomiast w przypadku, gdy  $M$  nie jest większe od wszystkich  $m_1(\alpha, k, c_1)$  lub nie jest mniejsze od wszystkich  $m_2(\alpha, k, c_1)$  oblicza się  $c_1$  z następującej zależności [71]:

$$c_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} - \frac{1}{N} \quad (5.38)$$

wartości  $m_1$  i  $m_2$  oblicza się na drodze interpolacji liniowej wykorzystując dane z tablicy 15.9, otrzymując:

$$m_1(\alpha, n, c_1) = m_1' + \frac{c_1^{\text{obl}} - c_1'}{c_1'' - c_1'} (m_1'' - m_1') , \quad (5.39)$$

$$m_2(\alpha, n, c_1) = m_2' + \frac{c_1^{\text{obl}} - c_1'}{c_1'' - c_1'} (m_2'' - m_2') .$$

Jeżeli  $M \geq m_1(\alpha, k, c_1)$  weryfikowaną hipotezę  $H$  odrzucamy. Jeżeli  $M < m_2(\alpha, k, c_1)$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy. W obu przypadkach testowanie zostaje zakończone. Natomiast gdy  $M < m_1(\alpha, k, c_1)$  lub  $M \geq m_2(\alpha, k, c_1)$  oblicza się wartość krytyczną  $m(\alpha)$ , ze wzoru [71]:

$$m(\alpha) = \frac{1}{\Delta C} [(c_1 - c_3)m_1(\alpha, n, c_1) + (c_3 - c)m_2(\alpha, n, c_1)] , \quad (5.40)$$

gdzie:

$$c = \frac{c_1^3}{n^2} ,$$

$$\Delta C = c_1 - c , \quad (5.41)$$

$$c_3 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i^3} - \frac{1}{N^3} .$$

Jeżeli  $M \geq m(\alpha)$  weryfikowaną hipotezę odrzucamy, w przypadku, gdy  $M < m(\alpha)$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

**Test Cochra.** Hipotezę  $H$  weryfikuje się za pomocą statystyki  $G$  [71]:

$$G = \frac{s_{i_{\max}}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2} , \quad (5.42)$$

gdzie  $s_{i_{\max}}^2$  jest maksymalną wartością wariancji ze zbioru wszystkich wariancji.

Wartości krytyczne testu Cochra  $G_{kr}(\alpha, k, v)$  dla liczby stopni swobody  $k=n$  oraz  $n=r-1$  i założonego poziomu istotności  $\alpha$  odczytuje się z tablicy 15.11. Nie



ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji, gdy  $G \leq G_{kr}(\alpha, k, v)$ .

**Test  $F_{max}$  Hartleya.** Hipotezę  $H$  weryfikuje się za pomocą statystyki  $F_{max}$  [71]:

$$F_{max} = \frac{s_{i_{max}}^2}{s_{i_{min}}^2}, \quad (5.43)$$

gdzie  $s_{i_{max}}^2$  jest maksymalną a  $s_{i_{min}}^2$  minimalną wartością wariancji ze zbioru wszystkich wariancji.

Wartości krytyczne testu Hartleya  $f_{max}(\alpha, k, v)$  dla liczby stopni swobody  $k=n$  oraz  $n=r-1$  i założonego poziomu istotności  $\alpha$  odczytuje się z tablicy 15.12. Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji, gdy  $F_{max} \leq f_{max}(\alpha, k, v)$ .

### 5.3.2. Testy nieparametryczne

#### 5.3.2.1. Porównanie rozkładu empirycznego z teoretycznym

Pierwszym etapem czynności jakie należy wykonać jest ustalenie z jakim rozkładem mamy do czynienia. Przyjęcie określonego rozkładu zmiennej losowej odbywa się najczęściej na podstawie adaptacji rzeczywistego rozkładu do jednego z rozkładów opisanych w poprzednim rozdziale. Przy czym dobiera się taki rozkład, dla którego wykazano, że jest on przydatny do opisu określonych wielkości. Przykładowo rozkład Weibulla stosuje się do opisu trwałości narzędzi skrawających. W tym celu najpierw wyznacza się rozkład empiryczny - wykreśla histogram lub poligon i sporządza tablicę wartości dystrybuanty empirycznej. Następnie porównuje się histogram lub poligon z wykresami funkcji gęstości dla różnych rozkładów ciągłych. Po ustaleniu, z jakim rozkładem będzie się porównywać rozkład empiryczny, należy:

1. Oszacować z próby te parametry, które są niezbędne do jednoznacznego określenia rozkładu a priori (dla rozkładu normalnego parametr  $\mu_x$  szacuje się przez  $\bar{x}$ , a parametr  $\sigma_x$  przez  $s_x$ ).
2. Zastosować odpowiedni test zgodności pozwalający na krytyczne ustosunkowanie się do zaobserwowanych odchyleń między rozkładem empirycznym i rozkładem a priori.

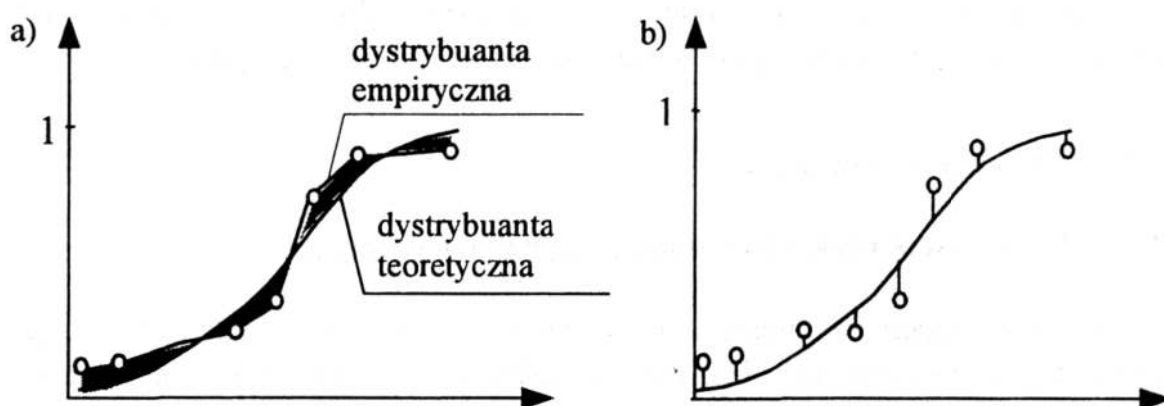
Weryfikacja testu zgodności wymaga zdefiniowania odległości między dystrybuantą rozkładu empirycznego a dystrybuantą rozkładu a priori, a więc odległości między dwoma funkcjami. Dystrybuanta empiryczna składa się z poszczególnych punktów, czyli jest zadana w sposób dyskretny. Dystrybuanta teoretycz-



na jest funkcją ciągłą. Odległość między dwiema takimi funkcjami definiuje się następująco:

- a) w sposób ciągły, na przykład jako pole zawarte między krzywą lub łamaną łączącą punkty dystrybuanty empirycznej i dystrybuanty teoretycznej (rys. 5.4a),
- b) w sposób dyskretny, na przykład jako sumę bezwzględnych wartości odchylen częstotliwości obserwowanej od częstotliwości oczekiwanej (rys. 5.4b).

Sprawdzenie zgodności rozkładu normalnego z rozkładem rzeczywistym dokonuje się na drodze *graficznej* lub *analitycznej*, za pomocą siatki prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego. Siatka ta zawiera funkcjonalne podziałki, na której funkcja rozkładu normalnego przedstawia linię prostą.



Rys. 5.4. Ciągła (a) i dyskretna (b) miara odległości między dystrybuantami rozkładu empirycznego i teoretycznego.

**Metoda graficzna.** Praktycznie wykorzystanie siatki prawdopodobieństwa przeprowadza się w sposób następujący (rys. 5.5).

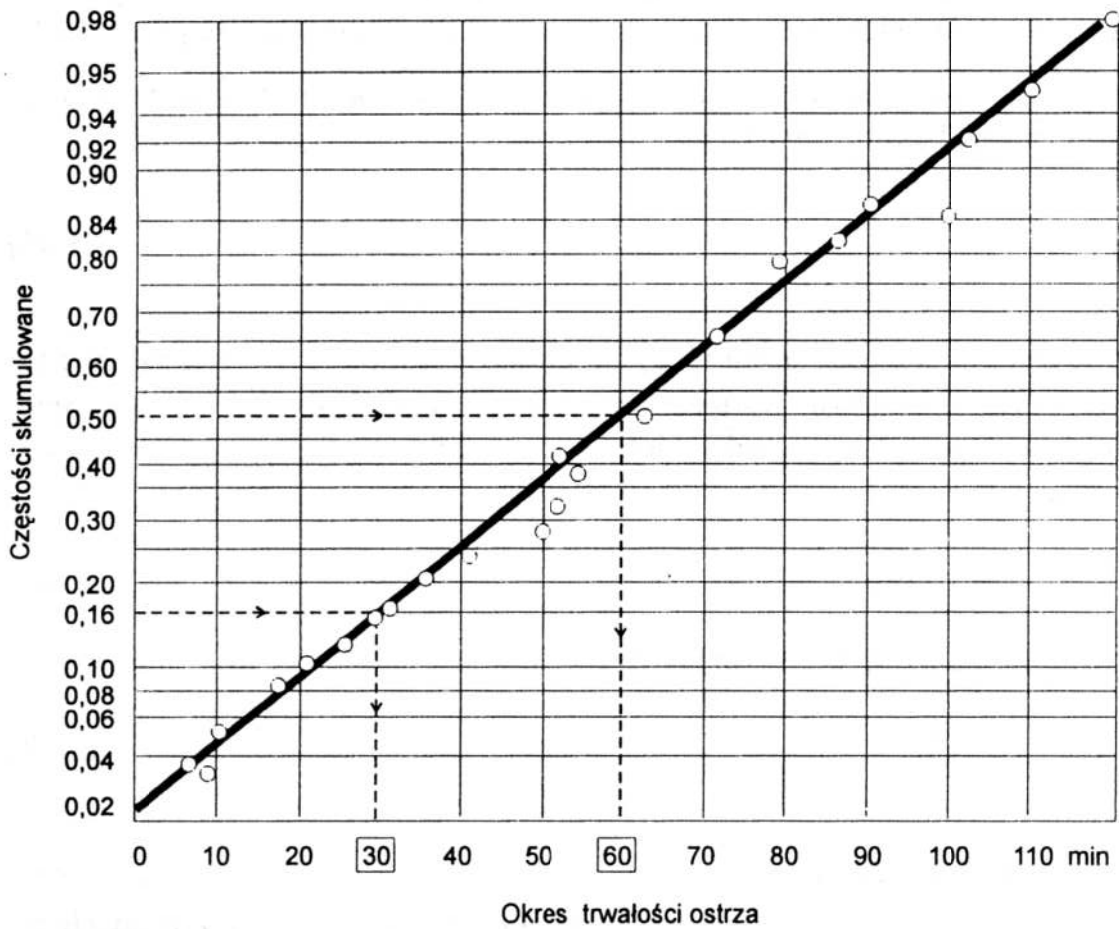
Nanosi się dane doświadczalne z opracowanego uprzednio szeregu rozdzielczego na siatce prawdopodobieństwa we współrzędnych częstość skumulowana-wartość zmiennej. Jeżeli dane doświadczalne po naniesieniu na siatkę prawdopodobieństwa utworzą linię prostą, to świadczy, że badany rozkład jest rozkładem normalnym.

W celu wyznaczenia wartości średniej i odchylenia średniego, przez naniesione punkty przeprowadza się prostą (na oko, albo metodą najmniejszych kwadratów). Wartość średnia jest równa odciętej odpowiadającej skumulowanej częstości 0,5, a odchylenie średnie  $s$  jest równe różnicy odciętych odpowiadających punktom o częstości skumulowanej 0,5 i 0,159.

Metoda graficzna jest efektywna, lecz jej dokładność jest niewielka. Metody analityczne zapewniają większą dokładność i mogą być stosowane do sprawdza-

nia również innych testów niż normalny, lecz konieczne jest, przy ich stosowaniu, dokonanie pewnych obliczeń. W praktyce najczęściej stosowane są trzy testy:

- a) test  $\chi^2$  (chi kwadrat),
- b) test Kolmogorowa,
- c) test Kolmogorowa i Smirnowa.



Rys. 5.5. Przykładowa siatka prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego (trwałość ostrza rozwiertaków o średnicy  $\phi 41,35$  mm) [15].

**Test chi kwadrat.** Postępowanie jest następujące [15].

1. Określa się miarę odchylenia  $\chi^2$  według wzoru:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Z_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (5.44)$$

gdzie:

$Z_i$  - wartość zaobserwowana odpowiadająca liczebności empirycznej (w szeregu rozdzielczym), czyli liczba wyników zaobserwowanych w danym przedziale,

$E_i$  - wartość oczekiwana odpowiadająca liczebności teoretycznej, przy czym jest ona obliczona ze wzoru:  $E_i = p_i(x)n$ ,

$n$  - liczba doświadczeń,

$k$  - liczba przedziałów w szeregu rozdzielczym,

$p_i(x)$  - prawdopodobieństwo zaobserwowania wyników w danym przedziale.

Wartość oczekiwaną (teoretyczną) oblicza się wyznaczając zmienne standaryzowane u rozkładu teoretycznego:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad (5.45)$$

oraz wartości funkcji Laplace'a  $\Phi(u)$  odczytane z tablicy 15.18. Różnica wartości  $\Phi(u_2)$  oraz  $\Phi(u_1)$ , tzn. wartości odczytanych funkcji na obu końcach przedziału grupowania, dają prawdopodobieństwo zaobserwowania wyników w danym przedziale:

$$p_i(x) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1). \quad (5.46)$$

2. Określa się liczbę stopni swobody ze wzoru:

$$f = k - \varepsilon, \quad (5.47)$$

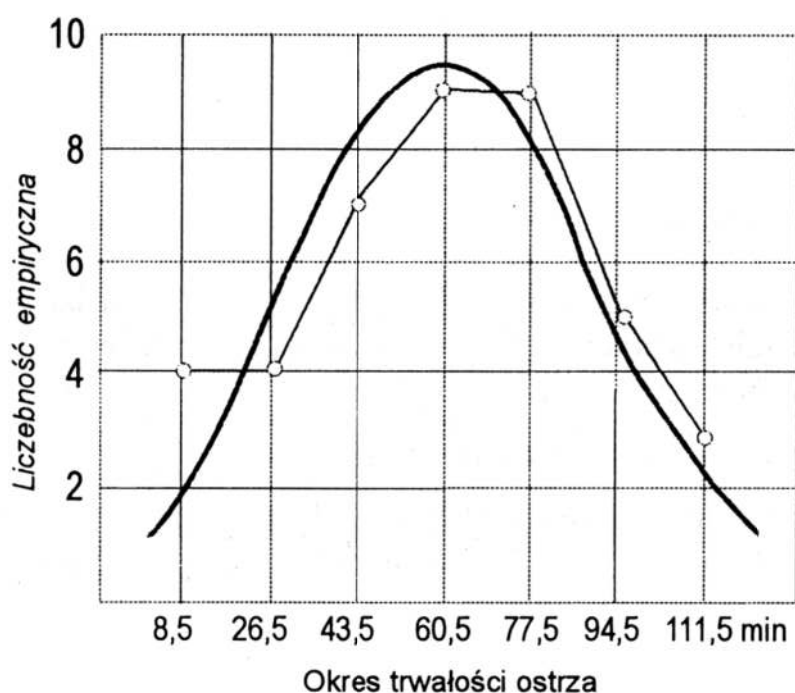
gdzie:

$k$  - liczba przedziałów,

$\varepsilon$  - liczba ograniczeń (czyli liczba parametrów rozkładu szacowanych na podstawie próbki powiększone o jeden, np. jeśli na podstawie próbki oszacowano parametry  $\mu$  i  $\sigma$  rozkładu normalnego, to liczba ograniczeń wynosi:  $\varepsilon = 2 + 1 = 3$ ).

3. Z tablicy 15.5 rozkładu  $\chi^2$  odczytuje się wartość krytyczną testu  $\chi_{kr}^2$  dla określonej liczby stopni swobody  $f$  oraz poziomu istotności  $\alpha$ . Jeżeli  $\chi_{kr}^2 \geq \chi^2$ , to hipotezę o zgodności rozkładu doświadczalnego z rozkładem normalnym należy przyjąć. W przypadku jeśli  $\chi_{kr}^2 < \chi^2$  hipotezę taką odrzuca się.

Na rysunku 5.6 przedstawione są wykresy empiryczny i teoretyczny rozkładu trwałości ostrza rozwiertaków.



Rys. 5.6. Doświadczalny i teoretyczny rozkład trwałości ostrza rozwiertaków [15].

**Test Kołmogorowa.** Sposób postępowania jest następujący [48]:

1. Buduje się dystrybuantę empiryczną  $F_n(x)$ .
2. Oblicza się wartość dystrybuanty teoretycznej  $F(x)$  oraz porównuje różnice:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|. \quad (5.48)$$

3. Dla maksymalnej wartości różnicy  $D_n$  oznaczonej  $D_n^+$  oblicza się wartość:

$$\sqrt{n}D_n^+, \quad (5.49)$$

4. Obliczoną wartość porównuje się z wartością krytyczną wyznaczoną w zależności od ustalonego poziomu istotności testu. Wyznacza się wartość:

$$k(y) = 1 - 2\alpha, \quad (5.50)$$

i z tablicy 15.16 wartości rozkładu  $K(y)$  Kołmogorowa odszukuje się wartość  $y$ , najbliższą obliczonemu  $k(y)$ . Jeżeli:

$$\sqrt{n}D_n^+ \leq y, \quad (5.51)$$

to hipotezę o zgodności rozkładu normalnego z empirycznym przyjmujemy. Jeżeli zaś:

$$\sqrt{n}D_n^+ > y, \quad (5.52)$$

hipotezę tę odrzuca się.

**Test Kołmogorowa i Smirnowa.** Niech  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  będzie próbka prostą,  $F(x)$  – dystrybuantą. Zadanie polega na zweryfikowaniu hipotezy, że próbka  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  pochodzi z populacji o rozkładzie  $F(x)$ .

Sposób postępowania jest następujący [71]:

1) Buduje się dystrybuantę empiryczną  $F_n(x)$ , zdefiniowaną w następujący sposób: Jeżeli próbkę  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uporządkuje się w ciąg niemalejący:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)},$$

to równoważna definicja dystrybuanty empirycznej jest następująca:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq x_{(1)}, \\ \frac{m}{n}, & \text{gdy } x_{(m)} < x \leq x_{(m+1)}, \quad 1 \leq m \leq n-1, \\ 1, & \text{gdy } x > x_{(n)}. \end{cases} \quad (5.53)$$

2) Oblicza się wartość statystyki Kołmogorowa:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|. \quad (5.54)$$

lub jednej ze statystyk Smirnowa:

$$D_n^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)), \quad (5.55)$$

$$D_n^- = -\inf_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - F(x)), \quad (5.56)$$

które określają odległość dystrybuanty empirycznej od dystrybuanty teoretycznej. W praktyce statystyki (5.51), (5.52) i (5.53) oblicza się za pomocą wzorów:

$$D_n^+ = \max_{1 \leq m \leq n} \left( \frac{m}{n} - F(x_{(m)}) \right), \quad (5.57)$$

$$D_n^- = \min_{1 \leq m \leq n} \left( F(x_{(m)}) - \frac{m-1}{n} \right), \quad (5.58)$$

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-), \quad (5.59)$$

3) Obliczoną wartość statystyki  $D_n$  porównuje się z wartością krytyczną  $D_n(\alpha)$  odczytaną z tablicy 15.15, dla poziomu istotności  $\alpha$  oraz  $n$ . Jeżeli zachodzi warunek:

$$D_n \leq D_n(\alpha), \quad (5.60)$$

to weryfikowana hipoteza jest prawdziwa. Jeżeli zaś:

$$D_n > D_n(\alpha), \quad (5.61)$$

hipotezę tę odrzuca się.

Dla dużych  $n$  (praktycznie  $n > 20$ ) statystyka  $\sqrt{n}D_n$  ma rozkład Kołmogorowa  $K(y)$ .

### 5.3.2.2. Test Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych

Niech  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  oraz  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  będą dwiema próbkami prostymi o dystrybuantach odpowiednio  $F(x)$  i  $G(y)$ . Zadanie polega na zweryfikowaniu hipotezy, że obie próbki pochodzą z tej samej populacji.

Sposób postępowania jest następujący [71]:

1) Buduje się dystrybuanty empiryczne  $F_n(x)$  i  $G_m(y)$ , zdefiniowane w następujący sposób:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq x_{(1)}, \\ \frac{i}{n}, & \text{gdy } x_{(i)} < x \leq x_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{gdy } x > x_{(n)}, \end{cases} \quad (5.62)$$

$$G_m(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leq y_{(1)}, \\ \frac{j}{m}, & \text{gdy } y_{(j)} < y \leq y_{(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ 1, & \text{gdy } y > y_{(m)}, \end{cases} \quad (5.63)$$

gdzie  $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$  oraz  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  są próbkami  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  oraz  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  po uporządkowaniu w ciągi niemalejące.

2) Oblicza się wartości statystyk mierzące odległość między dystrybuantami  $F_n(x)$  i  $G_m(y)$  w jeden z następujących sposobów:

$$D_{n,m}^+ = \sup_x (G_m(x) - F_n(x)), \quad (5.64)$$

$$D_{n,m}^- = -\inf_x (G_m(x) - F_n(x)), \quad (5.65)$$

$$D_{n,m} = \sup_x |G_m(x) - F_n(x)|. \quad (5.66)$$

W praktyce statystyki (5.64), (5.65) i (5.66) oblicza się za pomocą wzorów:

$$D_{n,m}^+ = \max_{1 \leq j \leq m} \left( \frac{j}{m} - F_n(y_{(j)}) \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( G_m(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right), \quad (5.67)$$

$$D_{n,m}^- = \max_{1 \leq j \leq m} \left( F_n(y_{(j)}) - \frac{j-1}{m} \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{i}{n} - G_m(x_{(i)}) \right), \quad (5.68)$$

$$D_{n,m} = \max(D_{n,m}^+, D_{n,m}^-) \quad (5.69)$$

3) Obliczoną wartość statystyki  $D_{n,m}$  porównuje się z wartością krytyczną  $D_{n,m}(\alpha)$  dla poziomu istotności  $\alpha$  oraz dla  $n$  i  $m$ , obliczoną ze wzoru:

$$D_{n,m}(\alpha) = \frac{d_{n,m}(\alpha)}{k_{n,m}}, \quad (5.70)$$

gdzie  $d_{n,m}(\alpha)$  i  $k_{n,m}$  są liczbami całkowitymi odczytanymi z tablicy 15.17 wartości krytycznych testu Smirnowa.

4) Jeżeli zachodzi warunek:

$$D_{n,m} \leq D_{n,m}(\alpha), \quad (5.71)$$

to weryfikowana hipoteza jest prawdziwa. Jeżeli zaś:

$$D_{n,m} > D_{n,m}(\alpha), \quad (5.72)$$

hipotezę tę odrzuca się.



# 6

## WYZNACZANIE CZYNNIKÓW NA WEJŚCIU OBIEKTU BADAŃ

---

W rozdziale 1 przedstawiony został schemat cybernetyczny złożonego obiektu badań wraz z określaniem zbioru czynników: wejściowych, wyjściowych, stałych i zakłócających. W celu poprawnego opisu badanego obiektu należy uwzględnić wszystkie czynniki wejściowe mające wpływ istotny, w sensie statystycznym. Z drugiej strony, ze względu na pracochłonność i koszty badań, należy wyeliminować czynniki nieistotne. Eliminacji nieistotnych czynników wejściowych można dokonać wykorzystując jeden z następujących sposobów:

- 1) Wykonuje się badania zgodnie z wybranym planem poliselekcyjnym, a następnie w wyniku analizy statystycznej wyników eksperymentu, eliminuje się nieistotne współczynniki równania regresji za pomocą testu *t* Studenta (pkt. 12.11). Sposób ten z uwagi na koszty badań stosuje się dla niewielkiej liczby czynników wejściowych (najczęściej  $S \leq 5$ ), w przypadku braku przesłanek o możliwości ich nieistotnego wpływu.
- 2) Badania dzieli się na dwa etapy: badania rozpoznawcze (eliminujące) i badania właściwe. Eliminacji dokonuje się stosując metody doświadczeń eliminujących, opartych głównie na programach randomizowanych. W programach tych zastosowano koncepcję losowości badań, która jest gwarancją ich reprezentatywności. W takim przypadku próba jest beztendencyjna i na jej podstawie można wnioskować o populacji, czyli o rzeczywistym obiekcie badań. Otrzymane wyniki badań poddaje się analizie statystycznej eliminując czynniki nieistotne. Funkcję regresji badanego obiektu wyznacza się następnie z badań właściwych, zrealizowanych zgodnie z innym planem, najczęściej poliselekcyjnym. Sposób ten stosuje się najczęściej dla obiektów o większej liczbie czynników wejściowych ( $S > 5$ ).

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną programy najczęściej stosowane w badaniach rozpoznawczych - eliminujących. Oznaczenie poszczególnych programów randomizowanych przyjęto zgodnie z propozycją Z. Polańskiego [51, 52]. Podano również przykład wykorzystania jednego z programów randomizowanych do oceny istotności wpływu czynników wejściowych wybranego obiektu badań. Następnie podane zostaną sposoby zmniejszania liczby czynników badanych, które istotnie wpływają na czynnik wynikowy, poprzez tworzenie liczb bezwymiarowych, w metodzie analizy wymiarowej.

## 6.1. Badania rozpoznawcze

W celu ustalenia istotności wpływu jednego czynnika wejściowego lub kilku czynników wejściowych na czynnik wynikowy należy przeprowadzić odpowiednie badania rozpoznawcze. W celu minimalizacji liczby tych doświadczeń należy przeprowadzić je zgodnie z planem, spełniającym określone warunki. Do planów tych należą:

- plany randomizowane,
- plany statyczne, zdeterminowane częściowe (nasycone i przesycone).

Wyczerpujący wykład na temat planów randomizowanych (zwanych również planami losowymi) znaleźć można w monografiach [48, 51, 52]. Koncepcja randomizacji, czyli “ulosowienia” pewnych programów została zapoczątkowana przez Fishera w latach dwudziestych XX wieku. Efektem badań opartych o plany randomizowane nie jest funkcja obiektu badań, lecz jedynie ustalenie jej postaci jakościowej.

W niniejszym punkcie omówiono trzy grupy programów, najczęściej stosowanych w badaniach rozpoznawczych. Dwie następujące grupy, ze względu na liczbę jednocześnie możliwych do analizy czynników wejściowych, stanowią programy randomizowane:

**Grupa I** obejmuje programy związane z analizą wariancji:

1. **Program statyczny randomizowany kompletny.** Przeznaczony jest do oceny wpływu jednego czynnika wejściowego na czynnik wyjściowy.
2. **Program statyczny randomizowany blokowy.** Przeznaczony jest do jednoczesnej oceny wpływu dwóch czynników wejściowych na czynnik wyjściowy.
3. **Program statyczny randomizowany kwadrat łaciński.** Przeznaczony jest do jednoczesnej oceny istotności wpływu trzech czynników wejściowych na czynnik wyjściowy.
4. **Program statyczny randomizowany prostokąt Youdena.** Przeznaczony jest do jednoczesnej oceny istotności wpływu trzech czynników wejściowych na czynnik wyjściowy.
5. **Program statyczny randomizowany kwadrat grecko-łaciński.** Przeznaczony jest do jednoczesnej oceny istotności wpływu czterech czynników wejściowych na czynnik wyjściowy.
6. **Program statyczny randomizowany sześciąt łaciński.** Przeznaczony jest do jednoczesnej oceny istotności wpływu czterech czynników wejściowych na czynnik wyjściowy.

**Grupę II** stanowi program randomizowany pod nazwą bilans losowy, służący do oceny istotności wpływu dowolnej liczby czynników i efektów ich interakcji na czynnik wynikowy.



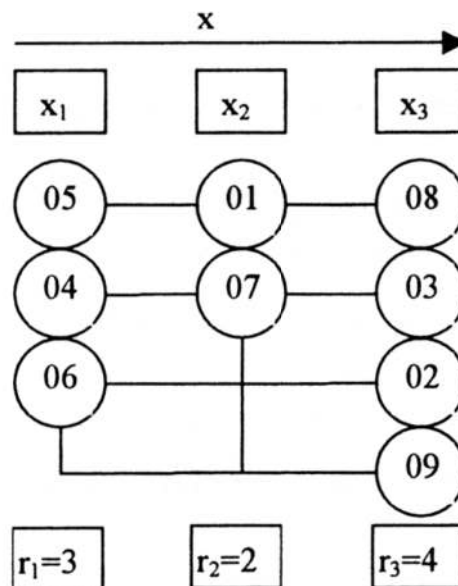
- 3) Oznaczamy kolejne doświadczenia kolejnymi liczbami naturalnymi: 01-02-03-04-05-06-07-08-09.
- 4) Wybieramy dowolny ciąg liczb losowych, tylu cyfrowy, ilu cyfrowa jest liczba  $N$ . Następnie losowo, np. za pomocą tablic statystycznych, przyporządkowujemy poszczególne doświadczenia odpowiednim wartościom czynnika badanego. Początek wybranego ciągu liczb z tablicy 15.18 jest następujący:

15-85-47-13-10-**05**- ... -78-42-**04**-77-40-69-26-55-**06**-50-68-31-59-59-72-  
 ... -39-52-**01**-51- ... -22-97-**07**-79- ... -21-88-**08**-40-84- ... -21-46-**03**-60-39-  
 ... -62-32-**02**-23-15-23-67-**09**-

Liczby odpowiadające oznaczonym numerom doświadczeń pogrubiono. Pozwala to na następujące losowe przyporządkowanie doświadczeń wartościom czynnika badanego  $x$ :

05-04-06	dla $x=x_1$ ( $r_1=3$ ),
01-07	dla $x=x_2$ ( $r_2=2$ ),
08-03-02-09	dla $x=x_3$ ( $r_3=4$ ).

Odpowiadający takiemu przyporządkowaniu schemat pomiarów przedstawia rysunek 6.1.



Rys. 6.1. Przykładowy schemat programu statycznego randomizowanego kompletnie przy założeniu  $r_1=3$ ,  $r_2=2$ ,  $r_3=4$  oraz  $n=3$ .

- 5) Wyniki badań realizowane zgodnie ze schematem programu (rys. 6.1) przedstawiamy tabelarycznie [48]:

Tablica 6.1

i	Numer doświadczenia				Suma wyników doświadczeń	Średnia dla poszczególnych poziomów
	1	2	3	4		
Poziom czynnika badanego x	1	y <sub>11</sub>	y <sub>12</sub>	y <sub>13</sub>	$\sum_{j=1}^{r_1} y_{1j}$	$\bar{y}_1$
	2	y <sub>21</sub>	y <sub>22</sub>	y <sub>23</sub>	$\sum_{j=1}^{r_2} y_{2j}$	$\bar{y}_2$
	3	y <sub>31</sub>	y <sub>32</sub>	y <sub>33</sub>	$\sum_{j=1}^{r_3} y_{3j}$	$\bar{y}_3$
Dla całości doświadczeń					$\sum_{i=1}^{n=3} \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}$	$\bar{y}$

Wartości średnie w tablicy 6.1 obliczamy ze wzorów:

- dla i-tego poziomu czynnika badanego:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij},$$

- dla całości doświadczeń:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n=3} \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}.$$

6) Analizujemy hipotezę o braku wpływu poszczególnych poziomów czynnika badanego x na czynnik wynikowy y. W tym celu buduje się następującą tablicę 6.2 analizy wariancji [48].

Tablica 6.2

Nazwa	Suma kwadratów	Liczba stopni swobody f	Sredni kwadrat $s^2$	Wartość testu F
Między układami MU	$S_{MU} = \sum_{i=1}^n r_i \bar{y}_i^2 - N\bar{y}^2$	$f_{MU}=N-1$	$s_{MU}^2 = \frac{S_{MU}}{n-1}$	$F = \frac{s_{MU}^2}{s_{WU}^2}$
Wewnątrz układów WU	$S_{WU} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^n r_i \bar{y}_i^2$	$f_{WU}=N-n$	$s_{WU}^2 = \frac{S_{WU}}{N-n} = s^2$	
Reszta R	$S_{WU} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}^2 - n\bar{y}^2$	$f_R=N-1$		—



7) Na podstawie analizy przedstawionej w tabelicy 6.2 akceptujemy bądź odrzucamy hipotezę postawioną w pkt. 6. W tym celu obliczoną wartość testu  $F$  należy porównać z wartością krytyczną  $F(\alpha, r_1, r_2)$  testu  $F$  Fishera-Snedecora, którą odczytuje się z tabelicy 15.6 dla przyjętego poziomu istotności  $\alpha$  oraz obliczonych liczb stopni swobody  $r_1=f_{MU}$  i  $r_2=f_{WU}$ . Jeżeli  $F \geq F(\alpha, r_1, r_2)$  to założoną hipotezę należy odrzucić, czyli, że czynnik badany  $x$  ma wpływ istotny na czynnik wynikowy  $y$ . W przypadku przeciwnym  $F < F(\alpha, r_1, r_2)$  można przyjąć hipotezę o braku wpływu czynnika  $x$  na czynnik wynikowy.

### 6.3. Programy statyczne randomizowane blokowe

Program statyczny randomizowany blokowy jest bardziej efektywny od programu statycznego randomizowanego kompletnego, gdyż pozwala na ocenę wpływu dwóch czynników badanych  $x_1$  i  $x_2$  na czynnik wynikowy  $y$ . Przyjmuje się tutaj wstępne założenie, że wpływ czynnika  $x_2$  jest istotny. Bada się natomiast istotność wpływu czynnika  $x_1$  z uwzględnieniem możliwych oddziaływań czynnika  $x_2$ . Cechą charakterystyczną programów randomizowanych blokowych jest ich podział na bloki. Przy tym wyróżnia się następujące plany:

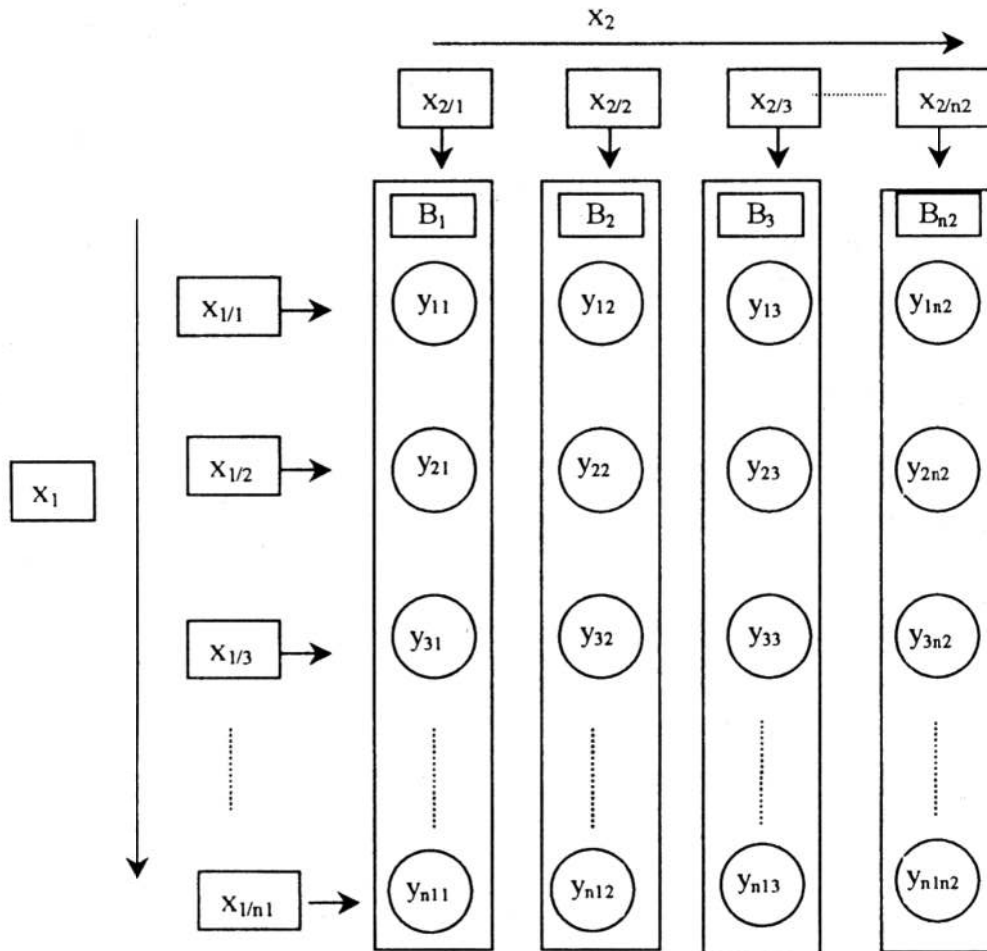
- plany blokowe kompletne,
- plany blokowe zrównoważone niekompletne,
- plany blokowe częściowo zrównoważone niekompletne.

#### 6.3.1. Program statyczny randomizowany blokowy kompletny

Zakłada się, że badane czynniki  $x_1$  i  $x_2$  będą przyjmowały  $n_1$  i  $n_2$  poziomów. Dla każdego zestawu wartości czynników  $x_1$  i  $x_2$  realizowany będzie tylko jeden pomiar. Przy takich założeniach plan randomizowany blokowy kompletny ma postać jak na rysunku 6.2. Realizacja badań według tego planu wymaga wykonania  $N=n_1n_2$  doświadczeń. Wyniki doświadczeń wygodnie jest przedstawić w postaci tabelarycznej (tablica 6.3).

Tablica 6.3

		Poziomy czynnika $x_2$				Średnie dla wierszy
		1	2	...	$n_2$	
Poziom czynnik $x_1$	1	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1n_2}$	$\bar{y}_{1w}$
	2	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2n_2}$	$\bar{y}_{2w}$
	...	...	...	...	...	...
	$n_1$	$y_{n_11}$	$y_{n_12}$	...	$y_{n_1n_2}$	$\bar{y}_{n_1w}$
Średnie dla kolumny		$\bar{y}_{1k}$	$\bar{y}_{2k}$	...	$\bar{y}_{n_2k}$	Średnia z doświadczeń $\bar{y}$



Rys. 6.2. Plan statyczny randomizowany blokowy kompletny.

Wartości średnie w tablicy 6.3 oblicza się ze wzorów:

- dla wierszy:

$$\bar{y}_{iw} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_{ij},$$

- dla kolumn:

$$\bar{y}_{jk} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} y_{ij},$$

- dla całości doświadczeń:

$$\bar{y} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} y_{ij}.$$



Hipotezę dotyczącą istotności wpływu czynników  $x_1$  i  $x_2$  przeprowadza się za pomocą testu F wykorzystując tablicę 6.4 analizy wariancji [48]. Sposób postępowania jest identyczny jak opisany w pkt. 6.2.

Tablica 6.4

Nazwa	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Sredni kwadrat $s^2$	Wartość testu F
Czynnik $x_1$	$S_{x_1} = n_2 \sum_{i=1}^{n_1} \bar{y}_i^2 - N\bar{y}^2$	$f_{x_1} = n_1 - 1$	$s_{x_1}^2 = \frac{S_{x_1}}{n_1 - 1}$	$F_{x_1} = \frac{s_{x_1}^2}{s_R^2}$
Czynnik $x_2$	$S_{x_2} = n_1 \sum_{j=1}^{n_2} \bar{y}_j^2 - N\bar{y}^2$	$f_{x_2} = n_2 - 1$	$s_{x_2}^2 = \frac{S_{x_2}}{n_2 - 1}$	$F_{x_2} = \frac{s_{x_2}^2}{s_R^2}$
Błąd	$S_R = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} y_{ij}^2 - n_2 \sum_{i=1}^{n_1} \bar{y}_i^2 - n_1 \sum_{j=1}^{n_2} \bar{y}_j^2 + n_1 n_2 \bar{y}^2$	$f_R = (n_1 - 1)(n_2 - 1)$	—	—
Suma	$S = S_{x_1} + S_{x_2} + S_R$	$f = n_1 n_2 - 1$	—	—

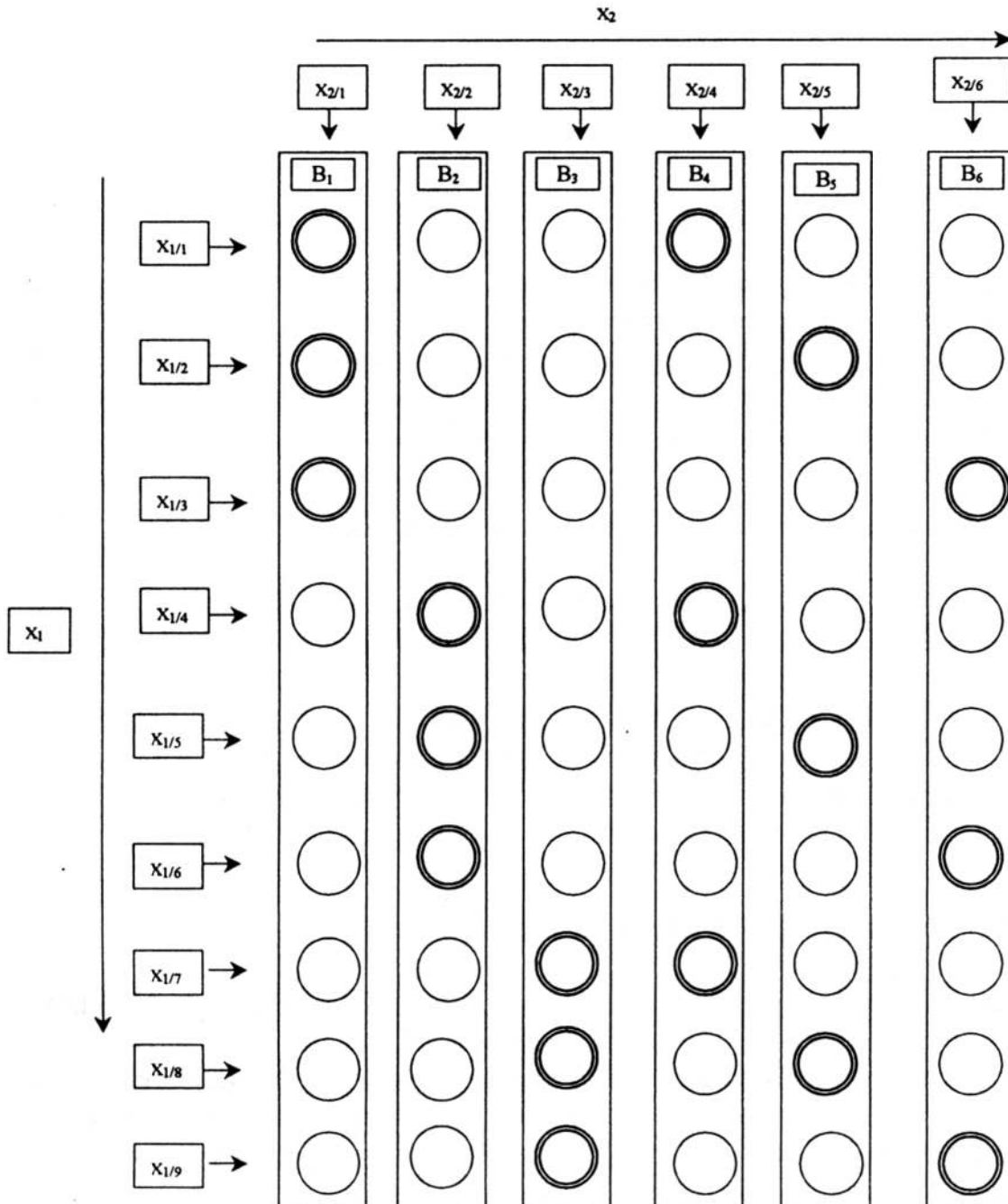
### 6.3.2. Program statyczny randomizowany blokowy niekompletny zrównoważony i częściowo zrównoważony

W celu dalszego wzrostu efektywności programów randomizowanych blokowych wprowadza się programy zawierające **bloki niekompletne**, tzn., że liczbę doświadczeń w każdym bloku ogranicza się. Programy te zaleca się stosować przy dużej liczbie wartości (poziomów zmienności) czynników badanych. Przy czym jeżeli następuje dowolne przyporządkowanie różnych wartości czynnika  $x_1$  oraz dowolnym wartościom czynnika  $x_2$ , to bloki są niezrównoważone. Na rysunku 6.3 pokazano przykład programu **blokowego niekompletnego zrównoważonego**. Założono zmianę poszczególnych czynników odpowiednio na dziewięciu i sześciu poziomach:  $n_1=9$ ,  $n_2=6$ . Czyli realizacja planu blokowego kompletnego wymagałaby wykonania  $N=54$  doświadczeń (kółka pojedyncze). Realizacja planu blokowego niekompletnego zrównoważonego wymaga wykonania jedynie 18 doświadczeń (kółka podwójne).

Program blokowy niekompletny zrównoważony charakteryzuje się następującymi cechami:

- dowolna para wartości czynnika  $x_1$  występuje jednakową liczbę  $n_b$  razy (tutaj raz –  $n_b=1$ ),
- każdy blok obejmuje jednakową liczbę wartości czynnika  $x_1$  (tutaj trzy),

- każda wartość czynnika badanego  $x_1$  występuje w tej samej liczbie bloków (tutaj dwa).



Rys. 6.3. Przykład planu randomizowanego blokowego niekompletnego zrównoważonego.

Szczególnym przypadkiem planów blokowych niekompletnych zrównoważonych są plany blokowe niekompletne symetryczne zrównoważone, dla których  $n_1 = n_2$ .

Plan blokowy można zapisać w postaci tablicy. Liczbami w kolumnach  $k=1,2,3, \dots, n_1$  oznacza się kolejne wartości czynnika badanego  $x_1$  uwzględniane w planie. Przykładowo, plan według rysunku 6.3 zapisuje się w postaci tablicy:

1	4	7	1	2	3
2	5	8	4	5	6
3	6	9	7	8	9

Dalsze zmniejszenie liczby doświadczeń prowadzi do planów blokowych częściowo zrównoważonych niekompletnych. Plany te zachowują cechy planu blokowego niekompletnego zrównoważonego, przy czym plany częściowo zrównoważone nie są charakteryzowane jedną wartością liczby  $n_b = \text{const}$ , lecz kilkoma liczbami (ogólnie  $m$  liczbami).

#### 6.4. Programy statyczne randomizowane kwadratowe

Programy statyczne randomizowane kwadratowe pozwalają na ocenę istotności wpływu na czynnik wynikowy więcej niż jednego czynnika badanego. Do najczęściej stosowanych planów kwadratowych zalicza się:

- program statyczny, randomizowany kwadrat łaciński, który pozwala na jednoczesną analizę istotności wpływu trzech czynników,
- program statyczny randomizowany kwadrat grecko-łaciński, pozwalający na jednoczesną ocenę istotności wpływu czterech czynników.

##### 6.4.1. Program statyczny randomizowany kwadrat łaciński

Programy statyczne randomizowane kwadraty łacińskie lub krótko kwadraty łacińskie buduje się według następującego schematu:

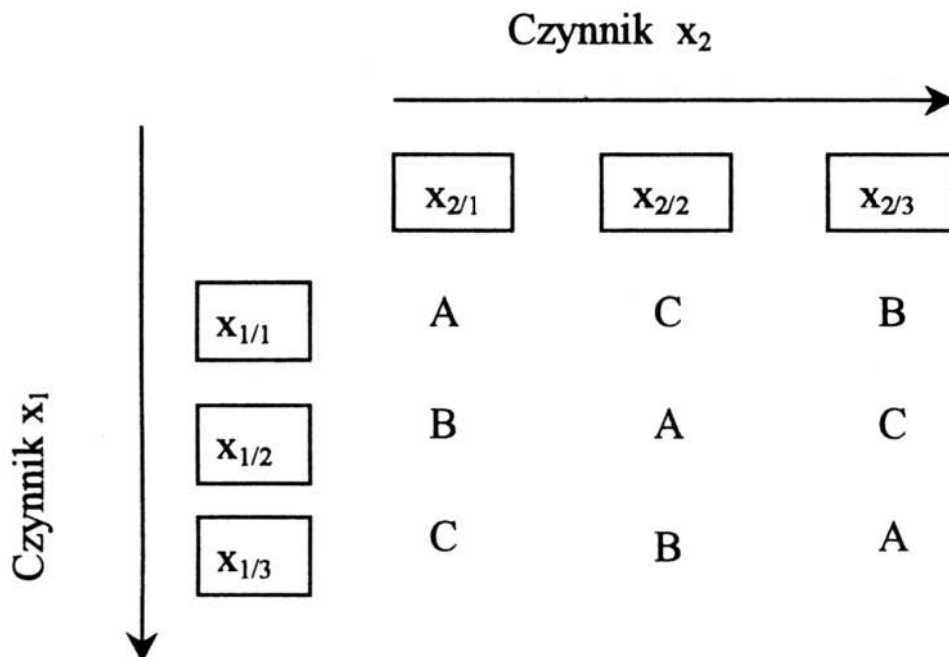
- 1) **Przyjęcie poziomu zmienności czynników badanych.** Przykładowo jeżeli każdy z czynników badanych będzie przybierał trzy wartości, zbudowany kwadrat łaciński będzie miał wymiar  $3 \times 3$ . Przy zmienności czynników na czterech poziomach – wymiar  $4 \times 4$ , itd.
- 2) **Losowy dobór kwadratu łacińskiego.** Najprostszym kwadratem łacińskim jest kwadrat o wymiarach  $3 \times 3$ . Pewne trzy wielkości A, B i C układa się w kwadrat o trzech kolumnach i trzech wierszach. W każdej kolumnie i w każdym wierszu występują zawsze trzy wielkości. Punktem wyjścia losowego doboru kwadratu łacińskiego jest sporządzenie kwadratu zredukowanego, w którym pierwsze litery pierwszego wiersza i pierwszej kolumny uszeregowane są w porządku alfabetycznym. Przykładowo dla

kwadratu o wymiarze  $3 \times 3$  kwadratem zredukowanym jest następujący kwadrat:

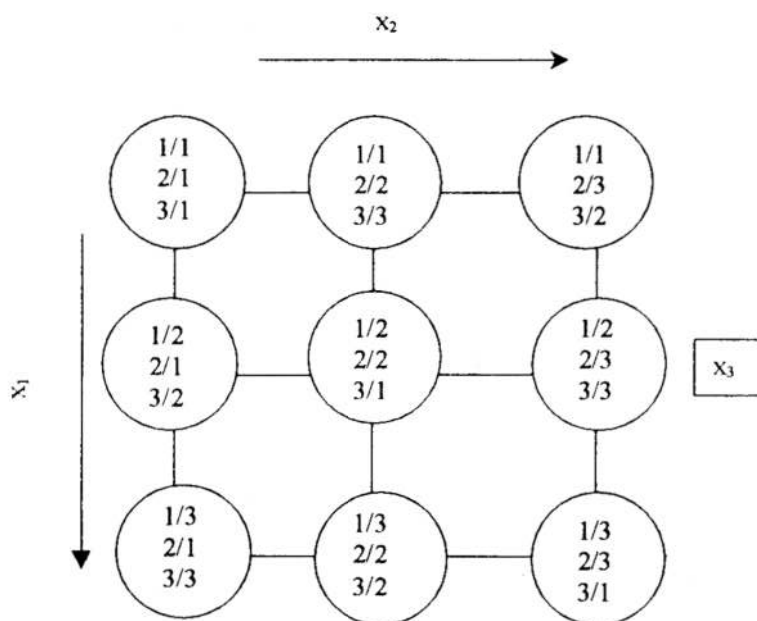
A	B	C
B	C	A
C	A	B

Przyjmujemy, że każdy z wierszy reprezentuje wartości jednego czynnika badanego, np.  $x_1$ , a każda z kolumn reprezentuje wartości innego czynnika badanego, np.  $x_2$ , zaś oznaczenia literowe A, B i C odpowiadają wartościom czynnika badanego  $x_3$ . Następnie korzystając z tablicy liczb losowych przestawiamy wiersze i kolumny kwadratu. Przykładowy otrzymany kwadrat przedstawia tablica 6.5.

Tablica 6.5



Otrzymuje się w ten sposób program randomizowany kwadrat łaciński  $3 \times 3$ , który graficznie przedstawiono na rysunku 6.4. Program ten wymaga realizacji tylko  $N=3 \times 3 \times r=9r$  pomiarów, gdzie  $r$  jest liczbą pomiarów paralelnych (powtórzeń).



Rys. 6.4. Program statyczny randomizowany kwadrat łaciński 3x3.

Wyniki badań rozpoznawczych zrealizowanych zgodnie z opracowanym programem poddaje się analizie statystycznej. Przedstawiony schemat obliczeń opracowany został na podstawie pracy [48].

1) **Przedstawienie wyników badań.** Wyniki badań przedstawia się tabelarycznie (tabl. 6.6).

Tablica 6.6

$x_1$	$x_2$	1	2	3	Suma dla wierszy $W_w$
1		A	C	B	$W_1$
		$y_{111}$	$y_{121}$	$y_{131}$	
		$y_{11r}$	$y_{12r}$	$y_{13r}$	
2		B	A	C	$W_2$
		$y_{211}$	$y_{221}$	$y_{231}$	
		$y_{21r}$	$y_{22r}$	$y_{23r}$	
3		C	B	A	$W_3$
		$y_{311}$	$y_{321}$	$y_{331}$	
		$y_{31r}$	$y_{32r}$	$y_{33r}$	
Suma dla kolumn $K_k$		$K_1$	$K_2$	$K_3$	Suma ogólna $G$
Suma dla liter $L_L$		$L_A$	$L_B$	$L_C$	

a) obliczenie sumy dla wierszy:

$$W_w = y_{w11} + \dots + y_{w1r} + y_{w21} + \dots + y_{w2r} + y_{w31} + \dots + y_{w3r}, \quad w=1,2,3,$$

b) obliczenie sumy dla kolumn:

$$K_k = y_{1k1} + \dots + y_{1kr} + y_{2k1} + \dots + y_{2kr} + y_{3k1} + \dots + y_{3kr}, \quad k=1,2,3,$$

a) obliczenie sumy dla liter. Dodaje się do siebie wyniki badań realizowanych w warunkach określonych przez odpowiednie litery A, B i C. Zatem:

$$L_A = y_{111} + \dots + y_{11r} + y_{221} + \dots + y_{22r} + y_{331} + \dots + y_{33r},$$

$$L_B = y_{131} + \dots + y_{13r} + y_{211} + \dots + y_{21r} + y_{321} + \dots + y_{32r},$$

$$L_C = y_{121} + \dots + y_{12r} + y_{231} + \dots + y_{23r} + y_{311} + \dots + y_{31r},$$

d) obliczenie sumy ogólnej:

$$G = \sum_{w=1}^3 W_w = \sum_{k=1}^3 K_k = \sum_{L=A}^C L_L.$$

2) **Budowa tablicy analizy wariancji.** Korzystnie jest budowę tablicy wariancji (tabl. 6.8) poprzedzić budową tablicy pomocniczej (tabl. 6.7).

Tablica 6.7

	$\sum_{n=1}^N y^2$	$\frac{S^2}{rp}$	$\frac{S^2}{rp^2}$	$S = \frac{S^2}{rp} - \frac{G^2}{rp^2}$
Wiersze	$y_{111}^2 + y_{121}^2 + \dots$	$\frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{rp}$	$\frac{G^2}{rp^2}$	$S_w = \frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{rp} - \frac{G^2}{rp^2}$
Kolumny		$\frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{rp}$		$S_k = \frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{rp} - \frac{G^2}{rp^2}$
Litery		$\frac{\sum_{L=1}^p L_L^2}{rp}$		$S_L = \frac{\sum_{L=1}^p L_L^2}{rp} - \frac{G^2}{rp^2}$

Tablica 6.8

Źródło zmienności	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Średni kwadrat $s^2$	Wartość testowa F
Wiersze W	$S_W$	$f_W = p - 1$	$s_W^2 = \frac{S_W}{f_W}$	$F_W = \frac{S_W^2}{S_R^2}$
Kolumny K	$S_K$	$f_K = p - 1$	$s_K^2 = \frac{S_K}{f_K}$	$F_K = \frac{S_K^2}{S_R^2}$
Litery L	$S_L$	$f_L = p - 1$	$s_L^2 = \frac{S_L}{f_L}$	$F_L = \frac{S_L^2}{S_R^2}$
Wzajemne oddziaływania WxKxL	$S_{WxKxL}$	$f_{WxKxL} = (p-1) \times (p-2)$	$s_{WxKxL}^2 = \frac{S_{WxKxL}}{f_{WxKxL}}$	$F_{WxKxL} = \frac{S_{WxKxL}^2}{S_R^2}$
Błąd	$S_R$	$f_R = p^2(r-1)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{f_R}$	—
Suma	S	$f = p^2r - 1$	—	—

a) Obliczenie sumy ogólnej:

$$S = \frac{S(\text{WKL})^2}{r} - \frac{G^2}{rp^2},$$

gdzie:

$$S(\text{WKL})^2 = y_{111}^2 + \dots + y_{11r}^2 + y_{121}^2 + \dots + y_{12r}^2 + \dots + y_{331}^2 + \dots + y_{33r}^2,$$

b) Obliczenie sumy kwadratów wzajemnego oddziaływania:

$$S_{WxKxL} = S - S_W - S_K - S_L,$$

c) Obliczenie sumy kwadratów błędu:

$$S_R = \sum_{n=1}^N y^2 - \frac{S(\text{WKL})^2}{r}.$$

### 3) Analiza istotności.

a) Sprawdzenie adekwatności założonego modelu liniowego przez porównanie wartości  $F_{WxKxL}$  z wartością krytyczną  $F_{\alpha, r1, r2}$  Fishera-Snedecora odczytaną z tablicy 15.6. W przypadku gdy  $F_{\alpha, r1, r2} > F_{WxKxL}$  efekty interakcji występujące między wierszami, kolumnami i literami można pominąć. Oznacza to, że przyjęty model liniowy jest prawidłowy.



Możliwa jest zatem dalsza analiza istotności wpływu czynników badanych  $x_i$ ,  $i=1,2,3$  na czynnik wynikowy  $y$ . Jeżeli zachodzi warunek  $F_{\alpha,r1,r2} \leq F_{WxKxL}$ , oznacza to, że efekty interakcji odgrywają rolę istotną i dlatego przyjęty model liniowy jest niewłaściwy z punktu widzenia statystyki matematycznej. Wówczas analiza istotności wpływu jest nieuzasadniona.

- b) W przypadku stwierdzenia nieistotności wpływu interakcji sprawdza się istotność wpływu czynników. W tym celu wartości statystyk  $F$  z tablicy 6.8 porównuje się z wartością krytyczną  $F_{\alpha,r1,r2}$  testu  $F$  Fishera-Snedecora. Jeżeli  $F_{\alpha,r1,r2} \geq F_{WxKxL}$  wówczas czynniki nie wpływają istotnie na czynnik wynikowy. Jeżeli natomiast  $F_{\alpha,r1,r2} < F_{WxKxL}$  analizowane czynniki wpływają w sposób istotny na czynnik wynikowy.

#### 6.4.2. Program statyczny randomizowany kwadrat grecko-łaciński

Program statyczny randomizowany kwadrat grecko-łaciński pozwala na jednoczesną ocenę istotności wpływu na czynnik wynikowy  $y$  czterech czynników badanych  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , przy czym każdy z nich występuje na  $p$  poziomach. Zakłada się przy tym a priori nieistotność wpływu interakcji czynników badanych na czynnik wynikowy. Może to prowadzić do występowania trudnych do określenia błędów takiej oceny.

Kwadrat grecko-łaciński rzędu  $p \times p$  buduje się z dwóch ortogonalnych kwadratów łacińskich, przy czym w celu ich odróżnienia, w jednym z nich zamienia się cyfry na litery alfabetu łacińskiego, a w drugim zamienia się cyfry na litery alfabetu greckiego. Po ich połączeniu (nałożeniu) otrzymuje się **kwadrat grecko-łaciński**. W tablicach statystycznych podawane są zbiory kwadratów ortogonalnych, np. rzędu  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $8 \times 8$  i  $9 \times 9$ . Przykładowo na rysunku 6.5 pokazano konstrukcję kwadratu grecko-łacińskiego rzędu  $5 \times 5$ . Ortogonalność kwadratu łacińskiego sprawdza się w ten sposób, że po ich nałożeniu każda litera jednego kwadratu tworzy jedną i tylko jedną parę z każdą literą drugiego kwadratu.

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

→

α	β	γ	δ	ε
γ	δ	ε	α	β
ε	α	β	γ	δ
β	γ	δ	ε	α
δ	ε	α	β	γ

<b>Aα</b>	<b>Bβ</b>	<b>Cγ</b>	<b>Dδ</b>	<b>Eε</b>
<b>Bγ</b>	<b>Cδ</b>	<b>Dε</b>	<b>Eα</b>	<b>Aβ</b>
<b>Cε</b>	<b>Dα</b>	<b>Eβ</b>	<b>Aγ</b>	<b>Bδ</b>
<b>Dβ</b>	<b>Eγ</b>	<b>Aδ</b>	<b>Bε</b>	<b>Cα</b>
<b>Eδ</b>	<b>Aε</b>	<b>Bα</b>	<b>Cβ</b>	<b>Dγ</b>

Rys. 6.5. Konstrukcja kwadratu grecko-lacińskiego rzędu 5x5 z dwóch ortogonalnych kwadratów oznaczonych literami łacińskimi i greckimi.

Schemat obliczeń:

1) Przedstawienie wyników obliczeń w formie tablicy (tabl. 6.9).

Tablica 6.9

$x_1$	1	2	3	4	5	Suma według wierszy $W_w$
$x_2$						
1	<b>Aα</b> $y_{11}$	<b>Bβ</b> $y_{12}$	<b>Cγ</b> $y_{13}$	<b>Dδ</b> $y_{14}$	<b>Eε</b> $y_{15}$	<b><math>W_1</math></b>
2	<b>Bγ</b> $y_{21}$	<b>Cδ</b> $y_{22}$	<b>Dε</b> $y_{23}$	<b>Eα</b> $y_{24}$	<b>Aβ</b> $y_{25}$	<b><math>W_2</math></b>
3	<b>Cε</b> $y_{31}$	<b>Dα</b> $y_{32}$	<b>Eβ</b> $y_{33}$	<b>Aγ</b> $y_{34}$	<b>Bδ</b> $y_{35}$	<b><math>W_3</math></b>
4	<b>Dβ</b> $y_{41}$	<b>Eγ</b> $y_{42}$	<b>Aδ</b> $y_{43}$	<b>Bε</b> $y_{44}$	<b>Cα</b> $y_{45}$	<b><math>W_4</math></b>
5	<b>Eδ</b> $y_{51}$	<b>Aε</b> $y_{52}$	<b>Bα</b> $y_{53}$	<b>Cβ</b> $y_{54}$	<b>Dγ</b> $y_{55}$	<b><math>W_5</math></b>
Suma według kolumn $K_k$	<b><math>K_1</math></b>	<b><math>K_2</math></b>	<b><math>K_3</math></b>	<b><math>K_4</math></b>	<b><math>K_5</math></b>	<b>Suma ogólna G</b>
Suma $L_g$	<b><math>L_A</math></b>	<b><math>L_B</math></b>	<b><math>L_C</math></b>	<b><math>L_D</math></b>	<b><math>L_E</math></b>	
Suma $L_l$	<b><math>L_α</math></b>	<b><math>L_β</math></b>	<b><math>L_γ</math></b>	<b><math>L_δ</math></b>	<b><math>L_ε</math></b>	

## 2) Budowa tablicy pomocniczej (tabl. 6.10)

Tablica 6.10

	$\sum_{n=1}^N y_n^2$	$\frac{\sum^2}{p}$	$\frac{G^2}{p^2}$	$S_i = \frac{\sum^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$
Wiersze	$y_{111}^2 + y_{121}^2 + \dots$	$\frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{p}$	$\frac{G^2}{p^2}$	$S_w = \frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$
Kolumny		$\frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{p}$		$S_k = \frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$
Litery łacińskie		$\frac{\sum_{l=A}^E L_l^2}{p}$		$S_l = \frac{\sum_{l=A}^E L_l^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$
Litery greckie		$\frac{\sum_{g=\alpha}^{\epsilon} L_g^2}{p}$		$S_g = \frac{\sum_{g=\alpha}^{\epsilon} L_g^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$

## 3) Budowa tablicy analizy wariancji (tabl. 6.11)

Tablica 6.11

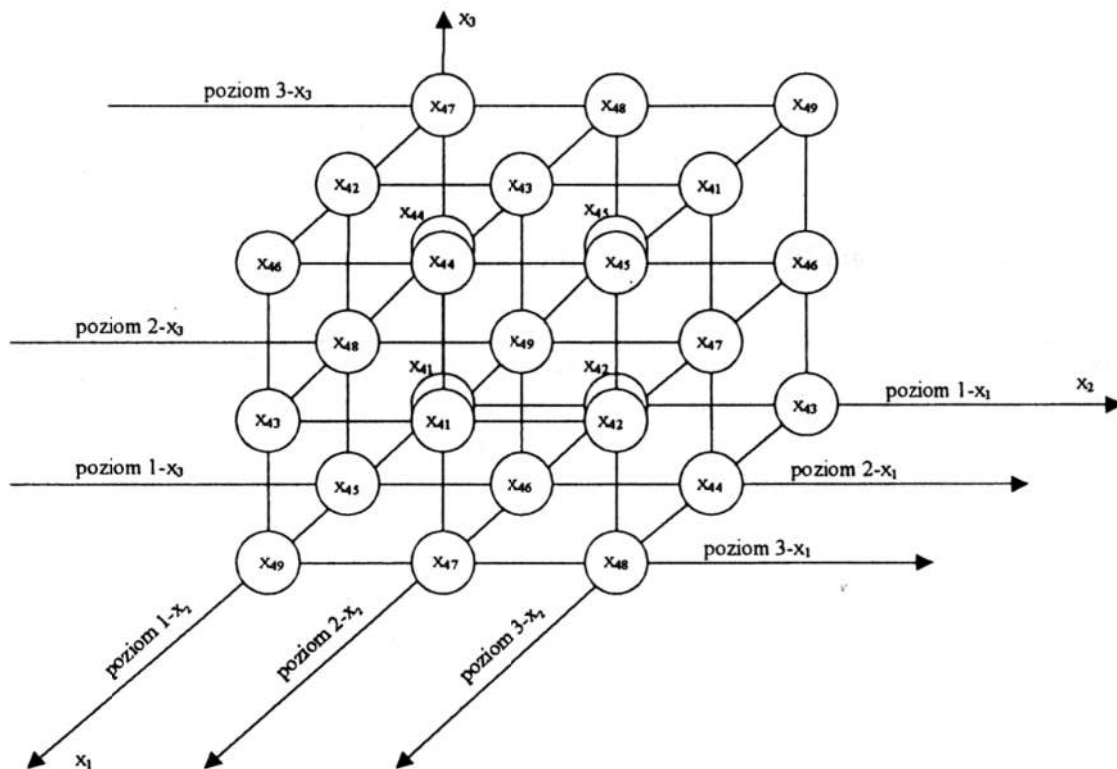
Źródło zmienności	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Średni kwadrat $s^2$	Wartość testowa F
Wiersze W	$S_w$	$f_w=p-1$	$s_w^2 = \frac{S_w}{f_w}$	$F_w = \frac{s_w^2}{s_R^2}$
Kolumny K	$S_k$	$f_k=p-1$	$s_k^2 = \frac{S_k}{f_k}$	$F_k = \frac{s_k^2}{s_R^2}$
Litery łacińskie	$S_l$	$f_l=p-1$	$s_l^2 = \frac{S_l}{f_l}$	$F_l = \frac{s_l^2}{s_R^2}$
Litery greckie	$S_g$	$f_g=p-1$	$s_g^2 = \frac{S_g}{f_g}$	$F_g = \frac{s_g^2}{s_R^2}$
Błąd	$S_R=S_c-S_w-S_k-S_l-S_g$	$f_R=(p-1)(p-3)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{f_R}$	—
Suma	$S_c = \sum y^2 - \frac{G^2}{p^2}$	—	—	—

3) Analiza istotności. Analizę istotności wpływu poszczególnych czynników na czynnik wynikowy przeprowadza się analogicznie do przedstawionej w p. 6.4.1.

### 6.5. Program statyczny randomizowany sześcián łaciński

Program statyczny randomizowany sześcián łaciński pozwala na jednoczesną ocenę istotności wpływu na czynnik wynikowy  $y$  czterech czynników badanych  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , przy czym trzy spośród nich występują na  $p$  poziomach, natomiast jeden na  $p^2$  poziomach. Zakłada się przy tym a priori nieistotność wpływu interakcji czynników badanych na czynnik wynikowy. Może to prowadzić, podobnie jak to miało miejsce w przypadku kwadratów grecko-łacińskich, do występowania trudnych do określenia błędów takiej oceny.

Przykład sześciánu łacińskiego o wymiarach  $3 \times 3 \times 3 \times 9$  przedstawia rysunek 6.6.



Rys. 6.6. Sześcián łaciński o wymiarach  $3 \times 3 \times 3 \times 9$  [48].

Sześcián ten można rozłożyć na trzy kwadraty łacińskie według dowolnego analizowanego czynnika. Przyjmijmy, że tworzymy 3 kwadraty według zmiennej  $x_3$ :

- dla poziomu 1 czynnika  $x_3$  – tablica 6.12,
- dla poziomu 2 czynnika  $x_3$  – tablica 6.13,
- dla poziomu 3 czynnika  $x_3$  – tablica 6.14.

Wzory na sumy dla wierszy, kolumn oraz sumy ogólnej są identyczne jak dla programu statycznego randomizowanego kwadrat łaciński. Tablica pomocnicza (tabl. 6.15) przedstawia dalszy tok obliczeń i niezbędne wzory do sporządzenia tablicy analizy wariancji (tabl. 6.16). Otrzymane wartości testów F Fishera-Snedecora porównuje się z wartością krytyczną odczytaną z tablicy 15.6.

Tablica 6.12

$X_1$	$X_2$	$X_{21}$	$X_{21}$	$X_{21}$	Suma dla wierszy		
$X_{11}$	$X_{41}$	$y_1$	$X_{42}$	$y_2$	$X_{43}$	$y_3$	$S_{11}^1$
$X_{12}$	$X_{45}$	$y_4$	$X_{46}$	$y_5$	$X_{44}$	$y_6$	$S_{12}^1$
$X_{13}$	$X_{49}$	$y_7$	$X_{47}$	$y_8$	$X_{48}$	$y_9$	$S_{13}^1$
Suma dla kolumn	$S_{21}^1$		$S_{22}^1$		$S_{23}^1$		Suma ogólna $G_1$

Tablica 6.13

$X_1$	$X_2$	$X_{21}$	$X_{21}$	$X_{21}$	Suma dla wierszy		
$X_{11}$	$X_{44}$	$y_{10}$	$X_{45}$	$y_{11}$	$X_{46}$	$y_{12}$	$S_{11}^2$
$X_{12}$	$X_{48}$	$y_{13}$	$X_{49}$	$y_{14}$	$X_{47}$	$y_{15}$	$S_{12}^2$
$X_{13}$	$X_{43}$	$y_{16}$	$X_{41}$	$y_{17}$	$X_{42}$	$y_{18}$	$S_{13}^2$
Suma dla kolumn	$S_{21}^2$		$S_{22}^2$		$S_{23}^2$		Suma ogólna $G_2$

Tablica 6.14

$X_1$	$X_2$	$X_{21}$	$X_{21}$	$X_{21}$	Suma dla wierszy		
$X_{11}$	$X_{47}$	$y_{19}$	$X_{48}$	$y_{20}$	$X_{49}$	$y_{21}$	$S_{11}^3$
$X_{12}$	$X_{42}$	$y_{22}$	$X_{43}$	$y_{23}$	$X_{41}$	$y_{24}$	$S_{12}^3$
$X_{13}$	$X_{446}$	$y_{25}$	$X_{44}$	$y_{26}$	$X_{45}$	$y_{27}$	$S_{13}^3$
Suma dla kolumn	$S_{21}^3$		$S_{22}^3$		$S_{23}^3$		Suma ogólna $G_3$

Tablica 6.15

Zmienne	$\sum_{n=1}^N y_n^2$	$\frac{S^2}{p^2}, \frac{S^2}{p}$	$\frac{G^2}{p^3}$	$S = \frac{S^2}{p^2} - \frac{G^2}{p^3}$
$x_1$	$y_1^2$ + $y_2^2$ + ... + $y_{p3}^2$	$\frac{S_1^2}{p^2} = \frac{S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2}{p^2}$	$\frac{G^2}{p^2} =$ $= \frac{(G_1 + G_2 + G_3)^2}{p^3}$	$S_1 = \frac{S_1^2}{p^2} - \frac{G^2}{p^3}$
$x_2$		$\frac{S_2^2}{p^2} = \frac{S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2}{p^2}$		$S_2 = \frac{S_2^2}{p^2} - \frac{G^2}{p^3}$
$x_3$		$\frac{S_3^2}{p^2} = \frac{S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2}{p^2}$		$S_3 = \frac{S_3^2}{p^2} - \frac{G^2}{p^3}$
$x_4$		$\frac{S_4^2}{p} = \frac{S_{41}^2 + \dots + S_{49}^2}{p}$		$S_{41} = \frac{S_4^2}{p} - \frac{G^2}{p^3}$

Tablica 6.16

Źródło zmienności	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Średni kwadrat $s^2$	Wartość testowa F
$x_1$	$S_1$	$f_1=p-1$	$s_1^2 = \frac{S_1}{f_1}$	$F_1 = \frac{S_1^2}{S_R^2}$
$x_2$	$S_2$	$f_2=p-1$	$s_2^2 = \frac{S_2}{f_2}$	$F_2 = \frac{S_2^2}{S_R^2}$
$x_3$	$S_3$	$f_3=p-1$	$s_3^2 = \frac{S_3}{f_3}$	$F_3 = \frac{S_3^2}{S_R^2}$
$x_4$	$S_4$	$f_4=p^2-1$	$s_4^2 = \frac{S_4}{f_4}$	$F_4 = \frac{S_4^2}{S_R^2}$
Błąd R	$S_R=S-S_1-S_2-S_3-S_4$	$f_R=f-f_1$	$s_R^2 = \frac{S_R}{f_R}$	—
Suma	$S = \sum_{n=1}^N y_n^2 - \frac{G^2}{p^3}$	$f=p^3-1$	—	—

Wnioskowanie o istotności wpływu danego czynnika badanego na czynnik wynikowy jest identyczne do przedstawionego w p. 6.4.1.

### 6.6. Program statyczny randomizowany prostokąt Youdena

Program statyczny randomizowany prostokąt Youdena przeznaczony jest do oceny istotności wpływu trzech czynników badanych  $x_i$ ,  $i=1,2,3$  na czynnik wynikowy  $y$ . W programie tym, w przeciwieństwie do kwadratu łacińskiego, nie jest konieczne, aby wszystkie analizowane czynniki miały takie same liczby poziomów. Prostokąt Youdena stanowi niepełny program statycznego randomizowanego kwadrat łaciński, ze względu na różną liczbę poziomów czynników w wierszach i kolumnach. W przypadku prostokąta Youdena ocenę istotności wpływu badanych czynników można jednak uzyskać przy mniejszej liczbie pomiarów. Możliwa jest tutaj również ocena wpływu interakcji.

Przykładowe, najczęściej spotykane prostokąty Youdena przedstawiono w tablicach 6.17-6.21.

Tablica 6.17

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5
1		A	B	C	D	E
2		B	C	D	E	A
3		C	D	E	A	B
4		D	E	A	B	C

$x_1=A,B,C,D,E$   
 Charakterystyka prostokąta Youdena o wymiarach  $5 \times 5 \times 4$ :  
 $p_1=5, p_2=5, p_3=4, \lambda_1=4, \lambda=3$ .

Tablica 6.18

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5	6
1		A	B	C	D	E	F
2		B	C	D	E	F	A
3		C	D	E	F	A	B
4		D	E	F	A	B	C
5		E	F	A	B	C	D

$x_1=A,B,C,D,E,F$   
 Charakterystyka prostokąta Youdena o wymiarach  $6 \times 6 \times 5$ :  $p_1=6, p_2=6, p_3=5, \lambda_1=5, \lambda=4$ .



Tablica 6.19

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5	6	7
1		A	B	C	D	E	F	H
2		B	C	D	E	F	H	A
3		D	E	F	H	A	B	C

$x_1=A,B,C,D,E,F,H$   
 Charakterystyka prostokąta Youdena o wymiarach  $7 \times 7 \times 3$ :  $p_1=7$ ,  $p_2=7$ ,  $p_3=3$ ,  
 $\lambda_1=3$ ,  $\lambda=1$ .

Tablica 6.20

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5	6	7
1		A	B	C	D	E	F	H
2		B	C	D	E	F	H	A
3		C	D	E	F	H	A	B
4		E	F	H	A	B	C	D

$x_1=A,B,C,D,E,F,H$   
 Charakterystyka prostokąta Youdena o wymiarach  $7 \times 7 \times 4$ :  
 $p_1=7$ ,  $p_2=7$ ,  $p_3=4$ ,  $\lambda_1=4$ ,  $\lambda=2$ .

Tablica 6.21

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		A	B	C	D	E	F	H	J
2		B	C	D	E	F	H	J	A
3		C	D	E	F	H	J	A	B
4		D	E	F	H	J	A	B	C
5		E	F	H	J	A	B	C	D
6		F	H	J	A	B	C	D	E
7		H	J	A	B	C	D	E	F

$x_1=A,B,C,D,E,F,H,J$   
 Charakterystyka prostokąta Youdena o wymiarach  $8 \times 8 \times 7$ :  
 $p_1=8$ ,  $p_2=8$ ,  $p_3=7$ ,  $\lambda_1=7$ ,  $\lambda=6$ .

Każdy z prostokątów Youdena charakteryzowany jest wymiarami  $p_1 \times p_2 \times p_3$  oraz kontrastem programu  $\lambda_1$  i  $\lambda$ , przy czym kontrast  $\lambda_1$  określa krotność powtarzania się każdego poziomu czynnika  $x_1$  (litery), natomiast kontrast  $\lambda$  określa krotność powtarzania się każdej pary poziomów (układów dwóch liter).

Kolejność postępowania przy ocenie istotności wpływu poszczególnych czynników badanych na czynnik wynikowy zostanie przedstawiona dla

przykładowego prostokąta Yaudena o wymiarach 7x7x3. Wyniki badań zestawia się tabelarycznie (tabl. 6.22),

Tablica 6.22

$x_3$	$x_2$	1	2	3	4	5	6	7	Suma dla wierszy
1	A	B	C	D	E	F	H		$W_1$
		$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$	$y_{16}$	$y_{17}$	
2	B	C	D	E	F	H	A		$W_2$
		$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	$y_{25}$	$y_{26}$	$y_{27}$	
3	D	E	F	H	A	B	C		$W_3$
		$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	$y_{34}$	$y_{35}$	$y_{36}$	$y_{37}$	
Suma dla kolumn		$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	Suma ogólna G
Suma dla liter		$L_A$	$L_B$	$L_C$	$L_D$	$L_E$	$L_F$	$L_H$	

Sumy dla wierszy  $W_w$ , kolumn  $K_K$ , liter  $L_L$  oraz sumę ogólną G oblicza się z następujących zależności:

$$W_1 = y_{11} + y_{12} + \dots + y_{17},$$

$$W_2 = y_{21} + y_{22} + \dots + y_{27},$$

$$W_3 = y_{31} + y_{32} + \dots + y_{37},$$

$$K_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31},$$

$$K_2 = y_{12} + y_{22} + y_{32},$$

$$K_3 = y_{13} + y_{23} + y_{33},$$

$$K_4 = y_{14} + y_{24} + y_{34},$$

$$K_5 = y_{15} + y_{25} + y_{35},$$

$$K_6 = y_{16} + y_{26} + y_{36},$$

$$K_7 = y_{17} + y_{27} + y_{37},$$

$$L_A = y_{11} + y_{27} + y_{35},$$

$$L_B = y_{12} + y_{21} + y_{36},$$

$$L_C = y_{13} + y_{22} + y_{37},$$

$$L_D = y_{14} + y_{23} + y_{31},$$

$$L_E = y_{15} + y_{24} + y_{32},$$

$$L_F = y_{16} + y_{25} + y_{33},$$

$$L_H = y_{17} + y_{26} + y_{34},$$

$$G = \sum_{w=1}^3 W_w = W_1 + W_2 + W_3.$$

Następnie tworzy się dwie następujące pomocnicze tablice 6.23 i 6.24.

Tablica 6.23

Zmienne	$\sum_{i,j=1}^{i=p_2, j=p_3} y_{ij}^2$	$\frac{S^2}{p_i}$	$\frac{G^2}{N}$	$S = \frac{S^2}{p_i} - \frac{G^2}{N}$
Wiersze	$y_{11}^2 + y_{12}^2 + \dots + y_{p_2 p_3}^2$	$\frac{\sum W_w^2}{p_2}$	$\frac{G^2}{p_2 p_3}$	$S_w = \frac{W_w^2}{p_2} - \frac{G^2}{N}$
Kolumny		$\frac{K_k^2}{p_3}$		$S_k = \frac{K_k^2}{p_3} - \frac{G^2}{N}$

Tablica 6.24

Poziom czynnik $x_1$ (litera)	$L_L$	$\lambda_1 L_L$	Suma kolumn, w której występuje dany poziom czynnika $x_1$ (litera)							Suma $S'_L$	$S'_L = \lambda_1 L_L - S''_L$
			1	2	3	4	5	6	7		
A	$L_A$	$\lambda_1 L_A$	$K_1$	-	-	-	$K_5$	-	$K_7$	$K_1 + K_5 + K_7$	$S'_A$
B	$L_B$	$\lambda_1 L_B$	$K_1$	$K_2$	-	-	-	$K_6$	-	$K_1 + K_2 + K_6$	$S'_B$
C	$L_C$	$\lambda_1 L_C$	-	$K_2$	$K_3$	-	-	-	$K_7$	$K_2 + K_3 + K_7$	$S'_C$
D	$L_D$	$\lambda_1 L_D$	$K_1$	-	$K_3$	$K_4$	-	-	-	$K_1 + K_3 + K_4$	$S'_D$
E	$L_E$	$\lambda_1 L_E$	-	$K_2$	-	$K_4$	$K_5$	-	-	$K_2 + K_4 + K_5$	$S'_E$
F	$L_F$	$\lambda_1 L_F$	-	-	$K_3$	-	$K_5$	$K_6$	-	$K_3 + K_5 + K_6$	$S'_F$
H	$L_H$	$\lambda_1 L_H$	-	-	-	$K_4$	-	$K_6$	$K_7$	$K_4 + K_6 + K_7$	$S'_H$
$\sum S'_L = 0$											

Po czym tworzy się tablicę wariancji – tabl. 6.25. Sumę kwadratów dla liter w tablicy 6.25 oblicza się ze wzoru:

$$S_L = \frac{\sum S'_L{}^2}{N\lambda}, \quad \text{gdzie } N = p_2 p_3.$$

Tablica 6.25

Źródło zmienności	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Średni kwadrat $s^2$	Wartość testowa F
Wiersze	$S_W$	$f_W = p_2 - 1$	$s_W^2 = \frac{S_W}{f_W}$	$F_W = \frac{s_W^2}{s_R^2}$
Kolumny	$S_K$	$f_K = p_2 - 1$	$s_K^2 = \frac{S_K}{f_K}$	$F_K = \frac{s_K^2}{s_R^2}$
Litery	$S_L$	$f_L = p_L - 1$	$s_L^2 = \frac{S_L}{f_L}$	$F_L = \frac{s_L^2}{s_R^2}$
Błąd R	$S_R = S - S_W - S_K - S_L$	$f_R = f - \sum_i^{W,K,L} f_i$	$s_R^2 = \frac{S_R}{f_R}$	—
Suma	$S = \sum y^2 - \frac{G^2}{N}$	$f = p_2 p_3 - 1$	—	—

Oceny istotności wpływu poszczególnych czynników na czynnik wynikowy dokonuje się poprzez porównanie obliczonych wartości statystyk  $F$  z wartością krytyczną testu Fishera-Snedecora odczytaną z tablic 15.6.

### 6.7. Program statyczny randomizowany “bilans losowy”

Program statyczny randomizowany “bilans losowy” przeznaczony jest do oceny istotności wpływu czynników wejściowych i ich interakcji na czynnik wynikowy. Program ten stosuje się w przypadku, gdy liczba zmiennych wejściowych jest duża ( $S=5 \div 12$ ), co praktycznie uniemożliwia stosowanie planów poliselekcyjnych. Program bilans losowy jest planem przesyconym, gdyż liczba doświadczeń jest mniejsza od liczby określanych efektów, czyli liczba stopni swobody jest mniejsza od zera [16, 48, 52].

Macierz planu dla metody bilans losowy można wyznaczyć za pomocą jednego z dwóch sposobów [16]:

- planowania całkowicie losowego poprzez wybieranie elementów kolumn z tablic liczb losowych,
- planowania prawie losowego poprzez losowe zmieszanie dwóch lub kilku powtórzeń ułamkowych doświadczenia czynnikowego.

W celu praktycznego zbudowania macierzy planu eksperymentu posłużymy się przykładem z pracy [15]. Badana jest istotność wpływu na okres  $T$  trwałości wiertel następujących ośmiu czynników badanych ( $x_i, i=1, \dots, 8$ ):

- $x_1$  - długość części roboczej (56,6; 58,7) [mm],
- $x_2$  - kąt przyłożenia (10; 20) [stopnie],
- $x_3$  - kąt wierzchołkowy (118; 136) [stopnie],
- $x_4$  - średnica rdzenia (0,81; 0,91) [mm],
- $x_5$  - długość ścina (0,2; 1,5) [mm],
- $x_6$  - szerokość łysinki (0,5; 0,7) [mm],
- $x_7$  - chropowatość powierzchni przyłożenia (0,57; 0,81) [ $\mu\text{m}$ ],
- $x_8$  - stopień odpuszczenia (według wskazań austenometru) (-10; 10) [-],

przy czym w nawiasach okrągłych podano wartości badanego czynnika dla poziomu dolnego (-) i poziomu górnego (+).

Zatem na czynnik wynikowy może oddziaływać w sposób istotny 8 efektów liniowych czynników badanych i 28 efektów ich interakcji.

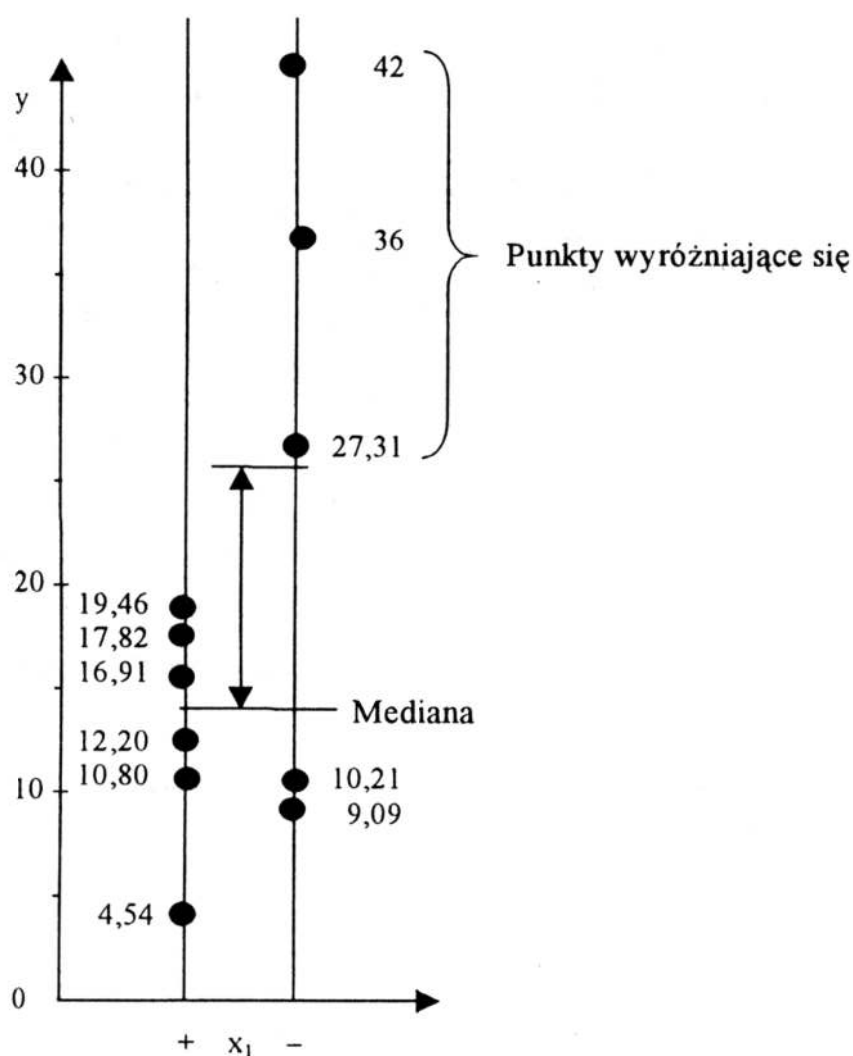
Macierz planu eksperymentu (tablica 6.26) zbudowano w następujący sposób. Wszystkie czynniki rozdzielono na dwie części. Z pierwszej grupy, zawierającej czynniki  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  i  $x_4$  zbudowano półpowtórzenie  $2^{4-1}$  z kontrastem określającym  $x_1x_2x_3x_4=1$  (por. pkt. 10.3.2). W podobny sposób zbudowano półpowtórzenie dla drugiej połowy czynników. Pierwsze półpowtórzenie pozostawiono bez zmian i do każdego wiersza dodano losowo wybrane wiersze półpowtórzenia dla drugiej połowy czynników. Przy losowym łączeniu wierszy posługiwano się tablicami liczb losowych.

Tablica 6.26. Macierz doświadczenia eliminującego [15].

Numer Doświadczenia	Numer wiertła	Czynniki								Okres trwałości ostrza T, min	Wartości skorygowane
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	37	+	+	-	-	+	-	+	-	10,80	18,6
2	30	+	+	+	+	-	+	+	-	17,82	10,21
3	45	-	+	-	-	+	+	-	+	9,09	9,09
4	31	-	-	+	+	+	-	-	+	42,00	26,50
5	39	+	-	-	+	-	-	+	-	16,91	9,21
6	32	+	-	+	-	+	+	-	-	19,46	27,26
7	11	-	-	-	-	-	+	-	+	10,21	10,21
8	7	-	+	-	+	-	-	+	+	27,31	11,81
9	10	+	-	-	-	-	+	-	+	4,54	12,34
10	9	-	+	+	+	-	+	-	-	36,00	20,50
11	4	+	-	+	-	-	-	+	-	12,20	20,00

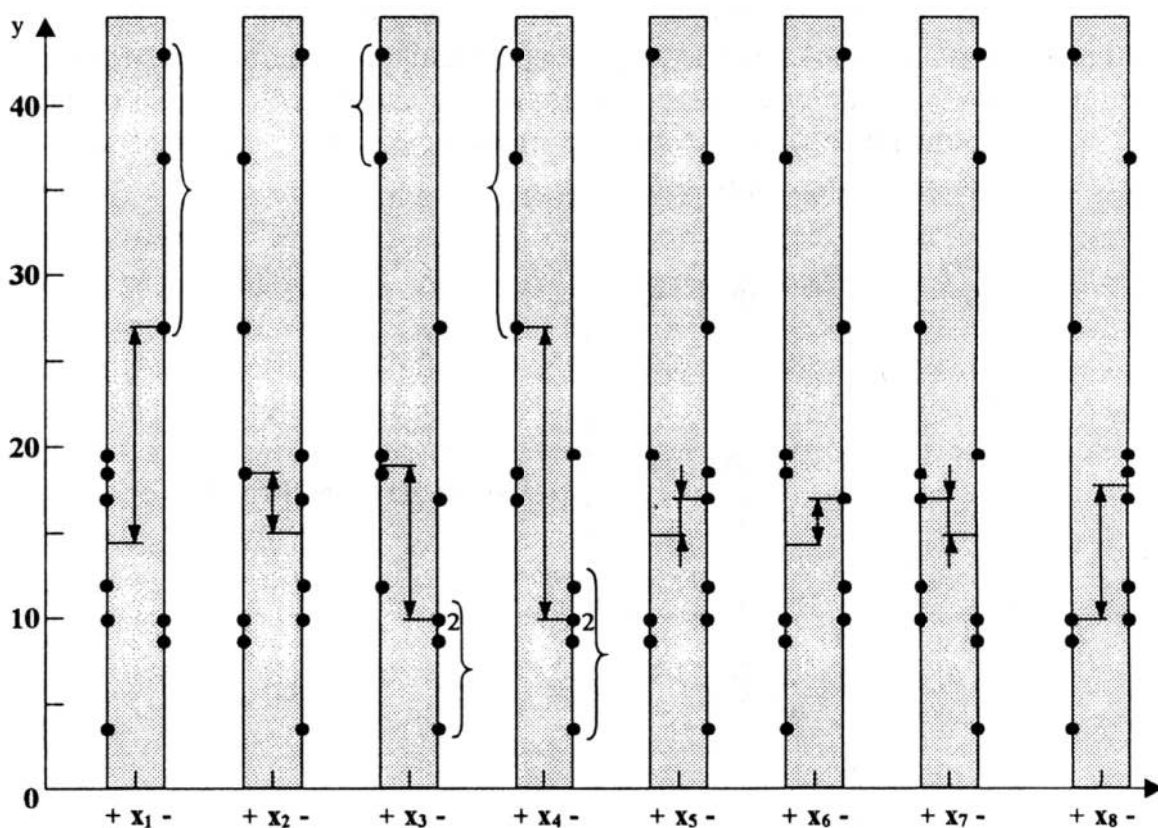
Po zbudowaniu macierzy planu sprawdza się jej przydatność. Macierz jest przydatna jeżeli nie ma w niej dwóch jednakowych kolumn. Macierz nie powinna również zawierać kolumn, których iloczyn skalarny z dowolną inną kolumną dawałby kolumnę o jednakowych znakach, tj. składającą się jedynie z (+) lub (-).

Na podstawie wyznaczonej macierzy planu wykonuje się eksperyment, a jego wyniki nanosi się na specjalnie budowany wykres, tzw. diagram rozrzutu. Na osi odciętych nanosi się wszystkie czynniki wraz z ich poziomami zmienności, a na osi rzędnych wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Każdy czynnik rozpatruje się niezależnie od innych. Przykładowo na rysunku 6.7 przedstawiono sposób nanoszenia wyników eksperymentu (tablica 6.26, kolumna 11) dla czynnika pierwszego –  $x_1$ . Odcinkami poziomymi oznaczono mediany, natomiast klamrą – grupę punktów wyróżniających się. Na poziomie (+) są trzy takie punkty, dla których wartość  $y$  jest większa od największej wartości uzyskanej na poziomie (-).



Rys. 6.7. Budowanie wykresu rozrzutu.

Kompletny wykres rozrzutu dla wszystkich wyników przedstawia rysunek 6.8. Czynniki istotnie wpływające na czynnik wynikowy  $y$  można określić wizualnie poprzez porównanie ze sobą median wartości czynnika wynikowego otrzymanych dla dwóch wartości czynnika badanego, tj. na poziomie wyższym i niższym (zaznaczone na wykresie za pomocą poziomych kresek). Z postaci wykresu wynika, że największe różnice między medianami wartości wynikowych wystąpiły dla czynnika  $x_4$ , czyli największy wpływ na czynnik wynikowy  $y$  mają efekty liniowe wywołane zmienną  $x_4$  (osiem punktów wyróżniających się).



Rys. 6.8. Przykładowy wykres rozrzutu wyników eksperymentu w metodzie bilans losowy [15].

Algorytm ustalania efektu wpływu analizowanych czynników  $x_i$  na czynnik wynikowy  $y$  jest następujący.

1. Obliczenie współczynników  $B_i$  i  $a_i$  ze wzorów:

$$B_i = \frac{\sum_{g=1}^G y_g - \sum_{d=1}^D y_d}{\frac{n}{2}}, \quad a_i = \frac{B_i}{2},$$



gdzie:

G – liczba doświadczeń dla których analizowany czynnik znajduje się na górnym poziomie,

D – liczba doświadczeń dla których analizowany czynnik znajduje się na dolnym poziomie,

g - numer doświadczenia dla którego analizowany czynnik znajduje się na górnym poziomie,

d - numer doświadczenia dla którego analizowany czynnik znajduje się na dolnym poziomie,

$y_g, y_d$  – wartość czynnika wynikowego  $y$  odpowiednio w g-tym i d-tym doświadczeniu,

n – liczba doświadczeń.

Dla czynnika  $x_4$  otrzymuje się:

$$B_1 = \frac{10,8 + 17,82 + 16,91 + 19,46 + 4,54 + 12,2}{\frac{11}{2}} +$$

$$- \frac{9,09 + 42 + 10,21 + 27,31 + 36}{\frac{11}{2}} = -7,8,$$

$$a_1 = \frac{-7,8}{2} = -3,9,$$

2. W celu wyodrębnienia następnych istotnych czynników zmiennych dokonuje się korekty wyników obserwacji, odejmując wartość  $B_i$  od wszystkich wyników badań, dla których analizowany czynnik znajduje się na górnym poziomie.

$$y_g^I = y_g - B_i,$$

Pozostałe wartości  $y$  nie ulegają zmianie. W ten sposób eliminuje się oddziaływanie na wyniki badań już wychwyconych czynników.

Po skorygowaniu wyników badań, ponownie buduje się wykres rozrzutu z pominięciem przeanalizowanego już  $i$ -tego czynnika. Dalszy tok postępowania przy określaniu efektów liniowych oddziaływania kolejnego czynnika jest analogiczny do przedstawionego.

W przypadku ustalania wpływu efektów interakcji czynników  $x_i$  i  $x_j$  tok postępowania jest następujący:

1. Buduje się tablicę pomocniczą (tabl. 6.27) do oceny efektów powodowanych przez czynniki  $x_i$  i  $x_j$  z dwoma wejściami:

Tablica 6.27. Tablica pomocnicza.

Szacowane czynniki	+x <sub>i</sub>	-x <sub>i</sub>	Szacowane czynniki	+x <sub>i</sub>	-x <sub>i</sub>
+x <sub>j</sub>	y <sub>11</sub>	y <sub>21</sub>	-x <sub>j</sub>	y <sub>31</sub>	y <sub>41</sub>
	y <sub>12</sub>	y <sub>22</sub>		y <sub>32</sub>	y <sub>42</sub>
	·	·		·	·
	y <sub>n1</sub>	y <sub>n2</sub>		y <sub>n3</sub>	y <sub>n4</sub>
	$\sum_{k=1}^{n1} y_{1k}$	$\sum_{k=1}^{n2} y_{2k}$		$\sum_{k=1}^{n3} y_{3k}$	$\sum_{k=1}^{n4} y_{4k}$
	$\bar{y}_1 = \frac{1}{n1} \sum_{k=1}^{n1} y_{1k}$	$\bar{y}_2 = \frac{1}{n2} \sum_{k=1}^{n2} y_{2k}$		$\bar{y}_3 = \frac{1}{n3} \sum_{k=1}^{n3} y_{3k}$	$\bar{y}_4 = \frac{1}{n4} \sum_{k=1}^{n4} y_{4k}$

W analizowanym przykładzie zbadano wpływ interakcji czynników x<sub>1</sub> i x<sub>4</sub>, gdyż dla tych czynników występują największe różnice między medianami wartości wyjściowych. Tablica pomocnicza ma w tym przypadku postać – tabl. 6.28.

Tablica 6.28. Tablica pomocnicza dla przykładowych danych.

Szacowane czynniki	+x <sub>1</sub>	-x <sub>1</sub>	Szacowane czynniki	+x <sub>1</sub>	-x <sub>1</sub>
+x <sub>4</sub>	17,82	36,00	-x <sub>4</sub>	10,80	9,09
	16,91	42,00		19,46	10,21
		27,31		4,54	
			12,20		
	$\sum_{k=1}^2 y_{1k} = 34,73$	$\sum_{k=1}^3 y_{2k} = 105,31$		$\sum_{k=1}^4 y_{3k} = 47$	$\sum_{k=1}^2 y_{4k} = 19,3$
	$\bar{y}_1 = 17,37$	$\bar{y}_2 = 35,1$		$\bar{y}_3 = 11,75$	$\bar{y}_4 = 9,65$

## 2. Obliczenie współczynników B<sub>i</sub> oraz a<sub>i</sub>:

- a) sumuje się wszystkie wartości średnie na poziomie odpowiednio wyższym i niższym dla i-tego czynnika:

$$\bar{y}_i^{+1} = \bar{y}_1 + \bar{y}_3, \quad \bar{y}_i^{-1} = \bar{y}_2 + \bar{y}_4,$$

zatem:

$$\bar{y}_1^{+1} = 17,37 + 11,75 = 29,12,$$

$$\bar{y}_1^{-1} = 35,1 + 9,65 = 44,75,$$

$$\bar{y}_4^{+1} = 17,37 + 35,1 = 52,47,$$

$$\bar{y}_4^{-1} = 11,75 + 9,65 = 21,4,$$

b) oblicza się współczynniki  $B_i$  i  $a_i$  ze wzorów:

$$B_i = \frac{\bar{y}_i^{+1} - \bar{y}_i^{-1}}{m}, \quad a_i = \frac{B_i}{2},$$

gdzie  $m$  jest liczbą wartości  $\bar{y}$  w tabl. 6.26 odpowiadająca poziomowi górnemu lub dolnemu analizowanego czynnika (w przykładzie  $m=2$ ),

$$B_1 = \frac{29,12 - 44,75}{2} = -7,8, \quad a_1 = \frac{-7,8}{2} = -3,9,$$

$$B_4 = \frac{52,47 - 21,4}{2} = 15,5, \quad a_4 = \frac{15,5}{2} = 7,77,$$

3. Obliczenie wariancji:

a) obliczenie wariancji  $s_i^2$ ,  $i=1,2,3,4$  ze wzoru:

$$s_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{l_i} (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{f_i}, \quad \text{gdzie } f_i = l_i - 1,$$

gdzie  $\bar{y}_i$  wyniki obserwacji (tabl. 6.26),  $\bar{y}$  średnia z tablicy wyników obserwacji (tabl. 6.28). Dla danych jak w przykładzie otrzymuje się:

$$s_1^2 = \frac{(17,81 - 17,37)^2 + (16,91 - 17,37)^2}{2 - 1} = 0,194 + 0,212 = 0,406,$$

$$s_2^2 = \frac{(36 - 35,1)^2 + (42 - 35,1)^2 + (27,31 - 35,1)^2}{3 - 1} = \\ = \frac{0,81 + 47,61 + 60,68}{2} = 54,55,$$

$$s_3^2 = \frac{(10,80 - 11,75)^2 + (19,46 - 11,75)^2 + (4,54 - 11,75)^2 + (12,20 - 11,75)^2}{4 - 1} = \\ = \frac{0,90 + 59,44 + 51,98 + 0,2}{3} = 37,51,$$

$$s_4^2 = \frac{(9,09 - 9,65)^2 + (10,21 - 9,65)^2}{2 - 1} = 0,31 + 0,31 = 0,62,$$

b) obliczenie wariancji  $s_F^2$  ze wzoru:

$$s_F^2 = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{0,406 \cdot 1 + 54,55 \cdot 2 + 37,51 \cdot 3 + 0,62 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1} =$$

$$= \frac{0,406 + 109,1 + 112,5 + 0,62}{7} = 31,8,$$

c) obliczenie wariancji  $s^2$  ze wzoru:

$$s^2 = \frac{1}{n^2} s_F^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{l_j} = \frac{1}{11^2} \cdot 31,8 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 0,416,$$

stąd:

$$s = \sqrt{s^2} = 0,645,$$

gdzie  $n$  jest liczbą punktów w macierzy planu eksperymentu.

4. Ustalenie istotności wpływu poszczególnych analizowanych czynników na czynnik wynikowy. Jeżeli spełniona jest nierówność:

$$|a_i| \geq t_{\alpha, f} \cdot s_i,$$

gdzie  $t_{\alpha, f}$  jest wartością krytyczną testu  $t$  Studenta dla poziomu istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  (tablica 15.4), wówczas wpływ analizow-

anego czynnika na czynnik wynikowy jest istotny. Zakładając  $\alpha=0,01$  dla  $f=2+3+4+2=7$ , wartość krytyczna testu  $t$  Studenta (tablica 15.4) wynosi:  $t_{0,01; 7}=3,4995$ . Ponieważ  $|a_1|=3,9 > 3,4995 \cdot 0,645=2,257$  więc  $x_1$  jest czynnikiem istotnym. Również istotny jest czynnik  $x_4$ , gdyż  $a_4=7,77 > 2,257$ .

Po obliczeniu efektów kilku czynników przeprowadza się korekcję wyników doświadczenia przez odjęcie wartości  $B_1=-7,8$  dla wszystkich wyników na poziomie  $x_1+$  oraz odjęcie wartości  $B_4=15,5$  dla wszystkich wyników na poziomie  $x_4+$ .

$$\begin{aligned} \bar{y}_1^I &= 10,8 - (-7,8) = 18,60, & \bar{y}_6^I &= 19,46 - (-7,8) = 27,26, \\ \bar{y}_2^I &= 17,82 - (-7,8) = 25,62, & \bar{y}_9^I &= 4,54 - (-7,8) = 12,34, \\ \bar{y}_5^I &= 16,91 - (-7,8) = 24,71, & \bar{y}_{11}^I &= 12,20 - (-7,8) = 20,00, \end{aligned}$$

$$\bar{y}_2^I = 25,62 - 15,5 = 10,12, \quad \bar{y}_8^I = 27,31 - 15,5 = 11,81,$$

$$\bar{y}_4^I = 42 - 15,5 = 26,50, \quad \bar{y}_{10}^I = 36,0 - 15,5 = 20,50,$$

$$\bar{y}_5^I = 24,71 - 15,5 = 9,21,$$

natomiast pozostałe wyniki pozostawia się bez zmian.

Skorygowane w ten sposób wyniki doświadczenia wpisano do tablicy 6.26, kolumna 12. Dzięki takiej operacji eliminuje się oddziaływanie już wychwyconych czynników. Na podstawie skorygowanych wyników ponownie buduje się wykresy rozproszenia, na których oprócz efektów liniowych umieszcza się efekty podwójnych oddziaływań wzajemnych. Obliczanie efektów i korekcje wyników prowadzi się dopóki rozpatrywane efekty są istotne.

### 6.8. Programy Placketta-Burmana

Programy Placketta-Burmana buduje się na podstawie macierzy Hadamarda [16, 48]. Macierze Hadamarda  $\mathbf{H}$  są macierzami kwadratowymi rzędu  $n$ , w których wszystkie elementy są pierwiastkami z jedności stopnia  $p$ . Macierze Hadamarda spełniają równość:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = n \mathbf{E}_n,$$

gdzie  $\mathbf{E}_n$  jest macierzą jednostkową rzędu  $n$ ,  $\mathbf{H}^T$  jest transpozycją macierzy  $\mathbf{H}$ .

Przykładowo, następująca macierz [48]:

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix},$$

jest macierzą Hadamarda, gdyż:

$$\begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Plany Placketta-Burmana zbudowane według macierzy Hadamarda muszą spełniać następujące warunki:

1. Ogólna liczba doświadczeń  $N$  musi być równa krotności liczby 4, co można zapisać  $N=4k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.
2.  $N \leq 100$  i  $N \neq 92$ .

Plany Placketta-Burmana są planami nasyconymi, tzn. że liczba zrealizowanych doświadczeń jest równa liczbie zmiennych w modelu, przy czym możliwa jest ocena istotności wpływu  $4k-1$  czynników badanych na czynnik wynikowy.

Pierwsze kolumny programów Placketta-Burmana dla  $N=8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44$  i  $48$  mają postać [48]:

$N=8$  + + + - + - -  
 $N=12$  + + - + + + - - - +  
 $N=16$  + + + + - + - + + - - + - - -  
 $N=20$  + + - - + + + + - + - - - - + + -  
 $N=24$  + + + + + - + - + + - - + + - - + - + - - - -  
 $N=26$  Kombinacja bloków A, B, C

A	B	C
C	A	B
B	C	A

A

B

C

+	-	+	+	+	+	-	-	-
+	+	-	+	+	+	-	-	-
-	+	+	+	+	+	-	-	-
-	-	-	+	-	+	+	+	+
-	-	-	+	+	-	+	+	+
-	-	-	-	+	+	+	+	+
+	+	+	-	-	-	+	-	+
+	+	+	-	-	-	+	+	-
+	+	+	-	-	-	-	+	+

-	+	-	-	-	+	-	-	+
-	-	+	+	-	-	+	-	-
+	-	-	-	+	-	-	+	-
-	-	+	-	+	-	-	-	+
+	-	-	-	-	+	+	-	-
-	+	-	+	-	-	-	+	-
-	-	+	-	-	+	-	+	-
+	-	-	+	-	-	-	-	+
-	+	-	-	+	-	+	-	-

+	+	-	+	-	+	+	-	+
-	+	+	+	+	-	+	+	-
+	-	+	-	+	+	-	+	+
+	-	+	+	+	-	+	-	+
+	+	-	-	+	+	+	+	-
-	+	+	+	-	+	-	+	+
+	-	+	+	-	+	+	+	-
+	+	-	+	+	-	-	+	+
-	+	+	-	+	+	+	-	+

$N=32$  - - - - + - + - + + + - + + - - - + + + + - - + + - + - - +

$N=36$  - + - + + + - - - + + + + + - + + + - - + - - - - + - + - + + - - + -

$N=40$  Podwojenie planu dla  $N=20$

$N=44$  + + - - + - + - - + + + - + + + + - - - + - + + + - - - - + - - - + + - + - + + -

$N=48$  + + + + + - + + + + - - + - + - + + + - + - - + + - + + - - - + - + - + + - - - + - - - -

Macierz planu eksperymentu  $X$  wyznacza się wykorzystując przedstawione wyżej pierwsze kolumny planów Placketta-Burmana. W macierzy  $X$  obok kolumn zawierających zmienne rzeczywiste, należy uwzględnić kolumny odpowiadające zmiennym fikcyjnym, które służą do oceny wariancji obliczanych współczynników  $a_j$ . Miejsce kolejnych zmiennych rzeczywistych oraz miejsce zmiennych fikcyjnych w programie ustala się na podstawie tablicy liczb losowych. Przykład wyznaczania macierzy  $X$  dla  $N=8$ , przedstawia tablica 6.29 [48], natomiast tablicę programu Placketta-Burmana dla  $N=8$  – tablica 6.30.

Tablica 6.29

$X =$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
+	-	-	+	-	+	+
+	+	-	-	+	-	+
+	+	+	-	-	+	-
-	+	+	+	-	-	+
+	-	+	+	+	-	-
-	+	-	+	+	+	-
-	-	+	-	+	+	+
-	-	-	-	-	-	-

W macierzy  $X$  zastosowano następujące oznaczenia:

- dodatkowy wiersz zawierający elementy o wartości “-1”,

- pierwsza kolumna tablicy Placketta-Burmana dla  $N=8$ .

Tablica 6.30

$N$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$y_j$
1	+	-	-	+	-	+	+	$y_1$
2	+	+	-	-	+	-	+	$y_2$
3	+	+	+	-	-	+	-	$y_3$
4	-	+	+	+	-	-	+	$y_4$
5	+	-	+	+	+	-	-	$y_5$
6	-	+	-	+	+	+	-	$y_6$
7	-	-	+	-	+	+	+	$y_7$
8	-	-	-	-	-	-	-	$y_8$

W tablicy 6.30 Zmienne  $x_2$ ,  $x_3$  i  $x_5$  są zmiennymi fikcyjnymi, których położenie wyznaczono losowo.

Algorytm ustalania istotności wpływu analizowanych czynników  $x_i$  na czynnik wynikowy  $y$  jest następujący:

1. Obliczenie współczynników  $B_i$  i  $a_i$  ze wzorów:

$$B_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij} y_j}{\frac{N}{2}}, \quad a_i = \frac{B_i}{2},$$



gdzie:

$i$  – numer zmiennej,

$j$  – numer doświadczenia,

$x_{ij}$  – wartość  $i$ -tej zmiennej zakodowanej w  $j$ -tym doświadczeniu (może przyjmować wartości  $+1$  lub  $-1$ , zgodnie z programem badań),

$y_j$  – wartość czynnika wynikowego w  $j$ -tym doświadczeniu,

$N$  – liczba doświadczeń.

2. Wykorzystując zmienne fikcyjne oblicza się wariancję błędów doświadczenia  $s_n^2$ , ze wzoru:

$$s_n^2 = \frac{4k(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_{N-1}^2)}{4k - n - 1},$$

gdzie:

$a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  – współczynniki dla wprowadzonych zmiennych fikcyjnych,

$k$  – liczba zmiennych fikcyjnych w programie,

$n$  – liczba analizowanych zmiennych.

3. Obliczenie wariancji  $s_i^2$  współczynnika  $a_i$  ze wzoru:

$$s_i^2 = \frac{s_n^2}{4k},$$

4. Ustalenie istotności wpływu poszczególnych analizowanych czynników na czynnik wynikowy. Jeżeli spełniona jest nierówność:

$$|a_i| \geq t_{\alpha, f} \cdot s_i,$$

gdzie  $t_{\alpha, f}$  jest wartością krytyczną testu  $t$  Studenta dla poziomu istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody  $f=4k-n-1$  (tablica 15.4),  $s_i = \sqrt{s_i^2}$  jest odchyleniem standardowym dla współczynnika  $a_i$ , wówczas wpływ analizowanego czynnika na czynnik wynikowy jest istotny.

### 6.9. Przykład wyznaczania zbioru czynników na wejściu przy wykorzystaniu programu statycznego randomizowanego, kwadratu grecko-łacińskiego rzędu 5x5

Przedmiotem badań rozpoznawczych jest proces powierzchniowej obróbki nagniataniem z elektrokontaktowym nagrzewaniem. Istotę tego procesu opisano w rozdziale 12. Nagniataniu poddano płytę o wysokości  $H_1$ , która przed nagniataniem posiada chropowatą powierzchnię o regularnym, trójkątnym profilu.

Celem badań rozpoznawczych jest określenie zbioru czynników mających istotny wpływ na czynnik wynikowy, którym jest wysokość  $H$  płyty po nagniataniu. W wyniku analizy jakościowej procesu wstępnie przyjęto, że czynnikami które mogą mieć istotny wpływ na wysokość  $H$  są następujące parametry technologiczne procesu:

- siła nacisku -  $F$ ,
- posuw -  $p$ ,
- natężenie prądu elektrycznego -  $I$ ,
- prędkość -  $v$ .

#### A. Warunki realizacji badań

- Obrabiarka: tokarka typ TSS-150,
- Przyrząd nagniatający typ PTN-1,
- Napięcie prądu elektrycznego w obwodzie wtórnym  $U=2,5$  V,
- Ilość przejść narzędzia  $i=1$ ,
- Materiał rolki: stal SW7M, twardość 62 HRC,
- Promień zaokrąglenia profilu rolki  $r_g=0,3$  mm,
- Średnica rolki  $D=60$  mm,
- Pomocniczy kąt przystawienia  $\alpha_1=1^\circ 30'$ ,
- Średnie arytmetyczne odchylenie profilu od linii średniej powierzchni roboczej krążka  $R_{ag}=0,05$   $\mu\text{m}$ ,
- Rodzaj cieczy chłodząco-smarującego - emulsja 5%,
- Wydatek cieczy chłodząco-smarującej 16  $\text{dm}^3/\text{min}$ ,
- Materiał przedmiotu: stal 55 normalizowana, twardość 240 HB,
- Średnica wałka do nagniatania  $d_1=33$  mm,
- Średnie arytmetyczne odchylenie profilu od linii średniej powierzchni wałka do nagniatania  $R_{a1}=1,9$   $\mu\text{m}$ ,
- Nóż tokarski typ hR 110.17 2020.

**B. Program badań.** Badania rozpoznawcze zrealizowano zgodnie z programem statycznym randomizowanym, kwadratem grecko-łacińskim rzędu 5x5. Kwadrat ten dostosowano do warunków obróbki przez wprowadzenie odpowiednich warunków nagniatania. Program badań rozpoznawczych przedstawia tablica 6.31. Przyjęto trzykrotną powtarzalność badań ( $r=3$ ).

Tablica 6.31

		$x_1=F$ [N]				
		193	867	1541	2215	2889
$x_2=p$ [mm/2πrad]	0,05	Aα	Bβ	Cγ	Dδ	Eε
		$x_3=0,35$ $x_4=300$	$x_3=0,65$ $x_4=450$	$x_3=0,95$ $x_4=600$	$x_3=1,25$ $x_4=375$	$x_3=1,55$ $x_4=525$
	0,18	Bε	Cα	Dβ	Eγ	Aδ
		$x_3=0,65$ $x_4=375$	$x_3=0,95$ $x_4=525$	$x_3=1,25$ $x_4=300$	$x_3=1,55$ $x_4=450$	$x_3=0,35$ $x_4=600$
	0,30	Cδ	Dε	Eα	Aβ	Bγ
		$x_3=0,95$ $x_4=450$	$x_3=1,25$ $x_4=600$	$x_3=1,55$ $x_4=375$	$x_3=0,35$ $x_4=525$	$x_3=0,65$ $x_4=300$
	0,45	Dγ	Eδ	Aε	Bα	Cβ
		$x_3=1,25$ $x_4=525$	$x_3=1,55$ $x_4=300$	$x_3=0,35$ $x_4=450$	$x_3=0,65$ $x_4=600$	$x_3=0,95$ $x_4=375$
	0,56	Eβ	Aγ	Bδ	Cε	Dα
		$x_3=1,55$ $x_4=600$	$x_3=0,35$ $x_4=375$	$x_3=0,65$ $x_4=525$	$x_3=0,95$ $x_4=300$	$x_3=1,25$ $x_4=450$

A, ..., E →  $x_3=I$  [A] (300;375;450;525;600)

α, ..., ε →  $x_4=v$  [m/s] (0,35;0,65;0,95;1,25;1,55)

**C. Wyniki badań.** Wyniki pomiarów parametru chropowatości  $R_a$  jako średnie z trzech pomiarów zestawiono w tablicy 6.32.

Tablica 6.32

$x_2$	$x_1$	193	867	1541	2215	2889	Suma według wierszy $W_w$
0,05	Aα		Bβ	Cγ	Dδ	Eε	
		79,7	61,2	41,8	39,6	17,5	239,8
0,18	Bε		Cα	Dβ	Eγ	Aδ	
		95,9	34,3	97,2	18,9	29,7	276,0
0,3	Cδ		Dε	Eα	Aβ	Bγ	
		47,9	87,6	32,0	27,9	35,1	230,5
0,45	Dγ		Eδ	Aε	Bα	Cβ	
		64,9	36,4	28,3	21,2	10,1	160,1
0,56	Eβ		Aγ	Bδ	Cε	Dα	
		34,6	35,3	31,6	10,8	11,3	123,6

Suma według kolumn $K_k$	323	254,8	230,9	118,4	103,7	Suma ogólna $G=1030,8$
Suma $L_i$	$L_A=200,9$	$L_B=245$	$L_C=144,9$	$L_D=300,6$	$L_E=139,4$	
Suma $L_g$	$L_\alpha=178,5$	$L_\beta=231$	$L_\gamma=196$	$L_\delta=185,2$	$L_\epsilon=240,1$	

**D. Opracowanie wyników badań.** Część wyników obliczeń zawiera tablica 6.30. Dalsze wyniki obliczeń pomocniczych przedstawiono w tablicy 6.33, natomiast analizę wariancji – w tablicy 6.34.

Obliczenia do tablicy 6.33:

$$\frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{p} = \frac{239,8^2 + 276^2 + 230,5^2 + 160,9^2 + 123,6^2}{5} = \frac{227976,06}{5} = 45595,212,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{p} = \frac{323^2 + 254,8^2 + 230,9^2 + 118,4^2 + 103,7^2}{5} = \frac{247339,1}{5} = 49467,82,$$

$$\frac{\sum_{l=A}^E L_l^2}{p} = \frac{200,9^2 + 245^2 + 144,9^2 + 300,6^2 + 139,4^2}{5} = \frac{231174,54}{5} = 46234,908,$$

$$\frac{\sum_{g=\alpha}^{\gamma} L_g^2}{p} = \frac{178,5^2 + 231^2 + 196^2 + 185,2^2 + 240,1^2}{5} = \frac{215586,3}{5} = 43117,26,$$

$$\frac{G^2}{p^2} = \frac{1030,8^2}{25} = \frac{1062548,64}{25} = 42501,946,$$

$$S_w = \frac{\sum_{w=1}^p W_w^2}{p} - \frac{G^2}{p^2} = 45595,212 - 42501,946 = 3093,266,$$

$$S_k = \frac{\sum_{k=1}^p K_k^2}{p} - \frac{G^2}{p^2} = 49467,82 - 42501,946 = 6965,874,$$

$$S_l = \frac{\sum_{l=A}^E L_l^2}{p} - \frac{G^2}{p^2} = 46234,908 - 42501,946 = 3732,962,$$

$$S_g = \frac{\sum_{g=\alpha}^{\gamma} L_g^2}{p} - \frac{G^2}{p^2} = 43117,26 - 42501,946 = 615,314,$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{25} y_n^2 = & 79,7^2 + 61,2^2 + 41,8^2 + 39,6^2 + 17,5^2 + 95,9^2 + 34,3^2 + \\ & + 97,2^2 + 18,9^2 + 29,7^2 + 47,9^2 + 87,6^2 + 32^2 + 27,9^2 + \\ & + 35,1^2 + 64,9^2 + 36,4^2 + 28,3^2 + 21,2^2 + 10,1^2 + 34,6^2 + \\ & + 35,3^2 + 31,6^2 + 10,8^2 + 11,3^2 = 58357,66. \end{aligned}$$

Tablica 6.33

	$\sum_{n=1}^N y_n^2$	$\frac{\sum^2}{p}$	$\frac{G^2}{p^2}$	$S_i = \frac{\sum^2}{p} - \frac{G^2}{p^2}$
Wiersze	58357,66	45595,212	42501,946	$S_w=3093,266$
Kolumny		49467,820		$S_k=6965,874$
Litery łacińskie		46234,908		$S_l=3732,962$
Litery greckie		43117,260		$S_g=615,314$

Tablica 6.34

Źródło zmienności	Suma kwadratów S	Liczba stopni swobody f	Średni kwadrat $s^2$	Wartość testowa F
Wiersze W (siła)	$S_w=3093,266$	$f_w=p-1=4$	$s_w^2 = 773,32$	$F_w = 4,271$
Kolumny K (posuw)	$S_k=6965,874$	$f_k=p-1=4$	$s_k^2 = 1741,46$	$F_k = 9,619$
Litery łacińskie (natężenie prądu)	$S_l=3732,962$	$f_l=p-1=4$	$s_l^2 = 933,24$	$F_l = 5,155$
Litery greckie (prędkość)	$S_g=615,314$	$f_g=p-1=4$	$s_g^2 = 153,82$	$F_g = 0,85$
Błąd	$S_R=S_c-S_w-S_k-S_l-S_g$	$f_R=(p-1) \times (p-3)=8$	$s_R^2 = 181,04$	—
Suma ogólna	$S_c = \sum y^2 - \frac{G^2}{p^2}$	—	—	—

Obliczenia do tablicy 6.34:

- suma kwadratów ogólna:

$$S_c = \sum_{n=1}^{25} y_n^2 - \frac{G^2}{p^2} = 58357,66 - 42501,946 = 15855,714,$$

- suma kwadratów dla błędu:

$$S_R = S_C - S_W - S_K - S_L - S_\alpha = 15855,714 - 3093,266 - 6965,874 - 3732,962 - 615,314 = 1448,298$$

- średni kwadrat:

$$s_w^2 = \frac{3093,266}{4} = 773,32,$$

$$s_k^2 = \frac{6965,874}{4} = 1741,46,$$

$$s_l^2 = \frac{3732,962}{4} = 933,24,$$

$$s_g^2 = \frac{615,314}{4} = 153,82,$$

$$s_R^2 = \frac{1448,298}{8} = 181,037,$$

- wartości testu  $F$ :

$$F_w = \frac{773,32}{181,037} = 4,271,$$

$$F_k = \frac{1741,46}{181,037} = 9,619,$$

$$F_l = \frac{933,24}{181,037} = 5,155,$$

$$F_g = \frac{153,82}{181,037} = 0,85,$$

### E. Analiza wyników badań.

Wartość krytyczna testu  $F$  Fishera-Snedecora dla  $\alpha=0,05$ ,  $r_1=8$  i  $r_2=4$  odczytana z tablic 15.6 wynosi  $F_{0,05;8;4}=3,84$ . Ponieważ  $F_{0,05;8;4} < F_w=4,271$  należy stwierdzić, że siła na wysokość  $H$  wyrobu ma wpływ istotny. Podobnie  $F_{0,05;8;4} < F_k=9,619$ , zatem posuw ma również wpływ istotny. Ponieważ  $F_{0,05;8;4} < F_l=5,155$  prędkość nagniatania ma istotny wpływ na  $H$ . Natomiast wpływ prędkości nagniatania ma wpływ nieistotny na wysokość  $H$  wyrobu, gdyż  $F_{0,05;8;4} > F_g=0,85$ . Zatem jakościowy model matematyczny obiektu badań ma ostateczną postać:

$$H=H(F,p,I).$$

## 6.10. Grupowanie czynników wejściowych

W przypadku dużej liczby czynników wejściowych zastosowanie omówionych wcześniej metod eliminacji może się okazać mało efektywne. Korzystne jest wówczas zmniejszenie liczby zmiennych poprzez ich grupowanie i tworzenie liczb bezwymiarowych, tzw. liczb  $\Pi_i$ . W tym celu wykorzystuje się metodę analizy wymiarowej. W niniejszym punkcie zawarto jedynie podstawowe wiadomości oraz przykłady pozwalające na samodzielne grupowanie czynników wejściowych i tworzenie liczb bezwymiarowych. Wyczerpujący wykład na temat analizy wymiarowej zawierają prace [17, 58].

Metoda analizy wymiarowej polega na tym, że po ustaleniu jakościowej postaci funkcji badanego obiektu, funkcję tę przedstawia się następnie w postaci liczb bezwymiarowych. Przy ustalaniu postaci liczb bezwymiarowych wykorzystuje się następujące założenia:

1. Wymiar każdej wielkości mierzonej lub stałej, w przyjętym układzie np. MKS, daje się zawsze przedstawić jako iloczyn potęg zasadniczych wymiarów, tj. długości  $M$  (1 m), masy  $K$  (1 kg) i czasu  $S$  (1 s). Przykładowo siła  $[kgm/s^2] \equiv [M^1 K^1 S^{-2}]$ , prędkość  $[m/s] \equiv [M^1 K^0 S^{-1}]$ , itd.
2. Wielkości wejściowe muszą być zmiennymi niezależnymi.
3. Każde równanie zawierające  $n$  zmiennych niezależnych daje się przedstawić przy pomocy  $(n-r)$  bezwymiarowych modułów, gdzie  $r$  jest liczbą zasadniczych wymiarów użytego układu. Przykładowo funkcja  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$  zawierająca 6 wielkości wejściowych, daje się w układzie MKS (3 wymiary zasadnicze) przedstawić przy pomocy  $6-3=3$  modułów bezwymiarowych, jako:  $\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ . Jest to tzw. teoremat  $\Pi$  Buckinghama.

Algorytm postępowania zostanie zilustrowany na przykładzie. Zadanie polega na wyznaczeniu postaci funkcji opisującej chropowatość powierzchni po obróbce nagniataniem z prądem. Chropowatość wtórna określona parametrem wysokości chropowatości według dziesięciu punktów profilu  $R_{zII}$  jest funkcją następujących czynników:

$$R_{zII} = f(C_m, R_{zI}, I, P, p, V, R, HB, i), \quad (6.1)$$

gdzie:

- $C_m$  - stała materiałowa,
- $R_{zI}$  - wysokość chropowatości według dziesięciu punktów profilu powierzchni przed nagniataniem (chropowatość pierwotna),
- $I$  - natężenie prądu elektrycznego,
- $P$  - siła nacisku narzędzia,
- $p$  - posuw narzędzia,
- $V$  - prędkość nagniatania,



- HB - twardość materiału obrabianego,  
 R - geometria narzędzia,  
 i - ilość przejść narzędzia.

Ponieważ ilość przejść narzędzia  $i$  nie posiada jednostki w układzie MKS wyłączamy ją poza nawias obliczając dla każdego przejścia (oddzielnie) chropowatość wtórną:

$$R_{zII} = f[(C_m, R_{zI}, I, P, p, V, R, HB)i_{kl}], \quad i = i_{kl} = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.2)$$

Określamy czynniki liniowo niezależne:

$$F = \Phi(\underbrace{R_{zI}, I, P}_{\text{czynniki niezależne - A}}; \underbrace{C_m, p, V, R, HB}_{\text{czynniki liniowo zależne - B}})i_{kl}, \quad i = i_{kl} = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.3)$$

Wyrażamy jednostki czynników we wzorze (6.3) w układzie MKS:

$C_m$	-	[stała]	=	$[M^0 K^0 S^0]$ ,
$R_{zI}$	-	$[\mu\text{m}]$	=	$[M^1 K^0 S^0]$ ,
$R_{zII}$	-	$[\mu\text{m}]$	=	$[M^1 K^0 S^0]$ ,
$I$	-	[A]	=	$[M^{1/2} K^{1/2} S^{-1}]$ ,
$P$	-	[kG]	=	$[M^1 K^1 S^{-2}]$ ,
$p$	-	[mm/obr]	=	$[M^1 K^0 S^0]$ ,
$V$	-	[mm/min]	=	$[M^1 K^0 S^{-1}]$ ,
$R$	-	$[\mu\text{m}]$	=	$[M^1 K^0 S^0]$ ,
HB	-	[kG/mm <sup>2</sup> ]	=	$[M^{-2} K^1 S^0]$ ,
$i$	-	[-]	=	$[M^0 K^0 S^0]$ ,

Sprawdzamy, czy przyjęte czynniki  $R_{zI}$ ,  $V$  i  $P$  są rzeczywiście liniowo niezależne. W tym celu układa się wyznacznik stopnia trzeciego ze względu na ich jednostki w układzie MKS i oblicza jego wartość:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad (6.4)$$

Jeżeli wartość wyznacznika jest równa zero, wówczas czynniki są liniowo zależne. W analizowanym przykładzie czynniki niezależne są dobrane prawidłowo, gdyż wartość wyznacznika wynosi jeden.

Następnie wyznacza się pozostałe czynniki jako następujące funkcje czynników niezależnych:

$$\begin{aligned}
 R &= \Pi_1 \cdot P^{a_{11}} \cdot V^{a_{12}} \cdot R_{zI}^{a_{13}}, \\
 I &= \Pi_2 \cdot P^{a_{21}} \cdot V^{a_{22}} \cdot R_{zI}^{a_{23}}, \\
 HB &= \Pi_3 \cdot P^{a_{31}} \cdot V^{a_{32}} \cdot R_{zI}^{a_{33}}, \\
 p &= \Pi_4 \cdot P^{a_{41}} \cdot V^{a_{42}} \cdot R_{zI}^{a_{43}}, \\
 C_m &= \Pi_5 \cdot P^{a_{51}} \cdot V^{a_{52}} \cdot R_{zI}^{a_{53}}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Dla każdego wiersza w układzie równań (6.5) oblicza się wartości wykładników. W tym celu podstawia się dla każdego czynnika jego jednostki w układzie MKS:

- dla R:

$$\begin{aligned}
 M^1 K^0 S^0 &= (M^1 K^1 S^{-2})^{a_{11}} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{a_{12}} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{a_{13}}, \\
 M^1 K^0 S^0 &= M^{a_{11}+a_{12}+a_{13}} \cdot K^{a_{11}} \cdot S^{-2a_{11}-a_{12}},
 \end{aligned}$$

i buduje odpowiedni układ równań ze względu na poszukiwane wykładniki:

$$\begin{cases}
 1 = a_{11} + a_{12} + a_{13}, \\
 0 = a_{11}, \\
 0 = -2a_{11} - a_{12},
 \end{cases}$$

stąd:  $a_{11}=0$ ;  $a_{12}=0$ ;  $a_{13}=1$ . Zatem pierwszy wzór składnikowy czynnika zależnego R od czynników niezależnych ma postać:

$$R = \Pi_1 \cdot R_{zI}. \tag{6.6}$$

Sprawdzamy poprawność jednostek dla obu stron równania:

$$\begin{aligned}
 M^1 K^0 S^0 &= M^1 K^0 S^0, \\
 L &= P.
 \end{aligned}$$

- dla I:

$$\begin{aligned}
 M^{1/2} K^{1/2} S^{-1} &= (M^1 K^1 S^{-2})^{a_{21}} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{a_{22}} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{a_{23}}, \\
 M^{1/2} K^{1/2} S^{-1} &= M^{a_{21}+a_{22}+a_{23}} \cdot K^{a_{21}} \cdot S^{-2a_{21}-a_{22}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = a_{21} + a_{22} + a_{23}, \\ \frac{1}{2} = a_{21}, \\ -1 = -2a_{21} - a_{22}, \end{cases}$$

stąd:  $a_{21}=0,5$ ;  $a_{22}=0$ ;  $a_{23}=0$ . Zatem drugi wzór składnikowy czynnika zależnego I od czynników niezależnych ma postać:

$$I = \Pi_2 \cdot P^{1/2} = \Pi_2 \cdot \sqrt{P}. \quad (6.7)$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} M^{1/2} K^{1/2} S^{-1} &= [M^1 K^1 S^{-2}]^{1/2}, \\ L &= P. \end{aligned}$$

• dla HB:

$$\begin{aligned} M^{-2} K^1 S^0 &= (M^1 K^1 S^{-2})^{a_{31}} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{a_{32}} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{a_{33}}, \\ M^{-2} K^1 S^0 &= M^{a_{31}+a_{32}+a_{33}} \cdot K^{a_{31}} \cdot S^{-2a_{31}-a_{32}}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2 = a_{31} + a_{32} + a_{33}, \\ 1 = a_{31}, \\ 0 = -2a_{31} - a_{32}, \end{cases}$$

stąd:  $a_{31}=1$ ;  $a_{32}=-2$ ;  $a_{33}=-1$ . Zatem trzeci wzór składnikowy czynnika zależnego HB od czynników niezależnych ma postać:

$$HB = \Pi_3 \cdot P \cdot V^{-2} \cdot R_{z1}^{-1} = \frac{\Pi_3 \cdot P}{R_{z1} \cdot V^2}. \quad (6.8)$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} M^{-2} K^1 S^0 &= [M^1 K^1 S^{-2}]^1 \cdot [M^1 K^0 S^{-1}]^{-2} \cdot [M^1 K^0 S^0]^{-1} = M^{-2} K^1 S^0, \\ L &= P. \end{aligned}$$

- dla p:

$$M^1 K^0 S^0 = (M^1 K^1 S^{-2})^{a_{41}} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{a_{42}} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{a_{43}},$$

$$M^1 K^0 S^0 = M^{a_{41} + a_{42} + a_{43}} \cdot K^{a_{41}} \cdot S^{-2a_{41} - a_{42}},$$

$$\begin{cases} 1 = a_{41} + a_{42} + a_{43}, \\ 0 = a_{41}, \\ 0 = -2a_{41} - a_{42}, \end{cases}$$

stąd:  $a_{41}=0$ ;  $a_{42}=0$ ;  $a_{43}=1$ . Zatem czwarty wzór składnikowy czynnika zależnego p od czynników niezależnych ma postać:

$$p = \Pi_4 \cdot R_{z1}. \quad (6.9)$$

Sprawdzenie:

$$M^1 K^0 S^0 = [M^1 K^0 S^0]^1,$$

$$L = P.$$

- dla  $C_m$ :

$$M^0 K^0 S^0 = (M^1 K^1 S^{-2})^{a_{51}} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{a_{52}} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{a_{53}},$$

$$M^0 K^0 S^0 = M^{a_{51} + a_{52} + a_{53}} \cdot K^{a_{51}} \cdot S^{-2a_{51} - a_{52}},$$

$$\begin{cases} 0 = a_{51} + a_{52} + a_{53}, \\ 0 = a_{51}, \\ 0 = -2a_{51} - a_{52}, \end{cases}$$

stąd:  $a_{51}=0$ ;  $a_{52}=0$ ;  $a_{53}=0$ . Zatem piąty wzór składnikowy czynnika zależnego  $C_m$  od czynników niezależnych ma postać:

$$C_m = \Pi_5. \quad (6.10)$$

Wyznaczenie wykładników przy argumentach liniowo niezależnych. Równanie (6.3) przyjmuje teraz następującą postać:

$$R_{zII} = \varphi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5) \cdot P^{c1} \cdot V^{c2} \cdot R_{zI}^{c3}. \quad (6.11)$$

Tworzymy odpowiedni układ równań dla  $R_{zII}$ :

$$M^1 K^0 S^0 = (M^1 K^1 S^{-2})^{c_1} \cdot (M^1 K^0 S^{-1})^{c_2} \cdot (M^1 K^0 S^0)^{c_3},$$

$$M^1 K^0 S^0 = M^{c_1+c_2+c_3} \cdot K^{c_1} \cdot S^{-2c_1-c_2},$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 0 = c_1, \\ 0 = -2c_1 - c_2, \end{cases}$$

stąd:  $c_1=0$ ;  $c_2=0$ ;  $c_3=1$ . Zatem wzór (6.11) ma postać:

$$R_{zII} = \varphi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5) \cdot R_{zI},$$

lub

(6.12)

$$\frac{R_{zII}}{R_{zI}} = \varphi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5).$$

Liczby bezwymiarowe we wzorze (6.12) otrzyma się z wyprowadzonych już wzorów składnikowych (6.6)÷(6.10) otrzymując:

$$\Pi_1 = \frac{R}{R_{zI}}; \quad \Pi_2 = \frac{I}{\sqrt{P}}; \quad \Pi_3 = \frac{HB \cdot R_{zI} \cdot V^2}{P}; \quad \Pi_4 = \frac{P}{R_{zI}}; \quad \Pi_5 = C_m. \quad (6.13)$$

Wobec tego wzór (6.12) przyjmuje postać:

$$\frac{R_{zII}}{R_{zI}} = \varphi \left[ \left( \frac{R}{R_{zI}} \right), \left( \frac{I}{\sqrt{P}} \right), \left( \frac{HB \cdot R_{zI} \cdot V^2}{P} \right), \left( \frac{P}{R_{zI}} \right), C_m \right]. \quad (6.14)$$

Przyjmując klasę modelu matematycznego w postaci modelu potęgowego (postać multiplikatywna) (rozd. 7) otrzymuje się ostatecznie:

$$\frac{R_{zII}}{R_{zI}} = \left( \frac{R}{R_{zI}} \right)^{b_1} \cdot \left( \frac{I}{\sqrt{P}} \right)^{b_2} \cdot \left( \frac{HB \cdot R_{zI} \cdot V^2}{P} \right)^{b_3} \cdot \left( \frac{P}{R_{zI}} \right)^{b_4} \cdot C_m. \quad (6.15)$$

Zauważmy, że równanie (6.2) zawierające osiem czynników przedstawiono za pomocą pięciu niezależnych modułów w równaniu (6.15). W celu określenia wartości wykładników potęg w tym równaniu należy przeprowadzić odpowiednie badania eksperymentalne. Zagadnienia te będą przedmiotem rozważań w następujących rozdziałach.

# 7

## MODEL MATEMATYCZNY OBIEKTU BADAŃ

---

W niniejszym rozdziale omówiono zagadnienia doboru postaci modelu matematycznego do opisu badanego obiektu badań. Dobór odpowiedniego modelu matematycznego jest bardzo ważny. Zależy od niego nie tylko postać macierzy planu eksperymentu i zastosowanie odpowiedniej procedury optymalizacji do obliczenia współczynników równania, a zatem i kosztowność badań, ale również możliwości dalszej analizy badanego obiektu, określania jego stanu optymalnego, symulacji i wnioskowania, na podstawie otrzymanego równania regresji.

Pod pojęciem modelu matematycznego obiektu badań (skrót: MMOB) rozumie się opis matematyczny zależności o charakterze przyczynowo-skutkowym występujących między wielkościami (fizycznymi, chemicznymi, biologicznymi, ekonomicznymi itp.) określającymi obiekt badań [51].

W omawianych w niniejszej pracy statystycznych metodach identyfikacji stosuje się jedynie funkcje aproksymujące liniowe ze względu na poszukiwane współczynniki  $b_j$ :

$$\hat{Y} = F(\bar{x}_i; b_j), \quad i=1, \dots, K, \quad j=1, \dots, L, \quad (7.1)$$

lub funkcje które można przekształcić do postaci funkcji liniowych ze względu na współczynniki  $b_j$ :

$$\hat{Y} = b_1' f_1(\bar{x}) + b_2' f_2(\bar{x}) + \dots + b_j' f_j(\bar{x}) + \dots + b_L' f_L(\bar{x}), \quad (7.2)$$

gdzie:

$\hat{Y}$  - wielkość wyjściowa,

$\bar{x}_i$  - wielkości wejściowe, zmienne niezależne ( $i=1, 2, \dots, K$ ),

$K$  - liczba zmiennych wejściowych,

$b_j$  - parametry (współczynniki) funkcji ( $j=1, 2, \dots, L$ ),

$L$  - liczba parametrów funkcji,

$b_j'$  - współczynniki zlinearyzowanej funkcji aproksymującej,

$f_j(\bar{x})$  - funkcje składnikowe zmiennych niezależnych  $\bar{x}_i$ ;  $i=1,2, \dots, K$ ,  
 $j=1,2, \dots, L$ .

Zajmować się będziemy takimi przypadkami, w których nieznaną jest zarówno klasa jak i budowa modelu matematycznego. Zatem niniejszy rozdział nie dotyczy zagadnień opisanych w rozdziale 11, gdyż założono tam znajomość postaci modelu matematycznego.

Najpierw przedstawione zostaną najważniejsze modele matematyczne stosowane do opisu obiektu badań będące liniową kombinacją nieznanych współczynników oraz modele nieliniowe ze względu na te współczynniki i sposoby ich linearyzacji, a następnie podane zostaną metody normowania i renormowania modeli oraz zasady wyboru najlepszego modelu.

## 7.1. Modele liniowe ze względu na współczynniki

### 7.1.1. Wielomiany algebraiczne liniowe

**Wielomian algebraiczny liniowy bez interakcji**, tj. bez składników zawierających iloczyny zmiennych wejściowych. Wielomian algebraiczny liniowy:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i, \quad (7.3)$$

jest najprostszą postacią modelu (7.1), z  $(L=K+1)$  nieznanymi współczynnikami  $b_0, b_i, i = 1, \dots, K$ , gdzie  $K$  jest liczbą zmiennych wejściowych obiektu badań. Przykładowo dla  $K=4$  ( $L=5$ ) otrzymuje się:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_4 \bar{x}_4.$$

**Wielomian algebraiczny liniowy z interakcjami** (zawierający składniki będące iloczynami zmiennych wejściowych) ma postać:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j < \dots < l < n}}^K b_{ij,\dots,ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l. \quad (7.4)$$

z nieznanymi współczynnikami  $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ij,\dots,ln}, i,j, \dots, n=1, \dots, K, i < j < \dots < l < n$ . Liczba interakcji nie może być wyższa od liczby zmiennych. Przykładowo dla dwóch zmiennych  $K=2$  ( $L=4$ ) będzie to wielomian liniowy zawierający interakcję (iloczyn) pierwszego i drugiego czynnika wejściowego:



$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2,$$

zaś dla trzech zmiennych  $K=3$  ( $L=7$ ):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + b_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{123} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

wielomian liniowy może zawierać także iloczyny dwóch i trzech czynników badanych.

### 7.1.2. Wielomiany algebraiczne kwadratowe

Postać wielomianu algebraicznego kwadratowego zależy od liczby zmiennych i od liczby występujących interakcji między tymi zmiennymi.

**Wielomian algebraiczny liniowo-kwadratowy bez interakcji.** Model ten ma postać:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2, \quad (7.5)$$

i zawiera  $L=2K+1$  nieznanymi współczynnikami  $b_0, b_i, b_{ii}, i=1, 2, \dots, K$ .

**Wielomian algebraiczny liniowo-kwadratowy z interakcjami.** Model (7.5) można uzupełnić interakcjami podwójnymi, potrójnymi, poczwórnymi itd. Maksymalna liczba interakcji nie może być większa od liczby zmiennych.

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j < \dots < l < n}}^K b_{ij\dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n. \quad (7.6)$$

Przykładowo wielomian algebraiczny liniowo-kwadratowy dla trzech zmiennych z podwójnymi i potrójnymi interakcjami ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^K b_{ijk} \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k = \\ &= b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \\ &+ b_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{123} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{11} \bar{x}_1^2 + b_{22} \bar{x}_2^2 + b_{33} \bar{x}_3^2. \end{aligned}$$

Natomiast dla czterech zmiennych wielomian liniowo-kwadratowy może zawierać 6 interakcji dwóch zmiennych, 3 interakcje trzech zmiennych i jedną interakcję czterech zmiennych, więc:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^K b_{ijk} \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j < k < l}}^K b_{ijkl} \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k \bar{x}_l = \\ &= b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_4 \bar{x}_4 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + b_{14} \bar{x}_1 \bar{x}_4 + \\ &+ b_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{24} \bar{x}_2 \bar{x}_4 + b_{34} \bar{x}_3 \bar{x}_4 + b_{123} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{124} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \\ &+ b_{234} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + b_{1234} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + b_{11} \bar{x}_1^2 + b_{22} \bar{x}_2^2 + b_{33} \bar{x}_3^2 + b_{44} \bar{x}_4^2. \end{aligned}$$

Wielomian algebraiczny liniowo-kwadratowy, zawierający podwójne interakcje jest najczęściej spotykaną postacią modelu aproksymującego nieliniowe obiekty badań i dla  $K$  zmiennych wejściowych ma postać:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad (7.7)$$

w której występuje  $L=5(K-1)$  nieznanymi współczynnikami  $b_0$ ,  $b_{ii}$ ,  $b_{ij}$ . Przykładowo dla  $K=3$  ( $L=10$ ) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \\ &+ b_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{11} \bar{x}_1^2 + b_{22} \bar{x}_2^2 + b_{33} \bar{x}_3^2. \end{aligned}$$

### 7.1.3. Wielomiany algebraiczne stopnia $m$

W ogólnym przypadku jest to wielomian  $K$  zmiennych,  $m$ -tego stopnia, zawierającym podwójne, potrójne, ...,  $K$ -te interakcje, postaci:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots + \sum_{i=1}^K b_{ii\dots ii} \bar{x}_i^m + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j < \dots < l < n}}^K b_{ij\dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n, \end{aligned} \quad (7.8)$$

w którym występuje  $L$  nieznanymi współczynników  $b_0, b_{ii}, b_{ij}, \dots, b_{ii \dots ii}, b_{ij \dots ln}, i, j, \dots, l, n=1, \dots, K, i < j < \dots < l < n$ .

Model (7.8) łatwo jest uprościć do postaci szczególnych. Przykładowo dla  $m=2$  otrzymuje się postać kwadratową z interakcjami – wzór (7.6), dla  $m=2$  z pominięciem interakcji otrzymuje się wielomian liniowo-kwadratowy bez interakcji – wzór (7.5), pomijając potęgi otrzymuje się wielomian liniowy z interakcjami – wzór (7.4), natomiast pomijając interakcje i składniki zawierające potęgi otrzymuje się model liniowy bez interakcji – wzór (7.3).

#### 7.1.4. Funkcja logarytmiczna i trygonometryczna

Nieliniowy obiekt badań może być opisany za pomocą:

a) **funkcji logarytmicznej** o postaci ( $L=K+1$ ):

$$\hat{Y} = b_0 + \ln(\bar{x}_1) + b_2 \ln(\bar{x}_2) + \dots + b_K \ln(\bar{x}_K), \quad (7.9)$$

b) **funkcji trygonometrycznej**, które mogą być definiowane indywidualnie przez badacza, np.:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \sin(a_1 \bar{x}_1) + b_2 \cos(a_2 \bar{x}_1) + \dots + b_{L-1} \sin(a_{L-2} \bar{x}_K) + b_L \sin(a_{L-1} \bar{x}_K), \quad L = 2K + 1 \quad (7.10)$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 [1 + a_1 \sin(a_2 \bar{x}_1)] \sin(a_3 \bar{x}_1), \quad L = 2, \quad (7.11)$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \sin\{\bar{x}_1 [1 + a_1 \cos(a_2 \bar{x}_1)]\}, \quad L = 2, \quad (7.12)$$

gdzie  $b_0, b_1, b_{L-1}, b_L$  są nieznanymi współczynnikami, natomiast  $a_1, a_2, \dots, a_{L-2}, a_{L-1}$  są liczbami rzeczywistymi.

## 7.2. Modele nieliniowe ze względu na współczynniki

### 7.2.1. Funkcja wykładnicza

Modelem matematycznym nieliniowego obiektu badań jest funkcja wykładnicza w postaci ogólnej:

$$\hat{Y} = e^{\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)} = \exp[\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)], \quad (7.13)$$

gdzie  $\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$  jest wykładnikiem, który może mieć następującą postać:

- wielomianu algebraicznego liniowego K zmiennych bez interakcji – wzór (7.3),
- wielomianu algebraicznego liniowego K zmiennych z interakcjami – wzór (7.4),
- wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego K zmiennych bez interakcji – wzór (7.5),
- wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego K zmiennych z interakcjami – wzór (7.6),
- wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego K zmiennych z podwójnymi interakcjami – wzór (7.7),
- wielomianu K zmiennych, m-tego stopnia, zawierającym podwójne, potrójne, ..., K-te interakcje – wzór (7.8).

W przypadku, gdy wykładnikiem jest wielomian K zmiennych stopnia m, wzór (7.13) przyjmuje następującą postać ogólną:

$$\hat{Y} = \exp(b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots + \sum_{i=1}^K b_{ii\dots ii} \bar{x}_i^m + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j < \dots < l < n}}^K b_{ij\dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n), \quad (7.14)$$

którą można, w sposób opisany w punkcie 7.1.3, sprowadzić do postaci szczególnych.

### 7.2.2. Funkcja potęgowa i ułamkowa

Nieliniowy obiekt badań może być opisany za pomocą:

- a) **funkcji potęgowej** (zwanej iloczynem potęgowym, lub funkcją multiplikatywną) K zmiennych ( $L=K+1$ ):

$$\hat{Y} = b_0' \bar{x}_1^{b_1} \bar{x}_2^{b_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_K^{b_K} = b_0' \sum_{i=1}^K \bar{x}_i^{b_i} = \sum_{i=0}^K \bar{x}_i^{b_i}, \quad (7.15)$$

- b) **funkcji ułamkowej** w postaci odwrotności wielomianu:

$$\hat{Y} = [\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)]^{-1} = \frac{1}{\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)}, \quad (7.16)$$

gdzie  $\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$  jest dzielnikiem - wielomianem algebraicznym, który może mieć następującą postać (por. wzór (7.13):

- 1) wielomianu algebraicznego liniowego  $K$  zmiennych bez interakcji – wzór (7.3),
- 2) wielomianu algebraicznego liniowego  $K$  zmiennych z interakcjami – wzór (7.4),
- 3) wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego  $K$  zmiennych bez interakcji – wzór (7.5),
- 4) wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego  $K$  zmiennych z interakcjami – wzór (7.6),
- 5) wielomianu algebraicznego liniowo-kwadratowego  $K$  zmiennych z podwójnymi interakcjami – wzór (7.7),
- 1) wielomianu  $K$  zmiennych,  $m$ -tego stopnia, zawierającym podwójne, potrójne, ...,  $K$ -te interakcje – wzór (7.8).

W przypadku, gdy  $\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$  jest wielomianem algebraicznym  $K$  zmiennych stopnia  $m$  według wzoru (7.8) wówczas wzór (7.16) przyjmuje postać ogólną. Wielomian według wzoru (7.8) można, w sposób opisany w punkcie 7.1.3, sprowadzić do postaci szczególnych. Przykładowo, gdy  $\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$  jest wielomianem algebraicznym liniowo-kwadratowym,  $K$  zmiennych bez interakcji, wzór (7.16) ma postać:

$$\hat{Y} = [b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2]^{-1}.$$

W analogiczny sposób otrzymuje się pozostałe postacie szczególne wielomianu algebraicznego  $\bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$ , tj. przypadki 1)÷5).

### 7.2.3. Funkcje hybrydowe

Nieliniowy obiekt badań może być również opisany za pomocą funkcji hybrydowych, będących połączeniem wielu opisanych wcześniej funkcji. Przykładowymi funkcjami hybrydowymi są:

a) **funkcje ułamkowo-wykładnicze** ( $L=2K+1$ ):

$$\hat{Y} = \frac{1}{b_1 \exp(b_2 \bar{x}_1) \exp(b_2 \bar{x}_1) \cdot \dots \cdot \exp(b_L \bar{x}_K)}, \quad L=K+1 \quad (7.17)$$

$$\hat{Y} = \frac{a}{1 + b_1 \exp(-b_2 \bar{x}_1)}, \quad L=2 \quad (7.18)$$

$$\hat{Y} = \frac{a_1}{1 + a_2 \exp(-b_1 \bar{x}_1)}, \quad L=1 \quad (7.19)$$

$$\hat{Y} = \frac{a_1}{a_2 \exp(\bar{Y}_1)}, \quad (7.20)$$

gdzie  $a$ ,  $a_1$  i  $a_2$  są liczbami dodatnimi,  $\bar{Y}_1$  jest wykładnikiem w postaci wielomianu algebraicznego według wzorów (7.3)-(7.8).

b) funkcja potęgowo-wykładnicza ( $L=2K+1$ ):

$$\hat{Y} = b_0 \bar{x}_1^{b_1} \bar{x}_2^{b_2} \cdot \dots \cdot \bar{x}_K^{b_K} \cdot \exp(b_{K+1} \bar{x}_1) \cdot \dots \cdot \exp(b_L \bar{x}_K). \quad (7.21)$$

### 7.3. Przekształcanie funkcji nieliniowych ze względu na współczynniki

W przypadku, gdy obiekt badań jest opisany za pomocą funkcji nieliniowych ze względu na współczynniki, konieczne jest doprowadzenie ich do postaci liniowej ze względu na te współczynniki. W niniejszym podpunkcie podane zostaną sposoby linearyzacji funkcji nieliniowych, opisanych w pkt. 7.2.

#### 7.3.1. Linearyzacja funkcji wykładniczej

Linearyzacji funkcji wykładniczej o postaci (7.13) dokonuje się poprzez logarytmowanie otrzymując:

$$\ln(\hat{Y}) = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j). \quad (7.22)$$

Wprowadzając nową zmienną:

$$\hat{Y}' = \ln(\hat{Y}), \quad (7.23)$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki  $b_j$ :

$$\hat{Y}' = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j), \quad (7.24)$$

gdyż  $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1(b_j, \bar{x}_i)$  jest wielomianem algebraicznym według wzorów (7.3)÷(7.8) liniowym ze względu na współczynniki  $b_j$ .

Przykładowo, gdy funkcja  $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j)$  ma postać wielomianu stopnia  $m$  według wzoru (7.8), to funkcja wykładnicza według wzoru (7.13) po zlinearyzowaniu ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{Y}' = \ln \hat{Y} = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j) = & b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots \\ & \dots + \sum_{i=1}^K b_{ii\dots ii} \bar{x}_i^m + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j < \dots < l < n}}^K b_{ij\dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n. \end{aligned}$$

### 7.3.2. Linearyzacja funkcji potęgowej

Funkcję potęgową według wzoru (7.15) linearyzuje się poprzez logarytmowanie otrzymując:

$$\ln \hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \ln \bar{x}_i. \quad (7.25)$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych:

$$\ln \hat{Y} = \hat{Y}', \quad (7.26)$$

$$\bar{x}'_i = \ln \bar{x}_i,$$

otrzymuje się równanie liniowe ze względu na współczynniki  $b_i$ :

$$\hat{Y}' = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}'_i. \quad (7.27)$$

### 7.3.3. Linearyzacja funkcji ułamkowej

W celu linearyzacji funkcji ułamkowej według wzoru (7.16) najpierw oblicza się odwrotność tej funkcji otrzymując:

$$[\hat{Y}]^{-1} = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j), \quad (7.28)$$



potem stosując następujące podstawienie:

$$\hat{Y}' = [\hat{Y}]^{-1}, \quad (7.29)$$

doprowadza się ją do postaci liniowej ze względu na współczynniki  $b_j$ :

$$\hat{Y}' = \bar{Y}_1(\bar{x}_i; b_j). \quad (7.30)$$

### 7.3.4. Linearyzacja funkcji hybrydowych

**Linearyzacja funkcji ułamkowo-wykładniczych.** Przekształcanie funkcji ułamkowo-wykładniczej zależy od jej postaci. Funkcję według wzoru (7.17) przekształca się następująco:

a) obliczenie odwrotności funkcji (7.17):

$$[\hat{Y}]^{-1} = \frac{1}{\hat{Y}} = b_1 \exp(b_2 \bar{x}_1) \exp(b_2 \bar{x}_1) \cdot \dots \cdot \exp(b_L \bar{x}_K), \quad (7.31)$$

b) logarytmowanie funkcji (7.31):

$$\ln([\hat{Y}]^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{\hat{Y}}\right) = \ln b_1 + b_2 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_1 + \dots + b_L \bar{x}_K, \quad (7.32)$$

c) stosując w równaniu (7.32) podstawienie:

$$\begin{aligned} \hat{Y}' &= \ln([\hat{Y}]^{-1}), \\ b'_1 &= \ln b_1, \end{aligned} \quad (7.33)$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki:

$$\hat{Y}' = b'_1 + b_2 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_1 + \dots + b_L \bar{x}_K. \quad (7.34)$$

Funkcję  $\hat{Y} = \frac{a}{1 + b_1 \exp(-b_2 \bar{x}_1)}$  według wzoru (7.18) przekształca się następująco:

a) przekształcenie funkcji (7.18) do postaci:

$$\frac{\hat{Y}}{a} = \frac{1}{1 + b_1 \exp(-b_2 \bar{x}_1)}, \quad (7.35)$$

b) obliczenie odwrotności funkcji (7.35):

$$\frac{a}{\hat{Y}} = 1 + b_1 \exp(-b_2 \bar{x}_1), \quad (7.36)$$

c) przekształcenie funkcji (7.36) do postaci:

$$\frac{a}{\hat{Y}} - 1 = b_1 \exp(-b_2 \bar{x}_1), \quad (7.37)$$

d) logarytmowanie funkcji (7.37):

$$\ln \left[ \frac{a}{\hat{Y}} - 1 \right] = \ln b_1 - b_2 \bar{x}_1, \quad (7.38)$$

e) stosując w funkcji (7.38) podstawienie:

$$\hat{Y}' = \ln \left[ \frac{a}{\hat{Y}} - 1 \right], \quad (7.39)$$

$$b'_1 = \ln b_1,$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki  $b'_1, b_2$ :

$$\hat{Y}' = b'_1 - b_2 \bar{x}_1. \quad (7.40)$$

Funkcję ułankowo-wykładniczą o postaci  $\hat{Y} = \frac{a_1}{1 + a_2 \exp(-b_1 \bar{x}_1)}$  (wzór (7.19)) przekształca się następująco:

a) przekształcenie funkcji (7.19) do postaci:

$$\frac{\hat{Y}}{a_1} = \frac{1}{1 + a_2 \exp(-b_1 \bar{x}_1)}, \quad (7.41)$$

b) obliczenie odwrotności funkcji (7.41):

$$\frac{a_1}{\hat{Y}} = 1 + a_2 \exp(-b_1 \bar{x}_1), \quad (7.42)$$

c) przekształcenie funkcji (7.42) do postaci:

$$\frac{a_1}{\hat{Y}} - 1 = a_2 \exp(-b_1 \bar{x}_1), \quad (7.43)$$

d) logarytmowanie funkcji (7.43):

$$\ln \left[ \frac{a_1}{\hat{Y}} - 1 \right] = \ln a_2 - b_1 \bar{x}_1, \quad (7.44)$$

e) stosując w równaniu (7.44) podstawienie:

$$\begin{aligned} \hat{Y}' &= \ln \left[ \frac{a_1}{\hat{Y}} - 1 \right], \\ b_0 &= \ln a_2, \end{aligned} \quad (7.45)$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki  $b_0, b_1$ :

$$\hat{Y}' = b_0 - b_1 \bar{x}_1. \quad (7.46)$$

Funkcję ułamkowo-wykładniczą o postaci  $\hat{Y} = \frac{a_1}{a_2 \exp(\bar{Y}_1)}$  (wzór (7.20))

przekształca się następująco:

a) przekształcenie funkcji (7.20) do postaci:

$$\frac{a_2 \hat{Y}}{a_1} = \frac{1}{\exp(\bar{Y}_1)}, \quad (7.47)$$

b) obliczenie odwrotności funkcji (7.47):

$$\frac{a_1}{a_2 \hat{Y}} = \exp(\bar{Y}_1), \quad (7.48)$$

c) logarytmowanie funkcji (7.48):

$$\ln \left( \frac{a_1}{a_2 \hat{Y}} \right) = \bar{Y}_1, \quad (7.49)$$

d) stosując w równaniu (7.49) podstawienie:

$$\hat{Y}' = \ln \left( \frac{a_1}{a_2 \hat{Y}} \right), \quad (7.50)$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki  $b_j$ :

$$\hat{Y}' = \hat{Y} = \text{Wielomian algebraiczny według wzorów (7.3)-(7.8)}. \quad (7.51)$$

**Przekształcanie funkcji potęgowo-wykładniczej.** Linearyzacji funkcji według wzoru (7.21) dokonuje się poprzez logarytmowanie otrzymując:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{Y}) = \ln b_0 + b_1 \ln \bar{x}_1 + b_2 \ln \bar{x}_2 + \dots + b_K \ln \bar{x}_K + \\ + b_{K+1} \bar{x}_1 + \dots + b_L \bar{x}_K. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Następnie stosując podstawienia:

$$\begin{aligned} \hat{Y}' &= \ln(\hat{Y}), \\ b'_0 &= \ln b_0, \\ \bar{x}'_i &= \ln \bar{x}_i, \quad i = 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (7.53)$$

otrzymuje się funkcję liniową ze względu na współczynniki:

$$\hat{Y}' = b'_0 + b_1 \bar{x}'_1 + b_2 \bar{x}'_2 + \dots + b_K \bar{x}'_K + b_{K+1} \bar{x}_1 + \dots + b_L \bar{x}_K. \quad (7.54)$$

#### 7.4. Normowanie zmiennych wejściowych

Wprowadzenie normowania (zwanego również standaryzacją lub kodowaniem) ma na celu uproszczenie zapisu wzorów oraz obliczeń w procesie identyfikacji. Normowanie polega na zastąpieniu zmiennych rzeczywistych  $\bar{x}_i$  zmiennymi normowanymi  $\bar{\bar{x}}_i$ , które są bezwymiarowe i mogą przyjmować następujące wartości (por. rozdz. 10):

- dla doświadczeń na dwóch poziomach:

$$-1, +1,$$

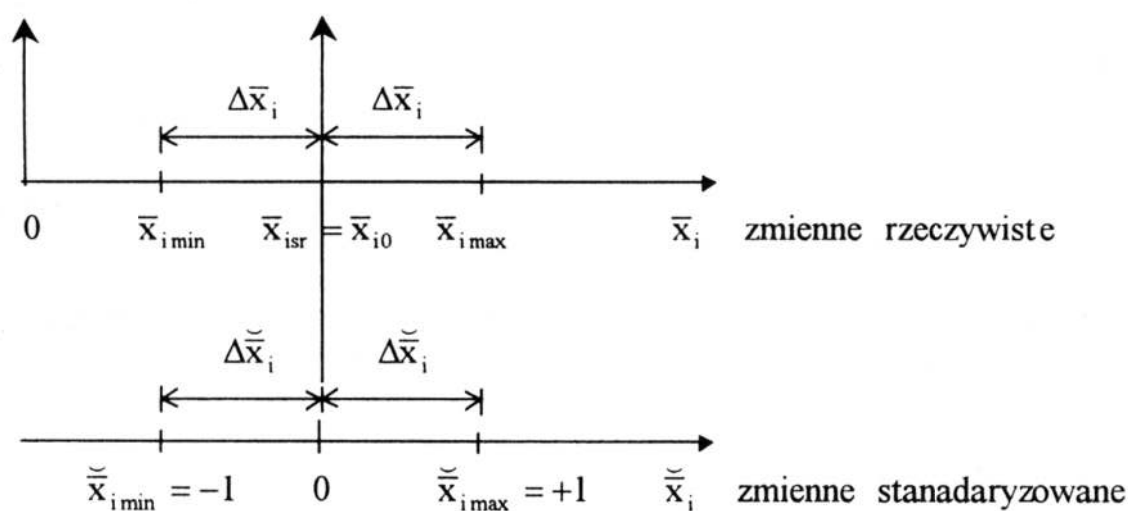
- dla doświadczeń na trzech poziomach:

$$-1, 0, +1,$$

- dla doświadczeń na pięciu poziomach:

$$-\alpha, -1, 0, +1, +\alpha.$$

Następuje wówczas również zastąpienie układu współrzędnych rzeczywistych nowym układem, którego początek (punkt zero) pokrywa się z wartością średnią układu starego (rys. 7.1).



Rys. 7.1. Stary i nowy układ współrzędnych:  $\bar{x}_i$  -  $i$ -ta zmienna rzeczywista,  $\check{\check{x}}_i$  -  $i$ -ta zmienna zakodowana,  $\Delta\bar{x}_{i sr} = (\bar{x}_{i max} + \bar{x}_{i min})/2$  - wartość średnia,  $\Delta\bar{x}_i = (\bar{x}_{i max} - \bar{x}_{i min})/2$  - wartość bezwzględna kroku wzdłuż osi  $\bar{x}_i$  w skali naturalnej,  $\Delta\check{\check{x}}_i = (\check{\check{x}}_{i max} - \check{\check{x}}_{i min})/2$  - wartość bezwzględna kroku wzdłuż osi  $\check{\check{x}}_i$  w skali zakodowanej.

Sposób standaryzacji zmiennych wejściowych zależy od postaci modelu matematycznego badanego obiektu.

Normowanie zmiennych w modelach (7.3)-(7.8) polega na podstawieniu do tych modeli nowych zmiennych bezwymiarowych. Natomiast normowanie zmiennych w modelach (7.13 i 7.14) i (7.16)-(7.21) dokonuje się dopiero po ich zlinearyzowaniu do postaci odpowiednio (7.24), (7.27), (7.30), (7.34), (7.40), (7.46), (7.51) i (7.54).

Zmienne unormowane (bezwymiarowe) w modelach (7.3)-(7.8), (7.24), (7.30), (7.34), (7.40), (7.46), (7.51) oblicza się ze wzoru:

$$\check{\check{x}}_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i 0}}{\Delta\bar{x}_i}, \quad (7.55)$$

Łatwo sprawdzić, że podstawiając do wzoru (7.54) następujące wartości zmiennych rzeczywistych:  $\bar{x}_{i\min}$ ,  $\bar{x}_{i0}$ ,  $\bar{x}_{i\max}$ , zmienne zakodowane przyjmują wartości odpowiednio:  $\tilde{\bar{x}}_{i\min} = -1$ ,  $\tilde{\bar{x}}_{i0} = 0$ ,  $\tilde{\bar{x}}_{i\max} = +1$ .

Przykładowo dokonajmy standaryzacji zmiennych w równaniach (7.3) i (7.7). Do tych równań należy podstawić zmienne wejściowe rzeczywiste  $\bar{x}_i$  obliczone z przekształconego wzoru (7.54):

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i0} + \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i. \quad (7.56)$$

Z równania (7.3), po podstawieniu zależności (7.56), otrzymuje się wyrażenie:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i (\bar{x}_{i0} + \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i) = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_{i0} + \sum_{i=1}^K b_i \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i. \quad (7.57)$$

czyli po przekształceniach otrzyma się model matematyczny obiektu badań w postaci zakodowanej:

$$\hat{Y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \tilde{\bar{x}}_i, \quad (7.58)$$

gdzie:

$$k_0 = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_{i0}, \quad (7.59)$$

$$k_i = b_i \Delta \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Natomiast po podstawieniu zależności (7.56) do równania (7.7) otrzymuje się wyrażenie:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i (\bar{x}_{i0} + \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^K b_{ii} (\bar{x}_{i0} + \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i)^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} (\bar{x}_{i0} + \tilde{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i) (\bar{x}_{j0} + \tilde{\bar{x}}_j \Delta \bar{x}_j), \quad (7.60)$$

a po przekształceniach względem zmiennej zakodowanej otrzymuje się wzór:

$$\hat{Y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \tilde{\bar{x}}_i + \sum_{i=1}^K k_{ii} \tilde{\bar{x}}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K k_{ij} \tilde{\bar{x}}_i \tilde{\bar{x}}_j, \quad (7.61)$$

gdzie:

$$k_0 = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_{i0} + \sum_{i=1}^K b_{ii} (\Delta \bar{x}_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_{i0} \bar{x}_{j0},$$

$$k_i = b_i \Delta \bar{x}_i + 2b_{ii} \Delta \bar{x}_i \bar{x}_{i0} + \Delta \bar{x}_i \sum_{j=1}^K b_{ij} \bar{x}_{j0}, \quad (7.62)$$

$$k_{ii} = b_{ii} (\Delta \bar{x}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

$$k_{ij} = b_{ij} \Delta \bar{x}_i \Delta \bar{x}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, K, \quad i < j.$$

Normowanie zmiennych wejściowych w modelu (7.9) oraz w zlinearyzowanym modelu (7.27) polega na wprowadzeniu nowych zmiennych unormowanych (bezwymiarowych) obliczonych ze wzoru:

$$\tilde{\bar{x}}_i = \frac{2(\ln \bar{x}_i - \ln \bar{x}_{i \max})}{\ln \bar{x}_{i \max} - \ln \bar{x}_{i \min}} + 1. \quad (7.63)$$

Również w tym przypadku łatwo sprawdzić, że podstawiając do wzoru (7.62) następujące wartości zmiennych rzeczywistych:  $\bar{x}_{i \min}$ ,  $\bar{x}_{i \max}$ , zmienne zakodowane przyjmują wartości odpowiednio:  $\tilde{\bar{x}}_{i \min} = -1$ ,  $\tilde{\bar{x}}_{i \max} = +1$ .

Przykładowo dokonajmy standaryzacji zmiennych w równaniu (7.27). Do tego równania należy podstawić zmienne wejściowe rzeczywiste  $\bar{x}'_i = \ln \bar{x}_i$  obliczone z przekształconego wzoru (7.63):

$$\bar{x}'_i = \ln \bar{x}_i = \tilde{\bar{x}}_i (\ln \bar{x}_{i \max} - \ln \bar{x}_{i \min}) + \ln \bar{x}_{i \max} + \ln \bar{x}_{i \min}. \quad (7.64)$$

Z równania (7.27), po podstawieniu zależności (7.64), otrzymuje się wyrażenie:

$$\begin{aligned} \hat{Y}' = \ln \hat{Y} &= b_0 + \sum_{i=1}^K b_i [\tilde{\bar{x}}_i (\ln \bar{x}_{i \max} - \ln \bar{x}_{i \min}) + \ln \bar{x}_{i \max} + \ln \bar{x}_{i \min}] = \\ &= b_0 + \sum_{i=1}^K b_i (\ln \bar{x}_{i \max} + \ln \bar{x}_{i \min}) + \sum_{i=1}^K b_i \tilde{\bar{x}}_i (\ln \bar{x}_{i \max} - \ln \bar{x}_{i \min}), \end{aligned} \quad (7.65)$$

czyli po przekształceniach otrzyma się model matematyczny obiektu badań w postaci zakodowanej:

$$\hat{Y}' = \ln \hat{Y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \tilde{\bar{x}}_i, \quad (7.66)$$



gdzie:

$$k_0 = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i (\ln \bar{x}_{i \max} + \ln \bar{x}_{i \min}), \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (7.67)$$

$$k_i = b_i (\ln \bar{x}_{i \max} - \ln \bar{x}_{i \min}), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Funkcję (7.66) uzupełnia się często o człony uwzględniające oddziaływania wzajemne czynników (interakcje) i wówczas może ona przyjąć postać:

$$\hat{Y}' = \ln \hat{Y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \bar{\bar{x}}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K k_{ij} \bar{\bar{x}}_i \bar{\bar{x}}_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^K k_{ijk} \bar{\bar{x}}_i \bar{\bar{x}}_j \bar{\bar{x}}_k. \quad (7.68)$$

### 7.5. Renormowanie zmiennych wejściowych

Renormowanie (zwane również odkodowaniem) jest operacją odwrotną do normowania. Renormowanie polega na zastąpieniu zmiennych normowanych  $\bar{x}_i$  zmiennymi rzeczywistymi  $\bar{x}_i$ .

Sposób renormowania zmiennych wejściowych zależy od postaci zakodowanego modelu matematycznego badanego obiektu.

Renormowanie zmiennych w normowanych modelach (7.3)-(7.8) oraz (7.24), (7.30), (7.34), (7.40), (7.46) i (7.44) dokonuje się przez podstawienie do nich zmiennych unormowanych według wzoru (7.55).

Przykładowo dokonajmy renormowania zmiennych w równaniach (7.58) i (7.61). Z równania (7.58), po podstawieniu zależności (7.55), otrzymuje się wyrażenie:

$$\hat{Y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} = k_0 - \sum_{i=1}^K k_i \frac{\bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^K \frac{k_i}{\Delta \bar{x}_i} \bar{x}_i, \quad (7.69)$$

czyli po przekształceniach otrzyma się model matematyczny obiektu badań w postaci odkodowanej, tj. dla rzeczywistych wartości zmiennych wejściowych:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i, \quad (7.70)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_0 &= k_0 - \sum_{i=1}^K k_i \frac{\bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i}, \\ b_i &= \frac{k_i}{\Delta \bar{x}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Natomiast po podstawieniu zależności (7.55) do równania (7.61) otrzymuje się wyrażenie:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^K k_{ii} \left( \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} \right)^2 + \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K k_{ij} \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_{j0}}{\Delta \bar{x}_j}, \end{aligned} \quad (7.72)$$

a po przekształceniach względem zmiennej rzeczywistej otrzymuje się wzór:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad (7.73)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_0 &= k_0 - \sum_{i=1}^K k_i \frac{\bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^K b_{ii} \left( \frac{\bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i} \right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \frac{\bar{x}_{i0} \bar{x}_{j0}}{\Delta \bar{x}_i \Delta \bar{x}_j}, \\ b_i &= \frac{k_i}{\Delta \bar{x}_i} - \frac{2k_{ii} \bar{x}_{i0}}{(\Delta \bar{x}_i)^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \frac{k_{ij} \bar{x}_{j0}}{\Delta \bar{x}_i \Delta \bar{x}_j}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \\ b_{ii} &= \frac{k_{ii}}{(\Delta \bar{x}_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \\ b_{ij} &= \frac{k_{ij}}{\Delta \bar{x}_i \Delta \bar{x}_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K, \quad i < j. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Renormowanie zmiennych wejściowych w modelu (7.66) dokonuje się przez wprowadzenie zmiennych unormowanych według wzoru (7.63) i otrzymuje się wyrażenie:

$$\begin{aligned}\hat{Y}' = \ln \hat{Y} &= k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \left[ \frac{2(\ln \bar{x}_i - \ln \bar{x}_{i\max})}{\ln \bar{x}_{i\max} - \ln \bar{x}_{i\min}} + 1 \right] = \\ &= k_0 + \sum_{i=1}^K k_i - \sum_{i=1}^K \frac{2k_i \ln \bar{x}_{i\max}}{\ln \bar{x}_{i\max} - \ln \bar{x}_{i\min}} + \sum_{i=1}^K \frac{2k_i}{\ln \bar{x}_{i\max} - \ln \bar{x}_{i\min}} \ln \bar{x}_i\end{aligned}\quad (7.75)$$

czyli po przekształceniach otrzyma się model matematyczny obiektu badań w postaci odkodowanej:

$$\hat{Y}' = \ln \hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \ln \bar{x}_i, \quad (7.76)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}b_0 &= k_0 + \sum_{i=1}^K k_i - \sum_{i=1}^K \frac{2k_i \ln \bar{x}_{i\max}}{\ln \bar{x}_{i\max} - \ln \bar{x}_{i\min}}, \\ b_i &= \frac{2k_i}{\ln \bar{x}_{i\max} - \ln \bar{x}_{i\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, K.\end{aligned}\quad (7.77)$$

## 7.6. Dobór postaci modelu matematycznego

Dobór postaci modelu matematycznego jest bardzo istotny i jednocześnie bardzo trudny. Najczęściej przyjmuje się, że modelem matematycznym jest: wielomian algebraiczny, funkcja wykładnicza lub funkcja potęgowa. Są to równania hiperpowierzchni, często wyższego stopnia, np. II-go, III-go, ..., m-tego. Dobór postaci modelu zależy od stopnia złożoności badanego obiektu, przeznaczenia modelu matematycznego, wymagań odnośnie dokładności opisu, itd. Czasem o wyborze postaci modelu może decydować zlecający badania. Postać modelu może również wynikać z analizy badanego obiektu pod kątem wartości przyjmowanych przez czynnik wynikowy. Może się zdarzyć sytuacja, że czynnik wynikowy nie przyjmuje wartości ujemnych. Natomiast jest zawsze dodatni i większy od zera lub nie mniejszy niż jeden. W pierwszym przypadku należy przyjąć odwrotność funkcji wykładniczej, natomiast w drugim – funkcję wykładniczą, o wykładnikach w postaci wielomianu algebraicznego. Pewnymi przesłankami odnośnie wyboru odpowiedniego modelu mogą być wcześniejsze badania. Na

przykład powszechnie wiadomo jest, że proces skrawania metali opisuje funkcja potęgowa.

Jeżeli brak jest określonych przesłanek dotyczących postaci modelu można dokonać wyboru najlepszego modelu spośród kilku modeli, wytypowanych po badaniach wstępnych, wykorzystując do tego celu teorię wnioskowania statystycznego. W tym celu należy najpierw obliczyć współczynnik korelacji wielowymiarowej  $R$  ze wzoru:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2}}, \quad (7.78)$$

gdzie:

$\hat{y}_i$  - wartości wyjścia modelu dla  $i$ -tej próby, obliczane z równania regresji,

$\bar{y}_i$  - uśredniona wartość wyjścia dla  $i$ -tego doświadczenia dla  $r$  powtórzeń,

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r y_{ij},$$

$\bar{y}$  - wartość średnia wyjścia obiektu (odpowiedzi) dla  $n$  doświadczeń,

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i.$$

Następnie należy obliczyć wartość funkcji testowej  $F$  ze wzoru:

$$F = \frac{n - m}{m - 1} \frac{R^2}{1 - R^2}, \quad (7.79)$$

gdzie:

$m$  - liczba wyrazów równania regresji łącznie z wyrazem wolnym,

$n$  - liczba prób.

Z tablic 15.6 rozkładu  $F$  Snedecora wyznacza się dla poziomu istotności  $\alpha$  przy stopniach swobody  $r_1=m-1$  oraz  $r_2=n-m$  wartość krytyczną  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$ . Spośród modeli matematycznych, które spełniają warunek  $F < F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$ , za najlep-

szy należy uznać ten, który ma największy współczynnik korelacji wielowymiarowej  $R$ . Współczynnik ten jest miarą stopnia dopasowania równania regresji do wyników eksperymentu.

# 8

## IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ FUNKCJI KORELACJI

---

### 8.1. Statystyczne metody identyfikacji obiektów wielowymiarowych

W eksperymentowaniu często występują takie sytuacje, w których obok znajomości rozkładu poszczególnych zmiennych losowych obiektu badań, niezbędna jest również znajomość zależności statystycznych między tymi zmiennymi. Zależności statystyczne poznaje się za pomocą **metod identyfikacji**. Do statystycznych metod identyfikacji wielowymiarowych obiektów badań zalicza się następujące, najważniejsze metody:

- funkcji korelacji,
- analizy regresji,
- analizy czynnikowej,
- funkcji modulującej.

**Metoda funkcji korelacji** służy do wyznaczania charakterystyk dynamicznych na podstawie tzw. **eksperymentu biernego**, tzn. obserwacji wejść i wyjść obiektu podczas jego normalnej pracy, bez naruszania warunków eksploatacyjnych. W metodzie tej występuje szereg ograniczeń, zmniejszających zakres jej zastosowań. Mianowicie, metoda funkcji korelacji wymaga komputerów o wielkiej pojemności pamięci. Dlatego też praktycznie znajduje ona zastosowanie do identyfikacji obiektów liniowych o niewielkiej liczbie zmiennych. Metoda ta nie może być w ogóle stosowana w przypadku występowania niestacjonarnych zakłóceń oraz obiektów nieliniowych.

**Metoda analizy regresji** służy do identyfikacji statycznych charakterystyk złożonych obiektów badań w warunkach eksperymentu biernego. Metoda ta jest mniej dokładna od metody funkcji korelacji. Zaletą metody analizy regresji jest to, że wymaga mniejszego nakładu pracy w trakcie obliczeń i dzięki temu znajduje coraz większe zastosowanie przy identyfikacji nieznanymi charakterystyk obiektu na podstawie obserwacji wejść i wyjść.

**Metoda analizy czynnikowej** oparta jest na metodzie analizy regresji i zajmuje centralną pozycję wśród metod wyznaczania charakterystyk statycznych opartych na **eksperymentcie czynnym**. W metodzie tej występuje **planowanie eksperymentu**.

**Metoda funkcji modulującej** służy do identyfikacji modeli matematycznych w postaci nieliniowych równań różniczkowych (w tym również nieliniowych ze względu na współczynniki), opisujących silnie nieliniowe, wielomasowe układy mechaniczne, zawierające nieliniowości typu „luz” i „tarcie suche”.

## 8.2. Metoda funkcji korelacji

Głównym zadaniem metody funkcji korelacji jest określenie postaci zależności statystycznej. Drugim jej zadaniem jest określenie istotności tego związku.

### 8.2.1. Założenia

W metodzie funkcji korelacji zakłada się, że badany obiekt jest liniowy o stałych współczynnikach, niezmiennych w czasie. Sygnały wejściowe i zakłócenia oddziałujące na obiekt są **stacjonarnymi, ergodycznymi procesami stochastycznymi**.

Jak wiadomo (pkt. 3.8.2) stacjonarny proces statystyczny  $Y(t)$  charakteryzuje się niezależnymi od czasu  $t$ :

a) wartością oczekiwaną obliczaną po zbiorze:

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y, t)dy = m_y(t) = m_y, \quad (8.1)$$

b) funkcją korelacji własnej:

$$\begin{aligned} K_y[t, \tau] &= E\{[y(t) - m_y][y(t + \tau) - m_y]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y(t) - m_y][y(t + \tau) - m_y]f(y, t; y, t + \tau)dydy = K_y(\tau), \end{aligned} \quad (8.2)$$

gdzie  $f(y, t; y, t + \tau)$  jest dwuwymiarową gęstością prawdopodobieństwa.

Dwa procesy  $X(t)$  i  $Y(t)$  stacjonarne charakteryzuje się niezależnymi od czasu  $t$  wartościami oczekiwanymi  $m_y$  i  $m_z$ , określonymi wzorami typu (8.1) oraz niezależną od czasu **funkcją korelacji wzajemnej**:

$$\begin{aligned} K_{yz}[t, \tau] &= E\{[y(t) - m_y][z(t + \tau) - m_z]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y(t) - m_y][z(t + \tau) - m_z]f(y, t; z, t + \tau)dydz = K_{yz}(\tau). \end{aligned} \quad (8.3)$$

W przyrodzie procesy stacjonarne w ogóle nie występują. Jednak często zmiana właściwości statystycznych wielu obiektów odbywa się tak wolno, że można je uważać za stacjonarne, co znacznie upraszcza rozważania.



Stacjonarny proces przypadkowy jest **ergodyczny**, jeśli średnie obliczane po czasie dla realizacji są równe średnim obliczanym po zbiorze (pkt. 3.8.3). Warunkiem koniecznym i dostatecznym ergodyczności procesu jest aby:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_y(\tau) d\tau \right] = 0. \quad (8.4)$$

W przypadku ergodyczności procesu można określać jego właściwości statyczne badając dostatecznie długo jedną realizację.

Wartość oczekiwaną sygnału  $y(t)$  można wówczas również obliczyć ze wzoru:

$$m_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) dt \right]. \quad (8.5)$$

Podobnie funkcję korelacji własnej sygnału  $y(t)$  określa się ze wzoru:

$$K_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [y(t) - m_y][y(t + \tau) - m_y] dt \right], \quad (8.6)$$

lub

$$K_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [y(t - \tau) - m_y][y(t) - m_y] dt \right]. \quad (8.7)$$

Obliczenie funkcji korelacji własnej sygnału będącego ergodycznym procesem stacjonarnym wymaga wprawdzie znajomości tylko jednej realizacji, lecz jest pracochłonne. Dla każdej wartości  $t$  należy oddzielnie dokonywać operacji całkowania zgodnie ze wzorem (8.6) lub (8.7). Funkcję korelacji można również wyznaczyć doświadczalnie.

### 8.2.2. Doświadczalne wyznaczanie funkcji korelacji

Funkcje korelacji własnej procesu  $X(t)$  wyznacza się posługując się jej oceną  $\hat{K}_y(\tau)$ :

$$K_y(\tau) \approx \hat{K}_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} [y(t) - m_y][y(t + \tau) - m_y] dt \right\}, \quad (8.8)$$

przy skończonym, lecz dostatecznie długim czasie obserwacji  $T$ , jednej realizacji procesu stochastycznego.

Podobnie wartość oczekiwaną  $m_y$  oblicza się na podstawie jej oceny przy skończonym czasie obserwacji  $T$ :

$$m_y \approx \hat{m}_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \right]. \quad (8.9)$$

W praktyce, często stosuje się przybliżone wzory sumacyjne. W tym celu czas obserwacji  $T$  dzieli się na  $N$  odcinków tak, żeby funkcja  $x(t)$  mało zmieniała się czasie  $\Delta$ , więc:  $T=N\Delta$ ,  $t=n\Delta$  i  $\tau=l\Delta$ . Przy tych założeniach wzór (8.9) przekształca się do następującej postaci przybliżonej:

$$m_y \approx \hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n\Delta), \quad (8.10)$$

natomiast funkcja korelacji własnej (8.8) i funkcja korelacji wzajemnej (8.3) po przekształceniu przyjmują postacie odpowiednio:

$$K_y(l\Delta) \approx \hat{K}_y(l\Delta) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} [y(n\Delta) - m_y][y(n\Delta + l\Delta) - m_y], \quad (8.11)$$

oraz

$$K_{yz}(l\Delta) \approx \hat{K}_{yz}(l\Delta) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} [y(n\Delta) - m_y][z(n\Delta + l\Delta) - m_z]. \quad (8.12)$$

Do wyznaczania funkcji korelacji stosuje się specjalistyczne urządzenia zwane korelatorami, zbudowane przy zastosowaniu techniki analogowej, bądź techniki cyfrowej.

### 8.2.3. Wyznaczanie charakterystyk złożonego obiektu dynamicznego

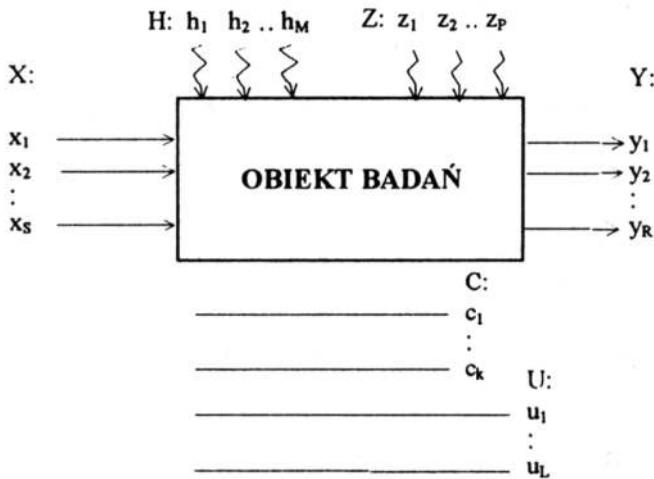
Za pomocą funkcji korelacji własnej i wzajemnej można identyfikować właściwości dynamiczne złożonego obiektu liniowego (rys. 8.1) o  $S$  wejściach i  $R$  wyjściach, poddanego działaniu  $M+P$  zakłóceń.

Należy w tym przypadku znaleźć  $S \times R$  jednostkowych odpowiedzi impulsowych, stanowiących macierz:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & \dots & g_{1R}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & \dots & g_{2R}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{S1}(t) & g_{S2}(t) & \dots & g_{SR}(t) \end{bmatrix}_{S \times R}, \quad (8.13)$$

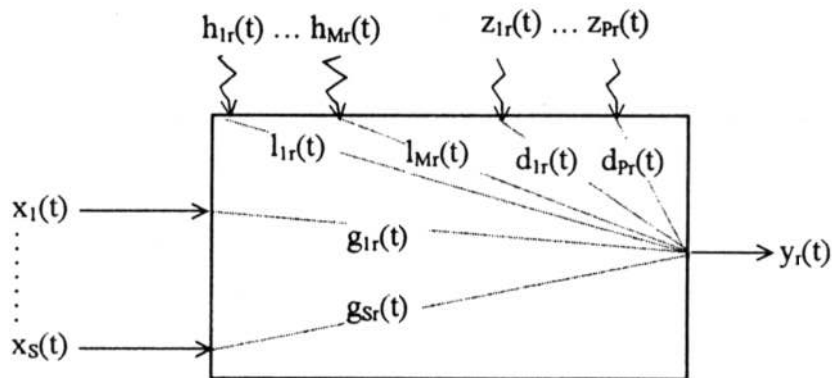
lub transmitancji widmowych, stanowiących macierz:

$$G(j\omega) = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) & \dots & G_{1R}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) & \dots & G_{2R}(j\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{S1}(j\omega) & G_{S2}(j\omega) & \dots & G_{SR}(j\omega) \end{bmatrix}_{S \times R} \quad (8.14)$$



Rys. 8.1. Złożony obiekt identyfikacji.

Aby rozwiązać powyższe zagadnienie, wystarczy rozważyć obiekt o  $S$  wejściach  $x_1, \dots, x_S$  i jednym wyjściu  $y_r$  ( $r=1, 2, \dots, R$ ) (rys. 8.2).



Rys. 8.2. Liniowy obiekt wielowymiarowy o jednym  $r$ -tym wyjściu:

$x_{1r}(t), \dots, x_{Sr}(t)$  sygnały wejściowe,  $g_{1r}(t), \dots, g_{Sr}(t)$  - jednostkowe odpowiedzi impulsowe dla sygnałów;  $l_{1r}(t), \dots, l_{Mr}(t)$  - jednostkowe odpowiedzi impulsowe dla zakłóceń obserwowalnych;  $d_{1r}(t), \dots, d_{Pr}(t)$  - jednostkowe odpowiedzi impulsowe dla zakłóceń nieobserwowalnych.

Rozważając kolejno każde wyjście  $y_r$  oddzielnie i określając  $R$  razy charakterystyki dynamicznego obiektu jednowyjściowego o  $S$  wejściach otrzymuje się zestaw wszystkich  $SR$  charakterystyk dynamicznych.

Dalej zakłada się, że sygnały wyjściowy  $y_r(t)$ , wejściowe  $x_{1r}(t), \dots, x_{Sr}(t)$  oraz zakłócenia  $h_{1r}(t), \dots, h_{Mr}(t)$  i  $z_{1r}(t), \dots, z_{Pr}(t)$  obiektu liniowego (rys. 8.2) są centralnymi procesami stochastycznymi, o zerowych wartościach oczekiwanych. Jeżeli ich rzeczywiste realizacje nie spełniają tego warunku, to należy obliczyć wcześniej ich wartości oczekiwane i odpowiednio odjąć.

Przy takich założeniach,  $r$ -ty sygnał wyjściowy  $y_r(t)$  obiektu liniowego można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 y_r(t) = & \int_0^{\infty} x_{1r}(t-\Theta)g_{1r}(\Theta)d\Theta + \dots + \int_0^{\infty} x_{Sr}(t-\Theta)g_{Sr}(\Theta)d\Theta + \\
 & + \int_0^{\infty} h_{1r}(t-\Theta)l_{1r}(\Theta)d\Theta + \dots + \int_0^{\infty} h_{Mr}(t-\Theta)l_{Mr}(\Theta)d\Theta + \\
 & + \int_0^{\infty} z_{1r}(t-\Theta)d_{1r}(\Theta)d\Theta + \dots + \int_0^{\infty} z_{Pr}(t-\Theta)d_{Pr}(\Theta)d\Theta.
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Zakłada się również, że sygnały wejściowe  $x_{sr}(t)$  ( $s=1, \dots, S$ ) oraz zakłócenia  $h_{mr}(t)$  ( $m=1, \dots, M$ ) i  $z_{pr}(t)$  ( $p=1, \dots, P$ ) są statystycznie niezależne - a więc nieskorelowane dla wszystkich  $\tau$ :

$$\begin{aligned}
 K_{x_{sr}h_{mr}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_{sr}(t)h_{mr}(t+\tau)dt \right] = 0, \quad r=1, \dots, R \\
 K_{x_{sr}z_{pr}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_{sr}(t)z_{pr}(t+\tau)dt \right] = 0, \quad r=1, \dots, R.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Aby obliczyć funkcje korelacji wzajemnej  $K_{x_{Sr}y_r}(\tau)$  ( $r=1, \dots, R$ ) sygnałów wejściowych  $x_{sr}(t)$  ( $s=1, \dots, S$ ) oraz  $r$ -tego sygnału wyjściowego  $y_r(t)$  mnoży się obie strony równości (8.15) kolejno przez:

$$\frac{1}{2T}x_{1r}(t-\tau), \frac{1}{2T}x_{2r}(t-\tau), \dots, \frac{1}{2T}x_{Sr}(t-\tau), \tag{8.17}$$

całkuje względem  $t$  od  $-T$  do  $+T$ , następnie przechodząc z  $T$  do  $+\infty$ , wobec związków (8. ), otrzymuje się następujący układ  $S$  równań całkowych, wiążących  $S$  nieznanymi, jednostkowymi odpowiedziami impulsowymi dla sygnałów  $g_{1r}(t), \dots, g_{Sr}(t)$ :



**Metoda przekształceń Fouriera** polega na obliczeniu transformat obu stron równań (8.20), wyznaczeniu transmitancji widmowych i po dokonaniu przekształcenia odwrotnego, obliczeniu jednostkowych odpowiedzi impulsowych.

Należy znaleźć rozwiązanie  $g_{sr}(t)$  równania całkowego:

$$K_{x_{sr}y_r}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{x_{s1r}}(\tau - \Theta) g_{sr}(\Theta) d\Theta, \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R, \quad (8.21)$$

które musi spełniać **warunek realizowalności fizycznej** w postaci:

$$g_{1r}(\Theta) = 0 \quad \text{dla } \Theta < 0. \quad (8.22)$$

Przekształcenia równania (8.21) dokonuje się mnożąc obie jego strony przez  $\exp(-j\omega\tau)$  i całkując po  $\tau$  w przedziale od  $-\infty$  do  $+\infty$ , otrzymując:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{sr}y_r}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g_{sr}(\Theta) d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{s1r}}(\tau - \Theta) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (8.23)$$

dla  $s = 1, \dots, S$  i  $r = 1, \dots, R$ .

W ostatniej całce równania (8.23) dokonuje się zamiany zmiennych podstawiając:

$$\tau - \Theta = \lambda, \quad (8.24)$$

i otrzymuje się:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{sr}y_r}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g_{sr}(\Theta) d\Theta \int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{s1r}}(\lambda) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (8.25)$$

dla  $s = 1, \dots, S$  i  $r = 1, \dots, R$ .

Wprowadzając gęstości widmowe:

$$S_{x_{sr}y_r}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{sr}y_r}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R, \quad (8.26)$$

$$S_{x_{sr}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{x_{s1r}}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = S_{x_{s1r}}(j\omega), \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R,$$

i uwzględniając następującą zależność pomiędzy transmitancją cząstkową i odpowiedzią impulsową:

$$G_{sr}(j\omega) = \int_0^{+\infty} g_{sr}(\Theta) \exp(-j\omega\Theta) d\Theta, \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R, \quad (8.27)$$

otrzymuje się następujące wyrażenie na transmitancję cząstkową obiektu:

$$G_{sr}(j\omega) = \frac{S_{x_{sr}y_r}(j\omega)}{S_{x_{sr}}(\omega)}, \quad s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R. \quad (8.28)$$

Stosując do wyrażenia (8.27) przekształcenie Fouriera oraz po uwzględnieniu zależności (8.28), otrzymuje się następujący wzór na jednostkową odpowiedź impulsową:

$$\begin{aligned} g_{sr}(\Theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{sr}(j\omega) \exp(j\omega\Theta) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{x_{sr}y_r}(j\omega)}{S_{x_{sr}}(\omega)} \exp(j\omega\Theta) d\omega, \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Wartości  $g_{sr}(\Theta)$  ( $s=1, \dots, S, r=1, \dots, R$ ) ze wzoru (8.29) można wyznaczyć analitycznie bądź numerycznie, np. metodą charakterystyk trapezowych.

**Metoda algebraiczna** polega na przekształceniu równania całkowego (8.21) w równanie sumacyjne. W tym celu czas obserwacji dzieli się na  $N$  odcinków, a wielkościom  $\tau$  i  $\Theta$  nadaje się następujące wartości dyskretne:  $\tau=l\Delta, \Theta=n\Delta$  i  $d\Theta=\Delta$ , gdzie  $l=1, \dots, L$  i  $n=0, \dots, N$ . Wówczas równanie (8.29) można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}y_r}(l\Delta) = \sum_{n=0}^N K_{x_{sr}}[(l-n)\Delta] g_{sr}(n\Delta), \quad r = 1, \dots, R. \quad (8.30)$$

Uwzględniając symetrię funkcji korelacji własnej:

$$K_{x_{sr}}(\tau - n\Delta) = K_{x_{sr}}[-(\tau - n\Delta)], \quad (8.31)$$

otrzymuje się układ  $(N+1)$  równań liniowych z  $(N+1)$  nieznanymi odpowiedziami impulsowymi  $g_{sr}(0), g_{sr}(\Delta), g_{sr}(2\Delta), \dots, g_{sr}(N\Delta)$ . Układ ten można zapisać syntetycznie w postaci macierzowej:

$$\{\mathbf{A}_r\}_{(N+1) \times 1} = [\mathbf{B}_r]_{(N+1) \times (N+1)} \{\mathbf{G}_r\}_{(N+1) \times 1}, \quad r = 1, \dots, R, \quad (8.32)$$



gdzie  $\{\mathbf{A}_r\}$  i  $\{\mathbf{G}_r\}$  są wektorami kolumnowymi o wymiarze  $(N+1) \times 1$ , a  $[\mathbf{B}_r]$  jest macierzą symetryczną o wymiarze  $(N+1) \times (N+1)$ . Macierze te mają następujące postacie:

$$\{\mathbf{A}_r\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}y_r}(0) \\ \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}y_r}(\Delta) \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}y_r}(N\Delta) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{G}_r\} = \begin{Bmatrix} g_{sr}(0) \\ g_{sr}(\Delta) \\ \dots \\ g_{sr}(N\Delta) \end{Bmatrix}, \quad (8.33)$$

$$[\mathbf{B}_r] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(0) & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(\Delta) & \dots & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(N\Delta) \\ \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(\Delta) & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(0) & \dots & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}[(N-1)\Delta] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(N\Delta) & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}[(N-1)\Delta] & \dots & \frac{1}{\Delta} K_{x_{sr}}(0) \end{Bmatrix}. \quad (8.34)$$

Rozwiązanie przekształconego układu równań, względem nieznanego wektora kolumnowego  $\{\mathbf{G}_r\}$ , do postaci:

$$\{\mathbf{G}_r\}_{(N+1) \times 1} = [\mathbf{B}_r]_{(N+1) \times (N+1)}^{-1} \{\mathbf{A}_r\}_{(N+1) \times 1}, \quad r = 1, \dots, R, \quad (8.35)$$

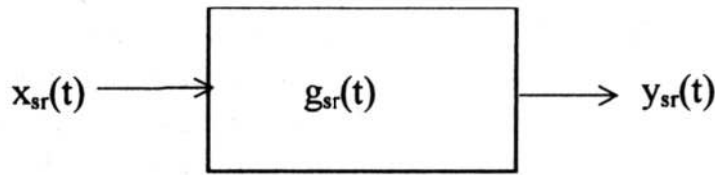
można otrzymać za pomocą znanych metod dokładnych (np. metodą eliminacji Gaussa) lub za pomocą metod iteracyjnych (dla dużego  $N$ ).

**Metoda modelowania** wykorzystuje analogie występującą pomiędzy równaniem całkowym:

$$S_{x_{sr}y_r}(j\omega) = \int_0^{+\infty} K_{x_{sr}}(\tau - \Theta) g_{sr}(\Theta) d\Theta, \quad \text{dla } s = 1, \dots, S \text{ i } r = 1, \dots, R, \quad (8.36)$$

oraz równaniem wiążącym sygnał wyjściowy  $y_{sr}(t)$  z sygnałem wejściowym  $x_{sr}(t)$  prostego układu liniowego, o jednym wejściu (rys. 8.3) i o jednostkowej odpowiedzi impulsowej  $g_{sr}(t)$ , postaci:

$$y_{sr}(t) = \int_0^{+\infty} x_{sr}(t - \Theta) g_{sr}(\Theta) d\Theta. \quad (8.37)$$



Rys. 8.3. Prosty obiekt liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu.

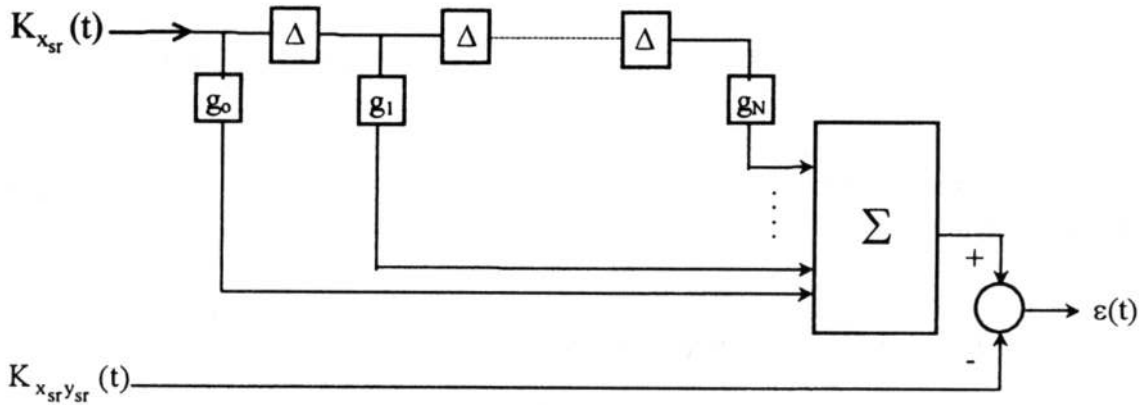
Jeżeli do wejścia układu przedstawionego na rysunku 8.3, doprowadzi się sygnał równy korelacji własnej:

$$x_{sr}(t) = K_{x_{sr}}(t), \tag{8.38}$$

to na wyjściu tego układu otrzymuje się sygnał  $y_{sr}(t)$ , odpowiadający funkcji korelacji wzajemnej:

$$y_{sr}(t) = K_{x_{sr}y_{sr}}(t). \tag{8.39}$$

Wykorzystując powyższą analogię Goodman i Reswick zaproponowali konstrukcję specjalnego urządzenia analogowego, składającego się z członów opóźnienia, elementów mnożących przez współczynniki  $g_0, g_1, \dots, g_N$  i sumatora (rys. 8.4).



Rys. 8.4. Model obiektu liniowego:  $g_0, g_1, \dots, g_N$  - parametry nastrojane,  $\Delta$  - człon opóźniający,  $\Sigma$  - sumator [40].

Urządzenie to o transmitancji:

$$G(j\omega) = \sum_{n=0}^N g_n \exp(-j\omega n\Delta), \tag{8.40}$$





# 9

## IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ ANALIZY REGRESJI

---

### 9.1. Opis metody

Metoda analizy regresji umożliwia identyfikowanie charakterystyki statycznej wielowymiarowego obiektu nieliniowego, o wielu wejściach i jednym wyjściu, poddanego działaniu zakłóceń przypadkowych.

Przypomnijmy, że interesująca nas funkcja jest zależnością statystyczną jeśli wartość oczekiwana zmiennej losowej  $Y$  przy warunku  $\mathbf{X}=\mathbf{x}$  ( $X_1=x_1, \dots, X_K=x_K$ ) jest funkcją  $\mathbf{x}$ :

$$E(Y / \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{x}}), \quad (9.1)$$

to znaczy, że między zmiennymi  $Y$  i  $\mathbf{X}(X_1, \dots, X_K)$  występuje **korelacja** (współzależność). Funkcję (9.1), przedstawiającą warunkową wartość oczekiwaną, nazywa się **funkcją regresji pierwszego rodzaju** lub **teoretyczną funkcją regresji**.

W praktyce nie jesteśmy w stanie wyznaczyć dokładnie funkcji regresji. Dlatego też wysuwa się hipotezę, że funkcja regresji należy do określonej klasy funkcji o postaci jakościowej:

$$\hat{Y} = \hat{Y}(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{b}), \quad (9.2)$$

liniowych względem nieznanymi parametrów  $\mathbf{b}$ , gdzie znak “-” nad symbolem oznacza wartość średnią, natomiast znak “^” - wielkość aproksymowaną,  $\bar{\mathbf{x}}$  jest wektorem średnich wartości zmiennych wejściowych. Funkcja (9.2) jest **modelem matematycznym obiektu badań** i nazywana jest również **funkcją regresji drugiego rodzaju** lub **empiryczną funkcją regresji**.

Klasę modelu matematycznego ustala się na podstawie rozważań teoretycznych, bądź na podstawie analizy danych doświadczalnych. Klasą modelu może być wielomian algebraiczny, funkcja wykładnicza, potęgowa i logarytmiczna, funkcje trygonometryczne i funkcje ułamkowe (por. rozdz. 7).

Zastosowanie odpowiedniej procedury identyfikacji zależy głównie od klasy postulowanego modelu matematycznego obiektu badań, od rozkładu zakłóceń względem wartości średniej, liczby powtórzeń. W przypadku, gdy modelem matematycznym jest wielomian algebraiczny, wówczas nieznanymi parametry modelu

wyznacza się minimalizując wyrażenie znanego w matematyce jako **postulat** lub **zasada najmniejszej sumy kwadratów błędów (NSKB)**. Natomiast w pozostałych przypadkach, gdy modelem matematycznym nie jest wielomian algebraiczny, stosować można następujące metody:

- a) metodę minimalizacji modułu błędów,
- b) metodę minimalizacji odpowiednio zbudowanego wyrażenia stopnia wyższego niż drugi z odpowiednio dobranymi wagami,
- c) najpierw przekształcić model matematyczny obiektu badań do prostszej postaci, a następnie zastosować:
  - zasadę najmniejszej sumy kwadratów,
  - udoskonaloną zasadę najmniejszej sumy kwadratów.

## 9.2. Zasada najmniejszej sumy kwadratów

Zasada najmniejszej sumy kwadratów została wprowadzona przez Legendre'a (1806 r.) oraz Gaussa (1809 r.) i stanowi podstawę analizy regresji.

Dobór postaci wielomianu algebraicznego zależy od stopnia złożoności badanego obiektu, przeznaczenia modelu matematycznego, wymagań odnośnie dokładności opisu, itd. W ogólnym przypadku jest to wielomian  $K$  zmiennych,  $m$ -tego stopnia, zawierającym podwójne, potrójne, ...,  $K$ -te interakcje (por. rozdz. 7), postaci:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots + \sum_{i=1}^K b_{ii \dots ii} \bar{x}_i^m + \\ & + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j,\dots,l < n}}^K b_{ij \dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n, \end{aligned} \quad (9.3)$$

w którym występuje  $L$  nieznanych współczynników  $b_0, b_{ii}, b_{ij}, \dots, b_{ii \dots ii}, b_{ij \dots ln}, i, j, \dots, l, n=1, \dots, K, i < j, \dots, l < n$ .

Model (9.3) łatwo jest uprościć do postaci szczególnych. Przykładowo dla następującej, najczęściej spotykanej postaci kwadratowej  $m=2$ , z podwójnymi interakcjami otrzymuje się:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad (9.4)$$

w której występuje  $L=5(K-1)$  nieznanych współczynników  $b_0, b_{ii}, b_{ij}, i, j=1, \dots, K, i < j$ ,

natomiast modelu liniowego, który jest najprostszą postacią modelu (9.3) pomija się interakcje i składniki zawierające potęgi, otrzymując:

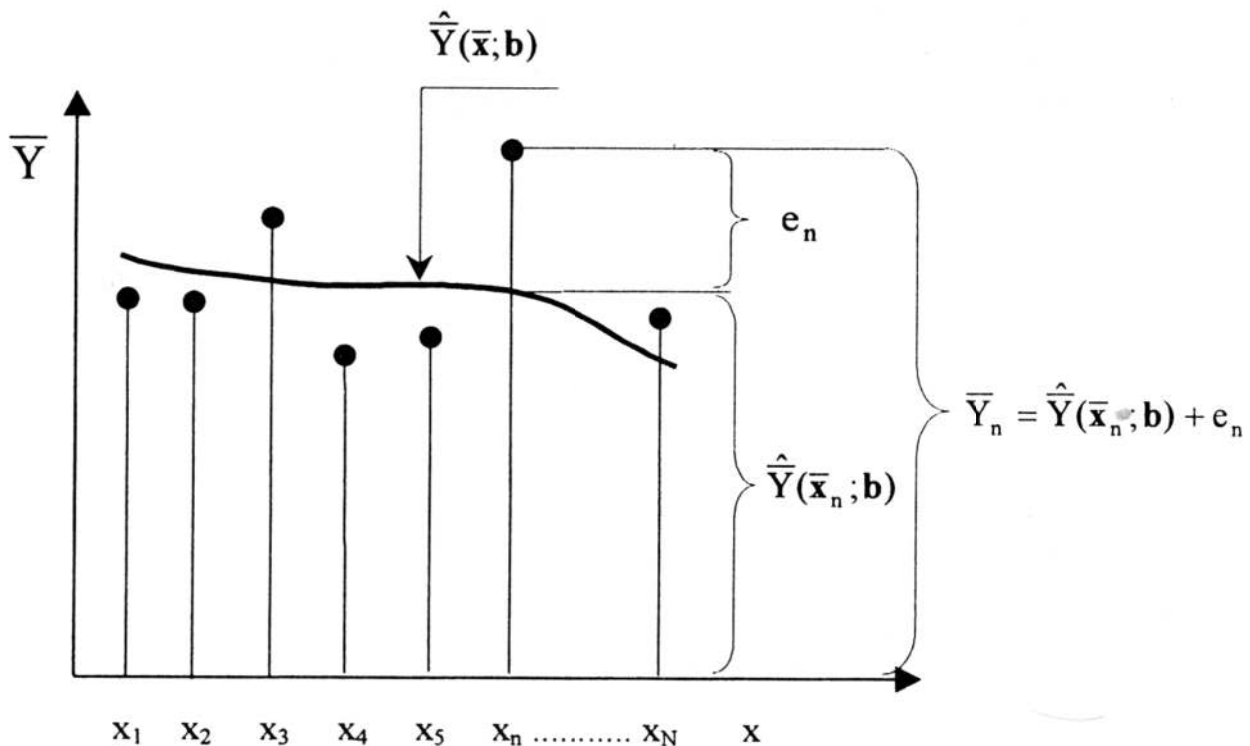
$$\hat{\bar{Y}} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i, \quad (9.5)$$

z  $(L=K+1)$  nieznanymi współczynnikami  $b_0, b_{ii}, i = 1, \dots, K$ , gdzie  $K$  jest liczbą zmiennych.

W celu wyznaczenia wektora  $\{\mathbf{b}\}$  nieznanych współczynników w funkcji regresji (9.3) zakłada się następujący związek:

$$\bar{Y} = \hat{\bar{Y}}(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{b}) + e, \quad (9.6)$$

o  $(L+1)$  niewiadomych (tj.  $L$  nieznanych współczynników  $\mathbf{b}$  wektora  $\{\mathbf{b}\}$  oraz nieznaną błąd  $e$ ), w którym  $\hat{\bar{Y}}(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{b})$  jest aproksymacją nieznannej zależności  $\bar{Y}$  - czyli modelem matematycznym obiektu badań według wzoru (9.3) (rys. 9.1).



Rys. 9.1. Graficzna ilustracja układu równań (9.7).

W celu wyznaczenia  $L$  niewiadomych współczynników w równaniu (9.3) należy wykonać odpowiednią liczbę pomiarów. Załóżmy, że dokonano  $N$  pomiarów





W przypadku obiektów wielowymiarowych wygodnie jest posłużyć się zapisem macierzowym. W tym celu wprowadza się następujące oznaczenia. Wyniki obserwacji zapisuje się w postaci **macierzy zmiennych wejściowych**  $[X]$ :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NK} \end{bmatrix}, \quad (9.12)$$

lub w postaci **wektora kolumnowego**  $\{\bar{X}\}$  o wymiarze  $N \times 1$  **średnich wartości zmiennych wejściowych**:

$$\{\bar{X}\} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_N]^T, \quad (9.13)$$

gdzie  $x_{10} = x_{20} = \dots = x_{N0} = 1$  są elementami fikcyjnymi, wprowadzonymi do macierzy w celu ujednoczenia zapisu macierzowego wzorów, znak “-” umieszczony nad symbolem oznacza wartość średnią, znak T oznacza transpozycję wektora.

Wyniki obserwacji wyjść obiektu i wyjścia modelu zapisuje się w postaci wektorów kolumnowych o wymiarach  $N \times 1$  zmiennych wyjściowych  $\{\bar{Y}\}$  i wartości funkcji regresji  $\{\hat{Y}\}$ :

$$\{\bar{Y}\} = [\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_N]^T, \quad \{\hat{Y}\} = [\hat{y}_1 \hat{y}_2 \dots \hat{y}_N]^T. \quad (9.14)$$

Nieznane współczynniki  $b_0, b_1, \dots, b_{K-M \dots K}$  zapisuje się w postaci wektora kolumnowego  $\{b\}$ :

$$\{b\} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{K-M \dots K}]^T. \quad (9.15)$$

Równanie regresji (9.3) przyjmuje wówczas postać:

$$\{\hat{Y}\} = [X]\{b\}, \quad (9.16)$$

natomiast funkcja minimalizowana (9.10) jest postaci:

$$\begin{aligned} S_R &= (\{\bar{Y}\} - \{\hat{Y}\})^T (\{\bar{Y}\} - \{\hat{Y}\}) = (\{\bar{Y}\} - [X]\{b\})^T (\{\bar{Y}\} - [X]\{b\}) = \\ &= \{\bar{Y}\}^T \{\bar{Y}\} - 2\{b\}^T [X]^T \{\bar{Y}\} + \{b\}^T [X]^T [X] \{b\}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Różniczkując  $S_R$  względem  $\{\mathbf{b}\}$  otrzymuje się:

$$\frac{\partial S_R}{\partial \{\mathbf{b}\}} = -2[\mathbf{X}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\} + 2[\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}] \{\mathbf{b}\}, \quad (9.18)$$

a po przyrównaniu pochodnych cząstkowych do zera otrzymuje się następujący układ równań normalnych:

$$[\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}] \{\mathbf{b}\} = [\mathbf{X}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\}, \quad (9.19)$$

skąd po przemnożeniu obu stron przez macierz odwrotną  $([\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}])^{-1}$ , otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$\{\mathbf{b}\} = ([\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}])^{-1} [\mathbf{X}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\}. \quad (9.20)$$

Macierz współczynników  $([\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}])^{-1}$  nie może być osobliwa, tzn. że jej współczynnik główny:

$$\det([\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}])^{-1} \neq 0, \quad (9.21)$$

powinien być różny od zera. Oznacza to, że w macierzy  $[\mathbf{X}]$  elementy jednej kolumny nie mogą być liniowo zależne od elementów innych kolumn i jednocześnie liczba wierszy liniowo niezależnych powinna być nie mniejsza niż liczba  $L$  nieznanymi współczynników.

### 9.3. Przekształcenie funkcji wykładniczej i potęgowej

W wielu przypadkach identyfikacji obiektów badań, postulowanym modelem matematycznym nie jest wielomian, lecz inna funkcja np. wykładnicza, potęgowa, trygonometryczna, itd. Wówczas w celu doprowadzenia zależności korelacyjnej do prostszej postaci, pozwalającej posługiwać się zasadą najmniejszych kwadratów lub udoskonaloną zasadą najmniejszych kwadratów, należy dokonać odpowiedniego przekształcenia modelu matematycznego. Dalej rozpatruje się zamiast zmiennych ich funkcje np. logarytmy, odwrotności, itd. W dalszej części przedstawiony zostanie sposób przekształcania najczęściej stosowanych postaci funkcji.

**Przekształcanie funkcji wykładniczej.** Modelem matematycznym nieliniowego obiektu badań jest funkcja wykładnicza postaci:

$$\hat{Y}_2 = \exp(\bar{Y}_1), \quad (9.22)$$

gdzie  $\bar{Y}_1$  jest wielomianem algebraicznym i w ogólnym przypadku ma postać określoną wzorem (9.3).

Przez logarytmowanie funkcji (9.22) i podstawienie funkcji (9.3) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \ln \hat{Y}_2 = \bar{Y}_1 = & b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \dots \\ & + \sum_{i=1}^K b_{ii\dots ii} \bar{x}_i^m + \sum_{\substack{i,j,\dots,l,n=1 \\ i < j, \dots, l < n}}^K b_{ij\dots ln} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_l \bar{x}_n. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej  $\ln \hat{Y}_2 = \bar{Y}$  otrzymuje się nieliniowe równanie algebraiczne, analogiczne do równania (9.3), co pozwala posługiwać się zasadą najmniejszych kwadratów.

**Przekształcanie funkcji potęgowej.** Modelem matematycznym nieliniowego obiektu badań jest funkcja potęgowa postaci:

$$\hat{Y} = b_0 \sum_{i=1}^K \bar{x}_i^{b_i}. \quad (9.24)$$

Przez logarytmowanie tej funkcji otrzyma się:

$$\ln \hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \ln \bar{x}_i. \quad (9.25)$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych  $\ln \hat{Y} = \hat{Y}'$  oraz  $\bar{x}'_i = \ln \bar{x}_i$  otrzymuje się równanie liniowe:

$$\hat{Y}' = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}'_i, \quad (9.26)$$

co pozwala posługiwać się zasadą najmniejszych kwadratów.

#### 9.4. Udoskonalona zasada najmniejszej sumy kwadratów

Przekształcenie w pkt.9.3 zarówno funkcji wykładniczej jak i potęgowej polegało na logarytmowaniu. Otrzymane równania pozwoliły stosować zasadę naj-

mniejszych kwadratów. Obliczone tą metodą wartości współczynników równań regresji  $\{\mathbf{b}\}$  będą obarczone pewnym błędem. Wynika to z faktu, że minimalizacji podlega nie suma kwadratów odchyłeń wielkości  $\{\hat{\bar{Y}}\}$ , a suma kwadratów logarytmów naturalnych tych wielkości. Dokładność oszacowania tych parametrów można polepszyć stosując **udoskonaloną zasadę najmniejszych kwadratów** zwaną również **ważoną metodą najmniejszych kwadratów**.

Udoskonalona zasada najmniejszych kwadratów polega w przypadku przekształcenia przez logarytmowanie polega na znalezieniu minimum kwadratów dla następującego wyrażenia kwadratowego:

$$S_R = \sum_{n=1}^N \bar{Y}_n^2 [\bar{Y}_n - \hat{\bar{Y}}_n(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{b})]^2 = \min, n = 1, \dots, N. \quad (9.27)$$

Odpowiadająca tej sumie funkcja minimalizowana w zapisie macierzowym ma postać:

$$\begin{aligned} S_R &= [[\bar{\mathbf{Y}}](\{\bar{\mathbf{Y}}\} - \{\hat{\bar{\mathbf{Y}}\})]^T [\bar{\mathbf{Y}}](\{\bar{\mathbf{Y}}\} - \{\hat{\bar{\mathbf{Y}}\})] = \\ &= [[\bar{\mathbf{Y}}](\{\bar{\mathbf{Y}}\} - [\mathbf{X}]\{\mathbf{b}\})]^T [\bar{\mathbf{Y}}](\{\bar{\mathbf{Y}}\} - [\mathbf{X}]\{\mathbf{b}\}) = \\ &= [\bar{\mathbf{Y}}]^2 \{\bar{\mathbf{Y}}\} - 2\{\mathbf{b}\}^T [\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}]\{\bar{\mathbf{Y}}\} + \{\mathbf{b}\}^T [\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}]\{\mathbf{b}\}, \end{aligned} \quad (9.28)$$

gdzie  $[\bar{\mathbf{Y}}]$  jest macierzą diagonalną średnich wartości wyjść obiektu:  $[\bar{\mathbf{Y}}] = \text{diag}\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N\}$  i pełni rolę współczynników wagowych.

Różniczkując  $S_R$  względem wektora  $\{\mathbf{b}\}$  nieznanymi współczynnikami otrzymuje się:

$$\frac{\partial S_R}{\partial \{\mathbf{b}\}} = -2[\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}]\{\bar{\mathbf{Y}}\} + 2[\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}]\{\mathbf{b}\}, \quad (9.29)$$

a po przyrównaniu pochodnych cząstkowych do zera otrzymuje się następujący układ równań normalnych:

$$[\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}]\{\mathbf{b}\} = [\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}]\{\bar{\mathbf{Y}}\}, \quad (9.30)$$

skąd po przemnożeniu obu stron przez macierz odwrotną  $([\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}])^{-1}$ , otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$\{\mathbf{b}\} = ([\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}])^{-1} [\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}]\{\bar{\mathbf{Y}}\}. \quad (9.31)$$

Macierz współczynników  $([\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}])^{-1}$  nie może być osobliwa, tzn. że jej współczynnik główny:

$$\det([\mathbf{X}]^T [\bar{\mathbf{Y}}][\bar{\mathbf{Y}}][\mathbf{X}])^{-1} \neq 0 \quad (9.32)$$

powinien być różny od zera.

Przedstawiona metoda szacowania parametrów modelu wymaga spełnienia dwu warunków, a mianowicie: wyróżnione podzbiory obserwacji muszą być jednakowo liczne, to znaczy składać się z jednakowej ilości par pomiarów, oraz wariancje zmiennej zależnej w wyróżnionych podzbiorach nie mogą istotnie różnić się między sobą. Jeśli warunki te nie są spełnione, to średnie podzbiorów nie są jednakowo wąskie. Należy więc uwzględnić to w obliczeniach, mnożąc średnie arytmetyczne poszczególnych zbiorów obserwacji przez odwrotność odpowiadających im wariancji. Wówczas poprawiona wartość średniej arytmetycznej  $\bar{Y}_{n(sk)}$  we wzorze ma postać:

$$\bar{Y}_{n(sk)} = \bar{Y}_n \frac{1}{s_{yn}^2}, \quad (9.33)$$

gdzie  $s_{yn}^2$  jest wariancją zmiennej  $Y$ .

Jeżeli jednocześnie poszczególne średnie  $\bar{Y}_n$  oparte są na różnych ilościach obserwacji, to należy ten fakt również uwzględnić, mnożąc każdą wartość poprawioną średniej arytmetycznej przez odpowiadającą jej ilość obserwacji  $n_n$ :

$$\bar{Y}_{n(sk)} = \bar{Y}_n \frac{n_n}{s_{yn}^2}. \quad (9.34)$$

### 9.5. Minimalna suma modułów błędów jako kryterium szacowania parametrów modelu

Metoda najmniejszej sumy kwadratów błędów jest bardzo popularna i efektywna w przypadku występowania symetrycznych zakłóceń. Wówczas straty będące wynikiem błędu modelu są kwadratowo zależne od popełnionego błędu. Jednak w przypadku występowania asymetrycznych zakłóceń np. szacowaniu trendów giełdowych, zmian pogody, przyływów morza, efektywność metody maleje. Wówczas bardziej poprawnym jest stosować metodę najmniejszej sumy wartości bezwzględnej (NSWB) [13]. Jednak estymator tej metody jest niewygodny w obliczeniach, ponieważ prowadzi do wskaźnika, którego wartość jest

funkcją nie posiadającą ciągłej pochodnej względem poszukiwanych parametrów. Dodatkową trudnością tej metody jest to, że przy rozwiązywaniu następującego układu równań:

$$\{\mathbf{b}\} = ([\mathbf{X}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{X}])^{-1} [\mathbf{X}]^T [\mathbf{E}] \{\bar{\mathbf{Y}}\}. \quad (9.35)$$

względem poszukiwanych współczynników  $\{\mathbf{b}\}$  w równaniu regresji, konieczna jest znajomość błędów modelu, przed obliczeniem tego oszacowania, przy czym macierz  $[\mathbf{E}]$  pełni rolę współczynników wagowych

$$[\mathbf{E}] = \text{diag}\{e_1, e_2, \dots, e_N\}, \text{ gdzie } e_i = \frac{1}{|\bar{y}_i - \hat{y}_i|}, i = 1, \dots, N, \quad (9.36)$$

zaś  $\hat{y}_i$  oznacza oszacowanie wyjścia modelu obliczone na podstawie parametrów modelu wyznaczonego w sensie NSWB.

Algorytm oszacowania współczynników  $\{\mathbf{b}\}$  metodą NSWB jest następujący:

1. Wyznaczyć pierwsze oszacowanie  $\{\mathbf{b}^{(1)}\}$  ze wzoru (9.34) przyjmując  $e_i=1$ , dla  $i=1, \dots, N$ ,

$$\{\mathbf{b}^{(1)}\} = ([\mathbf{X}]^T [\mathbf{X}])^{-1} [\mathbf{X}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\} \quad (9.37)$$

2. Wyznaczyć błędy w oszacowaniu wyjścia z modelu

$$\varepsilon_i = |\bar{y}_i - \hat{y}_i(\{\mathbf{b}^{(1)}\})|, i = 1, \dots, N \quad (9.38)$$

oraz podstawić

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \varepsilon_i \geq \varepsilon_{\min}, \\ \varepsilon_i, & \\ 0, & \text{gdy } \varepsilon_i < \varepsilon_{\min}, \end{cases} \quad (9.39)$$

gdzie  $\varepsilon_{\min}$  może być ustalony na podstawie błędów pomiarów, określając macierz błędów:

$$[\mathbf{E}] = \text{diag}\{e_1, \dots, e_N\}. \quad (9.40)$$



Podstawienie  $\epsilon_i=0$  jest zabezpieczeniem algorytmu przed wystąpieniem problemów numerycznych w przypadku wystąpienia bardzo małych błędów modelu.

3. Wyznaczyć drugie oszacowanie współczynników  $\{\mathbf{b}^{(2)}\}$  ze wzoru (9.35) z macierzą wag  $[\mathbf{E}]$  określoną w (9.40).
4. Etapy 2 i 3 mogą być powtarzane, aż do chwili uzyskania właściwej zbieżności.

# 10

## IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW WIELOWYMIAROWYCH METODĄ ANALIZY CZYNNIKOWEJ

---

### 10.1. Wprowadzenie

Termin **analiza czynnikowa** oznacza w języku polskim trzy metody o nazwach angielskich: *factorial analysis*, *factor analysis* oraz *component analysis*. Pierwsza dotyczy *planowania eskperymentu*, dwie pozostałe dotyczą zastępowania wielkiej liczby czynników mniejszą liczbą czynników zastępczych [40].

W niniejszym rozdziale zostaną podane podstawowe wiadomości z matematycznej teorii planowania, niezbędne dla prawidłowego zaplanowania eksperymentu badanego obiektu. Eksperyment ma umożliwić identyfikację, optymalizację lub symulację rozważanego obiektu, przy optymalnej liczbie doświadczeń. Jak wiadomo (pkt. 5.1) liczba doświadczeń, aby była reprezentatywna, musi być losowa i dostatecznie liczna. Nie może być jednak zbyt liczna ze względu na czas i koszty badań. Ponadto zarówno jakość identyfikacji, jak i optymalizacji oraz symulacji istotnie zależy od doboru doświadczeń. Powstaje więc zagadnienie właściwego planowania eksperymentu. W celu wyznaczenia zależności statystycznych (czyli obliczenia współczynników w równaniu regresji) w oparciu o otrzymane wyniki zaplanowanego eksperymentu wykorzystuje się aparat matematyczny stosowany w analizie regresji, szeroko omówiony w rozdziale 9.

Badania eksperymentalne wykonywane były już za czasów Galileusza. Podstawowe prawa fizyki, chemii itp. odkryto najczęściej na drodze eksperymentu, nie znając jego teorii.

W latach trzydziestych dwudziestego wieku powstają pierwsze koncepcje planowania i analizy doświadczeń. Powstanie współczesnych, statystycznych metod planowania doświadczeń związane jest z nazwiskiem R. A. Fishera, autora monografii: *The Design of Experiments* (1935 r.). Po drugiej wojnie światowej G.E.P. Box i K.B. Wilson opracowali nowatorską metodę planowania doświadczeń, zwaną metodą Boxa-Wilsons. W tym samym czasie powstają plany doświadczeń: ortogonalne i rotalne. Obserwuje się liczne zastosowania teorii eksperymentu w rolnictwie, metalurgii, chemii itp.

W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych I. Kiefer i I. Wolfowitz opracowali koncepcję tzw. planów optymalnych. Prace te były również finansowane przez NASA.

W ZSRR teoria planowania doświadczeń rozwijała się od 1960 r. pod kierunkiem W. W. Nalimowa. Planowanie doświadczeń oraz matematyczna teoria eksperymentu są w ciągłym rozwoju, jako dział matematyki stosowanej.

Zgodnie z klasyfikacją zaproponowaną przez Zbigniewa Polańskiego [51, 52, 53] ogół planów dzieli się na: **plany doświadczeń statyczne** (dla statycznych obiektów badań - PS) i **plany doświadczeń dynamiczne** (dla dynamicznych obiektów badań - PD).

Plany statyczne dzieli się dalej na trzy podstawowe grupy: **plany zdeterminowane** (PS/D), **plany randomizowane** (PS/R) i **plany optymalizacyjne** (PS/O). Wśród *planów zdeterminowanych* wyróżnia się plany: **kompletne** (PS/DK) i **selekcyjne** (zwane również **ułamkowymi**) (PS/DS.). W przypadku planów zdeterminowanych i randomizowanych przyjęte na początku układy wartości czynników wejściowych, podczas realizacji badań, nie ulegają zmianie. Natomiast w przypadku planów optymalizacyjnych układy wartości czynników zmienia się w trakcie badań.

Wyczerpujący wykład na temat planów dynamicznych można znaleźć w pracach [48, 51], natomiast na temat planów optymalizacyjnych w pracach [48, 51, 52, 53]. Plany statyczne zdeterminowane randomizowane opisano w rozdziale 6.

W niniejszym rozdziale najpierw określono konieczną liczbę powtórzeń a następnie omówiono kolejno najważniejsze plany statyczne zdeterminowane: **plany dwupoziomowe** (całkowity i ułamkowe), **trójpoziomowe** i **pięciopoziomowe kompozycyjne** (ortogonalne i rotalne).

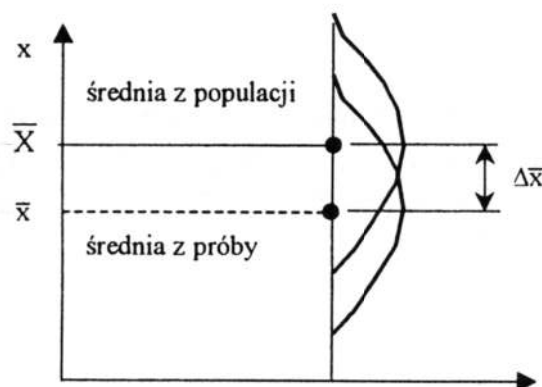
## 10.2. Konieczna liczba powtórzeń

Problem wyznaczania koniecznej liczby doświadczeń stanowi kompromis pomiędzy precyzją badań a ich kosztem. W miarę wzrostu liczby powtórzeń wzrasta precyzja estymacji pewnej charakterystyki populacji, np. zwiększa się precyzja z jaką estymator  $\bar{x}$  (średnia z próby) przybliża wartość  $\bar{X}$  (średnia z populacji). Wzrastają również koszty badań. Istnieje zatem pewna granica liczności próby, której nie należy przekraczać. Z kolei zbyt mała liczność próby doprowadzi do estymatora o niezadowalającej precyzji. Idealny sposób postępowania polega na tym, że najpierw określa się wymaganą precyzję estymacji lub dopuszczalne koszty jakie możemy ponieść. Następnie ustalamy liczbę powtórzeń.

Konieczna liczba powtórzeń zostanie wyznaczona dla przypadku estymacji średniej z populacji. W tym celu wykorzystuje się warunek, by prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wartość bezwzględna różnicy (zwanej odchyleniem)  $\Delta\bar{x}$  pomiędzy średnią z populacji  $\bar{X}$  a jego estymatorem  $\bar{x}$  (średnia z próby)

jest większa od pewnej ustalonej wartości  $d$  (zwanej tolerancją) (rys. 10.1) było przynajmniej mniejsze od założonej wartości poziomu istotności  $\alpha$  [67]:

$$P\{|\bar{X} - \bar{x}| > d\} \leq \alpha. \quad (10.1)$$



Rys. 10.1. Ilustracja średniej z próby i średniej z populacji.

Wartość tolerancji  $d$  i ryzyka  $\alpha$  przekroczenia tej tolerancji ustala osoba prowadząca badanie, biorąc pod uwagę względy praktyczne. Niech:

$$\Delta x = k\bar{x} \quad (10.2)$$

gdzie  $k$  jest założonym współczynnikiem, wskazującym jaką część średniej arytmetycznej stanowi błąd. Często przyjmuje się średnią wartość współczynnika  $k=0,2$  [11]. Nierówność (10.1) można zapisać w postaci:

$$P\left\{\frac{|\bar{X} - \bar{x}|}{S\sqrt{\frac{1-f}{n}}} > \frac{d}{S\sqrt{\frac{1-f}{n}}}\right\} \leq \alpha. \quad (10.3)$$

gdzie  $f=n/N$  jest względną wielkością próby,  $n$  i  $N$  jest liczebnością odpowiednio próby i populacji,  $S$  jest odchyleniem standardowym.

Wychodząc z założenia, że  $\bar{x}$  ma rozkład w przybliżeniu normalny  $\bar{x} \sim N(\bar{x}, (1-f)S^2/n)$ , żądanie, aby była spełniona nierówność (10.1), przy założeniu że liczebność  $n < 30$ , sprowadza się do wymagania, aby:

$$\frac{d}{S\sqrt{\frac{1-f}{n}}} \geq t_{kr} \quad (10.4)$$

gdzie  $t_{kr}$  jest wartością krytyczną testu  $t$ -Studenta, podaną w tablicy 15.4 dla odpowiednich poziomów ufności  $1-\alpha$  i dla różnych liczb stopni swobody  $n-1$ .

Natomiast w przypadku, gdy liczebność  $n \geq 30$ :

$$\frac{d}{S\sqrt{\frac{1-f}{n}}} \geq z_{\alpha}, \quad (10.5)$$

gdzie  $z_{\alpha}$  jest dwustronnym  $\alpha$ -punktem rozkładu normalnego  $N(0,1)$ . Wartości  $z_{\alpha}$  dla danego  $\alpha$  odczytuje się z tablic rozkładu normalnego (tablica 15.18), w których wykorzystuje się zależność:  $\alpha = 2\Phi(z)$ , więc  $\Phi(z) = \alpha/2$ , gdzie  $\Phi(z)$  jest wartością funkcji Laplace'a.

Z nierówności (10.4) otrzymuje się:

$$\left(\frac{d}{St_{kr}}\right)^2 \geq \frac{N-n}{nN}, \quad (10.6)$$

a następnie:

$$nN\left(\frac{d}{St_{kr}}\right)^2 + n \geq N, \quad (10.7)$$

skąd:

$$n \geq \frac{N}{1 + \left(\frac{d}{St_{kr}}\right)^2}. \quad (10.8)$$

Oznaczając we wzorze (10.8):

$$\left(\frac{d}{t_{kr}}\right)^2 = V, \quad (10.9)$$

oraz

$$n_0 = \frac{S^2}{V}, \quad (10.10)$$

otrzymuje się ostatecznie:

$$n \geq \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}. \quad (10.11)$$

Zatem za pierwsze przybliżenie wymaganej liczności próby, przy założeniu że względna liczność próby  $f$  jest niewielka oraz że znana jest wariancja z populacji  $S^2$ , można przyjąć liczbę:

$$n = n_o = \frac{S^2}{V} = \frac{S^2 t_{kr}^2}{d^2}. \quad (10.12)$$

W praktyce jednak, najczęściej  $S^2$  jest nieznana. Wówczas zastępuje się ją estymatorem. Istnieją cztery podstawowe metody estymacji wariancji: *na podstawie badań wstępnych, z poprzednich badań, z próby wstępnej i na podstawie znajomości struktury populacji z praktyki.*

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć ilość pomiarów  $n$  twardości próbki stalowej hartowanej, jeśli tolerancja  $d=0,3$  HRC, standardowy błąd pomiaru  $\sigma=1$  HRC, a poziom ufności  $\alpha=0,95$ . Ponieważ  $2\Phi(t) = \alpha = 0,95$ , więc  $\Phi(t) = 0,4750$ . W tablicy 15.18 rozkładu normalnego znajduje się, że  $z_\alpha=1,96$ . Wobec tego zgodnie ze wzorem (10.12) otrzymuje się:  $n=42,68$ . Po zaokrągleniu liczność próby  $n=43$ .

### 10.3. Programy statyczne zdeterminowane

Metoda funkcji korelacji (rozdz. 8) i metoda analizy regresji (rozdz. 9) oparte były na eksperymencie biernym (pasywnym), polegające na opracowywaniu matematycznym i analizie wyników doświadczeń, w czasie których rejestruje się tylko wartości czynników wejściowych i czynników wyjściowych, nie mając wpływu na zmiany wartości czynników według określonego planu.

Eksperyment aktywny przewiduje przymusową zmianę czynników badanych w wymaganych przedziałach zmienności, zgodnie z ustalonym **planem**.

Pod pojęciem **planowanie doświadczeń** rozumie się realizację eksperymentów według wcześniej ustalonego schematu, który ma właściwości optymalne. Zmienia się przy tym wszystkie czynniki badane.

Statystyczne planowanie doświadczeń jest nowym sposobem podejścia do zagadnień badawczych, w których dużą rolę spełniają metody matematyczne. Pozwala ustalić jakie i ile doświadczeń należy przeprowadzić, jak opracowywać wyniki tych doświadczeń, aby rozwiązać postawione zadania z wcześniej przyjętą dokładnością przy możliwie minimalnej liczbie doświadczeń. Dla badacza są to jedne z najbardziej istotnych problemów.

Przyjęcie odpowiedniego planu eksperymentu jest uzależnione od postaci modelu matematycznego obiektu badań. Po przyjęciu odpowiedniego modelu, konieczne jest określenie przedziału zmienności czynników badanych. Natomiast



dla ułatwienia obliczeń wygodnie jest dokonać odpowiedniej standaryzacji zmiennych. Zagadnienia te zostały dokładnie omówione w rozdziale 7.

### 10.3.1. Dwupoziomowy plan całkowity

Plan dwupoziomowy jest najprostszym przypadkiem analizy czynnikowej, w którym poszczególne zmienne wejściowe przyjmują wartości tylko na dwóch poziomach: poziomie górnym (+1) i poziomie dolnym (-1). W przypadku ogólnym należy więc dokonać  $2^S$  różnych doświadczeń, gdzie S jest liczbą czynników wejściowych. Programy dwupoziomowe umożliwiają identyfikację obiektów opisanych za pomocą funkcji liniowych. Możliwe jest obliczenie maksimum  $2^S$  nieznanych współczynników takiej funkcji. Plany dwupoziomowe mogą być *kompletne* lub *selekcyjne* (ułamkowe).

Program statyczny zdeterminowany kompletny (nazywany również całkowitym doświadczeniem czynnikowym) wymaga realizacji doświadczeń na dwóch poziomach dla wszystkich możliwych układów czynników wejściowych. Programy te stosuje się dla niewielkiej liczby czynników.

Nieznane współczynniki równania regresji otrzymuje się ze wzoru:

$$\{b\} = ([\check{X}]^T [\check{X}])^{-1} [\check{X}]^T \{\bar{Y}\} = \frac{1}{N} [\check{X}]^T \{\bar{Y}\}, \quad (10.13)$$

gdzie:

$[\check{X}]$  - jest macierzą planu eksperymentu,

$([\check{X}]^T [\check{X}])^{-1}$  - jest macierzą kowariancji,

$\{\bar{Y}\}$  - jest wektorem średnich wyników eksperymentu.

W przypadku analizy czynnikowej macierz kowariancji  $([\check{X}]^T [\check{X}])^{-1} = \frac{1}{n} \mathbf{I}$

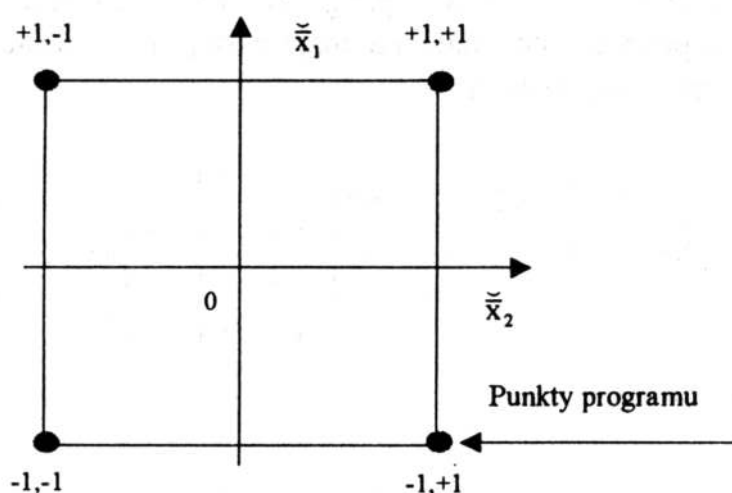
dla planów dwupoziomowych jest diagonalna co znacznie upraszcza obliczenia, gdzie  $n=2^S$  jest liczbą doświadczeń,  $\mathbf{I}$  jest jednostkową macierzą diagonalną, której wymiar zależy od liczby obliczanych współczynników.

Przykładowo dla dwóch zmiennych  $S=2$  należy wykonać  $2^2=4$  doświadczenia. Macierz planu takiego eksperymentu przedstawia tablica 10.1, natomiast graficznie - rysunek 10.2. Pierwsza kolumna macierzy zawierająca wartości +1 dotyczy tak zwanej zmiennej fikcyjnej  $\check{x}_0$ .



Tabela 10.1. Macierz dwupoziomowego planu całkowitego  $\bar{\bar{X}}$  dla 2 zmiennych.

	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$
1	+	-	-
2	+	-	+
3	+	+	-
4	+	+	+



Rys. 10.2. Graficzna ilustracja dwupoziomowego planu statycznego zdefiniowanego kompletnie dla 2 zmiennych.

Powyższy program pozwala wyznaczyć maksymalnie trzy współczynniki modelu liniowego bez interakcji o postaci:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{\bar{x}}_1 + b_2 \bar{\bar{x}}_2. \quad (10.14)$$

W przypadku konieczności wyznaczenia czterech współczynników modelu liniowego o postaci:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \bar{\bar{x}}_1 + b_2 \bar{\bar{x}}_2 + b_{12} \bar{\bar{x}}_1 \bar{\bar{x}}_2, \quad (10.15)$$

w którym jeden współczynnik  $b_{12}$  obrazuje wpływ interakcji, należy macierz planu eksperymentu (tablica 10.1) uzupełnić o kolumnę ujmującą wpływ interakcji badanych czynników  $\bar{\bar{x}}_1 \bar{\bar{x}}_2$  (tablica 10.2).

Tabela 10.2. Macierz planu całkowitego  $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$  dla 2 zmiennych z interakcjami.

	$\tilde{\tilde{x}}_0$	$\tilde{\tilde{x}}_1$	$\tilde{\tilde{x}}_2$	$\tilde{\tilde{x}}_1\tilde{\tilde{x}}_2$
1	+	-	-	+
2	+	-	+	-
3	+	+	-	-
4	+	+	+	+

Nieznane współczynniki równania regresji (10.14) otrzymuje się ze wzoru (10.13). Wówczas poszczególne macierze mają następujące postacie:

- macierz informacyjna Fishera:

$$\mathbf{M} = [\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}]^T [\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- macierz kowariancji:

$$([\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}]^T [\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}])^{-1} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathbf{I}.$$

Stąd:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymuje się:

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{4} [(+1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4],$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{4} [(-1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4],$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{4} [(-1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4].$$

Natomiast dla przypadku obliczania współczynników równania (10.15) otrzymuje się:

- macierz informacyjna Fishera:

$$\mathbf{M} = [\bar{\bar{\mathbf{X}}}]^T [\bar{\bar{\mathbf{X}}}] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

- macierz kowariancji:

$$([\bar{\bar{\mathbf{X}}}]^T [\bar{\bar{\mathbf{X}}}])^{-1} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{b}\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{n} [\bar{\bar{\mathbf{X}}}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymuje się:

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{4} [(+1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4],$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{4} [(-1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4],$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{4} [(-1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4],$$

$$\mathbf{b}_{12} = \frac{1}{4} [(+1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_2 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4].$$

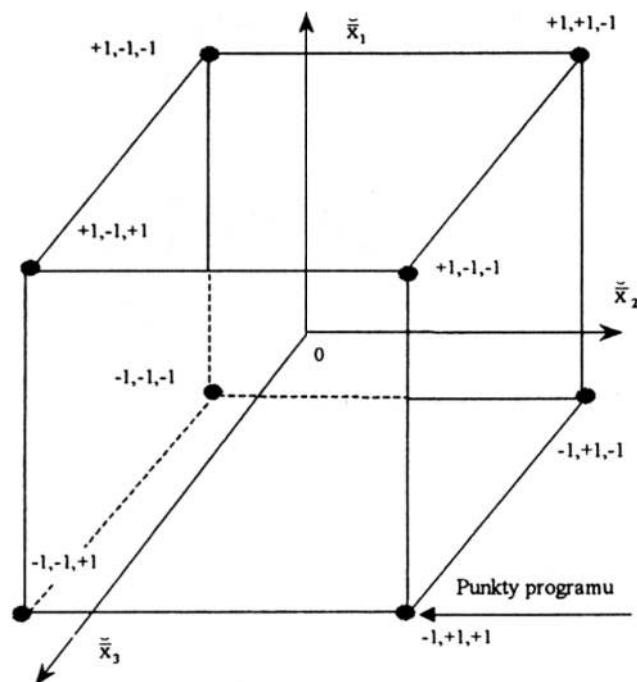
Natomiast dla 3 zmiennych plan całkowity eksperymentu zawiera 8 doświadczeń ( $2^3$ ). Macierz planowania takiego doświadczenia można zinterpretować tabelarycznie (tabela 10.3) lub geometrycznie (rys. 10.3).

Wyniki badań zrealizowanych zgodnie z macierzą planu (tablica 10.3) pozwalają wyznaczyć 4 nieznanne współczynniki liniowego równania, bez uwzględnienia wpływu interakcji, o postaci:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1\bar{\bar{x}}_1 + b_2\bar{\bar{x}}_2 + b_3\bar{\bar{x}}_3. \quad (10.16)$$

Tabela 10.3. Macierz dwupoziomowego planu całkowitego  $\bar{\bar{X}}$  dla 3 zmiennych.

	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$
1	+	-	-	-
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	-
5	+	-	-	+
6	+	+	-	+
7	+	-	+	+
8	+	+	+	+



Rys. 10.3. Graficzna ilustracja dwupoziomowego planu statycznego zdeterminowanego kompletnego dla 3 zmiennych.

Nieznane współczynniki równania regresji (10.16) otrzymuje się ze wzoru (10.13). W tym przypadku poszczególne macierze mają następujące postacie:

- macierz informacyjna Fishera:

$$\mathbf{M} = [\bar{\bar{\mathbf{X}}}]^T [\bar{\bar{\mathbf{X}}}] =$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- macierz kowariancji:

$$([\bar{\bar{\mathbf{X}}}]^T [\bar{\bar{\mathbf{X}}}] )^{-1} = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \\ \bar{y}_5 \\ \bar{y}_6 \\ \bar{y}_7 \\ \bar{y}_8 \end{bmatrix}.$$

I ostatecznie:

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} [\check{\mathbf{X}}]^T \{\check{\mathbf{Y}}\} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \\ \bar{y}_5 \\ \bar{y}_6 \\ \bar{y}_7 \\ \bar{y}_8 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymuje się:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N \check{x}_{ji} \bar{y}_i}{n},$$

$$b_0 = \frac{1}{8} [(+1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + (+1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_8],$$

$$b_1 = \frac{1}{8} [(-1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + (-1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_6 + (-1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_8],$$

$$b_2 = \frac{1}{8} [(-1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + (-1)\bar{y}_5 + (-1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_8],$$

$$b_3 = \frac{1}{8} [(-1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_2 + (-1)\bar{y}_3 + (-1)\bar{y}_4 + (+1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_8].$$

Natomiast w celu wyznaczenia maksymalnie 8 nieznanymi współczynników liniowego równania o postaci:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \check{x}_1 + b_2 \check{x}_2 + b_3 \check{x}_3 + b_{12} \check{x}_1 \check{x}_2 + b_{13} \check{x}_1 \check{x}_3 + b_{23} \check{x}_2 \check{x}_3 + b_{123} \check{x}_1 \check{x}_2 \check{x}_3,$$

zawierającego 3 interakcje podwójne i jedną interakcję potrójną badanych czynników, należy uzupełnić plan eksperymentu podany w tablicy 10.3 wartościami iloczynów  $\check{x}_1 \check{x}_2$ ,  $\check{x}_1 \check{x}_3$ ,  $\check{x}_2 \check{x}_3$  i  $\check{x}_1 \check{x}_2 \check{x}_3$ . Taki plan eksperymentu można przedstawić tabelarycznie (tabl. 10.4) lub zapisać kodem za pomocą liter alfabetu łacińskiego:

$$(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc. \quad (10.17)$$

Literami oznacza się wiersze tablicy dla czynników, które przyjmują wartości odpowiadające górnym poziomom. Doświadczenie, w którym wszystkie czynniki mają wartość odpowiadającą dolnym poziomom oznacza się (1). Wprowadzenie zapisu kodowego umożliwia tworzenie planów typu  $2^{S+1}$  na podstawie planów  $2^S$ . Przykładowo na podstawie planu  $2^3$  można utworzyć plan  $2^4$  w następujący sposób. Należy dwukrotnie powtórzyć plan (10.17): raz dla czynnika  $\bar{\bar{x}}_4$  znajdującego się na dolnym poziomie (-1) i raz dla czynnika  $\bar{\bar{x}}_4$  znajdującego się na górnym poziomie (+1), otrzymując plan który można zapisać kodem:

$$(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd. \quad (10.18)$$

W analogiczny sposób można kolejno tworzyć plany eksperymentu dla dowolnej liczby S zmiennych wejściowych  $\bar{\bar{x}}_i$ .

Tablica 10.4. Macierz planu eksperymentu  $\bar{\bar{X}}$  dla 3 czynników z interakcjami.

	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$	Kod
1	+	-	-	-	+	+	+	-	(1)
2	+	+	-	-	-	-	+	+	a
3	+	-	+	-	-	+	-	+	b
4	+	+	+	-	+	-	-	-	ab
5	+	-	-	+	+	-	-	+	c
6	+	+	-	+	-	-	-	-	ac
7	+	-	+	+	-	-	+	-	bc
8	+	+	+	+	+	+	+	+	abc

Plan całkowity, zawierający  $n=2^S$  różnych doświadczeń spełnia trzy warunki:

1. Symetrię doświadczeń względem środka planu:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{ik} = 0, \quad k=1, 2, \dots, S, \quad (10.19)$$

2. Ortogonalność, polegającą na zerowaniu się wszystkich iloczynów skalarnych wektorów kolumnowych macierzy planu  $\bar{\bar{X}}$ :

$$\sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{ik} \bar{\bar{x}}_{ij} = 0, \quad k=0,1, 2, \dots, S \quad k \neq j, \quad (10.20)$$

dzięki której macierz kowariancji  $(\bar{\bar{X}}^T \bar{\bar{X}})^{-1}$  jest diagonalna.





Tablica 10.6. Drugie półpowtórzenie planu typu  $2^{3-1}$ .

	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$	Kod
1	+	-	-	-	+	+	+	-	(1)
2	+	+	+	-	+	-	-	-	ab
3	+	-	+	+	-	-	+	-	bc
4	+	+	-	+	-	+	-	-	ac

Plan połówkowy podany w tablicy 10.5 określa równość:

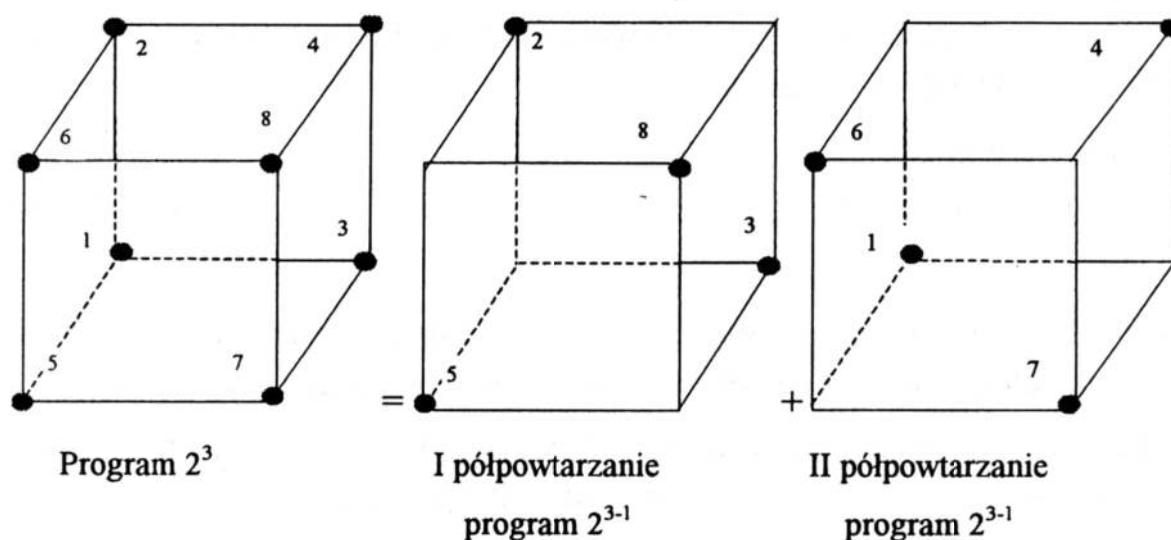
$$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 = +1,$$

zwana równością charakterystyczną lub kontrastem określającym a plan połówkowy podany w tablicy 10.6, równość:

$$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 = -1.$$

Każde z półpowtórzeń umożliwia wyznaczenie jedynie tylu współczynników regresji, ile zrealizowano badań. Nie uwzględnia się przy tym pomiarów równoległych.

Macierze planów ułamkowych można również przedstawić graficznie jak na rysunku 10.4.



Rys. 10.4. Graficzna ilustracja dwupoziomowych planów statycznych zdeteminowanych ułamkowych typu  $2^{3-1}$ .

Plany ułamkowe tworzy się tak, aby spełniały trzy warunki obowiązujące dla planu całkowitego, określone wzorami (10.19)÷(10.21). Aby plan ułamkowy spełniał warunek ortogonalności, macierz planu całkowitego można jedynie dzielić na 2, 4, 8, części, a więc tworzyć plany połówkowe, ćwiartkowe, ósemkowe itd.

### 10.3.2. Plany trójpoziomowe

Jak już wspomniano plany dwupoziomowe służą jedynie do identyfikacji obiektów liniowych. W przypadku, identyfikacji obiektów nieliniowych, stosowanie planów dwupoziomowych jest nieprzydatne. Również posługiwanie się metodą największego spadku kończy się po znalezieniu się na ograniczeniach, bądź w pobliżu punktu stacjonarnego o zerowych pochodnych cząstkowych. Obszar w pobliżu punktu stacjonarnego opisuje się za pomocą wielomianu drugiego stopnia.

Zatem w obu tych przypadkach posługujemy się modelem matematycznym w postaci wielomianu kwadratowego z podwójnymi interakcjami postaci (por. rozdz. 7):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^s b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^s b_{ii} \bar{x}_i^2 = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_s \bar{x}_s + \\ + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \dots + b_{s-1,s} \bar{x}_{s-1} \bar{x}_s + b_{11} \bar{x}_1^2 + \dots + b_{ss} \bar{x}_s^2, \quad (10.24)$$

gdzie  $\bar{x}_i$  zmienne wejściowe w jednostkach naturalnych.

W celu obliczenia współczynników wielomianu drugiego stopnia należy dysponować wynikami planu, w którym poszczególne zmienne przyjmują wartości co najmniej na 3 poziomach.

W przypadku planów trójpoziomowych poszczególne zmienne wejściowe  $\bar{x}_i$  przyjmują wartości na trzech poziomach:

$$\left. \begin{array}{l} \text{poziomie górnym:} \\ \text{poziomie centralnym:} \\ \text{poziomie dolnym:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{x}_{i0} + \Delta\bar{x}_i, \\ \bar{x}_{i0}, \\ \bar{x}_{i0} - \Delta\bar{x}_i, \end{array} \quad (10.25)$$

gdzie  $\Delta\bar{x}_i$  są planowanymi wartościami bezwzględnych zmian czynnika  $\bar{x}_i$  w skali naturalnej. Zatem eksperyment zawiera w tym przypadku  $3^s$  doświadczeń.

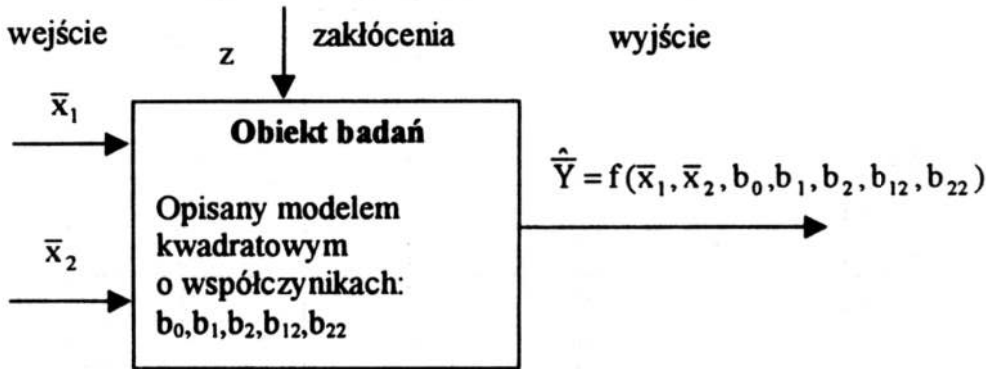
Jak już wcześniej wspomniano, w analizie czynnikowej dla uproszczenia obliczeń wprowadza się zmienne standaryzowane  $\tilde{\bar{x}}_i$  zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{\bar{x}}_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta\bar{x}_i}. \quad (10.26)$$

Zmienne zakodowane  $\tilde{\bar{x}}_i$  po podstawieniu wartości (10.25) do wzoru (10.26) przyjmują następujące wartości:

$$\tilde{\bar{x}}_i = +1, 0, -1. \quad (10.27)$$

Sposób tworzenia planów trójpoziomowych zostanie przedstawiony na przykładzie optymalizacji obiektu pokazanego na rysunku 10.5 dwóch zmiennych wejściowych  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_2$ .



Rys. 10.5. Model obiektu badań.

Model matematyczny badanego obiektu ma wówczas następującą postać szczególną:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^2 b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^2 b_{ii} \bar{x}_i^2 = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{22} \bar{x}_2^2. \quad (10.28)$$

Podstawiając do wzoru (10.28) zależności otrzymane z przekształcenia wzoru (10.26):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1, \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2, \end{aligned} \quad (10.29)$$

otrzymuje się równanie dla zakodowanych wartości zmiennych:

$$\hat{Y} = k_0 \bar{\bar{x}}_0 + k_1 \bar{\bar{x}}_1 + k_2 \bar{\bar{x}}_2 + k_{12} \bar{\bar{x}}_1 \bar{\bar{x}}_2 + k_{22} \bar{\bar{x}}_2^2, \quad (10.30)$$

w którym  $\bar{\bar{x}}_0$  jest zmienną fikcyjną, upraszczającą zapis dalszych wzorów, natomiast:

$$\begin{aligned} k_0 &= b_0 + b_1 \bar{x}_{10} + b_2 \bar{x}_{20} + b_{22} (\Delta \bar{x}_{20})^2 + b_{12} \bar{x}_{10} \bar{x}_{20}, \\ k_1 &= b_1 \Delta \bar{x}_1 + b_{12} \Delta \bar{x}_1 \bar{x}_{20}, \\ k_2 &= b_2 \Delta \bar{x}_2 + 2b_{22} \Delta \bar{x}_2 \bar{x}_{20} + b_{12} \Delta \bar{x}_2 \bar{x}_{10}, \\ k_{22} &= b_{22} (\Delta \bar{x}_2)^2, \quad k_{12} = b_{12} \Delta \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Eksperyment składa się z  $3^2=9$  doświadczeń (tablica 10.7)

Tablica 10.7. Plan eksperymentu typu  $3^2$ .

Numer doświadczenia	Zmienne standaryzowane			Kwadraty	Interakcje
	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_2^2$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2$
1	+1	+1	+1	1	+1
2	+1	+1	0	0	0
3	+1	+1	-1	1	-1
4	+1	0	+1	1	0
5	+1	0	0	0	0
6	+1	0	-1	1	0
7	+1	-1	+1	1	-1
8	+1	-1	0	0	0
9	+1	-1	-1	1	+1

natomiast macierz planu ma postać podaną w tablicy 10.8.

Tablica 10.8. Macierz planu eksperymentu typu  $3^2$  dla równania (10.30).

$$[\bar{\bar{X}}] = \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_{01} & \bar{\bar{x}}_{11} & \bar{\bar{x}}_{21} & \bar{\bar{x}}_{21}^2 & \bar{\bar{x}}_{11}\bar{\bar{x}}_{21} \\ \bar{\bar{x}}_{02} & \bar{\bar{x}}_{12} & \bar{\bar{x}}_{22} & \bar{\bar{x}}_{22}^2 & \bar{\bar{x}}_{12}\bar{\bar{x}}_{22} \\ \bar{\bar{x}}_{03} & \bar{\bar{x}}_{13} & \bar{\bar{x}}_{23} & \bar{\bar{x}}_{23}^2 & \bar{\bar{x}}_{13}\bar{\bar{x}}_{23} \\ \bar{\bar{x}}_{04} & \bar{\bar{x}}_{14} & \bar{\bar{x}}_{24} & \bar{\bar{x}}_{24}^2 & \bar{\bar{x}}_{14}\bar{\bar{x}}_{24} \\ \bar{\bar{x}}_{05} & \bar{\bar{x}}_{15} & \bar{\bar{x}}_{25} & \bar{\bar{x}}_{25}^2 & \bar{\bar{x}}_{15}\bar{\bar{x}}_{25} \\ \bar{\bar{x}}_{06} & \bar{\bar{x}}_{16} & \bar{\bar{x}}_{12} & \bar{\bar{x}}_{26}^2 & \bar{\bar{x}}_{16}\bar{\bar{x}}_{26} \\ \bar{\bar{x}}_{07} & \bar{\bar{x}}_{17} & \bar{\bar{x}}_{27} & \bar{\bar{x}}_{27}^2 & \bar{\bar{x}}_{17}\bar{\bar{x}}_{27} \\ \bar{\bar{x}}_{08} & \bar{\bar{x}}_{18} & \bar{\bar{x}}_{28} & \bar{\bar{x}}_{28}^2 & \bar{\bar{x}}_{18}\bar{\bar{x}}_{28} \\ \bar{\bar{x}}_{09} & \bar{\bar{x}}_{19} & \bar{\bar{x}}_{29} & \bar{\bar{x}}_{29}^2 & \bar{\bar{x}}_{19}\bar{\bar{x}}_{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

Nieznane współczynniki w równania regresji (10.30) otrzymuje się ze wzoru:

$$\{\mathbf{b}\} = ([\bar{\bar{X}}]^T [\bar{\bar{X}}])^{-1} [\bar{\bar{X}}]^T \{\bar{\bar{Y}}\}, \quad (10.33)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{b}\} &= [k_0 \ k_1 \ k_2 \ k_{11} \ k_{22} \ k_{12}]^T, \\ \{\bar{\bar{Y}}\} &= [\bar{y}_1 \ \bar{y}_2 \ \bar{y}_3 \ \bar{y}_4 \ \bar{y}_5 \ \bar{y}_6 \ \bar{y}_7 \ \bar{y}_8 \ \bar{y}_9]^T. \end{aligned} \quad (10.34)$$

W tym przypadku poszczególne macierze mają następujące postacie:

a) macierz informacyjna Fishera:

$$\mathbf{M} = [\ddot{\mathbf{X}}]^T [\ddot{\mathbf{X}}] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

b) macierz kowariancji, która jest macierzą odwrotną do macierzy informacyjnej  $\mathbf{M}$ . W tym celu wykorzystuje się wzór ogólny określania macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^D}{\det \mathbf{A}}, \text{ gdy } \det \mathbf{A} \neq 0, \quad (10.36)$$

gdzie  $\mathbf{A}^D$  jest macierzą dołączoną, która jest transponowaną macierzą dopełnień algebraicznych  $\mathbf{A}^D = \mathbf{A}_{ik}^T$ . Dopełnienia algebraiczne  $A_{ik}$  tworzy się z minorów  $M_{ik}$ , zgodnie ze wzorem  $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ , natomiast  $\det \mathbf{A}$  jest wyznacznikiem macierzy  $\mathbf{A}$ .

W omawianym przypadku wzór (10.36) przyjmuje postać:

$$([\ddot{\mathbf{X}}]^T [\ddot{\mathbf{X}}])^{-1} = \mathbf{M}^{-1} = \frac{\mathbf{M}^D}{\det \mathbf{M}} = \frac{([\ddot{\mathbf{X}}]^T [\ddot{\mathbf{X}}])^D}{\det([\ddot{\mathbf{X}}]^T [\ddot{\mathbf{X}}])}, \text{ gdy } \det \mathbf{M} \neq 0. \quad (10.37)$$

W celu utworzenia macierzy kowariancji przeprowadza się następujące obliczenia:

- tworzy się 25 dopełnień algebraicznych macierzy  $\mathbf{M} = [\ddot{\mathbf{X}}]^T [\ddot{\mathbf{X}}]$ :

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 864,$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{14} &= -864, & M_{15} &= 0, \\ M_{21} &= 0, & M_{22} &= 432, & M_{23} &= 0, & M_{24} &= 0, & M_{25} &= 0, \\ M_{25} &= 0, & M_{32} &= 0, & M_{33} &= 432, & M_{34} &= 0, & M_{35} &= 0, \\ M_{41} &= -864, & M_{42} &= 0, & M_{43} &= 0, & M_{44} &= 1296, & M_{45} &= 0, \\ M_{51} &= 0, & M_{52} &= 0, & M_{53} &= 0, & M_{53} &= 0, & M_{55} &= 648, \end{aligned}$$

- utworzenie macierzy dopełnień:

$$M^D = \begin{bmatrix} 864 & 0 & 0 & -864 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 432 & 0 & 0 \\ -864 & 0 & 0 & 1296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 648 \end{bmatrix},$$

- obliczenie wyznacznika macierzy informacyjnej  $M$ :

$$\begin{aligned} \det M &= (-1)^{1+1} 9 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} 6 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1)^{2+2} 9 \cdot 6 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{1+4} \cdot (-1)^{2+2} 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 7776 - 5184 = 2592. \end{aligned}$$

- obliczenie macierzy kowariancji:

$$(\ddot{X})^T (\ddot{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$



c) obliczenie iloczynu macierzy  $([\tilde{\mathbf{X}}]^T[\tilde{\mathbf{X}}])^{-1}[\tilde{\mathbf{X}}]^T$  :

$$([\tilde{\mathbf{X}}]^T[\tilde{\mathbf{X}}])^{-1}[\tilde{\mathbf{X}}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & +\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie otrzymuje się następujące współczynniki modelu matematycznego według wzoru (10.30):

$$k_0 = \frac{1}{3}[(+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_8],$$

$$k_1 = \frac{1}{6}[(+1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (-1)\bar{y}_7 + (-1)\bar{y}_8 + (-1)\bar{y}_9],$$

$$k_2 = \frac{1}{6}[(+1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + (-1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + (-1)\bar{y}_9],$$

$$k_{22} = \frac{1}{6}[(-1)\bar{y}_1 + 2(-1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + 2(-1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + 2(-1)\bar{y}_8 + (+1)\bar{y}_9],$$

$$k_{12} = \frac{1}{4}[(+1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_3 + (-1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_9].$$

W celu znalezienia modelu matematycznego w skali naturalnej należy odkodować równanie (10.30) poprzez podstawienie do niego odpowiednich zależności kodowych obliczonych ze wzoru (10.26).

$$M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{14} &= -864, & M_{15} &= 0, \\ M_{21} &= 0, & M_{22} &= 432, & M_{23} &= 0, & M_{24} &= 0, & M_{25} &= 0, \\ M_{25} &= 0, & M_{32} &= 0, & M_{33} &= 432, & M_{34} &= 0, & M_{35} &= 0, \\ M_{41} &= -864, & M_{42} &= 0, & M_{43} &= 0, & M_{44} &= 1296, & M_{45} &= 0, \\ M_{51} &= 0, & M_{52} &= 0, & M_{53} &= 0, & M_{53} &= 0, & M_{55} &= 648, \end{aligned}$$

- utworzenie macierzy dopełnień:

$$\mathbf{M}^D = \begin{bmatrix} 864 & 0 & 0 & -864 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 432 & 0 & 0 \\ -864 & 0 & 0 & 1296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 648 \end{bmatrix},$$

- obliczenie wyznacznika macierzy informacyjnej  $\mathbf{M}$ :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M} &= (-1)^{1+1} 9 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} 6 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1)^{2+2} 9 \cdot 6 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{1+4} \cdot (-1)^{2+2} 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 7776 - 5184 = 2592. \end{aligned}$$

- obliczenie macierzy kowariancji:

$$(\tilde{\mathbf{X}})^T (\tilde{\mathbf{X}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

c) obliczenie iloczynu macierzy  $([\tilde{\mathbf{X}}]^T[\tilde{\mathbf{X}}])^{-1}[\tilde{\mathbf{X}}]^T$ :

$$([\tilde{\mathbf{X}}]^T[\tilde{\mathbf{X}}])^{-1}[\tilde{\mathbf{X}}]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 & 0 & +\frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & +\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie otrzymuje się następujące współczynniki modelu matematycznego według wzoru (10.30):

$$k_0 = \frac{1}{3}[(+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_8],$$

$$k_1 = \frac{1}{6}[(+1)\bar{y}_1 + (+1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (-1)\bar{y}_7 + (-1)\bar{y}_8 + (-1)\bar{y}_9],$$

$$k_2 = \frac{1}{6}[(+1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + (-1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + (-1)\bar{y}_9],$$

$$k_{22} = \frac{1}{6}[(-1)\bar{y}_1 + 2(-1)\bar{y}_2 + (+1)\bar{y}_3 + (+1)\bar{y}_4 + 2(-1)\bar{y}_5 + (+1)\bar{y}_6 + (+1)\bar{y}_7 + 2(-1)\bar{y}_8 + (+1)\bar{y}_9],$$

$$k_{12} = \frac{1}{4}[(+1)\bar{y}_1 + (-1)\bar{y}_3 + (-1)\bar{y}_7 + (+1)\bar{y}_9].$$

W celu znalezienia modelu matematycznego w skali naturalnej należy odkodować równanie (10.30) poprzez podstawienie do niego odpowiednich zależności kodowych obliczonych ze wzoru (10.26).

Na podstawie otrzymanego modelu matematycznego (10.30) można wyznaczyć optimum ze względu na  $\bar{\bar{x}}_2$ . Różniczkując to równanie względem  $\bar{\bar{x}}_2$  oraz przyrównując pochodną cząstkową do zera:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \bar{\bar{x}}_2} = k_2 + 2k_{22}\bar{\bar{x}}_2 + k_{12}\bar{\bar{x}}_1 = 0.$$

otrzymuje się warunek optymalności w postaci:

$$\bar{\bar{x}}_{2\text{opt}} = -\frac{1}{2k_{22}}(k_2 + k_{12}\bar{\bar{x}}_1).$$

Przedstawione plany trójpoziomowe są **planami całkowitymi**. Dotychczas nie podano koncepcji tworzenia **planów ułamkowych** z doświadczeń na 3 poziomach. Dlatego też plany te wykorzystuje się najczęściej dla przypadku identyfikacji obiektów nieliniowych opisywanych małą liczbą zmiennych  $S=2, 3$ . Przy większej liczbie zmiennych następuje gwałtowny wzrost liczby doświadczeń. Dla  $S=4$  plan obejmuje  $N=3^4=81$  doświadczeń, a przy  $S=5$  mamy  $N=3^5=243$  doświadczeń. Plany trójpoziomowe nie nadają się również do identyfikacji obiektów silnie nieliniowych.

#### 10.3.4. Plany pięciopoziomowe kompozycyjne

Trudność stosowania planów trójpoziomowych dla większej liczby zmiennych wejściowych  $S=4,5,6,\dots$ , eliminuje się stosując pewien typ planów pięciopoziomowych, zwanych **planami kompozycyjnymi**. Plany te tworzy się przez uzupełnienie **planu dwupoziomowego** np. typu  $2^S$  lub **ułamkowego planu dwupoziomowego** typu  $2^{S-P}$  (uzasadnionego dla dużych  $S>5$ ), **symetrycznymi doświadczeniami gwiazdnymi**, w których zmieniamy kolejno poszczególne czynniki na dwóch poziomach  $\pm\alpha$  (zwanych **punktami gwiazdnymi**), przy pozostałych zmiennych na poziomie 0, a więc doświadczeniami typu  $(0, \dots, 0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$  oraz **doświadczeniami centralnymi** typu  $(0, 0, \dots, 0)$  (tablica 10.9). Przy takim planie kompozycyjnym ogólna liczba doświadczeń  $n$  wynosi:

- jeśli jądrem programu jest program kompletny typu  $2^S$ :

$$n = 2^S + n_\alpha + n_0 = 2^S + 2S + n_0, \quad (10.38)$$

- jeśli jądrem programu jest program selekcyjny (ułamkowy) typu  $2^{S-P}$ :

$$n = 2^{S-P} + n_\alpha + n_0 = 2^{S-P} + 2S + n_0, \quad (10.39)$$

gdzie:

- $n_\alpha$  – liczba pomiarów w punktach gwiazdnych,
- $n_0$  – liczba pomiarów w centrum,
- $S$  – liczba czynników badanych.

Tablica 10.9. Planu eksperymentu typu  $2^3+2^3+n_0$ .

	Nr doświadczenia	Zmienna zakodowana		
		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$
Jądro programu Liczba pomiarów $2^3$	1	-1	-1	-1
	2	+1	-1	-1
	3	-1	+1	-1
	4	-1	-1	+1
	5	+1	+1	-1
	6	+1	-1	+1
	7	-1	+1	+1
	8	+1	+1	+1
Punkty gwiazdne Liczba pomiarów $2 \times 3$	9	$-\alpha$	0	0
	10	$+\alpha$	0	0
	11	0	$-\alpha$	0
	12	0	$+\alpha$	0
	13	0	0	$-\alpha$
	14	0	0	$+\alpha$
Centrum programu Liczba pomiarów $n_0$	15	0	0	0
	.	0	0	0
	.	0	0	0
	N	0	0	0

Plany pięciopoziomowe kompozycyjne pozwalają na wyznaczenie nieznanych współczynników w modelu matematycznym w postaci równania kwadratowego z interakcjami (por. rozdz. 7). Przykładowo rozpatrzmy wielomian kwadratowy w postaci zakodowanej, dla trzech zmiennych  $S=3$ , z interakcjami podwójnymi i potrójną:

$$\begin{aligned}
 \hat{Y} &= k_0 \bar{x}_0 + \sum_{i=1}^3 k_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^3 k_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 k_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + k_{123} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\
 &= k_0 \bar{x}_0 + k_1 \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2 + k_3 \bar{x}_3 + k_{11} \bar{x}_1^2 + k_{22} \bar{x}_2^2 + k_{33} \bar{x}_3^2 + \\
 &+ k_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + k_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + k_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + k_{123} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.
 \end{aligned}
 \tag{10.40}$$

Należy więc wyznaczyć 11 nieznanych współczynników równania (10.40). Plan eksperymentu dla tego przypadku przedstawia tablica 10.9, natomiast macierz planu – tablica 10.10.

Plany pięciopoziomowe kompozycyjne ze względu na to, że pozwalają wyznaczyć nieznanne współczynniki równania kwadratowego nazywane są również **programami II rzędu**.

Tablica 10.10. Macierz  $\bar{\bar{X}}$  planu eksperymentu dla równania (10.40).

	$\bar{\bar{x}}_0$	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1^2$	$\bar{\bar{x}}_2^2$	$\bar{\bar{x}}_3^2$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3$
$\bar{\bar{X}} =$	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1
	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1
	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1
	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1
	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
	+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0	0	0
	+1	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0	0	0
	+1	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0	0
	+1	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0	0
	+1	0	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0
	+1	0	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Plany pięciopoziomowe kompozycyjne według [51] dzieli się na: **plany ortogonalne**, **plany rotalne** (*uniforormalne* i *ortogonalne*) i **programy optymalne**.

W dalszej części niniejszego rozdziału podane zostaną podstawowe wiadomości dotyczące planów **ortogonalnych** i **rotalnych**. W **programach optymalnych** dokładność, z jaką funkcja regresji opisuje obiekt badań, przyjmuje się jako kryterium optymalności danego programu. Wykład na temat programów optymalnych charakteryzujących się następującymi kryteriami optymalności: D-optymalność, A-optymalność, E-optymalność, G-optymalność i Q-optymalność zawierają prace [15], [16] i [48].

### 10.3.4.1. Programy ortogonalne

W przypadku planów ortogonalnych, zgodnie z pkt. 10.5.3 należy wykonać:

1.  $n$  doświadczeń w jądrze programu –  $2^S$  lub  $2^{S-P}$ ,
2.  $2S$  doświadczeń w punktach gwiazdnych. Ramię gwiazdne  $\alpha$  dla programu dobiera się tak, aby był spełniony warunek ortogonalności programu. Jest to równoznaczne wymaganiu ortogonalności macierzy informacyjnej  $\mathbf{M}$  Fischera.
3.  $n_0$  doświadczeń w centrum programu. Najczęściej przyjmuje się  $n_0=1$ .

Ogólna liczba doświadczeń (bez uwzględnienia powtórzeń) wynosi:

- jeśli jądrem programu jest program kompletny typu  $2^S$ :

$$n = 2^S + 2S + 1, \quad (10.41)$$

- jeśli jądrem programu jest program selekcyjny (ułamkowy) typu  $2^{S-P}$ :

$$n = 2^{S-P} + 2S + 1. \quad (10.42)$$

Więc dla przypadku  $S=3$  i realizacji programu typu 2 otrzymuje się  $n=15$ , a dla przypadku  $S=4$ ,  $N=25$ .

Tablica 10.11.

Liczba czynników $S$	Jądro programu		Wartość ramienia gwiazdowego	Ogólna liczba doświadczeń $n$ dla $n_0=1$
	$2^S$	$2^{S-P}$		
2	$2^2$	—	1,000	9
3	$2^3$	—	1,215	15
4	$2^4$	—	1,414	25
5	$2^5$	—	1,596	43
6	$2^6$	—	1,761	77
7	$2^7$	—	1,909	143
8	$2^8$	—	2,045	273
9	$2^9$	—	2,170	531
5	—	$2^{5-1}$	1,547	27
6	—	$2^{6-1}$	1,724	45
7	—	$2^{7-1}$	1,885	79
8	—	$2^{8-1}$	2,029	145
9	—	$2^{9-1}$	2,160	275
10	—	$2^{10-1}$	2,280	533



Wartość ramienia gwiazdowego  $\alpha$  wyznaczona z warunku ortogonalności planu w przypadku, gdy jądrem programu jest program kompletny, dla założonej liczby doświadczeń  $n_0$ , wynosi:

$$\alpha = \sqrt{0,5[\sqrt{2^S(2^S + 2S + n_0)} - 2^S]} . \quad (10.43)$$

W przypadku stosowania ułamkowego planu dwupoziomowego  $2^{S-P}$  (uzasadnionego dla dużych  $S > 5$ ):

$$\alpha = \sqrt{0,5[\sqrt{2^{S-P}(2^{S-P} + 2S + n_0)} - 2^{S-P}]} . \quad (10.44)$$

Przyjmując wartość ramienia gwiazdowego  $\alpha$  zgodnie ze wzorem (10.43) w przypadku całkowitego planu dwupoziomowego, bądź zgodnie ze wzorem (10.44) w przypadku ułamkowego planu dwupoziomowego otrzymujemy całkowitą ortogonalność planu drugiego stopnia.

Obliczone na podstawie wzorów (10.43) i (10.44) wartości ramienia gwiazdowego dla różnej liczby czynników badanych  $S$ , typu programu selekcyjnego oraz ogólną liczbę doświadczeń dla  $n_0=1$  zestawiono w tabelicy 10.11.

Nieznane współczynniki równania regresji otrzymuje się ze wzoru:

$$\{k\} = ([\check{\check{X}}]^T [\check{\check{X}}])^{-1} [\check{\check{X}}]^T \{\check{\check{Y}}\} . \quad (10.45)$$

Dzięki ortogonalności planu otrzymuje się następujące zależności [48]:

- na współczynniki  $k_i$ ,  $i=1,2,\dots,S$ :

$$k_i = \frac{\sum_{l=1}^n \check{\check{x}}_{il} \check{\check{y}}_l}{\sum_{l=1}^n \check{\check{x}}_{il}^2} , \quad (10.46)$$

- na współczynniki  $k_{ii}$ ,  $i=1,2,\dots,S$ :

$$k_{ii} = \frac{\sum_{l=1}^n (\check{\check{x}}'_{il})^2 \check{\check{y}}_l}{\sum_{l=1}^n [(\check{\check{x}}'_{il})^2]^2} , \quad (10.47)$$

$$\text{gdzie: } (\check{\check{x}}'_{il})^2 = \check{\check{x}}_{il}^2 - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \check{\check{x}}_{il}^2 ,$$

- na współczynniki  $k_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, S$ , lecz  $i < j$ :

$$k_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n \bar{\bar{x}}_{il} \bar{\bar{x}}_{jl} \bar{y}_l}{\sum_{l=1}^n (\bar{\bar{x}}_{il} \bar{\bar{x}}_{jl})^2}, \quad (10.48)$$

- na współczynnik  $k_0$ :

$$k_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{y}_l - \left( \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \bar{\bar{x}}_{il}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^S k_{ii} \right). \quad (10.49)$$

Zasadniczą wadą omówionych planów kompozycyjnych ortogonalnych jest brak rotatabilności, tj. występuje różna wariancja przewidywanej wartości równania regresji  $\hat{\bar{y}}$  ( $\text{var}(\hat{\bar{y}})$ ) w zależności od przyjętego kierunku oddalania się od środka planu eksperymentu. Poza tym otrzymane współczynniki funkcji regresji są powiązane, niektóre kowariancje współczynników są niezerowe.

#### 10.3.4.2. Programy rotalne

Wymienione wady programów ortogonalnych eliminuje się wprowadzając plany pięciopoziomowe rotalne. Realizacja planów rotalnych wymaga wykonania większej liczby doświadczeń. Plany rotalne zapewniają zmniejszenie i ujednoczenie ocen współczynników regresji. Ponadto plany te zapewniają jednakową wariancję w miarę oddalania się od środka planu, dlatego też plany te są nazywane są planami o **kulistym rozkładzie informacji**.

Aby otrzymać plany rotalne, proponuje się stosować plany podobne do ortogonalnych, lecz różniące się wartością ramienia gwiazdowego  $\alpha$  oraz liczbą  $n_0$  doświadczeń w punkcie centralnym planu eksperymentu.

Warunkiem koniecznym dla rotalności jest niezmienniczość macierzy kowariancji względem ortogonalnego obrotu współrzędnych. Spełnienie tego warunku wymaga, aby wszystkie momenty nieparzyste były równe zeru:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{is} = 0, \quad s=1, 2, \dots, S, \quad (10.50)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{is} \bar{\bar{x}}_{ij} \bar{\bar{x}}_{ik} = 0, \quad s, j, k=1, 2, \dots, S, \quad (10.51)$$

oraz aby spełniona była następująca równość:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{is}^4 = 3 \sum_{i=1}^n \bar{\bar{x}}_{is}^2 \bar{\bar{x}}_{is}^2, \quad s, j=1, 2, \dots, S. \quad (10.52)$$

Aby spełnić powyższe warunki rotalności, należy przyjąć inne niż w opisanym w pkt. 10.5.3.1 programie ortogonalnym, wartości ramienia gwiazdowego  $\alpha$  i liczbę doświadczeń w centrum programu  $n_0$ . Wartość ramienia gwiazdowego oblicza się teraz z warunku (10.52), który można zapisać syntetycznie wprowadzając momenty  $\lambda_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{is}^4 = \frac{1}{n} (2^{S-P} + 2\alpha^4)$  oraz  $\lambda_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_{is}^2 \bar{x}_{is}^2 = \frac{1}{n} 2^{S-P}$ , w postaci:  $\lambda_4 = 3\lambda_3$ , przy czym  $P \geq 0$  otrzymując:

- jeśli jądrem programu jest program kompletny typu  $2^S$  ( $P=0$ ):

$$\alpha = \sqrt[4]{2^S}, \quad (10.53)$$

- jeśli jądrem programu jest program selekcyjny typu  $2^{S-P}$  ( $P>0$ ):

$$\alpha = \sqrt[4]{2^{S-P}}. \quad (10.54)$$

Natomiast liczba doświadczeń w centrum programu jest większa od jedności i wynosi odpowiednio:

$$n_0 = \lambda_3^* (2^S + 4\sqrt[4]{2^S} + 4) - 2S - 2, \quad (10.55)$$

dla planu typu  $2^S + 2S + n_0$  lub

$$n_0 = \lambda_3^* (2^{S-P} + 4\sqrt[4]{2^{S-P}} + 4) - 2S - 2, \quad (10.56)$$

dla planu typu  $2^{S-P} + 2S + n_0$ .

Ponieważ wzory (10.55) i (10.56) w niektórych przypadkach dają ułamkowe wartości  $n_0$ , należy zaokrąglić te wartości do najbliższych liczb całkowitych. We wzorach (10.55) i (10.56)  $\lambda_3^* = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}$  jest wielkością bezwymiarową ustaloną

dwoma sposobami, gdzie  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  są momentami planu. Pierwszy sposób zaproponowany przez Box i Hunter [15] polega na takim doborze liczby doświadczeń  $n_0$  aby spełniony był warunek równości wariancji dla wartości funkcji odpowiedzi w całym obszarze objętym kulą o promieniu  $\rho$ . Planowanie rotatabilne, które ma taką właściwość, nazywa się **planowaniem uniform-rotatabilnym** (uniform – stały, równy). Wówczas wartości  $\lambda_3^*$  są dodatnimi pierwiastkami następującego równania kwadratowego:

$$2\lambda_3^* (\lambda_3^* - 1)(S + 2) + \lambda_3^* (S + 1) - (S - 1) = 0. \quad (10.57)$$

Rozwiązując równanie (10.57) względem  $\lambda_3^*$  dla stałych wartości S otrzymuje się: S=2,  $\lambda_3^* = 0,7844$ ; S=3,  $\lambda_3^* = 0,8385$ ; S=4,  $\lambda_3^* = 0,8705$ ; S=5,  $\lambda_3^* = 0,8918$ . Ta właściwość planowania uniform-rotabilnego jest szczególnie ważna, gdy punkt centralny planu znajduje się w okolicy punktu, którego badanie jest szczególnie interesujące dla eksperymentatora.

Drugi sposób podejścia do problemu wyboru liczby doświadczeń w punkcie centralnym planu polega na założeniu, że liczbę tę należy określać wychodząc z warunku ortogonalności planowania. Wówczas  $\lambda_3 = \lambda_2^2$ , zaś  $\lambda_3^* = 1$ . Plan taki nazywa się **ortogonalnym planem rotabilnym**.

Wówczas ogólna liczba doświadczeń wynosi odpowiednio:

$$n = 2^S + 2S + n_0, \quad (10.58)$$

oraz

$$n = 2^{S-P} + 2S + n_0. \quad (10.59)$$

Podstawowe parametry planów rotalnych obliczone z powyższych wzorów (dla obu podejść) zestawiono w tabelicy 10.12.

Nieznane współczynniki równania regresji oblicza się ze wzoru:

$$\{\mathbf{k}\} = ([\tilde{\mathbf{X}}]^T [\tilde{\mathbf{X}}])^{-1} [\tilde{\mathbf{X}}]^T \{\bar{\mathbf{Y}}\}. \quad (10.60)$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymuje się:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{a}{n} (0\bar{y}) - \frac{b}{n} \sum_{j=1}^S (ii\bar{y}), \\ k_i &= \frac{\lambda_2}{n} (i\bar{y}), \quad i \neq 0, \\ k_{ii} &= -\frac{b}{n} (\bar{y}) + \frac{c}{n} (ii\bar{y}) - \frac{d}{n} \sum_{j=1}^S (ii\bar{y}), \\ k_{ii} &= \frac{1}{n\lambda_3} (il\bar{y}), \quad i \neq 1, \end{aligned} \quad (10.61)$$

gdzie n – liczba doświadczeń, S – liczba zmiennych,  $\alpha$  – ramię gwiazdne, i – numer zmiennej wejściowej.

Ponadto we wzorach (10.61) oznaczono:

$$(0\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j, \quad (i\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} \bar{y}_j, \quad (ii\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij}^2 \bar{y}_j, \quad (il\bar{y}) = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} \tilde{x}_{lj} \bar{y}_j.$$

$$a = \frac{(S+2)\lambda_2^2}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2}, \quad b = \frac{\lambda_2}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2}, \quad c = \frac{1}{2\lambda_3},$$

$$d = \frac{\lambda_3 - \lambda_2^2}{2\lambda_3[(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2]},$$

$$\lambda_2 = \frac{2^S + 2\sqrt{2^S}}{n}, \quad \lambda_3 = \frac{2^S}{n}, \quad \lambda_4 = \frac{2^S + 2\alpha^4}{n},$$

czyli:  $n\lambda_2 = 24$ ,  $n\lambda_3 = 16$ , i  $n\lambda_4 = 48$ , zaś  $\lambda_4 = 3\lambda_3$ .

Tablica 10.12. Parametry kompozycyjnych planów rotatabilnych.

Liczba zmiennych	Jądro programu		Liczba doświadczeń w centrum programu $n_0$	Ramie gwiazdne $\alpha$	Ogólna liczba doświadczeń $n$	Uwagi
	$2^S$	$2^{S-P}$				
2	$2^2$	—	5	1,414	13	Plan uniformalny
2	$2^2$	—	8	1,414	16	Plan ortogonalny
3	$2^3$	—	6	1,682	20	Plan uniformalny
3	$2^3$	—	9	1,682	23	Plan ortogonalny
4	$2^4$	—	7	2,000	31	Plan uniformalny
4	$2^4$	—	12	2,000	36	Plan ortogonalny
5	$2^5$	—	10	2,378	52	Plan uniformalny
5	$2^5$	—	10	2,378	52	Plan ortogonalny
5	—	$2^{5-1}$	6	2,000	32	Plan uniformalny
5	—	$2^{5-1}$	10	2,000	36	Plan ortogonalny

Współczynniki równania regresji można również obliczyć posługując się tablicą 10.13 współczynników pomocniczych D, E,  $e^{-1}$ ,  $n_k^{-1}G$ , F-G, F z następujących wzorów [51]:

$$k_0 = D(0\bar{y}) + E \sum_{i=1}^S (i\bar{y}), \quad k_i = e^{-1}(i\bar{y}),$$

$$k_{ii} = n_k^{-1}(i\bar{y}), \quad k_{ii} = (F - G)(i\bar{y}) + G \sum_{i=1}^S (i\bar{y}) + E(0\bar{y}).$$
(10.60)

Tablica 10.13

S	D	E	$e^{-1}$	$n_k^{-1}$	F-G	G	F
2	0,2000	-0,1000	0,1250	0,2500	0,1250	0,0187	0,1437
3	0,1663	-0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0069	0,0694
4	0,1428	-0,0357	0,0416	0,0625	0,0313	0,0037	0,0350
5*	0,1591	-0,0341	0,0416	0,0625	0,0313	0,0028	0,0341
5	0,0988	-0,0191	0,0230	0,0312	0,0165	0,0015	0,0180
6*	0,1108	-0,0187	0,0230	0,0312	0,0156	0,0012	0,0168
7*	0,0703	-0,0098	0,0125	0,0156	0,0078	0,0005	0,0083
* - oznacza półpowtarzanie S-1							

Wartości poszczególnych współczynników w tablicy 10.13 oblicza się ze wzorów:

$$D = \frac{2A\lambda_1(S+2)}{n}, \quad E = \frac{2A\lambda_1\lambda_2}{n}, \quad e^{-1} = \frac{\lambda_2}{n}, \quad n_k^{-1} = \frac{\lambda_2^2}{n\lambda_1},$$

$$F-G = \frac{2a\lambda_2^2[(S+2)\lambda_1 - S]}{n}, \quad G = \frac{2a\lambda_2(1-\lambda_1)}{n}.$$

# 11

## IDENTYFIKACJA SILNIE NIELINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH METODĄ PRZEKSZTAŁCANIA MODULACYJNEGO

---

### 11.1. Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawiono zastosowanie metody przekształcenia modulacyjnego do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych. Rozdział ten jest przeznaczony dla mechaników, głównie specjalizujących się w analizie dynamicznej różnych układów mechanicznych takich jak: skrzynia przekładniowa, silnik, samochód, obrabiarka, ciągnik, maszyna rolnicza, itp. Niniejszy rozdział różni się od poprzednich rozdziałów dokładnością opisu matematycznego badanego obiektu. Przypomnijmy, że dotychczas zakładaliśmy nieznaną zarówno klasy, jak i budowy modelu matematycznego. W niniejszym rozdziale, postać modelu matematycznego jest znana, zależna od tak zwanego modelu nominalnego badanego obiektu. Jest nim równanie różniczkowe ruchu układu. Nieznane są natomiast występujące w tym równaniu współczynniki - czyli parametry modelu matematycznego. Przedstawiona zostanie efektywna metoda identyfikacji, która pozwoli na wyznaczenie wartości parametrów modelu matematycznego. Wyczerpujący wykład na temat identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych zawierają prace [18, 49, 50, 61, 65]

Najpierw wprowadzono pojęcie nieliniowego układu mechanicznego. Zdefiniowano podstawowe pojęcia wykorzystywane w niniejszym rozdziale takie jak: model nominalny i model matematyczny układu mechanicznego, proces identyfikacji układu dynamicznego., proces identyfikacji, wykorzystane w niniejszym rozdziale. Wprowadzono i omówiono pojęcie modelu odwrotnego. Następnie przeprowadzono klasyfikację metod identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych. Zaprezentowano metodę funkcji modulującej oraz jej miejsce wśród innych metod identyfikacji. Przedstawiono przekształcenie modulacyjne pewnej funkcji, zarówno zdeterminowanej jak i losowej, wywodzące się ze znanej idei funkcji modulującej. Pokazany zostanie sposób przekształcenia modulacyjnego w celu identyfikacji układów, gdy sygnałem wejściowym jest sygnał losowy. Zostanie również podana metoda przekształcania równań losowych w zdeterminowane bez uprzedniej linearyzacji. W punkcie 11.10 podana jest metoda realizacji procesu identyfikacji poprzez minimalizację funkcji jakości. Omówiono i porównano metody minimalizacji funkcji jakości w przypadku zastosowania przekształcenia modulacyjnego. Wreszcie w punkcie 11.11 omówione są typy nieliniowości równania, jakie mogą być brane pod uwagę.



## 11.2. Układ mechaniczny i jego nieliniowości

Znajomość procesów dynamicznych, zachodzących w systemach mechanicznych, umożliwia postęp w budowie nowoczesnych urządzeń, odznaczających się dużą wydajnością, dokładnością, a także znacznym stopniem niezawodności i automatyzacji.

Dokładne określenie dynamicznego zachowania się całego **układu mechanicznego** (np. obrabiarki, samochodu, maszyny rolniczej, itp.) bądź jego podzespołów już na etapie projektowania przedstawia obecnie jeszcze poważny problem. Wynika to z małej dokładności metod, stosowanych do wyznaczania sztywności i dysypacji energii w układzie. Buduje się więc prototyp urządzenia i poddaje się go badaniom. Jeśli wyniki badań doświadczalnych prototypu są mało zadowalające, to konieczna jest modyfikacja jego właściwości dynamicznych. Poprawną modyfikację można przeprowadzić jedynie wówczas, gdy w wyniku identyfikacji otrzyma się model matematyczny, który możliwie dokładnie opisuje właściwości prototypu.

Podstawowym problemem, który występuje w badaniu właściwości dynamicznych układów mechanicznych, jest adekwatność modelu matematycznego do układu rzeczywistego. Rzeczywiste charakterystyki sztywności i tłumienia są nieliniowe. Wynika to między innymi ze zmiennej sztywności łożysk i kół zębatych, sztywności połączeń stykowych, luzów, oraz z występujących w napędach z przekładniami zębatymi związków geometryczno-siłowych między kątowymi i postępowymi przemieszczeniami rozpatrywanych połączeń. Rozpraszanie energii w urządzeniach ma również charakter nieliniowy. Luzy występują najczęściej w:

- połączeniach ruchomych - łożyska, sprzęgła,
- połączeniach stałych - połączenia wielowypustowe, sprzęgła zębate,
- przekładniach zębatych,
- przekładniach śrubowych.

Wartości luzów zależne są od błędów wykonania i montażu elementów par kinematycznych i połączeń oraz od charakteru ich współpracy. W skutek zużycia się elementów par kinematycznych i odkształceń sprężysto-plastycznych elementów połączeń stałych wartości luzów powiększają się.

Rozpraszanie energii w układzie ma również charakter nieliniowy. W celu zwiększenia stabilności pracy urządzenia dąży się do zwiększenia tłumienia. Najefektywniejszy wzrost tłumienia uzyskuje się przez zastosowanie specjalnych tłumików. Do tłumienia drgań skrętnych i poprzecznych stosuje się tłumiki cierne. Zjawisko tarcia z natury swej nieliniowe, występuje we wszystkich zespołach przesuwnych i nie można go pominąć.

Przedstawiony wyżej opis udawadnia, że w przypadku układów mechanicznych często występują nieliniowości typu "luz" i "tarcie suche", które nie dają się

linearyzować. Dla tego typu nieliniowości pokazane zostanie zastosowanie specjalnych metod identyfikacji.

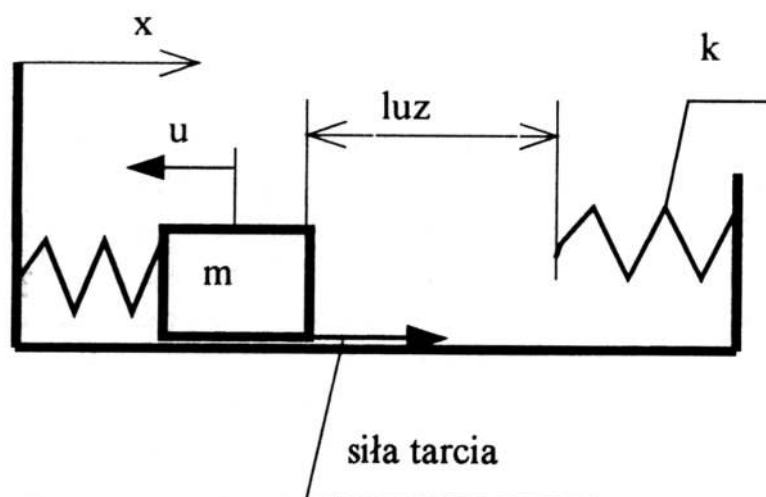
### 11.3. Model nominalny układu mechanicznego

W niniejszym punkcie zostaną sformułowane podstawowe pojęcia dotyczące identyfikacji układów mechanicznych oraz zostanie określona klasa modeli matematycznych, jakie są stosowane do opisu procesów dynamicznych zachodzących w układach mechanicznych.

Zadaniem analizy dynamicznej układów mechanicznych jest badanie ruchu poszczególnych członów układu oraz wyznaczanie sił przenoszonych przez te człony. W celu wyprowadzenia związków opisujących ruch poszczególnych członów oraz wyznaczenia wartości sił działających między tymi członami buduje się uproszczony model rzeczywistego układu mechanicznego i jego specyfiki pracy.

Przez model układu rozumie się: "taki dający się pomyśleć lub materialnie zrealizować układ, który odzwierciedlając lub odtwarzając przedmiot badania zdolny jest zastępować go tak, że jego badanie dostarcza nam nowej informacji o tym przedmiocie" [28].

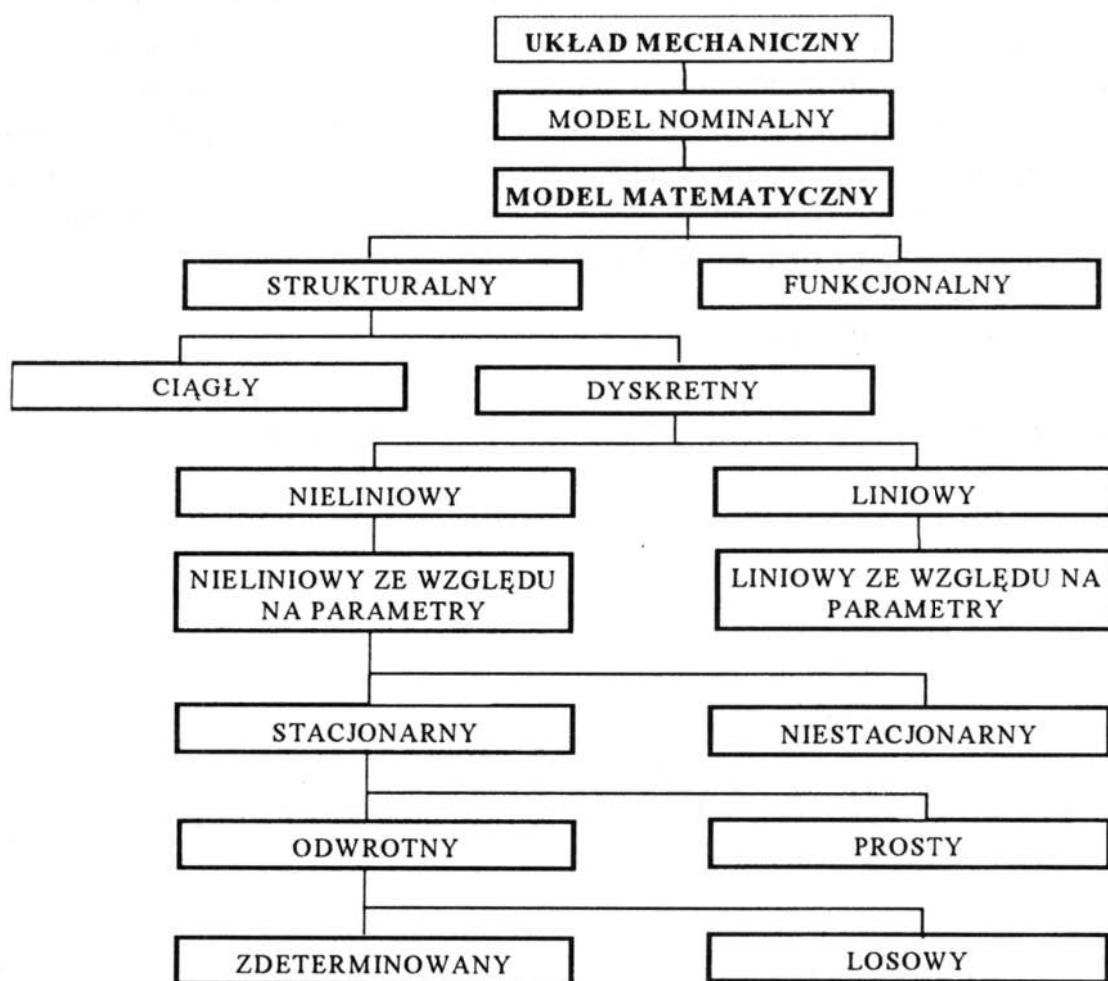
Budowa modelu zawiera etap, w którym przeprowadza się myślową idealizację struktury układu i procesów w nim zachodzących. Rezultatem tego etapu jest tzw. **model nominalny** układu mechanicznego. Przykład modelu nominalnego jednomasowego układu mechanicznego z „luzem” i „tarcie suche” oraz jego schemat blokowy przedstawia rys. 11.1.



Rys. 11.1. Model nominalny jednomasowego układu mechanicznego z „luzem” i „tarcie suche”.

#### 11.4. Model matematyczny układu mechanicznego

Analityczny opis modelu nominalnego nazywa się **modelem matematycznym**. Model matematyczny układu mechanicznego, opisujący procesy dynamiczne w nim zachodzące, przyjmuje najczęściej postać tzw. **równań ruchu**, które można wyprowadzić na podstawie praw dynamiki Newtona. Na rysunku 11.2 jest podany schemat jednego z możliwych podziałów modeli matematycznych układów mechanicznych.



Rys. 11.2. Schemat podziału modeli matematycznych układów mechanicznych.

Przy budowie modeli funkcjonalnych nie wnika się w strukturę wewnętrzną układu. Natomiast budowa modeli strukturalnych jest podobna do budowy wewnętrznej układu mechanicznego i zachodzi odpowiedniość elementów modelu i elementów układu. Przy czym pod pojęciem struktury modelu rozumie się postać równań różniczkowych opisujących ruch układu mechanicznego. Modele ciągłe opisują właściwości układów, które traktuje się jako zbiór brył odkształcalnych. Dla układów mechanicznych, w których można wyodrębnić nieodkształcalne

bryły lub punkty materialne, w których ześrodkowana jest masa oraz bezmasowe odkształcalne elementy łączące te bryły lub punkty - buduje się modele dyskretne. Istnieje szeroka klasa układów mechanicznych, które można opisać modelem dyskretnym (rys. 11.4) o skończonej liczbie punktów materialnych ( $m$ ), reprezentujących masy układu, połączonych sprzężeniami ( $\Psi$ ), reprezentującymi elementy oddziaływujące siłami na te masy oraz, gdzie punkty materialne poddane są działaniu sił wymuszających ( $u$ ), będących jawnymi funkcjami czasu. Charakterystyki sprzężeń oraz masy punktów materialnych powinny być tak dobrane, aby przyjęty model dyskretny odtwarzał z wystarczającym przybliżeniem ruch, odpowiadający ruchowi poszczególnych członów rzeczywistego układu mechanicznego, a siły działające na punkty materialne odpowiadały siłom występującym w rzeczywistym układzie mechanicznym. Dalej rozpatrywane będą tylko takie rzeczywiste układy mechaniczne, które można zredukować do modelu dyskretnego. Ruch tych układów można opisać układem równań różniczkowych zwyczajnych. Układ z rysunku 11.1 można zapisać równaniem:

$$m\ddot{x}(t) + \Psi[(\dot{x}(t), x(t))] = u(t). \quad (11.1)$$

Równanie powyższego typu można zapisać prościej w postaci:

$$m\ddot{x} + \Psi(\dot{x}, x) = u, \quad (11.2)$$

gdzie:

- $x = x(t)$  – przemieszczenie masy,
- $u = u(t)$  - siła wymuszająca,
- $m$  - masa punktu materialnego,
- $\Psi(\dot{x}, x)$  - sprzężenie reprezentujące siłę tłumiącą i siłę sprężystą,

przy czym:

$$\Psi(\dot{x}, x) = F(\dot{x}) + G(x), \quad (11.3)$$

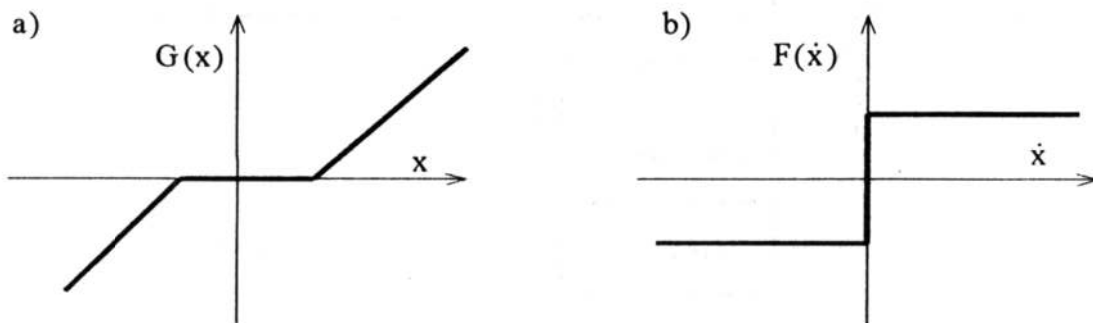
w którym:

- $F(\dot{x})$  - człon reprezentujący siłę tłumiącą (tarcie),
- $G(x)$  - człon reprezentujący siłę sprężystą i "luz".

Charakterystyki członów reprezentujących siłę sprężystą i „luz” oraz siłę tłumiącą przedstawia rysunek 11.3.

W zależności od tego czy równania ruchu są liniowe czy nieliniowe, model jest liniowy bądź nieliniowy. Równanie różniczkowe, opisujące ruch układu, jest

nieliniowe, jeśli charakterystyki elementów układu są nieliniowe. Powyższe nieliniowości mogą mieć charakter fizyczny, geometryczny lub strukturalny. Nieliniowości fizyczne mogą wynikać z nieliniowości charakterystyk materiałowych (nieliniowe charakterystyki sprężyste). Nieliniowości geometryczne mogą być powodowane zmianą charakteru połączenia elementów (np. zmiana przełożenia). Do grupy nieliniowości strukturalnych można zaliczyć luzy w połączeniach par kinematycznych.



Rys. 11.3. Charakterystyka członu reprezentującego: a - siły sprężyste i "luz", b - siłę tarcia.

Modele nieliniowe można podzielić na modele liniowe i modele nieliniowe ze względu na parametry. Przykładowo następujące równanie:

$$a_1 \ddot{x} + a_2 (x)^{\frac{1}{3}} = u, \quad (11.4)$$

jest nieliniowym równaniem różniczkowym, liniowym ze względu na współczynniki (parametry)  $a_1$  i  $a_2$ , zaś równanie:

$$a_1 \ddot{x} + (a_2 - x)^{\frac{1}{3}} = u, \quad (11.5)$$

jest nieliniowym równaniem różniczkowym, nieliniowym ze względu na współczynniki.

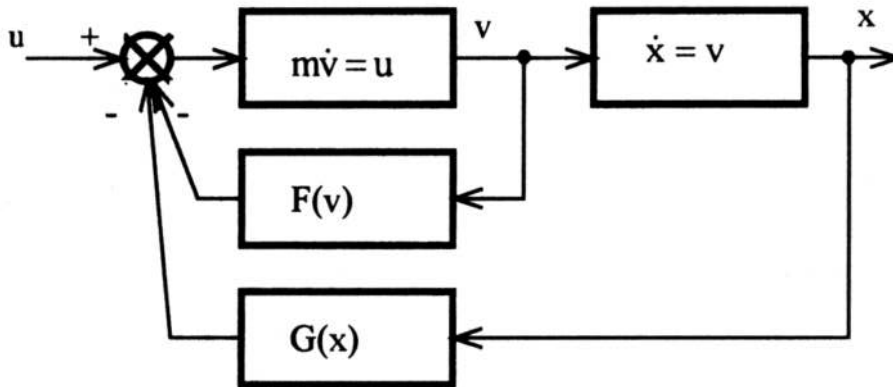
Wiele członów mechanicznych jest nieliniowych ze względu na parametry, na przykład układy zawierające element sprężysty z luzem mechanicznym.

Jeśli struktura układu lub parametry są zmienne w czasie model jest niestacjonarny. W przeciwnym przypadku tj. gdy struktura i parametry nie ulegają zmianom w czasie - model jest stacjonarny.

Często posługujemy się tzw. schematami blokowymi, które są schematami strukturalno-funkcjonalnymi układu (rys. 11.4). W tym przypadku siła wymu-



szająca  $u=u(t)$  nazywa się sygnałem wejściowym układu (modelu) lub krótko wejściem, a przemieszczenie  $x=x(t)$  sygnałem wyjściowym układu (modelu) lub krótko wyjściem. Schemat taki, w przypadku złożonych układów, uwidacznia kolejność i kierunki operacji realizowanych przez zespoły mechanizmów ujęte w poszczególne bloki oraz ukazuje wzajemne powiązania funkcjonalne poszczególnych bloków.



Rys. 11.4. Schemat blokowy jednomasowego układu mechanicznego, którego model nominalny przedstawia rysunek 11.1.

Na rysunku 11.4 jest przedstawiony złożony schemat blokowy. Reprezentuje on ten sam układ co schemat z rysunku 11.1, z tym że schemat z rysunku 11.4 jest rozbity na poszczególne człony. Nieliniowe człony  $F(v)$  i  $G(x)$  są członami, w których skokowa zmiana sygnału wejściowego powoduje natychmiastową skokową zmianę sygnału wyjściowego, czyli wartość sygnału wyjściowego w danej chwili  $t$  zależy tylko od wartości sygnału wejściowego w tej chwili. Człony te nazywają się nieliniowymi, bezinercyjnymi członami funkcyjnymi. Pozostałe człony ze schematu nazywają się członami inercyjnymi. Odpowiadające im bloki są opisane równaniami różniczkowymi. Wartość sygnału wyjściowego z takiego członu w danej chwili  $t$  zależy nie tylko od wartości sygnału wejściowego w tej chwili, ale również od wartości sygnału wyjściowego w poprzednich momentach.

W niniejszym rozdziale będą rozważane tylko układy stacjonarne, to jest takie układy, dla których można przyjąć, że struktura układu pozostaje niezmienną w rozpatrywanym przedziale czasu, a parametry są stałe. Rozważane będą układy nieliniowe, których modele matematyczne są również nieliniowe ze względu na parametry. Ograniczymy się do takich układów, których model można zbudować z liniowych członów inercyjnych i nieliniowych członów bezinercyjnych.

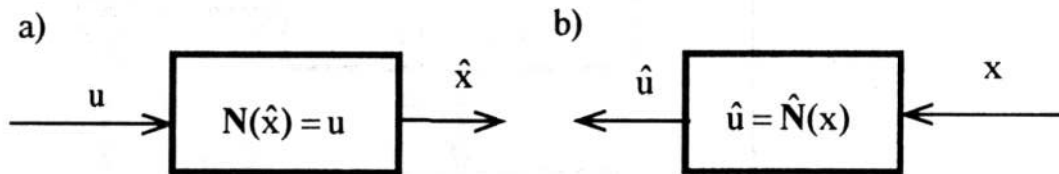
Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy operator  $N$ , będący nieliniowym operatorem różniczkowym. Stosując ten operator, równanie różniczkowe, opisujące nieliniowy układ dynamiczny, pobudzany sygnałem wejściowym  $u$  i generujący sygnał wyjściowy  $x$ , można zapisać następująco:

$$N(x) = u. \quad (11.6)$$

Dla podkreślenia zależności modelu od parametrów ze zbioru  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$  używa się zapisu:

$$N(x, \mathbf{a}) = u. \quad (11.7)$$

Model ten jest nazywany **modelem prostym**. Z matematycznego punktu widzenia sygnał wyjściowy  $\hat{x}$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (11.7) opisanego operatorem  $N$ . Schemat blokowy tego modelu przedstawia rysunek 11.5a. W **modelu odwrotnym** sytuacja jest odwrotna tj. sygnał  $x$  jest sygnałem wejściowym, a sygnał  $\hat{u}$  jest sygnałem wyjściowym (rys. 11.5b). Z matematycznego punktu widzenia, w tym przypadku sygnał wyjściowy  $\hat{u}$  jest funkcją w zwykłym sensie, której argumentem jest sygnał wejściowy  $x$ . Operator  $\hat{N}$ , chociaż formalnie niczym się nie różni od operatora  $N$  z modelu prostego, jest tutaj rozumiany jako operator funkcyjny - przypisuje teraz każdej wartości  $x$  jakąś wartość  $\hat{u}$ .



Rys. 11.5. Schematy blokowe modelu: a - prostego, b - odwrotnego.

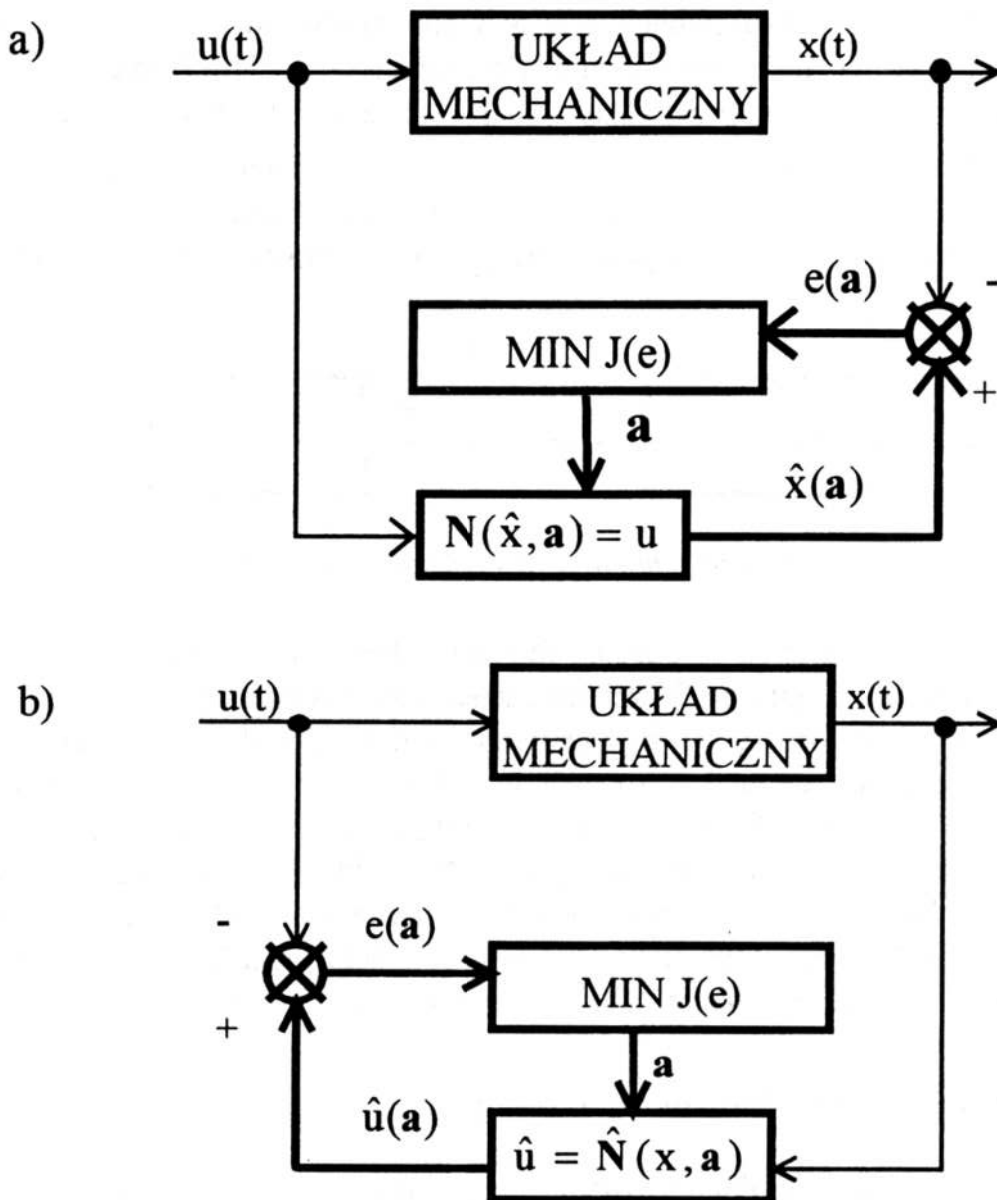
Jeśli elementy układu są opisane funkcjami losowymi, to model jest losowy, jeśli elementy te są opisane funkcjami zdeterminowanymi mamy model zdeterminowany. Funkcją losową  $x(t)$  będziemy nazywali taką funkcję argumentu  $t$ , której wartość przy dowolnej wartości  $t$  jest zmienną losową. Argument ten jest wielkością nielosową. Funkcję losową nazywamy normalną (gaussowska), jeśli jej wszystkie wielowymiarowe funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa są normalne. Funkcję losową nazywamy stacjonarną (w wąskim sensie) jeśli jej wszystkie wielowymiarowe funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zależą tylko od wzajemnej odległości chwil, a nie zależą natomiast od nich samych.

### 11.5. Identyfikacja układu dynamicznego

Przez identyfikację układu dynamicznego rozumie się proces, w wyniku którego powstaje model matematyczny tego układu. Model ten dobrze opisuje zachowanie się układu zgodnie z przyjętym kryterium jakości. Otrzymany model powinien być na tyle prosty, że możliwa jest jego wszechstronna analiza aktualnie dostępnymi środkami [65]. Na rysunku 11.6 podane są dwa schematy proce-



sów identyfikacji: z wykorzystaniem modelu prostego i modelu odwrotnego. W obu przypadkach sygnały wejściowe  $u(t)$  i wyjściowe  $x(t)$  z układu uzyskuje się z pomiarów. W obu przypadkach zastosowany jest odpowiedni algorytm identyfikacji wykorzystujący pewną funkcję jakości  $J$ , minimalizującą błąd  $e$ . Minimalizacja błędu odbywa się poprzez zmianę wartości parametrów modelu ze zbioru  $\mathbf{a}$ . Wartości parametrów, które będzie miał model przy minimalnym błędzie  $e$  w sensie funkcji jakości  $J$ , będą szukanymi wartościami. Zbiór tych wartości oznaczymy symbolem  $\mathbf{a}^*$ .



Rys. 11.6. Schemat procesu identyfikacji z zastosowaniem modelu:  
*a* - prostego, *b* - odwrotnego: MIN J(e) - procedura minimalizacji funkcji jakości  $J$ .

Identyfikacja układu dynamicznego przy pomocy modelu prostego (rys. 11.5a) polega na znalezieniu takiego modelu, który pobudzany jest takim samym sygnałem wejściowym  $u$ , co obiekt i który generuje wyjście  $\hat{x}$  możliwe bliskie wyjścia obiektu  $x$ . W tym przypadku pierwotne role sygnałów nie są odwrócone. Przy zastosowaniu modelu odwrotnego, identyfikacja układu dynamicznego polega na szukaniu takiego modelu, który generując takie samo wyjście  $x$  co obiekt, jest pobudzany wymuszeniem  $\hat{u}$ , możliwie bliskim wymuszeniu obiektu  $u$ . Takie postawienie problemu powoduje, że praktycznie zostają w modelu odwrócone pierwotne role sygnałów: sygnał wejściowy obiektu staje się sygnałem wyjściowym modelu, a sygnał wyjściowy obiektu staje się sygnałem wejściowym modelu.

### 11.6. Metody identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych

Metody, stosowane do identyfikacji nieliniowych układów mechanicznych, można podzielić na trzy zasadnicze grupy:

1. Metody korzystające z różnego rodzaju linearyzacji:
  - a) linearyzacja stochastyczna [55, 65],
  - b) linearyzacja harmoniczna [49],
2. Metody korzystające z różnego rodzaju rozwinięć w szeregi:
  - a) rozwinięcie sygnału wyjściowego układu w szereg nadharmoniczny względem sygnału wejściowego układu, którym jest sygnał harmoniczny [50],
  - b) rozwinięcie sygnału wyjściowego z nieliniowego układu mechanicznego w szereg potęgowy względem sygnału wejściowego [61].
3. Metody iteracyjne:
  - a) metoda szukania losowego,
  - b) metoda quasi linearyzacji [6],
  - c) metoda gradientowa [6, 65],
  - d) metody wykorzystujące równania wrażliwości [61].

Powyższe metody nie dotyczą identyfikacji układów silnie nieliniowych, zawierających człon typu "luz" i "tarcie suche". Znane, opracowane do tego celu metody, mają pewne wady: albo są z założenia metodami przybliżonymi (np. metody korzystające z linearyzacji), albo wymagają konieczności rozwiązywania równania różniczkowego w każdym kroku procedury szukania optymalnych parametrów modelu (np. metody iteracyjne), bądź wymagają konieczności obliczania pochodnych sygnałów wyjściowych (np. metody opierające się na równaniach wrażliwości).

Do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych stosuje się metodę przekształcenia modulacyjnego [18]. Metoda ta jest możliwa do stosowania

w przypadku losowym i deterministycznym, gdy model układu jest wielomasowy oraz, gdy występują zakłócenia układu. Metoda przekształcenia modulacyjnego wykorzystuje ideę metody funkcji modulującej.

### 11.7. Metoda funkcji modulującej

Metoda funkcji modulującej polega na mnożeniu równania ruchu układu przez pewną funkcję czasu (tak zwaną „funkcją modulującą”, oznaczoną symbolem  $\phi$ ), w celu sprowadzenia równań ruchu do takiej postaci, w której nie ma pochodnych zmiennych niezależnych. Funkcja  $\phi$  została nazwana „modulującą”, ze względu na jej niezależność od sygnału wejściowego i wyjściowego układu.

Sposób identyfikacji polega na:

- a) mnożeniu równań ruchu układu przez wybraną „funkcję modulującą”,
- b) całkowaniu przekształconych równań w określonych przedziałach czasu,
- c) rozwiązaniu powstałych równań algebraicznych z nieznanymi parametrami.

Funkcja modulująca spełnia następujące warunki: jest ciągła, ograniczona oraz conajmniej  $n$ -krotnie różniczkowalna, gdzie  $n$  jest rzędem przekształconego równania różniczkowego. Ponadto, funkcja  $\phi$  oraz jej wszystkie pochodne aż do rzędu  $n-1$  przybierają wartość zero na krańcach przedziału całkowania  $[T_1, T_2]$ :

$$\begin{aligned}\phi(T_1) &= \phi(T_2) = 0, \\ \dot{\phi}(T_1) &= \dot{\phi}(T_2) = 0, \\ &\dots \\ \phi^{(n-1)}(T_1) &= \phi^{(n-1)}(T_2) = 0.\end{aligned}\tag{11.8}$$

Metoda ta zostanie omówiona na przykładzie układu dynamicznego opisanego równaniem:

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x = u,\tag{11.9}$$

gdzie:

- $x=x(t)$  - współrzędne układu (wyjście),
- $u=u(t)$  - wymuszenie (wejście),
- $a_i, i=1,2,3$  - stałe współczynniki.

Współczynniki  $a_i$  są nieznanne i należy je wyznaczyć. W tym celu, mnoży się obie strony równania (11.9) przez funkcję modulującą  $\phi(t)$  otrzymując:

$$a_1 \ddot{x}\phi + a_2 \dot{x}\phi + a_3 x\phi = u\phi, \quad (11.10)$$

oraz całkuje obie strony równania (11.10) w przedziale  $[T_1, T_2]$ :

$$a_1 \int_{T_1}^{T_2} \ddot{x}\phi dt + a_2 \int_{T_1}^{T_2} \dot{x}\phi dt + a_3 \int_{T_1}^{T_2} x\phi dt = \int_{T_1}^{T_2} u\phi dt. \quad (11.11)$$

Całkując równanie (11.11) przez części otrzymuje się:

$$a_1 \left( \int_{T_1}^{T_2} x\ddot{\phi} dt - [x\dot{\phi}]_{T_1}^{T_2} + [\dot{x}\phi]_{T_1}^{T_2} \right) + a_2 \left( - \int_{T_1}^{T_2} x\dot{\phi} dt + [x\phi]_{T_1}^{T_2} \right) + a_3 \left( \int_{T_1}^{T_2} x\phi dt \right) = \int_{T_1}^{T_2} u\phi dt. \quad (11.12)$$

Dla uproszczenia zapisu, wprowadzono tutaj  $\phi = \phi(t)$ . Ze względu na właściwości funkcji  $\phi$  (to jest warunki (11.8)) wyrażenia w nawiasach kwadratowych znikają, więc równanie (11.12) przyjmuje postać:

$$a_1 \int_{T_1}^{T_2} \ddot{\phi} x dt - a_2 \int_{T_1}^{T_2} \dot{\phi} x dt + a_3 \int_{T_1}^{T_2} \phi x dt = \int_{T_1}^{T_2} \phi u dt. \quad (11.13)$$

Znając analityczną postać funkcji  $\phi$  oraz znając sygnały  $x(t)$  i  $u(t)$  w przedziale  $[T_1, T_2]$ , można obliczyć wartości całek występujących w równaniu (11.13). W równaniu tym, w porównaniu z równaniem (11.10) nie występują już pochodne sygnału  $x$ . Jest to główną zaletą zastosowania funkcji modulującej. Po obliczeniu całek w równaniu (11.13), otrzymuje się równanie na poszukiwane parametry  $a_1, a_2, a_3$ :

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = B, \quad (11.14)$$

gdzie:

$$A_i = \int_{T_1}^{T_2} \phi^{(3-i)} x dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad B = \int_{T_1}^{T_2} \phi u dt, \quad \phi^{(0)} = \phi. \quad (11.15)$$

Do obliczenia wartości współczynników  $a_1, a_2, a_3$  potrzebne są trzy równania typu równania (11.14). Należy więc obliczyć wartości całek dla trzech dowolnych przedziałów na osi czasu, do których dobrane są trzy różne funkcje modulujące.

Przedstawiona metoda funkcji modulującej dotyczy układu dynamicznego o jednym stopniu swobody, którego sygnał wejściowy jest zdeterminowany i którego model jest liniowy ze względu na parametry. W punkcie 11.8.4 poka-

zana zostanie modyfikacja tej metody w celu identyfikacji układów o wielu stopniach swobody (wielomasowych), których sygnały wejściowe są zdeterminowane bądź losowe i których modele są nieliniowe ze względu na parametry.

### 11.8. Przekształcenie modulacyjne funkcji

W niniejszym punkcie podane zostaną przekształcenia funkcji zdeterminowanej (podpunkt 11.8.1) i losowej (podpunkt 11.8.2), które są podstawą metody identyfikacji nazwanej przekształcaniem modulacyjnym. Podane zostaną również przykładowe funkcje modulujące (podpunkt 11.8.3).

#### 11.8.1. Przekształcenie modulacyjne funkcji zdeterminowanej

W przekształceniu modulacyjnym wykorzystuje się pojęcie i własności „distribucji Schwartza” [18].

Jeśli funkcja  $f(t)$  spełnia następujące warunki:

1.  $f(t) = 0$ , dla  $t < 0$ ,
2.  $f(t)$  - jest lokalnie całkowalna, (11.6)

zaś funkcja  $\phi(t,s)$  należy do przestrzeni funkcyjnej  $D_m$ , tj. spełnia warunki:

1. Funkcja  $\phi(t,s)$  oraz każda z jej pochodnych  $\phi^{(i)}(t,s) = \frac{d^i \phi(t,s)}{dt^i}$ , aż do rzędu  $m$  włącznie są wszędzie ciągłe,
2. Każda funkcja  $\phi(t,s)$  jest równa zero na zewnątrz pewnego skończonego przedziału  $T_s$ , (11.17)
3. Parametr  $s$  jest dodatni,

to przekształcenie modulacyjne  $D$  jest operacją, która przyporządkowuje funkcję  $f(s)$  każdej funkcji  $f(t)$ , spełniającej warunki (11.16). Przekształcenie  $D$  jest zdefiniowane przez:

$$D[f(t)] = f(s) = \langle f(t), \phi(t,s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(t,s) dt. \quad (11.18)$$

W przypadku, gdy argument  $t$  funkcji  $f(t)$  jest dwuwymiarowy tj.  $t=(t_1, t_2)$  wtedy argument  $s$  funkcji  $f(s)$  jest też dwuwymiarowy, tj.  $s=(s_1, s_2)$ , natomiast przekształcenie  $D$  jest definiowane następująco:

$$D[f(t_1, t_2)] = f(s_1, s_2) = \langle f(t_1, t_2), \phi(t_1, s_1, t_2, s_2) \rangle. \quad (11.19)$$

Oznaczmy przekształconą pochodną funkcji  $f(t)$  następująco:

$$D\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = f^{(n)}(s) = \left\langle \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \phi(t, s) \right\rangle. \quad (11.20)$$

Podstawową właściwością przekształcenia modulacyjnego jest:

$$\left\langle \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \phi(t, s) \right\rangle = \left\langle f(t), (-1)^n \frac{d^n \phi(t, s)}{dt^n} \right\rangle, \quad (11.21)$$

gdzie warunki (11.17) spełnione są dla  $m \geq n-1$ .

Po lewej stronie równości (11.21) funkcja  $f(t)$  poddana jest operacji różniczkowania:  $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ , natomiast po prawej stronie operacja ta nie działa już na

funkcję  $f(t)$ , lecz na funkcję  $\phi(t)$ . Właściwość ta jest wykorzystywana do przekształcenia równań różniczkowych, opisujących badane układy mechaniczne, do postaci, w której występuje jak najmniej pochodnych zmiennych zależnych, reprezentujących sygnały wyjściowe układu. Z powyższej własności wynika ponadto, że do przekształcenia zwyczajnego równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu, funkcja  $\phi$  musi spełniać warunki (11.17) dla  $m \geq n-1$ .

### 11.8.2. Przekształcenie modulacyjne funkcji losowej

Jeśli  $X(t)$  jest funkcją losową, to jej przekształcenie modulacyjne jest również funkcją losową, gdyż zgodnie z definicją przekształcenia modulacyjnego mamy:

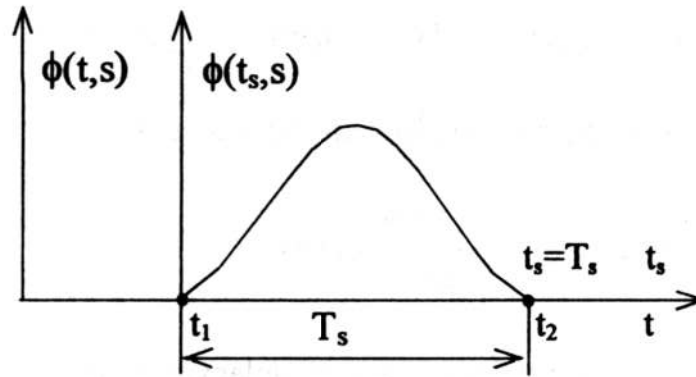
$$X(s) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \phi(t, s) dt, \quad (11.22)$$

a wyrażenie po prawej stronie jest definicją funkcji losowej, będącej całką innej funkcji losowej [55].

Wyznamy wariancję przekształconej funkcji losowej  $X(s)$ . W tym celu przekształćmy równanie (11.22) do nieco innej postaci. Rozpatrzmy w tym celu funkcję  $\phi(t, s)$  dla jednej, ustalonej wartości parametru  $s$ .

Oznaczmy przez  $T_s$  przedział poza którym funkcja  $\phi$  jest z definicji równa zero. Następnie zmienimy układ współrzędnych  $(\phi(t), t)$  na  $(\phi(t_s), t_s)$  według rysunku 11.7.





Rys. 11.7. Zmiana układu współrzędnych.

Zgodnie z tym możemy napisać:

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\phi(t,s)dt = \int_{t_1}^{t_2} X(t)\phi(t,s)dt = \int_0^{T_s} X(t_s)\phi(t_s,s)dt_s, \quad (11.23)$$

dla  $s = \text{const.}$

Ostatnia całka jest funkcją losową argumentu  $T_s$ , czyli:

$$\int_0^{T_s} X(t_s)\phi(t_s,s)dt_s = X(T_s), \quad \text{dla } s = \text{const.} \quad (11.24)$$

Z powyższego wynika, że dla ustalonej wartości parametru  $s$  argumentem przekształconej funkcji losowej jest długość przedziału całkowania  $T_s$ , czyli przedziału poza którym funkcja  $\phi$  jest z definicji równa zero.

Wartość średnia funkcji losowej  $X(T_s)$  wynosi:

$$m_x(T_s) = \int_0^{T_s} m_x(t_s)\phi(t_s,s)dt_s, \quad (11.25)$$

natomiast funkcja korelacji własnej ma postać:

$$K_{xx}(T_s^1, T_s^2) = \int_0^{T_s^1} \int_0^{T_s^2} \phi K_{xx}(t_s^1, t_s^2) dt_s^1 dt_s^2. \quad (11.26)$$

Z powyższego wzoru dla  $T_s^1 = T_s^2 = T_s$  otrzymuje się wzór na poszukiwaną wariancję:



$$\sigma^2(T_s) = W_{xx}(T_s, T_s) = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \phi K_{xx}(t_s^1, t_s^2) dt_s^1 dt_s^2. \quad (11.27)$$

Dla przypadku, gdy przekształcana funkcja losowa jest stacjonarną funkcją losową, o ograniczonej wariancji i wartości średniej równej zero, wariancja przekształconej funkcji losowej  $X(T_s)$  jest proporcjonalna do  $T_s$ :

$$\sigma_x^2(T_s) = b_x(s)T_s, \quad (11.28)$$

gdzie  $b_x(s)$  jest współczynnikiem proporcjonalności.

Wynika stąd, że wariancja przekształconej funkcji losowej  $X(T_s)$ , rośnie wraz ze wzrostem przedziału, poza którym funkcja  $\phi$  jest z definicji równa zero (wraz ze wzrostem „szerokości” funkcji  $\phi$ ). Właściwość ta jest uwzględniana przy przekształcaniu równań, opisujących układy, na które działają losowe zakłócenia.

### 11.8.3. Postać funkcji modulującej

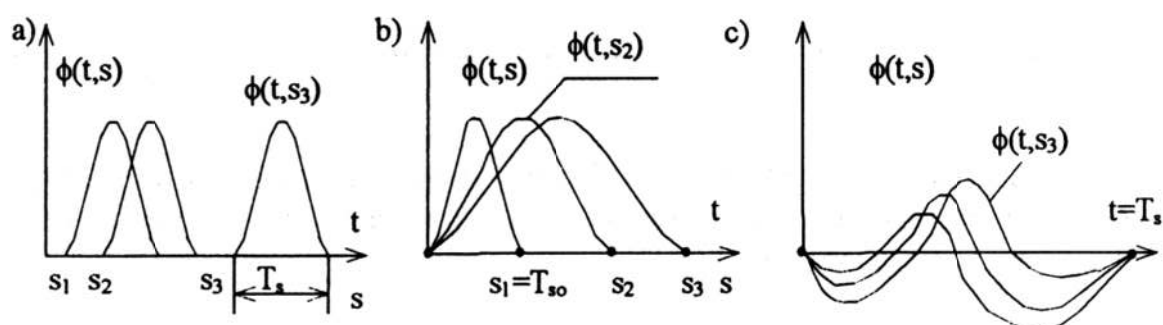
Wykresy przykładowych funkcji modulujących są przedstawione na rysunku 11.7. Przykładem funkcji  $\phi(t,s)$ , która „ślizga się” wzdłuż osi czasu  $t$  wraz ze wzrostem parametru  $s$  (gdzie parametrem tym jest chwila odpowiadająca początkowi przedziału  $T_s$ , poza którym  $\phi \equiv 0$ ), dla nieskończenie wielkiego  $m$  z warunku (11.17), jest funkcja (rys. 11.8a) o postaci:

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(t-s)(t-s-T_s)}}, & \text{dla } t \in (s, s+T_s), T_s = \text{const.} \\ 0, & \text{dla } t \notin (s, s+T_s). \end{cases} \quad (11.29)$$

Innym przykładem funkcji  $\phi(t,s)$  może być funkcja  $\phi(t)$ , „zaczepiona” w początku osi czasu i „rozciągająca” się wzdłuż tej osi w miarę wzrostu parametru  $s$  (rys. 11.8b), według wzoru:

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t(t-s-T_{s0})}}, & \text{dla } t \in (0, s), \\ 0, & \text{dla } t \notin (0, s), \end{cases} \quad (11.30)$$

gdzie  $T_{s0}$  - początkowa długość przedziału  $T_s$ ,  $s \geq T_{s0}$ .



Rys. 11.8. Wykresy przykładowych, podstawowych funkcji przekształcenia modulacyjnego.

Jeszcze innym przykładem funkcji  $\phi(t,s)$  może być funkcja  $\phi(t)$ , przedstawiona na rysunku 11.8c, która jest „oparta” na stałym, dowolnie dużym przedziale czasowym  $T_s$  i wraz ze wzrostem parametru  $s$  zmienia swój kształt. Funkcję tę określa wzór:

$$\phi(t,s) = \begin{cases} -[(t-s)(t-s-c)e^{-\frac{1}{t(t-T_s)}}], & \text{dla } t \in (0, T_s), \\ 0, & \text{dla } t \notin (0, T_s), \end{cases} \quad (11.31)$$

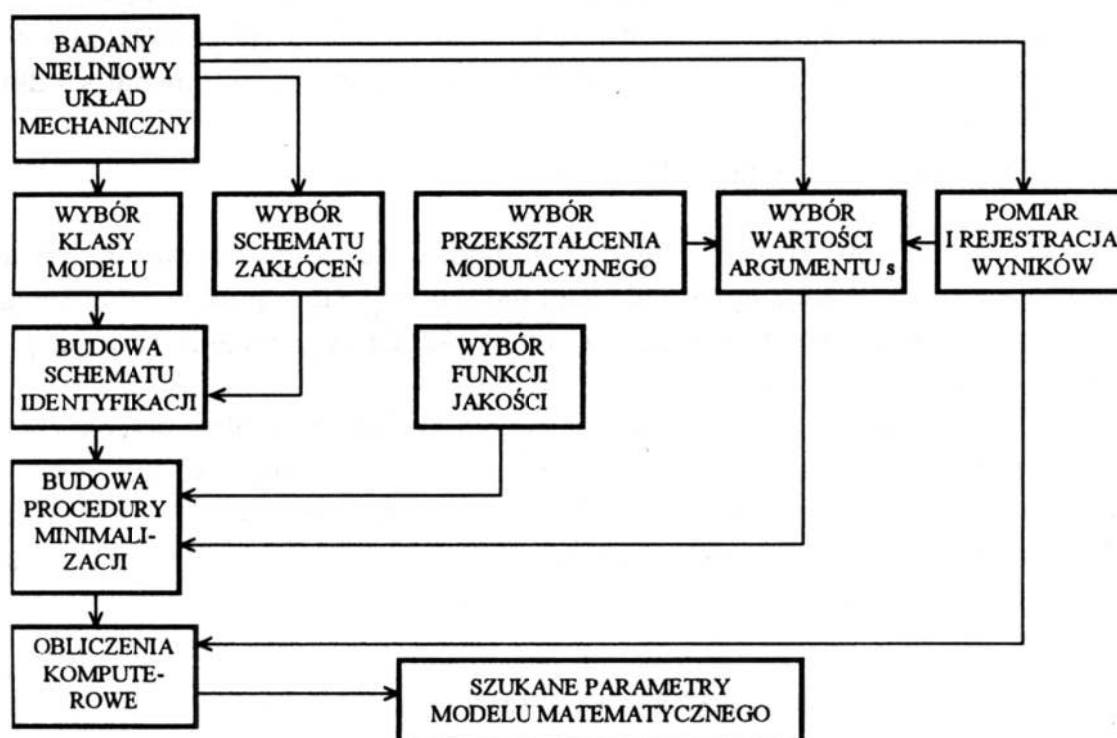
gdzie  $c$  jest stałą,  $0 < c < T_s$ ,  $0 \leq s \leq T_s - c$ .

### 11.9. Algorytm identyfikacji silnie nieliniowego układu mechanicznego

Jak już wspomniano, do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych stosuje się metodę przekształcenia modulacyjnego. W celu określenia wartości parametrów występujących w modelu matematycznym opisującym taki układ mechaniczny należy wykonać następujące czynności (schematycznie czynności te są przedstawione na rysunku 11.9):

1. Wybór klasy modelu matematycznego badanego układu na podstawie wiedzy apriorycznej. Model ten powinien z dostatecznym przybliżeniem odzwierciedlać istotne właściwości badanego układu.
2. Dokonanie założeń odnośnie wpływu zakłóceń na badany układ na podstawie wiedzy a priori oraz wybór schematu zakłócania układu (rozdz. 11.9.3).
3. Wybór rodzaju przekształcenia modulacyjnego  $D$  (pkt. 11.8.1). Dokonanie analitycznego przekształcenia modulacyjnego równania różniczkowego, opisującego układ i wykorzystanie właściwości tego przekształcenia do doprowadzenia równania ruchu do postaci, w której nie będzie już pochodnych sygnałów układu (pkt. 11.8). W przypadku losowym powyższe przekształcenie

- musi być poprzedzone operacją, doprowadzającą losowe równanie różniczkowe do postaci zdeterminowanej (pkt. 11.3.1).
4. Zapisanie sygnału wejściowego i wyjściowego badanego układu w postaci skwantowanej. Jeżeli sygnał wejściowy jest funkcją losową, to należy zapisać przebieg jego momentów statystycznych (metoda opracowana jest dla sygnałów losowych o postaci normalnej).
  5. Budowa schematu identyfikacji (pkt. 11.9.1, 11.9.2, 11.9.3).
  6. Wybór jak najprostszej analitycznej postaci funkcji  $\phi$  przekształcenia modulatoryjnego np. o stałym przedziale  $T_s$  poza którym funkcja  $\phi \equiv 0$  oraz wyznaczenie analitycznej postaci pierwszej i drugiej pochodnej tej funkcji.



Rys. 11.9. Schemat czynności do wykonania w procesie identyfikacji układu mechanicznego [18].

7. Dokonanie, o ile to możliwe, bezpośrednich pomiarów wartości niektórych szukanych parametrów np. masy, celem zmniejszenia liczby identyfikowanych parametrów.
8. Wyznaczenie:
  - a) długości przedziału  $T_s$ , poza którym funkcja  $\phi \equiv 0$ ,
  - b) liczby kolejnych wartości argumentu  $s$  przekształconych funkcji (pkt. 11.8). Wartość ta powinna być kilkakrotnie większa od liczby szukanych parametrów.

- c) kolejnych wartości argumentu  $s$ . Przykładowo, dla stosowanych tutaj funkcji modulujących można przyjąć, że  $s_{i+1} = s_i + T_s$ .
9. Wybór funkcji jakości przy uwzględnieniu punktu 2 oraz metody jej minimalizacji (pkt. 11.10).
  10. Budowa na podstawie punktów od 1 do 5 numerycznego programu komputerowego realizującego minimalizację funkcji jakości zgodnie ze schematem na rysunku 11.18, w którym zawarte będą w postaci wzorów: funkcja  $\phi$  i jej dwie pierwsze pochodne, człony przekształconego równania różniczkowego, opisującego układ oraz wybrana postać funkcji jakości. Ponadto program powinien zawierać standardowe procedury numerycznego obliczania całki i minimalizacji funkcji jakości. Podstawowymi danymi do tego programu będą: skwantowane sygnały wejściowe i wyjściowe układu (w przypadku losowym momenty statystyczne tych sygnałów) oraz wartości argumentu  $s$  i długość przedziału  $T_s$ .
  11. Obliczenia numeryczne na komputerze.

Po wykonaniu powyższych czynności na podstawie zarejestrowanych sygnałów wejściowych i wyjściowych badanego układu w postaci numerycznej (ciągi cyfr) oraz za pomocą zbudowanego programu określa się szukane wartości parametrów modelu matematycznego.

W dalszej części podane zostaną opisane najważniejsze punkty przedstawionego algorytmu identyfikacji z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego w przypadku modelu zdeterminowanego (11.9.1) i modelu losowego (11.9.2) oraz w przypadku występowania zakłóceń tylko sygnału wejściowego (11.9.3), a także gdy zakłócany jest sygnał wejściowy i wyjściowy (11.9.4).

### 11.9.1. Schemat procesu identyfikacji w przypadku modelu zdeterminowanego

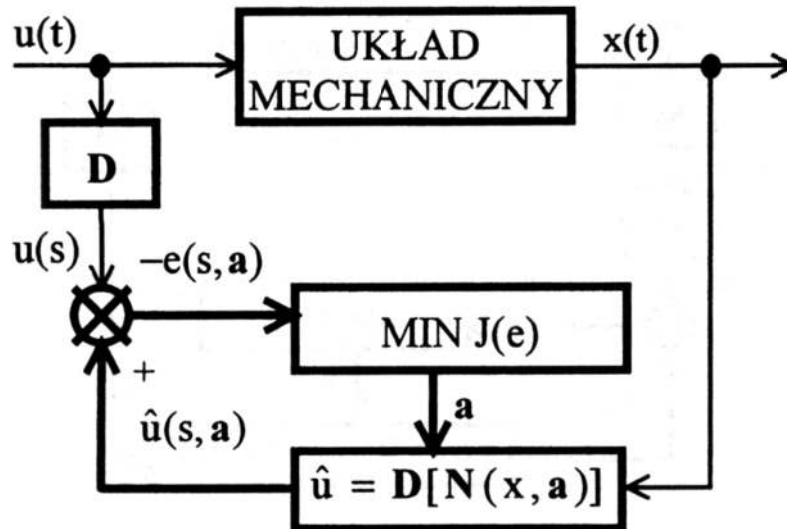
Identyfikacja badanego układu dynamicznego będzie przeprowadzona na przykładzie według schematu z rysunku 11.10 i będzie polegała na znalezieniu takiego operatora  $N$ , który będzie minimalizował błąd  $e(s, a)$ , będący różnicą przekształconych sygnałów: wejściowego układu  $u$  i wyjściowego modelu  $\hat{u}$ . Zadanie to jest realizowane poprzez budowę i minimalizację funkcji jakości  $J$  (pkt. 11.9).

Błąd  $e$  definiowany jest następująco:

$$e(s, a) = u(s) - \hat{u}(s, a), \quad (11.32)$$

gdzie:  $u(s) = \mathbf{D}[u(t)]$ ,  $\hat{u}(s, a) = \mathbf{D}[N(x, a)]$ .

W tym przypadku nie porównuje się już sygnałów  $u(t)$  i  $\hat{u}(t)$ , lecz przekształcone ich postacie a mianowicie  $u(s)$  i  $\hat{u}(s)$ .



Rys. 11.10. Schemat procesu identyfikacji (przypadek deterministyczny):  $D$  - operator przekształcenia modulacyjnego,  $N$  - nieliniowy operator różniczkowy,  $MIN J(e)$  - algorytm minimalizacji funkcji jakości  $J$ .

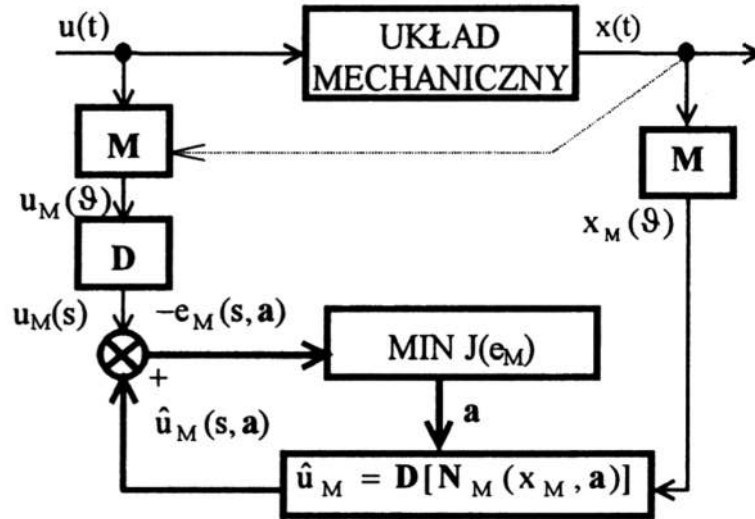
### 11.9.2. Schemat procesu identyfikacji w przypadku modelu losowego

Zastosowanie modelu losowego wymaga przekształcenia równania opisującego ten model do postaci zdeterminowanej, celem uzyskania możliwości przeprowadzenia obliczeń. W literaturze opisane są metody doprowadzania różniczkowego równania losowego do algebraicznego równania zdeterminowanego, poprzez wykorzystanie funkcji korelacyjnej oraz przekształcenie Laplace'a bądź Fouriera. Metody te dotyczą oczywiście układów liniowych. Dla układów nieliniowych stosuje się dodatkowo różne metody linearyzacji problemu. W niniejszej pracy zastosowano metodę przekształcania losowych równań nieliniowych bez uproszczeń (linearyzacji). W tym celu wykorzystuje się operacje wyznaczania momentów statycznych pierwszego i drugiego rzędu, a następnie dokonuje się przekształcenia modulacyjnego. Funkcje losowe w ogólnym przypadku mogą być niestacjonarne.

Jako sygnały losowe będą użyte funkcje losowe, opisane momentami statycznymi pierwszego i drugiego rzędu. Moment pierwszego rzędu zależy od jednego argumentu, natomiast moment drugiego rzędu zależy od dwu argumentów. Dla uproszczenia zapisu potraktowano moment drugiego rzędu jako zależny od jednego ale dwuwymiarowego argumentu. Argument oznaczono symbolem  $\mathcal{S}$ . Sym-



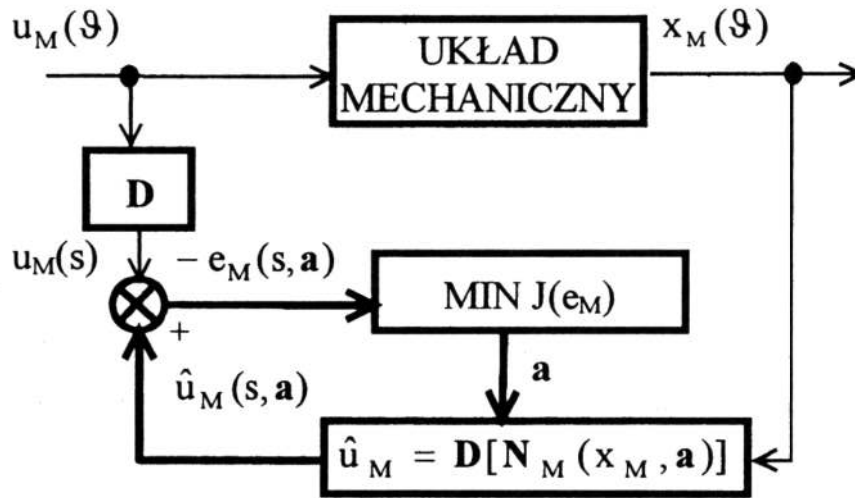
bolem  $M$  oznaczono operator wyznaczania danego momentu, a sam moment funkcji losowej  $X(t)$  oznaczono  $X_M(\vartheta)$ . Zatem:  $M[X(t)] = X_M(\vartheta)$ .



Rys. 11.11. Schemat procesu identyfikacji dla przypadku losowego:  $D$  - operator przekształcenia modulacyjnego,  $M$  - operator momentu statystycznego funkcji losowej,  $MIN J(e)$  - algorytm minimalizacji funkcji jakości,  $N_M$  - operator nieliniowego losowego równania różniczkowego poddany operacji wyznaczania momentu statystycznego.

Losowe modele układów dynamicznych są opisane losowymi zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Jeśli równanie to podda się operacji wyznaczania momentu, to operator  $N$  losowego równania różniczkowego działający na funkcji losowej ulegnie przekształceniu w inny operator  $N_M$ , będący również operatorem równania różniczkowego (w ogólnym przypadku cząstkowego), ale już nie losowego i działającym nie na funkcji losowej ale na momencie tej funkcji losowej. Na rysunku 11 przedstawiony jest schemat identyfikacji układu dynamicznego pobudzonego funkcją losową  $U(t)$ . Przerwaną linią narysowane jest „połączenie” wykorzystywane do obliczania momentu wzajemnego.

Schemat ten można uprościć. Wyobraźmy sobie, że układ dynamiczny pobudzony jest sygnałem w postaci momentu funkcji losowej i generuje sygnał wyjściowy również w postaci odpowiedniego momentu. Zostało to zobrazowane na rysunku 11.12. Schemat ten jest identyczny ze schematem z rysunku 11.10, dotyczącym przypadku zdeterminowanego. Dlatego też dalej będzie rozważany głównie przypadek zdeterminowany. Natomiast przypadek losowy będzie uwzględniany jedynie wówczas, gdy między tymi przypadkami wystąpią różnice.



Rys. 11.12. Uproszczony schemat procesu identyfikacji dla przypadku losowego.

### 11.9.3. Identyfikacja układów w przypadku występowania zakłóceń

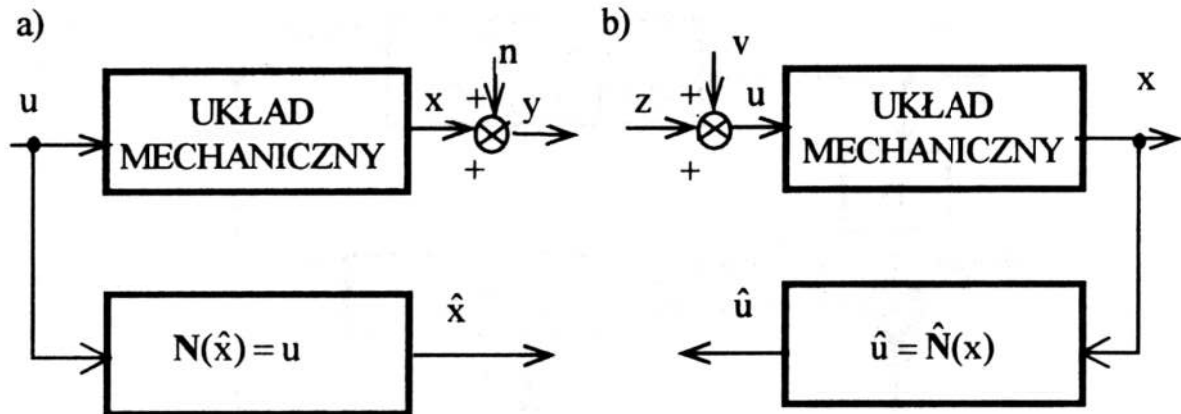
Niniejszy podpunkt dotyczy układów mechanicznych, w których występują niemierzalne zakłócenia. Założono, że zakłócenia te mają charakter stacjonarnych funkcji losowych, których wariancje są ograniczone, a wartości średnie są równe zero. Poza tym zakłócenia te nie są skorelowane ani z sygnałami, które zakłócają, ani między sobą. Założono również, że sygnały zakłócające dodawane są do sygnału wejściowego i wyjściowego układu (rys. 11.13 i 11.14). W przypadku występowania zakłóceń mierzone są sygnały  $z$  i  $y$  niż rzeczywiście podawane lub odbierane sygnały  $u$  i  $x$  z układu bądź modelu.

#### 11.9.3.1. Model prosty i odwrotny w przypadku występowania zakłóceń

W przypadku identyfikacji układu, w którym występują zakłócenia, można wyróżnić dwie typowe sytuacje, którym odpowiadają dwie różne postacie sygnałów wejściowych modelu. Ma to miejsce bez względu na to czy stosowany jest model prosty czy odwrotny.

W pierwszym przypadku sygnał wejściowy nie jest zakłócany (rys. 11.13). Wtedy algorytm identyfikacji mało różni się od algorytmu dla przypadku, gdy nie występują zakłócenia (pkt. 11.9.1, 11.9.2.). W drugim przypadku zakłóceniom ulega sygnał wejściowy (rys. 11.14).

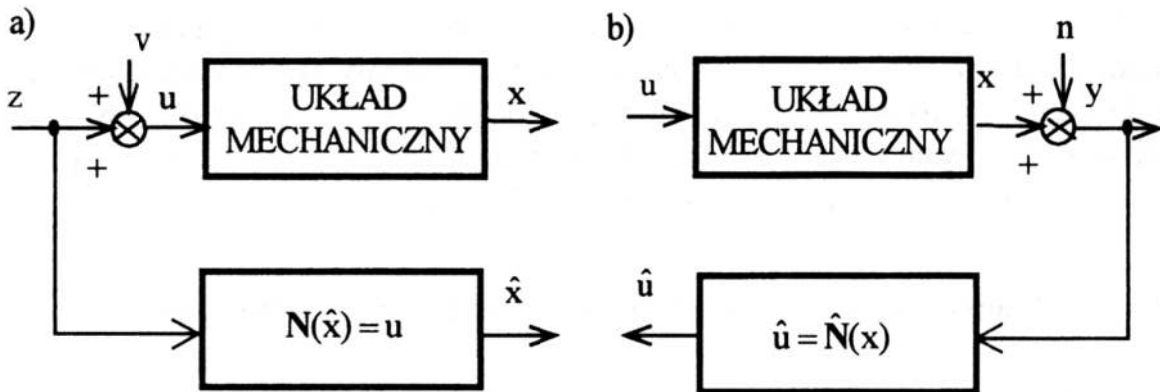




Rys. 11.13. Model prosty (a) i odwrotny (b) w przypadku zakłócenia tylko sygnału wyjściowego.

Algorytm identyfikacji oprócz szukania takiego modelu matematycznego, który jest najbardziej adekwatny do układu, musi zawierać procedurę szukania takiego sygnału wejściowego modelu, który będzie najbardziej zbliżony do odpowiedniego sygnału układu, to jest do:

- sygnału wejściowego układu  $u$  - dla modelu prostego,
- sygnału wyjściowego układu  $x$  - dla modelu odwrotnego.

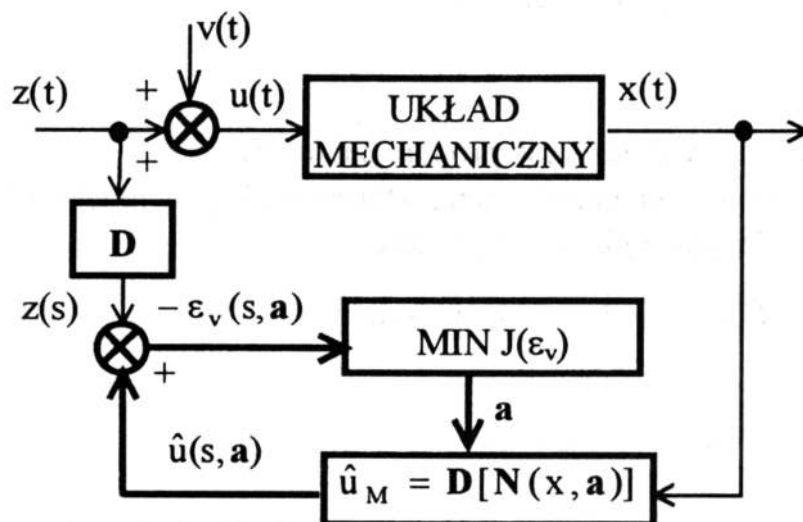


Rys. 11.14. Model prosty (a) i odwrotny (b) w przypadku zakłócenia tylko sygnału wejściowego.

Zatem algorytm identyfikacji różni się znacznie od algorytmu identyfikacji układu, nie poddanego zakłóceniom. Podobna sytuacja występuje wówczas, gdy zakłócany jest zarówno sygnał wejściowy i wyjściowy układu. Dlatego też, w celu uniknięcia komplikacji należy stosować model prosty, gdy zakłócany jest sygnał wyjściowy, a model odwrotny, gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu.

### 11.9.3.2. Schemat identyfikacji układu, gdy zakłócany jest sygnał wejściowy

Przypadek układu, gdy zakłócany jest sygnał wejściowy przedstawia rysunek 11.14a. Schemat identyfikacji układu dla tego przypadku jest przedstawiony na rysunku 11.15.



Rys. 11.15. Schemat procesu identyfikacji gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu:  $v(t)$  - niemierzalny sygnał zakłócający,  $z(t)$  - mierzony sygnał wejściowy,  $u(t)$  - rzeczywisty sygnał wejściowy układu.

Błąd  $e_v(s, \mathbf{a})$  określa się następująco:

$$e_v(s, \mathbf{a}) = \hat{u}(s, \mathbf{a}) - u(s), \quad (11.33)$$

gdzie:

$$u(s) = z(s) + v(s). \quad (11.34)$$

Stąd:

$$e_v(s, \mathbf{a}) = \hat{u}(s, \mathbf{a}) - z(s) - v(s), \quad (11.35)$$

gdzie (rys. 11.15):

$$\hat{u}(s, \mathbf{a}) - z(s) = \epsilon(s, \mathbf{a}). \quad (11.36)$$

O sygnale  $v(t)$  założono, że jest stacjonarną funkcją losową o wartości średniej równej zero i ograniczonej wariancji. Zatem jej przekształcona postać  $v(s)$  jest również funkcją losową (pkt. 11.72), a także błąd  $e_v(s, \mathbf{a})$  jest także funkcją losową.

Wartość średnia kwadratowa równania (11.35) ma postać:

$$E[e_v^2] = E[(\hat{u} - z - v)^2]. \quad (11.37)$$

Stąd, po uwzględnieniu zależności (11.25) i (11.28) otrzymuje się:

$$E[e_v^2] - b_v T_s = (\hat{u} - z)^2 = \varepsilon_v^2, \quad (11.38)$$

gdzie:

$b_v = b_v(s)$  - współczynnik proporcjonalności,

$T_s$  - długość przedziału, poza którym funkcja  $\phi$  przekształcania modulacyjnego  $D$  równa się zero.

Oznaczając  $E[e_v^2] - b_v T_s = \bar{\varepsilon}_v^2 T_s$ , otrzymuje się:

$$\bar{\varepsilon}_v = T_s^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_v = T_s^{-\frac{1}{2}} (\hat{u} - z). \quad (11.39)$$

Uwzględniając w powyższym równaniu zależność  $\bar{\varepsilon}_v$  od zbioru parametrów  $\mathbf{a}$  i biorąc je dla  $s=s_i$ , można zbudować funkcję jakości o postaci:

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m \bar{\varepsilon}_v^2(s_i, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m T_{s_i} [u(s_i, \mathbf{a}) - z(s_i)]^2, \quad (11.40)$$

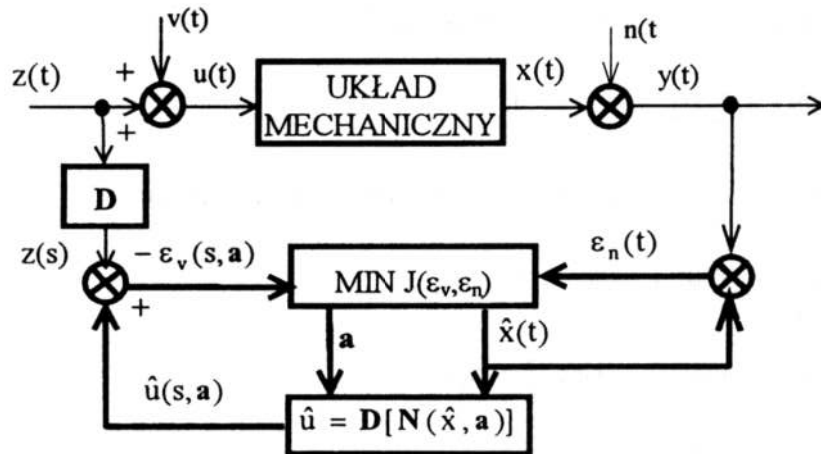
która ma podobną budowę jak w przypadku, gdy nie występują zakłócenia. Ponieważ błąd  $e_v$  zawiera błąd  $b_v T_s$ , powstały od zakłócającego sygnału losowego, więc funkcja jakości nie osiąga minimum w punkcie, gdzie  $J(\mathbf{a})=0$  tylko gdy  $J(\mathbf{a}) \geq 0$ . Dlatego też do minimalizacji funkcji jakości należy stosować metody analityczną II (pkt. 11.11.2) lub iteracyjną (pkt. 11.11.3). Natomiast nie można stosować metody analitycznej I (pkt. 11.11.1).

### 11.9.3.3. Schemat identyfikacji układu, gdy zakłócanie są sygnały wejściowy i wyjściowy

Schemat identyfikacji układu, z zastosowaniem przekształcenia modulacyjnego, odpowiadający przypadkowi gdy zakłócanie są sygnały wejściowy i wyjściowy, jest przedstawiony na rysunku 11.16.

Błąd  $e_v(s, \mathbf{a})$  określa się następująco:

$$e_v(s, \mathbf{a}) = \hat{u}(s, \mathbf{a}) - u(s), \quad (11.41)$$



Rys. 11.16. Schemat procesu identyfikacji gdy zakłócony jest sygnał wejściowy i wyjściowy układu:  $v(t)$  i  $n(t)$  - niemierzalne sygnały zakłócające,  $z(t)$  i  $y(t)$  - mierzone sygnały wejściowy,  $u(t)$  i  $x(t)$  - rzeczywiste sygnały układu.

gdzie:

$$u(s) = z(s) + v(s) . \quad (11.42)$$

Stąd:

$$e_v(s, a) = \hat{u}(s, a) - z(s) - v(s) , \quad (11.43)$$

gdzie (rys. 11.16):

$$\hat{u}(s, a) - z(s) = \epsilon(s, a) , \quad (11.44)$$

oraz

$$e_n(t) = \hat{x}(t) - x(t) , \quad (11.45)$$

gdzie:

$$x(t) = y(t) - n(t) . \quad (11.46)$$

Stąd otrzymuje się:

$$e_n(t) = \hat{x}(t) - y(t) + n(t) , \quad (11.47)$$

gdzie:

$$\hat{x}(t) - y(t) = \epsilon_n(t) . \quad (11.48)$$

Z założenia sygnały  $v(t)$  i  $n(t)$  są stacjonarnymi funkcjami losowymi o wartości średniej równej zero i ograniczonej wariancji.

Wartość średnia kwadratowa równania (11.47) ma postać:

$$\mathbf{E}[e_n^2] = \mathbf{E}[(\hat{x} - y + n)^2]. \quad (11.49)$$

Stąd, po uwzględnieniu założeń odnośnie  $n(t)$  otrzymuje się:

$$\mathbf{E}[e_v^2] - \mathbf{E}[n^2] = (\hat{x} - y)^2 = \varepsilon_n^2, \quad (11.50)$$

zaś po oznaczeniu  $\bar{e}_n^2 = \mathbf{E}[e_n^2] - \mathbf{E}[n^2]$ :

$$\bar{e}_n = \varepsilon_n = \hat{x} - y. \quad (11.51)$$

Równanie (11.43) nie różni się od równania (11.35), zatem zgodnie z (11.39) dla  $s=s_i$ :

$$\bar{e}_v = T_s^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_v = T_s^{-\frac{1}{2}} (\hat{u} - z). \quad (11.52)$$

Uwzględniając w równaniu (11.52) zależność  $\bar{e}_v$  od zbioru parametrów  $\mathbf{a}$  oraz biorąc to równanie dla  $s=s_i$ , a równanie (11.51) dla  $t=t_j$  można zbudować funkcję jakości o postaci:

$$J[\mathbf{a}, \mathbf{x}(t)] = \sum_{i=1}^m \bar{e}_v^2(s_i, \mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \bar{e}_n^2(t_j) = \sum_{i=1}^m T_{s_i}^{-1} [\hat{u}(s_i, \mathbf{a})]^2 + \sum_{j=1}^p [\hat{x}(t_j) - y(t_j)]^2. \quad (11.53)$$

Funkcja ta znacznie różni się od funkcji jakości dla przypadku bez zakłóceń ze względu na problem optymalizacji sygnału  $\mathbf{x}(t)$ . Do minimalizacji tej funkcji jakości należy użyć metody iteracyjnej (pkt. 11.10.3). Problem jest trudny do rozwiązania, gdyż do zbioru szukanych parametrów  $\mathbf{a}$  dochodzi zbiór szukanych wartości sygnału  $\mathbf{x}(t_j)$ ,  $j=1, \dots, p$ , gdzie  $p$  jest liczbą wartości  $t_j$  branych pod uwagę.

#### 11.9.4. Identyfikacja wielomasowych, nieliniowych układów mechanicznych

Dotychczas zajmowaliśmy się jednomasowymi układami mechanicznymi. Pozwoliło to na jasne przedstawienie idei metody przekształcenia modulacyjnego. Niniejszy podpunkt dotyczy układów wielomasowych. Metoda postępowania zostanie omówiona na układzie, którego sygnały wejściowe są zakłócanie niemiernymi sygnałami, będącymi stacjonarnymi funkcjami losowymi o wartościach średnich równych zero i o ograniczonych wariancjach. Ponadto przyjęto, że sygnały te nie są skorelowane ani z sygnałami zakłócanymi, ani między sobą.

Niech układ wielomasowy składa się z mas połączonych między sobą (sprzężonych) za pomocą nieliniowych członów postaci:

$$\Psi_{ij} = \Psi([\dot{x}_i - \dot{x}_j], [x_i - x_j]), \quad (11.54)$$

gdzie:  $x_i = x_i(t)$ .

Schemat trójmasowego układu omawianego typu przedstawia rysunek 11.17. W rozważaniach założono, że masa z indeksem „0” ma nieskończoną wartość i jest nieruchoma. Masa ta, zwana podstawą, stanowi układ odniesienia do pomiaru przemieszczeń  $x_i$  innych mas.

Równania opisujące ruch poszczególnych mas takiego układu są następujące:

$$a_{11}\ddot{x}_1 + \Psi_{10}(\dot{x}_1, x_1) + \Psi_{12}(-[\dot{x}_2 - \dot{x}_1], -[x_2 - x_1]) + \Psi_{13}(-[\dot{x}_3 - \dot{x}_1], -[x_3 - x_1]) = u_1 + v_1, \quad (11.55)$$

$$a_{22}\ddot{x}_2 + \Psi_{20}(\dot{x}_2, x_2) + \Psi_{21}([\dot{x}_2 - \dot{x}_1], [x_2 - x_1]) + \Psi_{23}(-[\dot{x}_3 - \dot{x}_2], -[x_3 - x_2]) = u_2 + v_2, \quad (11.56)$$

$$a_{33}\ddot{x}_3 + \Psi_{30}(\dot{x}_3, x_3) + \Psi_{32}([\dot{x}_3 - \dot{x}_2], [x_3 - x_2]) + \Psi_{31}([\dot{x}_3 - \dot{x}_1], [x_3 - x_1]) = u_3 + v_3, \quad (11.57)$$

gdzie  $x = x(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $a_{ii}$  - i-ta masa.

Ponieważ masa z indeksem zero jest nieruchoma i stanowi układ odniesienia, więc można zapisać:  $\ddot{x}_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ .

Niech:

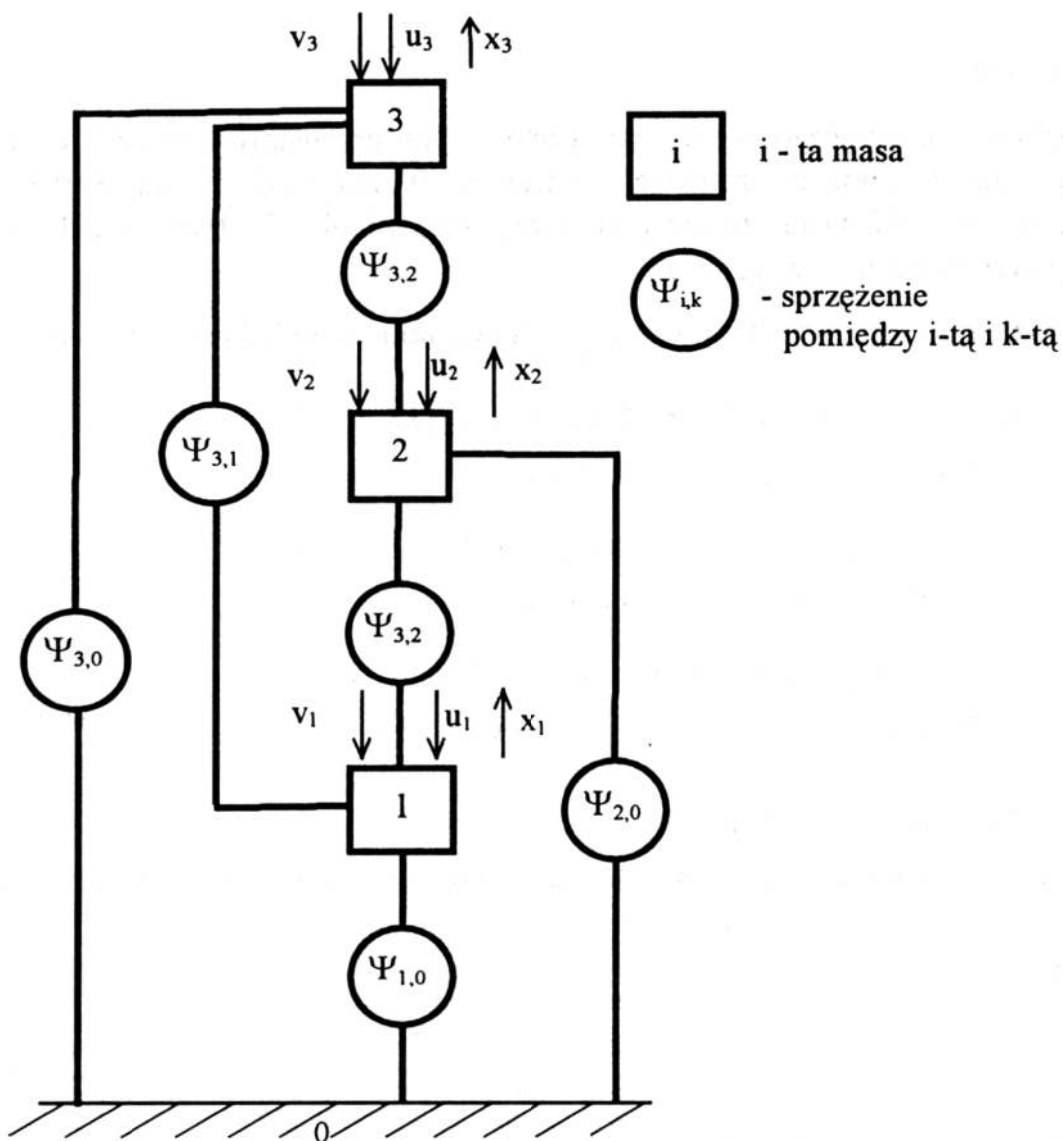
$$x_{ik} = x_i - x_k, \quad (11.58)$$

oznacza różnicę wyjść z układu sygnałów  $x_i = x_i(t)$  i  $x_k = x_k(t)$ . W przypadku, gdy sygnały wejściowe są sygnałami zdeterminowanymi, różnicę wyjść uzyskuje się odejmując od siebie zmierzone sygnały  $x_i$  i  $x_k$ . Natomiast, gdy sygnały wejściowe są funkcjami losowymi  $X_i$  i  $X_k$ , to dla uzyskania momentu drugiego rzędu różnicy  $X_{ik}$  oprócz momentów statystycznych własnych  $X_i$  i  $X_k$  potrzebne są dwa momenty wzajemne:  $X_i$  względem  $X_k$  i  $X_k$  względem  $X_i$ .

I-te równanie opisujące układ mechaniczny można zapisać syntetycznie w postaci:

$$N_i(a_i, x_i) = u_i + v_i, \quad (11.59)$$

gdzie  $\mathbf{a}_i$  jest zbiorem parametrów występujących w  $i$ -tym równaniu,  $\mathbf{x}_i$  jest zbiorem różnic wyjść sygnałów w tym równaniu,  $\mathbf{N}_i$  jest nieliniowym operatorem różniczkowym równania.



Rys. 11.17. Schemat układu trójmasowego [18].

Natomiast układ równań opisujących układ mechaniczny ma postać:

$$\mathbf{N}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad (11.60)$$

gdzie:  $\mathbf{N} = \text{col}[\mathbf{N}_i]$ ,  $\mathbf{u} = \text{col}[\mathbf{u}_i]$ ,  $\mathbf{v} = \text{col}[\mathbf{v}_i]$ , oznaczają odpowiednie wektory kolumnowe.



### 11.10. Wybór funkcji jakości modelu matematycznego

Problem funkcji jakości zostanie tutaj omówiony w oparciu o schemat procesu identyfikacji przedstawiony na rys. 11.6. Założono, że na wejściu układu działa sygnał  $u$ , który powoduje wygenerowanie odpowiedzi  $x$ . Sygnał ten podawany jest jednocześnie na wejście modelu, na skutek czego model generuje odpowiedź  $\hat{u}$ . Właściwości układu można opisać nieliniowym operatorem różniczkowym  $N$ , zależnym od zbioru parametrów  $a$ . Operator ten realizuje następującą transformację:

$$\hat{u} = N(a, x). \quad (11.61)$$

Ponieważ model matematyczny jest zawsze przybliżonym opisem układu, więc sygnał  $\hat{u}$  zawsze różni się od sygnału  $u$ . Wartość tej różnicy może być wykorzystana do oceny jakości modelu matematycznego. Jakość tę można ocenić za pomocą pewnej normy  $\|\hat{u} - u\|$ , będącej miarą odległości sygnałów  $\hat{u}$ ,  $u$  w przestrzeni  $R$ . Rodzaj operacji matematycznych jak i wybór konkretnej postaci normy  $\|\bullet\|$  może być opisany przy pomocy wyrażenia, zwanego funkcją jakości  $J$ . Postacie funkcji jakości mogą być różne np.:

$$J = \|\hat{u} - u\|^2. \quad (11.62)$$

Często przyjmuje się po prostu:

$$J = (\hat{u} - u)^2. \quad (11.63)$$

Jeśli sygnały są obserwowane w dyskretnych chwilach, to po oznaczeniu kolejnych obserwacji indeksem  $i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) można powyższą zależność zapisać w postaci:

$$J = \sum_{i=1}^N (\hat{u}_i - u_i)^2. \quad (11.64)$$

Wprowadzenie funkcji jakości ułatwia nie tylko ocenę adekwatności modelu matematycznego, ale umożliwia również realizację procesu poszukiwania modelu najlepszego ze względu na przyjęte kryterium. Optymalizacja może dotyczyć zarówno struktury jak i parametrów. W przypadku układów mechanicznych struktura modelu matematycznego odpowiada postaci równań ruchu. Postać tę można najczęściej przyjąć na podstawie informacji apriorycznych i problem poszukiwania optymalnego modelu sprowadzić do wyznaczenia optymalnego zbio-

ru parametrów  $\mathbf{a}^*$  tzn., takiego zbioru, który minimalizuje odległość między zbiorami  $\hat{u}$  i  $u$ . Sprowadza się to do minimalizacji funkcji jakości  $J$ , tzn.

$$J(\mathbf{a}^*) = \min_{\mathbf{a}} J(\mathbf{a}). \quad (11.65)$$

Biorąc pod uwagę (11.61) można wyrażenie (11.62) zapisać następująco:

$$J = \|\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{u}\|^2 = J(\mathbf{a}), \quad (11.66)$$

tzn. przedstawić funkcję jakości w postaci zależnej w sposób jawny od parametrów  $\mathbf{a}$ .

### 11.11. Metody szukania minimum funkcji jakości

Metody poszukiwania minimum funkcji jakości można podzielić na analityczne i iteracyjne [65]. Jednakże w przypadku układów silnie nieliniowych nie da się ich rozwiązać analitycznie. Konieczne jest wtedy zastosowanie iteracyjnych metod numerycznych. W niniejszym punkcie przedstawione zostaną dwie metody minimalizacji funkcji jakości, wywodzące się z metod analitycznych oraz jedna metoda wywodząca się z metod iteracyjnych. Wykorzystane zostaną oznaczenia ze schematu procesu identyfikacji z rysunków 11.10 i 11.11, wykorzystującymi już przekształcenie modulacyjne  $\mathbf{D}$ .

Na podstawie wiedzy apriorycznej wiemy w jakim obszarze mogą znajdować się szukane wartości parametrów. Przykładowo wiemy, że parametr reprezentujący masę nie może być ujemny, że nie może on przekraczać wartości jaką ma masa całego identyfikowanego urządzenia itp. Zatem istnieją pewne ograniczenia, które określają obszar wartości, jakie te szukane parametry mogą przyjmować. Wartości parametrów, znalezione poprzez minimalizację funkcji jakości, muszą znajdować się w tym obszarze. W przeciwnym przypadku, należy przypuszczać, że został popełniony jakiś błąd np. błąd w obliczeniowej procedurze minimalizacji, błąd w wyborze modelu badanego układu, bądź zaistniały zbyt duże błędy pomiarowe. W celu uzyskania poprawnych wyników należy przyczynę tych błędów zlokalizować i usunąć.

Ze względu na nieliniowość funkcja jakości może, w dopuszczalnym, powyższym obszarze, posiadać wiele minimów, tzn. może, oprócz interesującego nas minimum globalnego, posiadać minima lokalne. Znajdując wtedy jakiś zbiór wartości minimalizujący funkcję jakości nie wiemy, bez dodatkowych informacji, czy zbiór ten odpowiada minimum globalnemu, czy minimum lokalnemu? Gdyby znaleźć resztę ewentualnych minimów i wszystkie je porównać, uzyskałoby się odpowiedź na tak postawione pytanie. Jest to jednak praktycznie bardzo trudne, a

czasami wręcz niemożliwe do zrealizowania. Dlatego, przede wszystkim na podstawie wiedzy apriorycznej o badanym układzie, należy tak dobrać wartości początkowe procedury optymalizacji, by był on możliwie bliski zbiorowi wartości optymalnych. Poza tym można porównać niektóre ze znalezionych wartości parametrów z wartościami wyznaczonymi z bezpośrednich pomiarów (np. bezpośredniego pomiaru masy czy sztywności).

W przypadku, gdy funkcja jakości ma oprócz minimum globalnego minima lokalne, może się zdarzyć, że przy nieodpowiednim doborze wartości początkowych procedury optymalizacji, procedura ta będzie „zmierzać” poza obszar dopuszczalny parametrów, w kierunku znajdującego się tam minimum lokalnego. Należy wtedy zmienić wartości początkowe procedury. Można też zastosować tzw. procedury optymalizacji z ograniczeniami. Procedury te zapewniają to, że znaleziony zbiór wartości minimalizujących funkcję jakości znajduje się wewnątrz dopuszczalnego obszaru.

### 11.11.1. Metoda analityczna I

W metodzie tej zakłada się, że minimalna wartość funkcji jakości wynosi zero:

$$\min_{\mathbf{a}} J(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{a}} J[\mathbf{e}(s, \mathbf{a})] = 0. \quad (11.67)$$

Warunkiem koniecznym na istnienie takiego minimum jest:

$$\mathbf{e}(s, \mathbf{a}) = \hat{\mathbf{u}}(s, \mathbf{a}) - \mathbf{u}(s) = 0, \quad \text{czyli} \quad \hat{\mathbf{u}}(s, \mathbf{a}) = \mathbf{u}(s). \quad (11.68)$$

Stąd, po wykorzystaniu związku:  $\hat{\mathbf{u}}(s, \mathbf{a}) = \mathbf{D}[\mathbf{N}(x, \mathbf{a})]$ , otrzymuje się równanie:

$$\mathbf{D}[\mathbf{N}(x, \mathbf{a})] = \mathbf{u}(s). \quad (11.69)$$

Biorąc równania (11.69) dla różnych  $n$  wartości argumentu  $s$ , można zbudować następujący układ równań:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1[\mathbf{N}(x, \mathbf{a})] = \mathbf{u}(s_1), \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{D}_n[\mathbf{N}(x, \mathbf{a})] = \mathbf{u}(s_n), \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}^*, \quad (11.70)$$

którego rozwiązaniem będą szukane wartości parametrów  $\mathbf{a}=\mathbf{a}^*$ . W układzie równań (11.70) symbolem  $\mathbf{D}_i$  oznaczono operator  $\mathbf{D}$ , odpowiadający konkretnej wartości argumentu  $s=s_i$ .

### 11.11.2. Metoda analityczna II

Ponieważ funkcje jakości omawianego typu są dwukrotnie różniczkowalne (11.62), więc minimum funkcji jakości można znaleźć wychodząc z następujących warunków:

$$\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (11.71)$$

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{a})}{\partial^2 a_k} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^*} > 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.72)$$

Przy założeniu, że funkcja jakości ma postać według wzoru (11.64):

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m [\hat{u}(s_i, \mathbf{a}) - u(s_i)]^2, \quad (11.73)$$

a równanie (11.71) przybierze postać:

$$\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial a_k} = +2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \hat{u}(s_i, \mathbf{a})}{\partial a_k} [\hat{u}(s_i, \mathbf{a}) - u(s_i)] = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (11.74)$$

którego rozwiązaniem są szukane  $n$  wartości parametrów  $\mathbf{a}=\mathbf{a}^*$ .

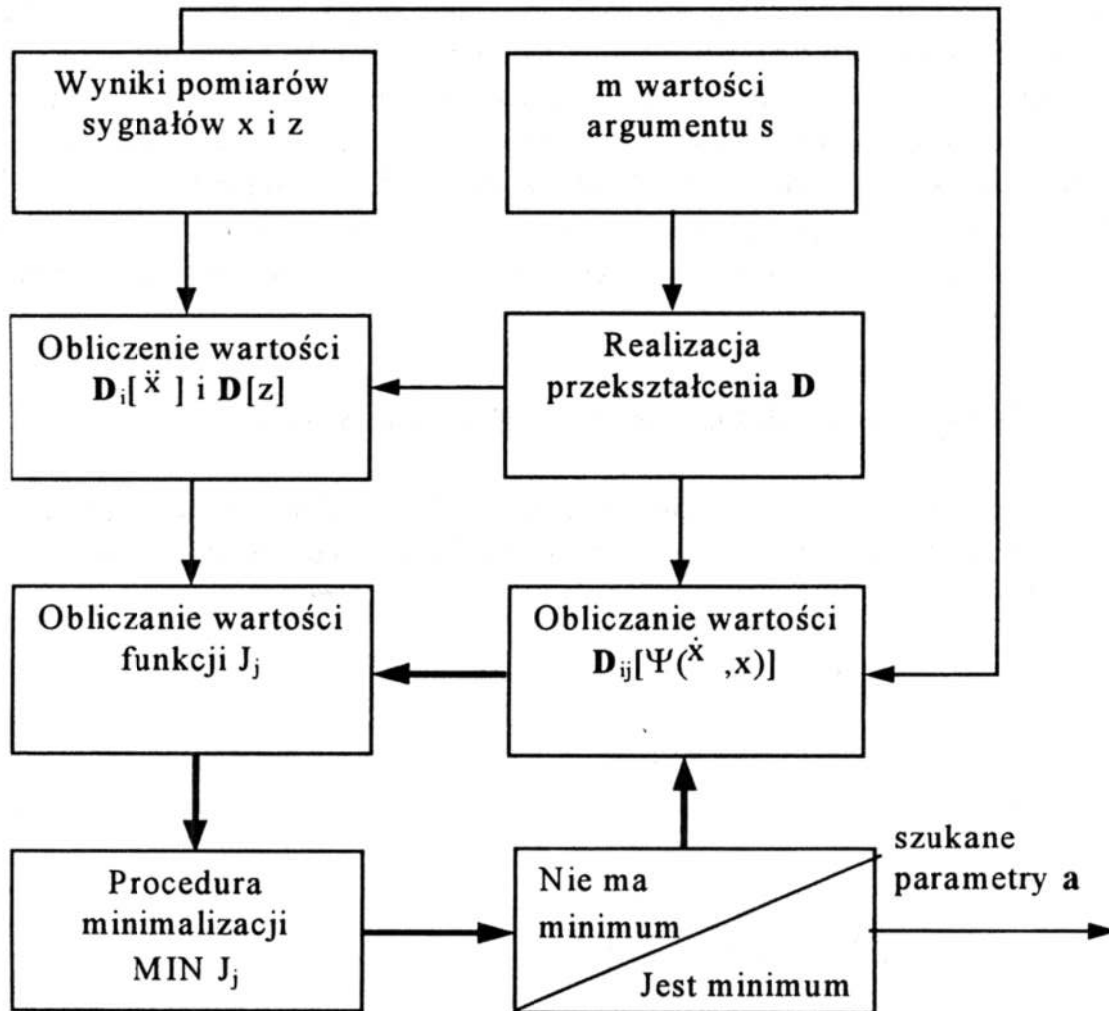
### 11.11.3. Metoda iteracyjna

Wartości parametrów  $\mathbf{a}$  szuka się za pomocą procedury iteracyjnej, którą można przedstawić wzorem:

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = \Pi(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i-1)}, \dots, \mathbf{a}^{(i-k)}), \quad (11.75)$$

gdzie  $\Pi$  oznacza operację, którą należy wykonać na  $(k+1)$  kolejno wyznaczonych wartościach  $\mathbf{a}$ . Operacja ta zawiera w sobie obliczenie wartości funkcji jakości, przy czym:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{a}^*$ .

Schemat programu realizującego minimalizację funkcji jakości dla przypadku, gdy zakłóceniom  $v$  podlega sygnał wejściowy układu mechanicznego, lub gdy zakłócenia nie występują ( $v=0$ ) przedstawiono na rysunku 11.18.



Rys. 11.18. Schemat programu realizującego minimalizację funkcji jakości.

Danymi do realizacji takiego programu są wyniki pomiarów sygnałów układu oraz ustalone na ich podstawie wartości argumentu  $s$  (tj. argumentu przekształconych funkcji). Liczba tych wartości  $m$  jest większa lub równa liczbie nieznanymi parametrów  $n$  czyli  $i=1,2, \dots, m>n$ . Główna pętla obliczeń (linie pogrubione) realizuje się poprzez: obliczenia w każdym  $j$ -tym kroku wartości funkcji jakości  $J_j$ , wprowadzenie jej do procedury minimalizacji funkcji jakości  $\text{MIN } J_j$  i sprawdzenie czy osiągnięto minimum. Jeśli tak to następuje przerwanie obliczeń. Jeśli nie, to następuje obliczenie nowej wartości funkcji jakości, itd. Do obliczeń wartości funkcji jakości posłużono się modelem matematycznym układu mechanicznego o postaci:  $a_1 x + \Psi(\dot{x}, x) = z + v$ .

### 11.12. Typy nieliniowych równań różniczkowych opisujących układ mechaniczny

W niniejszym punkcie zostaną przedstawione typy nieliniowych równań różniczkowych opisujących układ mechaniczny, jakie mogą być brane pod uwagę przy stosowaniu metody przekształcania modulacyjnego. W podpunkcie 11.11.1 przedstawiono sposób zastępowania zależności nieliniowej opisującej układ rzeczywisty za pomocą wielomianu. W podpunkcie 11.11.2 podane zostaną typy równań różniczkowych do opisu układu w przypadku zdeterminowanym, a w podpunkcie 11.11.3 w przypadku losowym. Wreszcie w punkcie 11.4.4 zostaną wprowadzone, z zaprezentowanych typów równań, równania o postaci dogodnej do stosowania.

#### 11.12.1. Zastępowanie zależności nieliniowej wielomianem

W wielu przypadkach nieliniową zależność członu układu od pewnej wielkości  $x$  można przedstawić jako funkcję  $W(x)$ , będącą odcinkami wielomianem (rys. 11.19):

$$W(x) = \begin{cases} W_1(x) \text{ dla } x_0 \leq x \leq x_1, \\ W_2(x) \text{ dla } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \vdots \\ W_p(x) \text{ dla } x_{p-1} \leq x \leq x_p, \end{cases} \quad (11.76)$$

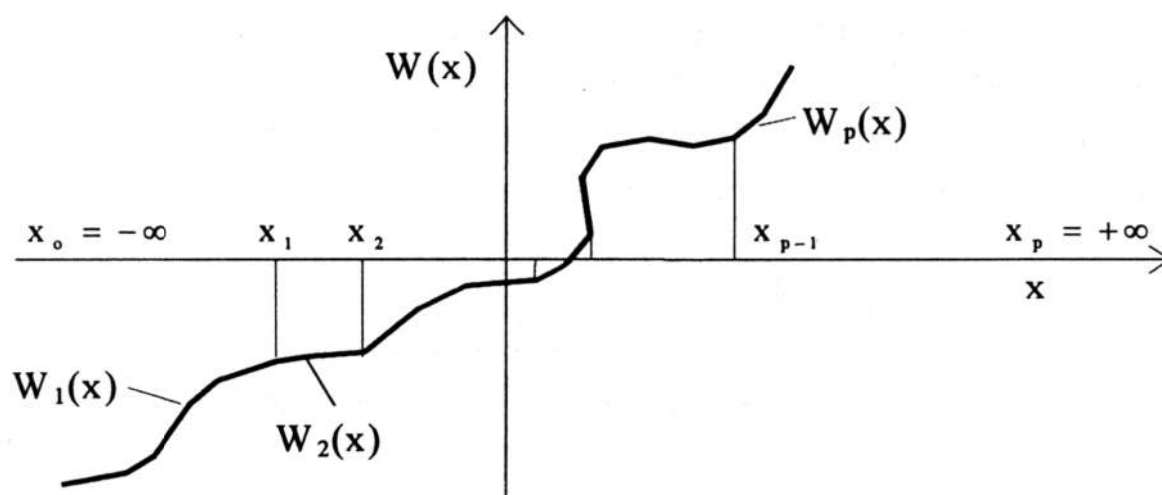
gdzie:

$W_k(x) = W_k(x, \mathbf{a})$ , - wielomian ze względu na wielkość  $x$  z parametrami o stałych wartościach, należącymi do zbioru  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,

$x_k = x_k(\mathbf{a})$ , - stała, będąca funkcją stałych parametrów wielomianów  $W_k$  i  $W_{k+1}$ ,

przy czym  $k=1, \dots, p-1$ ,  $W_k(x_k) = W_{k+1}(x_k)$ ,  $x_0 = -\infty$ ,  $x_p = +\infty$ .

Zależność (11.76) jest wykorzystywana do opisu nieliniowości typu „luz” i „tarcie suche”.



Rys. 11.19. Funkcja będąca odcinkami wielomianem.

### 11.12.2. Opis układu dynamicznego w przypadku zdeterminowanym

W celu ułatwienia zapisu wprowadza się pewne oznaczenia. Wielomian (11.76), posługując się funkcją jednostkową  $\mathbf{1}(x)$ , można zapisać następująco:

$$W(x) = \sum_{k=1}^p W_k \mathbf{1}(x - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^p W_k \mathbf{1}(x - x_k), \quad (11.77)$$

gdzie:

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } x = 0, \\ 1, & \text{dla } x > 0. \end{cases} \quad (11.78)$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$h_k(x) = \mathbf{1}(x - x_{k-1}) - \mathbf{1}(x - x_k), \quad (11.79)$$

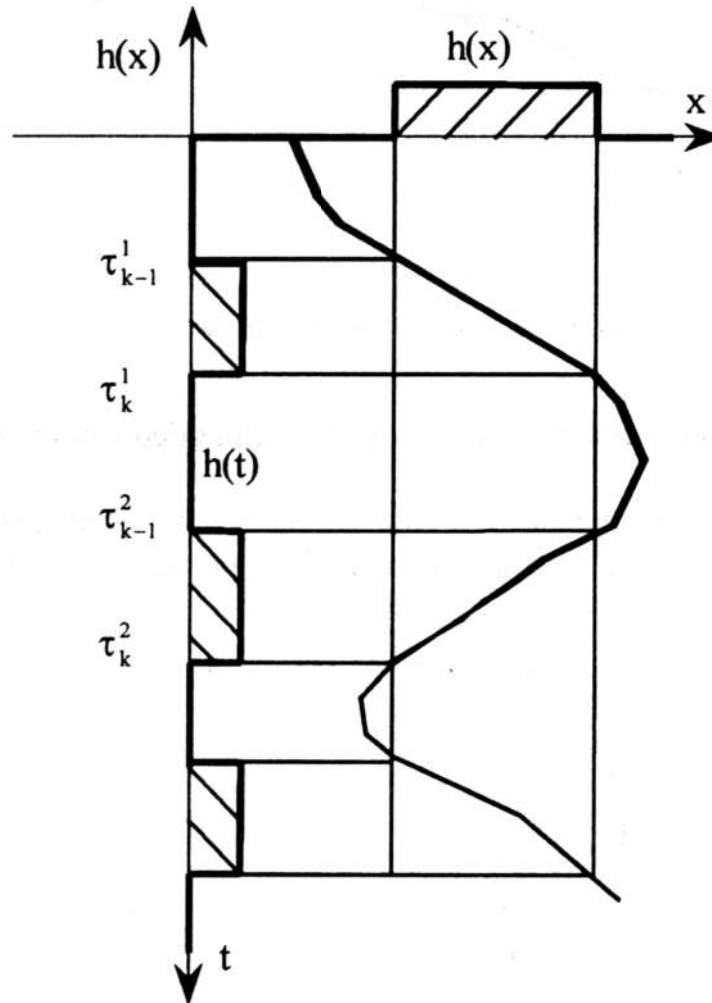
zapis funkcji  $W(x)$  można uprościć jeszcze bardziej:

$$W(x) = \sum_{k=1}^p W_k(x) h_k(x). \quad (11.80)$$

Chcąc podkreślić, że wielomian  $W(x)$  zależy od parametrów ze zbioru  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$  należy zapisać:  $W(x) = W(x, \mathbf{a})$ .



Ponieważ  $x=x(t)$  jest funkcją czasu, więc i  $h(x)$  jest jego funkcją. Zobrazowano to na rysunku 11.20. Przedziałowi  $[x_{k-1}, x_k]$  na osi  $x=x(t)$  odpowiadają przedziały  $[\tau_{k-1}^i, \tau_k^i]$  na osi  $t$ . Przedziały te są wyznaczone przez przecięcie się przebiegu  $x(t)$  z liniami odpowiadającymi  $x=x_{k-1}$  i  $x=x_k$ .



Rys. 11.20. Zależność między funkcjami  $h(t)$  i  $h(x)$ .

Funkcję  $h(t)$  można zapisać jako:

$$h_k(t) = 1(t - \tau_{k-1}^i) - 1(t - \tau_k^i) = 1[x(t) - x_{k-1}] - 1[x(t) - x_k] = h_k[x(t)], \quad (11.81)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tau_{k-1}^i &= t : [x(t) = x_{k-1}, \dot{x}(t) \geq 0] \cup [x(t) = x_k, \dot{x}(t) \leq 0], \\ \tau_k^i &= t : [x(t) = x_k, \dot{x}(t) \leq 0] \cup [x(t) = x_{k-1}, \dot{x}(t) \geq 0]. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Mozna więc mówić o równościach funkcji  $h_k(t)$  i  $h_k[x(t)]$ , gdyż w tych samych chwilach  $t$  przyjmują one te same wartości. Zatem zależność (11.80) można zapisać dla  $x=x(t)$  następująco:

$$W(x, a) = \sum_{k=1}^p W_k(x, a) h_k(t, a), \quad (11.83)$$

gdzie  $h_k(t, a)$  jest zdefiniowane wzorem (11.81).

W przypadku, gdy funkcja  $W(x)$  będzie składała się z samych wielomianów stopnia pierwszego będziemy ją oznaczali  $L(x)$ :

$$L(x, a) = \sum_{k=1}^p L_k(x, a) h_k(t, a), \quad (11.84)$$

gdzie  $L_k(x, a)$  jest jednomianem ze względu na  $x$  o stałych parametrach należących do zbioru  $a$ .

W przypadku zdeterminowanym układ dynamiczny będzie opisywany następującymi równaniami:

$$a_1 \ddot{x} + \Psi(\dot{x}, x) = u, \quad (11.85)$$

gdzie:

$$\Psi(\dot{x}, x) = \sum_{i=1}^s L_i(\dot{x}, a) W_i(x, a), \quad (11.86)$$

oraz:

$u=u(t)$  - sygnał wejściowy,

$x=x(t)$  - sygnał wyjściowy,

$L_i(\dot{x}, a)$  - funkcja składająca się z odcinków jednomianów względem  $x$  o parametrach należących do zbioru  $a = [a_2, \dots, a_n]$ , gdzie  $n$  jest liczbą nieznanych parametrów w równaniu,

$W_i(x, a)$  - funkcja składająca się z odcinków wielomianów względem  $x$  o parametrach należących do zbioru  $a$ .

Przyjęta postać równania wynika z kompromisu między próbą objęcia możliwie szerokiej klasy silnie nieliniowych układów mechanicznych i zapewnieniem możliwie jak najlepszego wykorzystania podstawowej zalety przekształcenia modulacyjnego tj. doprowadzenia przekształconych równań do postaci, w której nie występują pochodne sygnału wejściowego układu.

### 11.12.3. Opis układu dynamicznego dla przypadku losowego

#### 11.12.3.1. Przekształcanie losowego równania różniczkowego w różniczkowe równanie zdeterminowane

W tym podpunkcie podana zostanie na przykładowym losowym równaniu różniczkowym metoda przekształcania takiego równania w różniczkowe równanie zdeterminowane. Następnie zostanie przeprowadzone przekształcenie modułacyjne.

Niech losowe równanie różniczkowe, opisujące układ ma postać:

$$a_1 \ddot{X}(t) + a_2 \dot{X}(t) + \Psi[X(t), \mathbf{a}] = U(t), \quad (11.87)$$

gdzie:

- $a_1, a_2$  - parametry o wartościach stałych,
- $\Psi[X(t), \mathbf{a}]$  - nieliniowa funkcja argumentu  $X(t)$  i parametrów ze zbioru  $\mathbf{a} = [a_3, \dots, a_n]$ ,
- $X(t), U(t)$  - funkcje losowe.

Każdy człon powyższego równania, dla ustalonej chwili  $t=t_k$  jest zmienną losową, zatem równanie to można poddać operacji wyznaczania wartości średniej. Niech symbol  $\mathbf{E}$  oznacza operację wyznaczania wartości średniej. Działając na obie strony równania (11.87) operatorem  $\mathbf{E}$  otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ a_1 \ddot{X}(t) + a_2 \dot{X}(t) + \Psi[X(t), \mathbf{a}] \} &= \mathbf{E}[U(t)], \\ a_1 \mathbf{E}[\ddot{X}(t)] + a_2 \mathbf{E}[\dot{X}(t)] + \mathbf{E}[\Psi[X(t), \mathbf{a}]] &= \mathbf{E}[U(t)]. \end{aligned} \quad (11.88)$$

Przyjmując następujące oznaczenie wartości średniej funkcji losowej  $X(t)$ :

$$\mathbf{E}[X(t)] = m_X(t) = m_X, \quad (11.89)$$

otrzymuje się:

$$a_1 m_{\ddot{X}} + a_2 m_{\dot{X}} + m_{\Psi} = m_U, \quad (11.90)$$

a po wykorzystaniu własności pochodnej funkcji losowej:  $m_{\dot{X}} = \dot{m}_X$ ,

$$a_1 \ddot{m}_X + a_2 \dot{m}_X + m_{\Psi} = m_U, \quad (11.91)$$

gdzie:

- $m_X$  i  $m_U$  - wartość średnia funkcji losowej  $X(t)$  i  $U(t)$ ,
- $m_{\Psi}$  - wartość średnia funkcji losowej  $\Psi[X(t), \mathbf{a}]$ .

Ponieważ wartości średnie nie są już zmiennymi losowymi, lecz zmiennymi mającymi charakter deterministyczny, zatem powyższe równanie nie jest już losowe, lecz zdeterminowane. Występująca w nim wartość średnia  $m_\psi$  jest nieliniowa ze względu na parametry  $\mathbf{a}$ .

Dokonując na równaniu (11.91) przekształcenia modulacyjnego (pkt. 11.7), otrzymuje się:

$$\mathbf{D}[a_1 \ddot{m}_x + a_2 \dot{m}_x + a_3 m_\psi] = \mathbf{D}[m_u], \quad (11.92)$$

a następnie:

$$a_1 \ddot{m}_x(s) + a_2 \dot{m}_x(s) + a_3 m_\psi(s) = m_u(s), \quad (11.93)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \ddot{m}_x(s) &= \mathbf{D}[\ddot{m}_x(t)] = \langle m_x(t), \ddot{\varphi}(t, s) \rangle, \\ \dot{m}_x(s) &= \mathbf{D}[\dot{m}_x(t)] = \langle m_x(t), \dot{\varphi}(t, s) \rangle, \\ m_\psi(s) &= \mathbf{D}[m_\psi(t, \mathbf{a})] = \langle m_\psi(t, \mathbf{a}), \varphi(t, s) \rangle. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Dla ustalonego argumentu  $s=s_k$  równanie (11.93) jest zwykłym równaniem przestępnym:

$$a_1 \ddot{m}_x(s_k) + a_2 \dot{m}_x(s_k) + a_3 m_\psi(s_k, \mathbf{a}) = m_u(s_k), \quad (11.95)$$

gdzie:

$\ddot{m}_x(s_k), \dot{m}_x(s_k), m_u(s_k)$  - liczby (wartości funkcji  $\ddot{m}_x(s), \dot{m}_x(s), m_u(s)$  w punkcie  $s=s_k$ ),  
 $m_\psi(s_k, \mathbf{a})$  - nieliniowa funkcja parametrów ze zbioru  $\mathbf{a}$ .

Do obliczenia nieliniowej funkcji  $m_\psi(s_k, \mathbf{a})$  parametrów  $\mathbf{a}=[a_3, \dots, a_n]$ , wykorzystuje się współczynnik  $C_0$ , stosowany do obliczenia wartości średniej  $m_\psi(t, \mathbf{a})$ .

Ponieważ:

$$m_\psi(t, \mathbf{a}) = C_0[m_x(t), \sigma_x(t), \mathbf{a}], \quad (11.96)$$

więc:

$$m_\psi(s, \mathbf{a}) = \mathbf{D}[m_\psi(t, \mathbf{a})] = \mathbf{D}[C_0]. \quad (11.97)$$

W pracy [18] podane są wzory na wyznaczanie współczynników  $C_0$  za pomocą funkcji Gaussa  $\Phi(u)$  i jej pochodnych.

### 11.12.3.2. Wyznaczanie momentów statystycznych drugiego rzędu

Operacje wyznaczania momentów drugiego rzędu będą uszeregowane ze względu na rodzaj momentu powstającego po prawej stronie przekształconego równania losowego. Kolejno pod uwagę będą brane operacje, które po prawej stronie przekształcanego równania losowego, dają:

- $K_{xu}(t_1, t_2)$  - funkcję korelacji wzajemnej,
- $W_{xu}(t_1, t_2)$  - wariancję wzajemną,
- $K_{uu}(t_1, t_2)$  - funkcję korelacji własnej,
- $W_{uu}(t_1, t_2)$  - wariancję własną.

By zbudować równanie z funkcją korelacji własnej z prawej jego strony, należy odjąć od równania (11.87) równanie (11.91). W otrzymanej różnicy dwu równań należy ustalić chwilę  $t=t_2$ . Następnie mnoży się lewostronnie obie strony tej różnicy przez wyrażenie  $X(t_1)-m_x(t_1)$  i tak otrzymane równanie poddaje się operacji wyznaczania wartości średniej. Otrzyma się wtedy:

$$\begin{aligned} & E \{ a_1 [X_1 - m_{x1}] [\ddot{X}_2 - \ddot{m}_{x2}] \} + E \{ a_2 [X_1 - m_{x1}] [\dot{X}_2 - \dot{m}_{x2}] \} + \\ & + E \{ [X_1 - m_{x1}] [\Psi[X_2, a] - m_{\psi 2}] \} = E \{ [X_1 - m_{x1}] [U_2 - m_{u2}] \}. \end{aligned} \quad (11.98)$$

Wykorzystując definicję funkcji korelacji własnej funkcji losowych  $F(t)$  i  $G(t)$ :

$$K_{FG} = K_{FG}(t_1, t_2) = E \{ [F_1(t) - m_{F1}(t)] [G_2(t) - m_{G2}(t)] \}, \quad (11.99)$$

równanie (11.98) można zapisać w postaci:

$$a_1 K_{x\ddot{x}} + a_2 K_{x\dot{x}} + K_{x\psi} = K_{xu}. \quad (11.100)$$

Korzystając z właściwości pochodnej funkcji losowej otrzymuje się:

$$a_1 \frac{d^2 K_{xx}(t_1, t_2)}{dt_2^2} + a_2 \frac{dK_{xx}(t_1, t_2)}{dt_2} + K_{x\psi}(t_1, t_2) = K_{xu}(t_1, t_2), \quad (11.101)$$

a ustalając  $t_1$  można powyższe równanie zapisać:

$$a_1 \ddot{K}_{xx} + a_2 \dot{K}_{xx} + K_{x\psi} = K_{xu}, \quad t_1 = \text{const.}, \quad (11.102)$$

gdzie:

$$\ddot{K}_{xx} = \frac{d^2 K_{xx}(t_1, t_2)}{dt_2^2} = K_{x\ddot{x}}(t_1, t_2). \quad (11.103)$$

Dla uzyskania równania z wariancją wzajemną, należy równanie (11.103) zapisać dla  $t_2=t_1=t$ . Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} K_{xx}(t, t) &= W_{xx}(t, t) = W_{xx}, \\ K_{xu}(t, t) &= W_{xu}(t, t) = W_{xu}, \end{aligned} \quad (11.104)$$

otrzymuje się:

$$a_1 \ddot{W}_{xx} + a_2 \dot{W}_{xx} + W_{x\psi} = W_{xu}. \quad (11.105)$$

Do wyznaczenia funkcji korelacji wzajemnej funkcji losowych  $X(t)$  i  $\Psi[X(t)]$ , w zależności od funkcji korelacji własnej  $K_{xx}(t_1, t_2)$  wykorzystuje się wzór:

$$K_{x\psi}(t_1, t_2) = -\frac{c_1(m_{x2}, \sigma_{x2})}{\sigma_{x2}} K_{xx}(t_1, t_2). \quad (11.106)$$

Dla  $t_1=t_2=t$  otrzymuje się:

$$K_{x\psi} = -\frac{c_1(m_x, \sigma_x)}{\sigma_x} \Big|_{t=t_2} K_{xx}. \quad (11.107)$$

Postępując analogicznie otrzyma się następujący wzór na wariancję wzajemną:

$$W_{x\psi} = -\frac{c_1(m_x, \sigma_x)}{\sigma_x} \Big|_{t=t_2} W_{xx}. \quad (11.108)$$

Dokonując przekształcenia modulacyjnego na równaniu (11.102) otrzymuje się:

$$a_1 \ddot{K}_{xx}(s) + a_2 \dot{K}_{xx}(s) + K_{x\psi}(s) = K_{xu}(s), \quad (11.109)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \ddot{K}_{xx}(s) &= \mathbf{D}[\ddot{K}_{xx} |_{t_1=\text{const}}], & \dot{K}_{xx}(s) &= \mathbf{D}[\dot{K}_{xx} |_{t_1=\text{const}}], \\ K_{x\psi}(s) &= \mathbf{D}[K_{x\psi} |_{t_1=\text{const}}], & K_{xu}(s) &= \mathbf{D}[K_{xu} |_{t_1=\text{const}}]. \end{aligned}$$

Analogiczne równanie otrzymuje się przekształcając równanie (11.105).

W celu zbudowania równania z funkcją korelacji własnej po prawej jego stronie, należy od równania (11.87) odjąć równanie (11.93) i w otrzymanej różnicy równań ustalić chwilę  $t=t_1$ . Analogicznie postępuje się dla chwili  $t=t_2$ , a następnie obie różnice równań mnoży się przez siebie i otrzymane równania podaje się operacji wyznaczania wartości średniej.

Otrzyma się wtedy:

$$\begin{aligned} a_1^2 K_{\ddot{x}\ddot{x}} + a_2 a_1 K_{\dot{x}\ddot{x}} + a_1 a_2 K_{\ddot{x}\dot{x}} + a_2^2 K_{\ddot{x}\ddot{x}} + a_1 K_{\ddot{x}\psi} + \\ + a_1 K_{\psi\ddot{x}} + a_2 K_{\dot{x}\psi} + a_2 K_{\psi\dot{x}} + K_{\psi\psi} = K_{uu}. \end{aligned} \quad (11.110)$$

Korzystając z zależności  $K_{\ddot{x}\ddot{x}} = \frac{\partial K_{\ddot{x}\ddot{x}}}{\partial t_2}$ , otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a_1^2 \frac{\partial^4 K_{\ddot{x}\ddot{x}}}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + a_2 a_1 \frac{\partial^3 K_{\ddot{x}\ddot{x}}}{\partial t_1^2 \partial t_2} + a_1 a_2 \frac{\partial^3 K_{\ddot{x}\ddot{x}}}{\partial t_1 \partial t_2^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 K_{\ddot{x}\ddot{x}}}{\partial t_1 \partial t_2} + \\ + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}}{\partial t_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}}{\partial t_2^2} + a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}}{\partial t_1} + a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}}{\partial t_2} + K_{\psi\psi} = K_{uu}. \end{aligned} \quad (11.111)$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym cząstkowym ze względu na  $t_1$  i  $t_2$ .

W przypadku gdy  $t_2=t_1=t$  z równania (11.111) otrzymuje się równanie na wariancję  $W_{\ddot{x}\ddot{x}}(t,t)$ . Poddając równanie (11.111) przekształceniu modulacyjnemu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a_1^2 \frac{\partial^4 K_{\ddot{x}\ddot{x}}(s_1, s_2)}{\partial s_1^2 \partial s_2^2} + a_2 a_1 \frac{\partial^3 K_{\ddot{x}\ddot{x}}(s_1, s_2)}{\partial s_1^2 \partial s_2} + a_1 a_2 \frac{\partial^3 K_{\ddot{x}\ddot{x}}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \\ + a_2^2 \frac{\partial^2 K_{\ddot{x}\ddot{x}}(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_1^2} + a_1 \frac{\partial^2 K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_2^2} + \\ + a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_2} + K_{\psi\psi}(s_1, s_2) = K_{uu}(s_1, s_2), \end{aligned} \quad (11.112)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+m} K_{\ddot{x}\ddot{x}}(s_1, s_2)}{\partial s_1^n \partial s_2^m} = \mathbf{D} \left[ \frac{\partial^{n+m} K_{\ddot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^m} \right], \quad n, m = 1, 2, \\ \frac{\partial^n K_{\psi\psi}(s_1, s_2)}{\partial s_1^n} = \mathbf{D} \left[ \frac{\partial^n K_{\psi\psi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n} \right], \quad i, n = 1, 2, \end{aligned} \quad (11.113)$$

$$K_{\psi\psi}(s_1, s_2) = \mathbf{D} [K_{\psi\psi}(t_1, t_2)],$$

$$K_{uu}(s_1, s_2) = \mathbf{D} [K_{uu}(t_1, t_2)].$$



Gdy funkcje losowe  $X(t)$  i  $U(t)$  są stacjonarnymi funkcjami losowymi równania (11.91), (11.102) i (11.111) przybiorą odpowiednio postać:

$$m_\psi = m_u, \quad (11.114)$$

gdź  $m_{\ddot{x}} = m_{\dot{x}} = 0$ ,

$$a_1 \ddot{K}_{xx}(s) + a_2 \dot{K}_{xx}(s) + K_{x\psi}(s) = K_{xu}(s), \quad (11.115)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \ddot{K}_{xx}(s) &= \mathbf{D}[\ddot{K}_{xx}(\tau)] & \dot{K}_{xx}(s) &= \mathbf{D}[\dot{K}_{xx}(\tau)], \\ K_{x\psi}(s) &= \mathbf{D}[K_{x\psi}(\tau)] & K_{xu}(s) &= \mathbf{D}[K_{xu}(\tau)]. \end{aligned}$$

gdź dla stacjonarnej funkcji losowej:

$$\begin{aligned} K_{xx}(t_1, t_2) &= K_{xx}(t_2 - t_1) = K_{xx}(\tau), \quad t_2 - t_1 = \tau, \\ a_1^2 K_{xx}^{(4)}(s) + a_2^2 [-\ddot{K}_{xx}(s)] + a_1 \ddot{K}_{x\psi}(s) + a_1 \ddot{K}_{\psi x}(s) + a_2 [-\dot{K}_{x\psi}(s)] + \\ &+ a_2 \dot{K}_{\psi x}(s) + K_{\psi\psi}(s) = K_{uu}(s), \end{aligned} \quad (11.116)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K_{xx}^{(4)}(s) &= \mathbf{D}[K_{xx}^{(4)}(\tau)] & \ddot{K}_{xx}(s) &= \mathbf{D}[\ddot{K}_{xx}(\tau)] \\ \dot{K}_{\psi x}(s) &= \mathbf{D}[\dot{K}_{\psi x}(\tau)] \\ K_{\psi\psi}(s) &= \mathbf{D}[K_{\psi\psi}(\tau)] & K_{uu}(s) &= \mathbf{D}[K_{uu}(\tau)] \end{aligned} \quad (11.117)$$

oraz gdź:  $K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_2 - t_1) = K_{xx}(\tau)$ ,  $t_2 - t_1 = \tau$ , więc:

$$\frac{\partial K_{xx}}{\partial t_1} = -\frac{dK_{xx}(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{\partial K_{xx}}{\partial t_2} = \frac{dK_{xx}(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{\partial^3 K_{xx}}{\partial t_1^2 \partial t_2} = -\frac{\partial^3 K_{xx}}{\partial t_1^2 \partial t_2}. \quad (11.118)$$

### 11.12.3.3. Typ nieliniowości równania

Przy wyborze postaci równania należy dążyć do tego, aby model ten opisywał możliwie szeroką klasę silnie nieliniowych układów mechanicznych i możliwościami przekształcenia modulacyjnego.

Przedstawiona metoda przekształcania modulacyjnego może być stosowana do silnie nieliniowych układów dynamicznych dających się opisać następującym losowym równaniem różniczkowym:

$$a_1 \ddot{X}(t) + \Psi[\dot{X}(t), X(t)] = U(t), \quad (11.119)$$

gdzie:

$$\Psi[\dot{X}(t), X(t)] = \sum_{i=1}^s F_i[\dot{X}(t)] G_i[X(t)], \quad (11.120)$$

oraz:

$X(t)$  - normalna funkcja losowa uzyskana na wyjściu z układu (w ogólnym przypadku niestacjonarna),

$U(t)$  - normalna funkcja losowa podana na wejściu układu (w ogólnym przypadku niestacjonarna),

$\ddot{X}(t), \dot{X}(t)$  - pochodne funkcji losowej  $X(t)$ ,

$F_i[\dot{X}(t)], G_i[X(t)]$  - funkcje argumentów odpowiednio  $\dot{X}(t)$  i  $X(t)$  będące w ogólnym przypadku odcinkami wielomianowymi,

$a_1$  - stała.

Funkcje  $F_i$  i  $G_i$  są zależne od parametrów  $\mathbf{a}$  należących do zbioru  $\mathbf{a}=[a_2, \dots, a_n]$ ,  $n$  jest liczbą parametrów w równaniu (11.119).

### 11.13. Zalety i wady metody przekształcenia modulacyjnego

Przedstawiony w punkcie 11.9 algorytm identyfikacji silnie nieliniowego układu mechanicznego ma następujące zalety:

1. Pozwala identyfikować układy w których występują silnie nieliniowe człony typu "luz" i "suche tarcie" i w związku z tym model układu jest nieliniowy ze względu na parametry.
2. Pozwala wykorzystać różne algorytmy minimalizacji funkcji jakości (pkt. 11.11). Rozszerza to możliwości takiego wyboru postępowania, które dla danej klasy układów daje najlepsze wyniki.
3. Zastosowanie modelu odwrotnego ma tę zaletę w stosunku do powszechnie znanych analogicznych metod, stosujących model prosty, że nie wymaga rozwiązywania nieliniowego równania różniczkowego w każdym kroku procedury minimalizacji funkcji jakości (pkt. 11.9.1).
4. Sygnał wejściowy może być stacjonarny lub niestacjonarny. Większość znanych metod identyfikacji, w przypadku, gdy sygnał wejściowy jest losowy, wymaga stacjonarności tego sygnału.
5. Możliwe jest przekształcanie nieliniowego różniczkowego równania losowego do postaci zdeterminowanej bez uprzedniej linearyzacji (pkt. 11.9.2), przy

wykorzystaniu wszystkich możliwych momentów pierwszego i drugiego rzędu (pkt. 11.3). W innych metodach, w przypadku układów nieliniowych, to przekształcenie jest poprzedzone linearyzacją. Ponadto w większości metod stosuje się tylko momenty drugiego rzędu.

6. Gdy zakłócany jest sygnał wejściowy układu, to należy stosować model odwrotny (pkt. 11.9.3.2), a jeśli zakłócany jest sygnał wyjściowy układu, to należy stosować model prosty (pkt. 11.9.3.1). W przeciwnym przypadku powstanie konieczność identyfikacji zarówno parametrów jak i jednego z tych sygnałów. Sytuacja taka ma też miejsce, gdy zakłócany jest zarówno sygnał wejściowy jak i wyjściowy układu (pkt. 11.9.3.3).
7. Zastosowane przekształcenie funkcji zarówno zdeterminowanej jak i losowej (pkt. 11.8) rozszerza możliwość wykorzystania metody funkcji modulującej na przypadki, gdy stosowany model jest losowy, wielomasowy i nieliniowo zależny od parametrów.

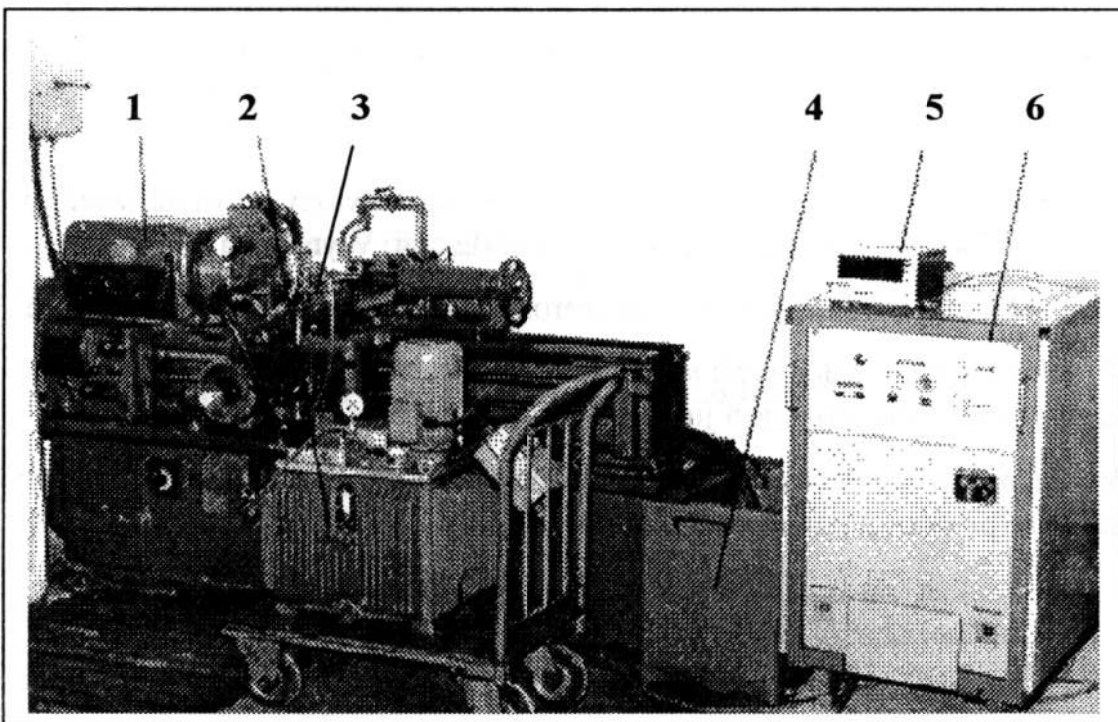
Przedstawiony algorytm identyfikacji nie jest pozbawiony pewnych wad i może nastęrczać kłopoty przy praktycznej jego realizacji. Wynika to z faktu, że:

1. Pojęcie funkcji modulującej nie jest szeroko rozpowszechnione w literaturze,
2. W celu dobrania odpowiedniej funkcji modulującej, a szczególnie wartości argumentu  $s$ , potrzebne jest już pewne doświadczenie,
3. W przypadku występowania niestacjonarnych sygnałów losowych pojawiają się duże problemy pomiarowe.

# 12

## PRZYKŁAD PEŁNEJ ANALIZY WYNIKÓW DOŚWIADCZENIA

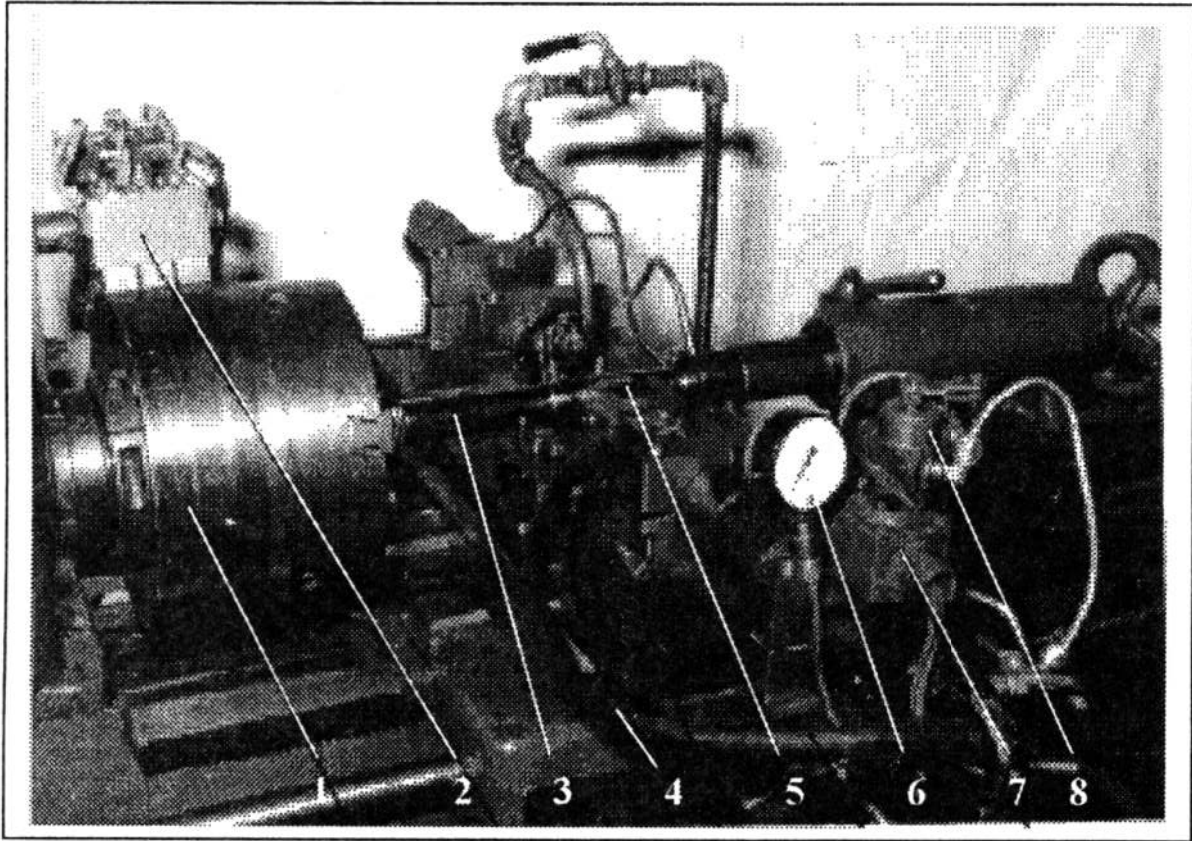
Dla zilustrowania zastosowania metod statystycznych do rozwiązywania konkretnych problemów doświadczeń podany zostanie przykład z badań nad procesem nagniatania tocznego z przepływem prądu elektrycznego. Proces ten zwany jest również nagniataniem z elektrokontaktowym nagrzewaniem lub obróbką elektromechaniczną [19, 24].



Rys. 12.1. Widok ogólny stanowiska do tocznego nagniatania z prądem wałków:  
1 - tokarka, 2 - przyrząd nagniatający, 3 - zasilacz hydrauliczny, 4 - zasilacz cieczy chłodząco-smarującej, 5 - amperomierz, 6 - transformator spawalniczy [19].

Obróbka nagniataniem z elektrokontaktowym nagrzewaniem jest jedną z metod powierzchniowej obróbki wykańczającej metali i ich stopów oraz spieków. Polega ona na wykorzystaniu miejscowego odkształcenia i przepływu ciepła, które zachodzą w warstwie wierzchniej przedmiotu, wskutek określonego kinetycznego i cieplnego działania twardego i gładkiego elementu nagniatającego w kształcie kulki, krążka, rolki lub koła zębatego, na nierówności powierzchni obrabianej [25]. Widok przykładowego stanowiska do

nagniatania tocznego z prądem wałków, zbudowanego na bazie tokarki, przedstawia rysunek 12.1, a widok układu obrabiarka-uchwyt-przedmiot-narzędzie tego stanowiska - rysunek 12.2.



Rys. 12.2. Widok układu obrabiarka-uchwyt-przedmiot-narzędzie (OUPN):  
 1 - komutator, 2 - szczotkotrzymacz, 3 - przedmiot obrabiany,  
 4 - przewody prądowe, 5 - element nagniatający, 6 - siłomierz,  
 7 - pulpit strowniczy, 8 - rozdzielacz hydrauliczny [19]

Powierzchniowe nagniatanie toczne z elektrokontaktowym nagrzewaniem traktuje się jako proces toczenia się z poślizgiem ciała obrotowego o dużej sztywności (którym jest narzędzie), po drugim ciele odkształcalnym (przedmiot) (rys. 12.3).

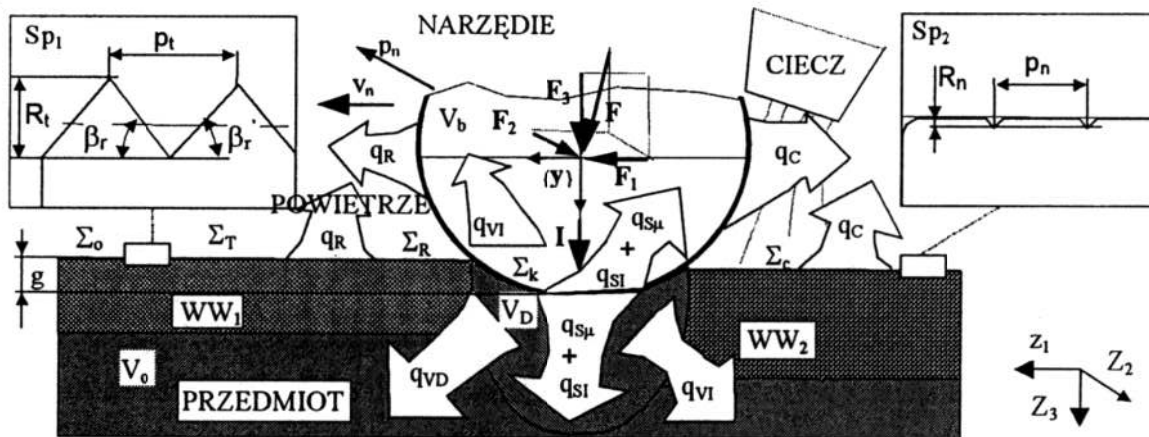
Najistotniejszymi procesami wpływającymi na kształtowanie wyrobu o wymaganej jakości technologicznej jest odkształcenie materiału i przepływ ciepła. Z kolei przebieg tych procesów jest uzależniony przede wszystkim od:

- a) kinematyki procesu i głębokości nagniatania,
- b) geometrii i stanu przedmiotu oraz rodzaju i stanu jego materiału,
- c) sposobu wymuszenia ruchu obrotowego narzędzia,
- d) geometrii, stanu powierzchni, rodzaju i stanu materiału narzędzia,
- e) warunków kontaktu narzędzia z przedmiotem oraz warunków smarowania i chłodzenia,



f) rodzaju prądu elektrycznego (stały lub zmienny) i wartości jego natężenia.

Nagniatanie z elektrokontaktowym nagrzewaniem prowadzi się przy użyciu skupionych, szybkobieżnych źródeł ciepła, które przemieszczają się wraz z narzędziem. Źródła te, w zależności od miejsca ich występowania, dzieli się na płaskie i przestrzenne. Źródła płaskie o wydajnościach  $q_{S\mu}$  są wynikiem tarcia narzędzia o przedmiot, natomiast źródła płaskie o wydajności  $q_{SI}$  są wynikiem przepływu prądu elektrycznego przez strefę o elektrycznej oporności kontaktowej  $R_S$ . Źródła płaskie występują w obszarze kontaktu  $\Sigma_k$  narzędzia z przedmiotem.

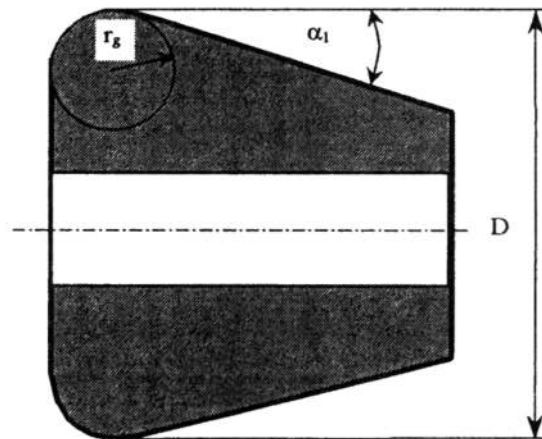


Rys. 12.3. Układ strumieni cieplnych powstających podczas obróbki, w charakterystycznych objętościach  $V$  i obszarach  $\Sigma$  obiektu:  $q_v$  wydajność przestrzennych źródeł ciepła (w wyniku odkształcenia plastycznego  $q_{VD}$  i przepływającego prądu elektrycznego  $q_{VI}$  o natężeniu  $I$ ),  $q_s$  - wydajność płaskich źródeł ciepła (w wyniku tarcia  $q_{S\mu}$  i przepływającego prądu elektrycznego  $q_{SI}$ ),  $q_c$  i  $q_r$  natężenie strumieni wymiany ciepła odpowiednio przez konwekcję i przez radiację,  $p_n$  - posuw nagniatania,  $v_n$  - prędkość nagniatania,  $g$  - głębokość nagniatania,  $F_i$  - siły nagniatania,  $R_t$  i  $R_n$  - wysokość chropowatości powierzchni przed i po nagniataniu,  $WW_1$  i  $WW_2$  - warstwa wierzchnia odpowiednio po obróbce poprzedzającej i po nagniataniu.

Źródło przestrzenne o wydajności  $q_{VD}$  występuje w strefie odkształceń plastycznych materiału, natomiast źródła o wydajności  $q_{VI}$  występują w objętościach narzędzia i przedmiotu przez które przepływa prąd elektryczny.

W wyniku złożonego, termodynamicznego oddziaływania, podczas nagniatania następuje zmiana geometrii przedmiotu oraz kształtowana jest nowa warstwa wierzchnia ( $WW_2$ ) o zmienionych właściwościach stereometrycznych i fizycznych, w stosunku do warstwy wierzchniej ( $WW_1$ ), ukształtowanej w obróbkach poprzedzających.

Rozważono przypadek elastycznego nagniatania tocznego z prądem w jednym przejściu narzędzia. Obrabiana jest część typu wałek o średnicy  $d_1$ , wykonany ze stali 55 normalizowanej. Przed nagniataniem, powierzchnia wałka jest toczona i posiada zdeterminowany, okresowy profil chropowatości o trójkątnym zarysie. Nagniatanie realizowane jest krążkiem toroidalno-stożkowym o następujących wymiarach: średnica  $D$ , kąt pomocniczy przystawienia  $\alpha_1$  i promień zaokrąglenia zarysu  $r_g$  (rys. 12.4).



Rys. 12.4. Geometria krążka nagniatającego.

Poszukiwane jest równanie regresji II rodzaju, opisujące zależność średniego odchylenia profilu od linii średniej  $R_a$  powierzchni po nagniataniu od parametrów technologicznych nagniatania z prądem: siły nacisku rolki  $F_3$ , posuwu  $p_n$ , prędkości nagniatania  $v_n$  i natężenia prądu elektrycznego  $I$ . Równanie to ma następującą postać jakościową:

$$R_a = R_a(\bar{F}_3, \bar{p}_n, \bar{v}_n, \bar{I}). \quad (12.1)$$

Funkcja obiektu badań (12.1) jest nieznaną w postaci analitycznej. W celu określenia postaci tej funkcji oraz przedziału jej ufności, przeprowadzone zostaną odpowiednie badania analityczne i doświadczalne, realizowane w XV, następujących etapach:

- Etap I. Określenie zbiorów czynników badanych, stałych, zakłócających i wynikowych.
- Etap II. Ustalenie przedziału zmienności (obszaru badań) czynników badanych.
- Etap III. Przyjęcie klasy modelu matematycznego obiektu badań.
- Etap IV. Kodowanie czynników badanych.
- Etap V. Realizacja badań właściwych. Plan eksperymentu.
- Etap VI. Wyniki eksperymentu.
- Etap VII. Eliminacja wyników obarczonych błędem grubym.



- Etap VIII. Obliczenie wariancji międzywierszowej.
- Etap IX. Sprawdzenie jednorodności wariancji w próbie.
- Etap X. Obliczenie współczynników w funkcji regresji.
- Etap XI. Analiza statystyczna funkcji regresji.
- Etap XII. Badanie istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej.
- Etap XIII. Sprawdzenie adekwatności modelu matematycznego.
- Etap XIV. Odkodowanie funkcji regresji.
- Etap XV. Określenie przedziału ufności funkcji regresji.

Poszczególne etapy będą dalej dokładnie opisane.

### 12.1. Określenie zbiorów czynników badanych, stałych, zakłócających i wynikowych

W wyniku przeprowadzonej analizy czynnikowej oraz badań rozpoznawczych określono zbiór następujących czynników mających istotny wpływ na czynnik wynikowy  $R_a$ :

1) zbiór czynników badanych  $[\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)]$ :

- $\bar{x}_1 = \bar{F}_3$ , [N] - siła nacisku rolki,
- $\bar{x}_2 = \bar{p}_n$ , [mm/2 $\pi$ rad] - posuw wzdłużny przyrządu,
- $\bar{x}_3 = \bar{v}_n$ , [m/s] - prędkość obwodowa wałka,
- $\bar{x}_4 = \bar{I}$ , [A] - natężenie prądu elektrycznego,

2) zbiór czynników stałych  $C(c_1, c_2, \dots, c_{15})$ :

- $c_1$  - obrabiarka: tokarka typ TSS-150,
- $c_2$  - przyrząd nagniatający typ PTN-1,
- $c_3=U=2,5$  V - napięcie prądu elektrycznego w obwodzie wtórnym,
- $c_4=i=1$  - ilość przejść narzędzia,
- $c_5$  - materiał rolki: stal SW7M, twardość 62 HRC,
- $c_6=r_g=0,3$  mm - promień zaokrąglenia profilu rolki,
- $c_7=D=60$  mm - średnica rolki,
- $c_8=\alpha_1=1^\circ 30'$  - pomocniczy kąt przystawienia,
- $c_9=R_{ar}=0,05$   $\mu$ m - średnie arytmetyczne odchylenie profilu od linii średniej powierzchni roboczej krążka,
- $c_{10}=S$  - emulsja 5% - rodzaj cieczy chłodząco-smarującego,
- $c_{11}=16$  dm<sup>3</sup>/min - wydatek cieczy chłodząco-smarującej,
- $c_{12}$  - materiał przedmiotu: stal 55 normalizowana, twardość 240 HB,
- $c_{13}=d_1=33$  mm - średnica wałka do nagniatania,

- $c_{14} = R_{aI} = 1,9 \mu\text{m}$  - średnie arytmetyczne odchylenie profilu od linii średniej powierzchni wałka do nagniatania,
- $c_{15}$  - nóż tokarski typ hR 110.17 2020.

3) zbiór czynników zakłócających  $H(h_1, h_2, \dots, h_6)$ :

- $h_1$  - losowe fluktuacje nastawionych parametrów obróbki,
- $h_2$  - niedokładność mocowania próbek,
- $h_3$  - niekontrolowana zmiana wymiarów próbek,
- $h_4$  - niejednorodność materiału próbek,
- $h_5$  - niekontrolowane zużycie rolki,
- $h_6$  - niekontrolowane zużycie noża tokarskiego.

4) zbiór czynników wynikowych  $\bar{Y}(\bar{y}_1)$ :

- $\bar{y}_1 = \bar{R}_a$  [ $\mu\text{m}$ ] - średnie odchylenie profilu od linii średniej powierzchni wałka po nagniataniu.

## 12.2. Ustalenie przedziału zmienności (obszaru badań) czynników badanych

Obszar badań może być narzucony przez zlecającego badania lub też określany jest w badaniach rozpoznawczych. W rozpatrywanym przypadku obszar ten został określony w badaniach rozpoznawczych i wynosi:

- $\bar{x}_1 = \bar{F}_3: 193 \div 2889$  [N],
- $\bar{x}_2 = \bar{p}_n: 0,05 \div 0,56$  [mm/2 $\pi$ rad],
- $\bar{x}_3 = \bar{v}_n: 0,35 \div 1,55$  [m/s],
- $\bar{x}_4 = \bar{I}: 300 \div 600$  [A].

## 12.3. Przyjęcie klasy modelu matematycznego obiektu badań

Zależność średniego odchylenia profilu od linii średniej od parametrów technologicznych procesu nagniatania z prądem opisuje równanie regresji w postaci wielomianu drugiego stopnia z podwójnymi interakcjami [19]. W zapisie macierzowym równanie to dla rzeczywistych wartości zmiennych ma postać:

$$\{\hat{\bar{Y}}\} = [\bar{\mathbf{X}}]\{\mathbf{b}\}. \quad (12.2)$$

W równaniu (12.2) oznaczono:

- $[\bar{\mathbf{X}}]$  - wyniki obserwacji zapisane w postaci macierzy zmiennych wejściowych:

$$[\bar{X}] = \begin{bmatrix} f_0(\bar{x}_1) & f_1(\bar{x}_1) & f_2(\bar{x}_1) & f_3(\bar{x}_1) \\ f_0(\bar{x}_2) & f_1(\bar{x}_2) & f_2(\bar{x}_2) & f_3(\bar{x}_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\bar{x}_N) & f_1(\bar{x}_N) & f_2(\bar{x}_N) & f_3(\bar{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (12.3)$$

- $\{b\}$  - nieznane współczynniki  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}, b_{34}, b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}$  w postaci wektora kolumnowego:

$$\{b\} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_4 \quad b_{12} \dots b_{34} \quad b_{11} \dots b_{44}]^T, \quad (12.4)$$

- $\{\hat{Y}\}$  - wyniki obserwacji wyjść modelu, czyli wartości funkcji regresji w postaci wektora kolumnowego:

$$\{\hat{Y}\} = [\hat{y}_1 \hat{y}_2 \dots \hat{y}_{31}]^T. \quad (12.5)$$

Założono częściową znajomość charakterystyki obiektu, polegającą na znajomości funkcji  $f_k(\bar{x})$ ,  $k=0,1,2,3$  w macierzy  $[\bar{X}]$  o postaciach:

$$\begin{aligned} f_0(\bar{x}) &= 1, \\ f_1(\bar{x}) &= \bar{x}_i, \quad i=1,2,3,4, \\ f_2(\bar{x}) &= \bar{x}_i^2, \quad i=1,2,3,4, \\ f_3(\bar{x}) &= \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad i, j=1,2,3,4 \text{ lecz } i < j. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Przy założeniach (12.6) model (12.2), w uproszczonej postaci sumacyjnej, można zapisać jako:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^4 b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad (12.7)$$

lub w postaci rozwiniętej jako:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = b_0 + & (b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + b_4 \bar{x}_4) + (b_{12} \bar{x}_1 \bar{x}_2 + b_{13} \bar{x}_1 \bar{x}_3 + b_{14} \bar{x}_1 \bar{x}_4 + \\ & + b_{23} \bar{x}_2 \bar{x}_3 + b_{24} \bar{x}_2 \bar{x}_4 + b_{34} \bar{x}_3 \bar{x}_4) + (b_{11} \bar{x}_1^2 + b_{22} \bar{x}_2^2 + b_{33} \bar{x}_3^2 + b_{44} \bar{x}_4^2). \end{aligned} \quad (12.8)$$

#### 12.4. Kodowanie czynników badanych

Wartości centralne  $\bar{x}_{i0}$  ( $i=1,2,3,4$ ) czynników badanych, obliczone ze wzoru:

$$\bar{x}_{i0} = \frac{\bar{x}_{i\max} + \bar{x}_{i\min}}{2}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (12.9)$$

wynoszą:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{x}_{10} &= \frac{193 + 2889}{2} = 1541, & [\text{N}], \\ \text{b) } \bar{x}_{20} &= \frac{0,05 + 0,56}{2} = 0,305, & [\text{mm}/2\pi\text{rad}], \\ \text{c) } \bar{x}_{30} &= \frac{0,35 + 1,55}{2} = 0,95, & [\text{m/s}], \\ \text{d) } \bar{x}_{40} &= \frac{300 + 600}{2} = 450, & [\text{A}]. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Jednostki zmienności czynników  $\Delta\bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  obliczano ze wzoru:

$$\Delta\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_{i\max} - \bar{x}_{i0}}{\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (12.11)$$

Przy założeniu, że badania będą realizowane zgodnie z planem statycznym zdeterminowanym pięciopoziomowym rotatabilnym (oznaczonym PS/DS-P: $\lambda$  [51]), dla którego wartość ramienia gwiazdowego dla  $S=4$  wynosi  $\alpha = \sqrt[4]{2^S} = 2,0000$ , jednostki zmienności poszczególnych czynników wynoszą:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta\bar{x}_1 &= \frac{2889 - 1541}{2} = 674, & [\text{N}], \\ \text{b) } \Delta\bar{x}_2 &= \frac{0,56 - 0,30}{2} = 0,13, & [\text{mm}/2\pi\text{rad}], \\ \text{c) } \Delta\bar{x}_3 &= \frac{1,55 - 0,95}{2} = 0,30, & [\text{m/s}], \\ \text{d) } \Delta\bar{x}_4 &= \frac{600 - 450}{2} = 75, & [\text{A}]. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Pozwala to na określenie następujących relacji kodowych zgodnie ze wzorem:

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta\bar{x}_i}, \quad \text{dla } i=1,2,3,4, \quad (12.13)$$

zatem:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{\bar{x}}_1 &= \frac{\bar{x}_1 - 1541}{674}, \\ \text{b) } \bar{\bar{x}}_2 &= \frac{\bar{x}_2 - 0,30}{0,13}, \\ \text{c) } \bar{\bar{x}}_3 &= \frac{\bar{x}_3 - 0,95}{0,30}, \\ \text{d) } \bar{\bar{x}}_4 &= \frac{\bar{x}_4 - 450}{75}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

gdzie  $\bar{x}_i$  zmienne rzeczywiste,  $\bar{\bar{x}}_i$  zmienne zakodowane.

Oznacza to jednocześnie przyjęcie kodu:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}_i = +\alpha : & \quad \bar{x}_1(+\alpha) = \bar{x}_{10} + \alpha\Delta\bar{x}_{10} = 1541 + 2 \cdot 674 = 2889, \\ & \quad \bar{x}_2(+\alpha) = \bar{x}_{20} + \alpha\Delta\bar{x}_{20} = 0,30 + 2 \cdot 0,13 = 0,56, \\ & \quad \bar{x}_3(+\alpha) = \bar{x}_{30} + \alpha\Delta\bar{x}_{30} = 0,95 + 2 \cdot 0,30 = 1,55, \\ & \quad \bar{x}_4(+\alpha) = \bar{x}_{40} + \alpha\Delta\bar{x}_{40} = 450 + 2 \cdot 75 = 600, \\ \bar{\bar{x}}_i = +1 : & \quad \bar{x}_1(+1) = \bar{x}_{10} + \Delta\bar{x}_{10} = 1541 + 674 = 2215, \\ & \quad \bar{x}_2(+1) = \bar{x}_{20} + \Delta\bar{x}_{20} = 0,30 + 0,13 = 0,43, \\ & \quad \bar{x}_3(+1) = \bar{x}_{30} + \Delta\bar{x}_{30} = 0,95 + 0,30 = 1,25, \\ & \quad \bar{x}_4(+1) = \bar{x}_{40} + \Delta\bar{x}_{40} = 450 + 75 = 525, \\ \bar{\bar{x}}_i = 0 : & \quad \bar{x}_1(0) = \bar{x}_{10} = 1541, \\ & \quad \bar{x}_2(0) = \bar{x}_{20} = 0,30, \\ & \quad \bar{x}_3(0) = \bar{x}_{30} = 0,95, \\ & \quad \bar{x}_4(0) = \bar{x}_{40} = 450, \\ \bar{\bar{x}}_i = -1 : & \quad \bar{x}_1(-1) = \bar{x}_{10} - \Delta\bar{x}_{10} = 1541 - 674 = 867, \\ & \quad \bar{x}_2(-1) = \bar{x}_{20} - \Delta\bar{x}_{20} = 0,30 - 0,13 = 0,17, \\ & \quad \bar{x}_3(-1) = \bar{x}_{30} - \Delta\bar{x}_{30} = 0,95 - 0,30 = 0,65, \\ & \quad \bar{x}_4(-1) = \bar{x}_{40} - \Delta\bar{x}_{40} = 450 - 75 = 375, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_i(-\alpha) &= \bar{x}_{i0} - \alpha \Delta \bar{x}_{i0} = 1541 - 2 \cdot 674 = 193, \\ \bar{x}_2(-\alpha) &= \bar{x}_{20} - \alpha \Delta \bar{x}_{20} = 0,30 - 2 \cdot 0,13 = 0,04, \\ \bar{x}_3(-\alpha) &= \bar{x}_{30} - \alpha \Delta \bar{x}_{30} = 0,95 - 2 \cdot 0,30 = 0,35, \\ \bar{x}_4(-\alpha) &= \bar{x}_{40} - \alpha \Delta \bar{x}_{40} = 450 - 2 \cdot 75 = 300.\end{aligned}$$

Wartości rzeczywiste i standaryzowane badanych parametrów technologicznych zestawiono w tabeli 12.1.

Tabela 12.1. Wartości rzeczywiste i standaryzowane badanych parametrów

Poziom parametru	Parametry technologiczne (czynniki badane)				Wartości standaryzowane czynników badanych			
	$\bar{x}_1 = \bar{F}_3$ [N]	$\bar{x}_2 = \bar{p}_n$ [mm/2πrad]	$\bar{x}_3 = \bar{v}_n$ [m/s]	$\bar{x}_4 = \bar{I}$ [A]	$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
„gwiazdny” górny	2889	0,56	1,55	600	+2	+2	+2	+2
górny	2215	0,45	1,25	525	+1	+1	+1	+1
centralny	1541	0,30	0,95	450	0	0	0	0
dolny	867	0,18	0,65	375	-1	-1	-1	-1
„gwiazdny” dolny	193	0,05	0,35	300	-2	-2	-2	-2

Po podstawieniu do modelu (12.8) wartości  $\bar{x}_i$  według wzoru:  $\bar{x}_i = \bar{x}_{i0} + \bar{\bar{x}}_i \Delta \bar{x}_i$ , wyznaczonej ze wzoru (12.13), otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_0 + b_1(\bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1) + b_2(\bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2) + b_3(\bar{x}_{30} + \bar{\bar{x}}_3 \Delta \bar{x}_3) + \\ &+ b_4(\bar{x}_{40} + \bar{\bar{x}}_4 \Delta \bar{x}_4) + b_{12}(\bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1)(\bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2) + \\ &+ b_{13}(\bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1)(\bar{x}_{30} + \bar{\bar{x}}_3 \Delta \bar{x}_3) + b_{14}(\bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1)(\bar{x}_{40} + \bar{\bar{x}}_4 \Delta \bar{x}_4) + \\ &+ b_{23}(\bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2)(\bar{x}_{30} + \bar{\bar{x}}_3 \Delta \bar{x}_3) + b_{24}(\bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2)(\bar{x}_{40} + \bar{\bar{x}}_4 \Delta \bar{x}_4) + \\ &+ b_{34}(\bar{x}_{30} + \bar{\bar{x}}_3 \Delta \bar{x}_3)(\bar{x}_{40} + \bar{\bar{x}}_4 \Delta \bar{x}_4) + b_{11}(\bar{x}_{10} + \bar{\bar{x}}_1 \Delta \bar{x}_1)^2 + \\ &+ b_{22}(\bar{x}_{20} + \bar{\bar{x}}_2 \Delta \bar{x}_2)^2 + b_{33}(\bar{x}_{30} + \bar{\bar{x}}_3 \Delta \bar{x}_3)^2 + b_{44}(\bar{x}_{40} + \bar{\bar{x}}_4 \Delta \bar{x}_4)^2.\end{aligned}\tag{12.15}$$

Natomiast po uporządkowaniu równania (12.15) względem zmiennej  $\bar{\bar{x}}_i$ , otrzymuje się następujące równanie w postaci zakodowanej:

a) w zapisie macierzowym:

$$\{\hat{Y}\} = [\bar{\bar{X}}]\{\mathbf{k}\},\tag{12.16}$$

b) w zapisie rozwiniętym:

$$\begin{aligned}
\hat{Y} = & [b_0 + b_1\bar{x}_{10} + b_2\bar{x}_{20} + b_3\bar{x}_{30} + b_4\bar{x}_{40} + b_{12}\bar{x}_{10}\bar{x}_{20} + b_{13}\bar{x}_{10}\bar{x}_{30} + \\
& + b_{14}\bar{x}_{10}\bar{x}_{40} + b_{23}\bar{x}_{20}\bar{x}_{30} + b_{24}\bar{x}_{20}\bar{x}_{40} + b_{34}\bar{x}_{30}\bar{x}_{40} + b_{11}(\bar{x}_{10})^2 + \\
& + b_{22}(\bar{x}_{20})^2 + b_{33}(\bar{x}_{30})^2 + b_{44}(\bar{x}_{40})^2] + (b_1\Delta\bar{x}_1 + b_{12}\bar{x}_{20}\Delta\bar{x}_1 + b_{13}\bar{x}_{30}\Delta\bar{x}_1 + \\
& + b_{14}\bar{x}_{40}\Delta\bar{x}_1 + 2b_{11}\bar{x}_{10}\Delta\bar{x}_1)\bar{\bar{x}}_1 + (b_2\Delta\bar{x}_2 + b_{12}\bar{x}_{10}\Delta\bar{x}_2 + b_{23}\bar{x}_{30}\Delta\bar{x}_2 + \\
& + b_{24}\bar{x}_{40}\Delta\bar{x}_2 + 2b_{22}\bar{x}_{20}\Delta\bar{x}_2)\bar{\bar{x}}_2 + (b_3\Delta\bar{x}_3 + b_{13}\bar{x}_{10}\Delta\bar{x}_3 + b_{23}\bar{x}_{20}\Delta\bar{x}_3 + \\
& + b_{34}\bar{x}_{40}\Delta\bar{x}_3 + 2b_{33}\bar{x}_{30}\Delta\bar{x}_3)\bar{\bar{x}}_3 + (b_4\Delta\bar{x}_4 + b_{14}\bar{x}_{10}\Delta\bar{x}_4 + b_{24}\bar{x}_{20}\Delta\bar{x}_4 + \\
& + b_{34}\bar{x}_{30}\Delta\bar{x}_4 + 2b_{44}\bar{x}_{40}\Delta\bar{x}_4)\bar{\bar{x}}_4 + (b_{12}\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2)\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2 + (b_{13}\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3)\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3 + \\
& + (b_{14}\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4)\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_4 + (b_{23}\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3)\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 + (b_{24}\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4)\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_4 + \\
& + (b_{34}\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4)\bar{\bar{x}}_3\bar{\bar{x}}_4 + [b_{11}(\Delta\bar{x}_1)^2](\bar{\bar{x}}_1)^2 + [b_{22}(\Delta\bar{x}_2)^2](\bar{\bar{x}}_2)^2 + \\
& + [b_{33}(\Delta\bar{x}_3)^2](\bar{\bar{x}}_3)^2 + [b_{44}(\Delta\bar{x}_4)^2](\bar{\bar{x}}_4)^2 = \\
& = k_0 + k_1\bar{\bar{x}}_1 + k_2\bar{\bar{x}}_2 + k_3\bar{\bar{x}}_3 + k_4\bar{\bar{x}}_4 + k_{12}\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2 + k_{13}\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3 + \\
& + k_{14}\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_4 + k_{23}\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 + k_{24}\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_4 + k_{34}\bar{\bar{x}}_3\bar{\bar{x}}_4 + k_{11}(\bar{\bar{x}}_1)^2 + \\
& + k_{22}(\bar{\bar{x}}_2)^2 + k_{33}(\bar{\bar{x}}_3)^2 + k_{44}(\bar{\bar{x}}_4)^2,
\end{aligned} \tag{12.17}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
k_0 = & b_0 + \sum_{i=1}^4 b_i \bar{x}_{i0} + \sum_{i=1}^4 b_{ii} \bar{x}_{i0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^4 b_{ij} \bar{x}_{i0} \bar{x}_{j0} = \\
& = b_0 + b_1 \bar{x}_{10} + b_2 \bar{x}_{20} + b_3 \bar{x}_{30} + b_4 \bar{x}_{40} + b_{12} \bar{x}_{10} \bar{x}_{20} + b_{13} \bar{x}_{10} \bar{x}_{30} + \\
& + b_{14} \bar{x}_{10} \bar{x}_{40} + b_{23} \bar{x}_{20} \bar{x}_{30} + b_{24} \bar{x}_{20} \bar{x}_{40} + b_{34} \bar{x}_{30} \bar{x}_{40} + b_{11} (\bar{x}_{10})^2 + \\
& + b_{22} (\bar{x}_{20})^2 + b_{33} (\bar{x}_{30})^2 + b_{44} (\bar{x}_{40})^2,
\end{aligned}$$

$$k_1 = b_1 \Delta\bar{x}_1 + b_{12} \bar{x}_{20} \Delta\bar{x}_1 + b_{13} \bar{x}_{30} \Delta\bar{x}_1 + b_{14} \bar{x}_{40} \Delta\bar{x}_1 + 2b_{11} \bar{x}_{10} \Delta\bar{x}_1,$$

$$k_2 = b_2 \Delta\bar{x}_2 + b_{12} \bar{x}_{10} \Delta\bar{x}_2 + b_{23} \bar{x}_{30} \Delta\bar{x}_2 + b_{24} \bar{x}_{40} \Delta\bar{x}_2 + 2b_{22} \bar{x}_{20} \Delta\bar{x}_2,$$

$$k_3 = b_3 \Delta\bar{x}_3 + b_{13} \bar{x}_{10} \Delta\bar{x}_3 + b_{23} \bar{x}_{20} \Delta\bar{x}_3 + b_{34} \bar{x}_{40} \Delta\bar{x}_3 + 2b_{33} \bar{x}_{30} \Delta\bar{x}_3,$$

$$k_4 = b_4 \Delta\bar{x}_4 + b_{14} \bar{x}_{10} \Delta\bar{x}_4 + b_{24} \bar{x}_{20} \Delta\bar{x}_4 + b_{34} \bar{x}_{30} \Delta\bar{x}_4 + 2b_{44} \bar{x}_{40} \Delta\bar{x}_4,$$

$$k_{12} = b_{12} \Delta\bar{x}_1 \Delta\bar{x}_2, \tag{12.18}$$



$$k_{13} = b_{13} \Delta \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_3,$$

$$k_{14} = b_{14} \Delta \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_4,$$

$$k_{23} = b_{23} \Delta \bar{x}_2 \Delta \bar{x}_3,$$

$$k_{24} = b_{24} \Delta \bar{x}_2 \Delta \bar{x}_4,$$

$$k_{34} = b_{34} \Delta \bar{x}_3 \Delta \bar{x}_4,$$

$$k_{11} = b_{11} (\Delta \bar{x}_1)^2,$$

$$k_{22} = b_{22} (\Delta \bar{x}_2)^2,$$

$$k_{33} = b_{33} (\Delta \bar{x}_3)^2,$$

$$k_{44} = b_{44} (\Delta \bar{x}_4)^2.$$

### 12.5. Realizacja badań właściwych – plan eksperymentu

Realizacja programu kompozycyjnego pięciopoziomowego PS/DS-P: $\lambda$  wymaga wykonania pomiarów dla:

- szesnastu układów ( $n_k = 2^S = 2^4 = 16$ ) w górnym i dolnym poziomie programu,
- ośmiu układów w „punktach gwiazdnych” ( $n_\alpha = 2S = 2 \cdot 4 = 8$ ),
- siedmiu pomiarów paralelnych dla układu w „centrum” programu ( $n_o = 7$ ) (por. 10.5.3.2).

Łącznie wymagane jest przeprowadzenie  $N = 31r$  pomiarów zgodnie ze wzorem:

$$N = nr = (n_k + n_\alpha + n_o)r = (16 + 8 + 7)r = 31r, \quad (12.19)$$

gdzie  $r$  jest liczbą powtórzeń pomiarów dla każdego układu. W niniejszym przykładzie badania powtarzano 5 razy i obliczano średnią arytmetyczną wyników. Schemat realizacji programu PS/DS-P: $\lambda$  dla czterech zmiennych przedstawia tablica 12.2.

Tablica 12.2. Schemat realizacji programu PS/DS-P:  $\lambda$ .

Liczba pomiarów	Lp	Numer doświadczenia	Czynniki badane							
			Zakodowane				Rzeczywiste			
			$\bar{\bar{x}}_1$	$\bar{\bar{x}}_2$	$\bar{\bar{x}}_3$	$\bar{\bar{x}}_4$	$\bar{\bar{x}}_1 = \bar{F}_3$	$\bar{\bar{x}}_2 = \bar{p}_n$	$\bar{\bar{x}}_3 = \bar{v}_n$	$\bar{\bar{x}}_4 = \bar{I}$
$n_k=16$	1	01	-1	-1	-1	-1	867	0,18	0,65	375
	2	02	+1	-1	-1	-1	2215	0,18	0,65	375
	3	03	+1	+1	-1	-1	2215	0,45	0,65	375
	4	04	+1	+1	+1	-1	2215	0,45	1,25	375
	5	05	+1	-1	+1	-1	2215	0,18	1,25	375
	6	06	-1	+1	-1	+1	867	0,45	0,65	525
	7	07	-1	-1	+1	-1	867	0,18	1,25	375
	8	08	-1	+1	+1	-1	867	0,45	1,25	375
	9	09	-1	-1	-1	+1	867	0,18	0,65	525
	10	10	-1	+1	-1	-1	867	0,45	0,65	375
	11	11	+1	-1	-1	+1	2215	0,18	0,65	525
	12	12	+1	-1	+1	+1	2215	0,18	1,25	525
	13	13	-1	-1	+1	+1	867	0,18	1,25	525
	14	14	+1	+1	-1	+1	2215	0,45	0,65	525
	15	15	-1	+1	+1	+1	867	0,45	1,25	525
	16	16	+1	+1	+1	+1	2215	0,45	1,25	525
$n_\alpha=8$	17	17	+2	0	0	0	2889	0,30	0,95	450
	18	18	-2	0	0	0	193	0,30	0,95	450
	19	19	0	+2	0	0	1541	0,56	0,95	450
	20	20	0	-2	0	0	1541	0,05	0,95	450
	21	21	0	0	+2	0	1541	0,30	1,55	450
	22	22	0	0	-2	0	1541	0,30	0,35	450
	23	23	0	0	0	+2	1541	0,30	0,95	600
	24	24	0	0	0	-2	1541	0,30	0,95	300
$n_o=7$	25	25	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	26	26	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	27	27	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	28	28	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	29	29	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	30	30	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450
	31	31	0	0	0	0	1541	0,30	0,95	450

## 12.6. Wyniki eksperymentu

Wyniki eksperymentu, wykonanego zgodnie z programem PS/DS-P:λ, zestawiono w tablicy 12.3.

Tablica 12.3. Wyniki badań średniego arytmetycznego odchylenia profilu od linii średniej powierzchni nagniatanej z elektrokontak-towym nagrzewaniem.

Lp	Czynnik wynikowy					
	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	$\bar{y}$
	2	3	4	5	6	7
1	0,520	0,500	0,540	0,510	0,530	0,520
2	0,080	0,050	0,070	0,090	0,100	0,078
3	0,340	0,360	0,355	0,320	0,310	0,337
4	0,120	0,140	0,135	0,110	0,125	0,126
5	0,100	0,090	0,110	0,115	0,095	0,102
6	0,500	0,490	0,510	0,495	0,490	0,497
7	0,420	0,430	0,425	0,415	0,410	0,420
8	0,750	0,770	0,780	0,760	0,775	0,767
9	0,180	0,200	0,160	0,165	0,185	0,178
10	1,100	1,120	1,110	1,090	1,095	1,103
11	0,120	0,115	0,125	0,130	0,110	0,120
12	0,450	0,455	0,460	0,440	0,445	0,450
13	0,240	0,260	0,270	0,250	0,245	0,253
14	0,300	0,310	0,320	0,290	0,295	0,303
15	0,350	0,360	0,355	0,345	0,365	0,355
16	0,300	0,310	0,307	0,300	0,308	0,305
17	0,420	0,415	0,435	0,430	0,420	0,424
18	1,040	1,020	1,010	1,030	1,020	1,024
19	0,600	0,610	0,610	0,590	0,580	0,598
20	0,130	0,120	0,125	0,135	0,130	0,128
21	0,260	0,270	0,280	0,250	0,245	0,261
22	0,175	0,180	0,190	0,160	0,165	0,174
23	0,160	0,150	0,155	0,170	0,165	0,160
24	0,250	0,255	0,260	0,265	0,240	0,254
25	0,174	0,175	0,175	0,165	0,161	0,170
26	0,265	0,280	0,275	0,270	0,300	0,278
27	0,165	0,160	0,180	0,175	0,195	0,175
28	0,260	0,265	0,230	0,245	0,225	0,245
29	0,210	0,215	0,200	0,195	0,205	0,205
30	0,260	0,280	0,270	0,240	0,250	0,260
31	0,230	0,220	0,215	0,205	0,220	0,218

### 12.7. Eliminacja wyników obarczonych błędem grubym

W celu eliminacji wyników pomiarów obarczonych błędem grubym, otrzymane wartości wyjściowe obiektu dla poszczególnych prób ( $y_{ij}$ ,  $i=1,2, \dots, 31$ ,  $j=1,2,3,4,5$ ) uporządkowano w ciąg niemalejący. Macierz uporządkowaną wyników eksperymentu przedstawia tablica 12.4.

Tablica 12.4. Uporządkowana macierz wyników eksperymentu.

Lp	Czynnik wynikowy				
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
1	2	3	4	5	6
1	0,500	0,510	0,520	0,530	0,540
2	0,080	0,050	0,070	0,090	0,100
3	0,310	0,320	0,340	0,355	0,360
4	0,110	0,120	0,125	0,135	0,140
5	0,090	0,095	0,100	0,110	0,115
6	0,490	0,490	0,495	0,500	0,510
7	0,410	0,415	0,420	0,425	0,430
8	0,750	0,760	0,770	0,775	0,780
9	0,160	0,165	0,180	0,185	0,200
10	1,090	1,095	1,100	1,110	1,120
11	0,110	0,115	0,120	0,125	0,130
12	0,440	0,445	0,450	0,455	0,460
13	0,240	0,245	0,250	0,260	0,270
14	0,290	0,295	0,300	0,310	0,320
15	0,345	0,350	0,355	0,360	0,365
16	0,300	0,300	0,307	0,308	0,310
17	0,415	0,420	0,420	0,430	0,435
18	1,010	1,020	1,020	1,030	1,040
19	0,580	0,590	0,600	0,610	0,610
20	0,120	0,125	0,130	0,130	0,135
21	0,245	0,250	0,260	0,270	0,280
22	0,160	0,165	0,175	0,180	0,190
23	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170
24	0,240	0,250	0,255	0,260	0,265
25	0,161	0,165	0,174	0,175	0,175
26	0,265	0,270	0,275	0,280	0,300
27	0,160	0,165	0,175	0,180	0,195
28	0,225	0,230	0,245	0,260	0,265
29	0,195	0,200	0,205	0,210	0,215
30	0,240	0,250	0,260	0,270	0,280
31	0,205	0,215	0,220	0,220	0,230

Zakładając, że niezależne zmienne losowe ( $y_i$ ) mają rozkład normalny  $N(\mu_i, \sigma_i)$ , postawione zadanie sprowadza się do zweryfikowania hipotezy:

$$H: \mu = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{31} = \mu, \quad (12.20)$$

przy hipotezie alternatywnej:

$$K: \mu_k = \mu + \Delta, \quad (12.21)$$

dla pewnego nieznanego  $k$ , poza tym  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = \mu_{k+1} = \mu$ . Przez  $K^+$  oznaczono hipotezę alternatywną, według której  $\Delta > 0$  i przez  $K^-$  hipotezę alternatywną, według której  $\Delta < 0$ . Ze względu na nieznaną wartość parametrów rozkładu  $\mu$  i  $\sigma$  dla weryfikacji hipotezy  $K^+$  oraz  $K^-$  zastosowano statystyki odpowiednio  $B_6^+$  i  $B_6^-$ . Statystyki  $B_6^+$  i  $B_6^-$  obliczano ze wzorów:

$$B_6^+ = \frac{y_{i5} - y_{i4}}{y_{i5} - y_{i1}}, \quad B_6^- = \frac{y_{i1} - y_{i2}}{y_{i5} - y_{i1}}. \quad (12.22)$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tabelicy 12.5.

Tablica 12.5. Zestawienie statystyk  $B_6^+$  i  $B_6^-$  obliczonych dla poszczególnych wierszy.

Lp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B_6^+$	0,250	0,200	0,100	0,167	0,200	0,500	0,250	0,167	0,375	0,333	0,250
$B_6^-$	-0,250	-0,400	-0,200	-0,334	-0,200	-0,000	-0,250	-0,333	-0,125	-0,167	-0,250
Lp	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$B_6^+$	0,250	0,333	0,333	0,250	0,200	0,250	0,333	0,000	0,333	0,268	0,333
$B_6^-$	-0,250	-0,167	-0,167	-0,250	-0,000	-0,250	-0,333	-0,333	-0,333	-0,143	-0,167
Lp	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
$B_6^+$	0,250	0,200	0,000	0,571	0,429	0,125	0,250	0,250	0,400		
$B_6^-$	-0,250	-0,400	-0,286	-0,143	-0,143	-0,125	-0,250	-0,250	-0,400		

Wartość krytyczna statystyki  $b_6^+(\alpha; r)$ , dla  $\alpha=0,05$  i  $r=5$  odczytana z tablicy 15. 14 wynosi  $b_6^+(0,05;5) = 0,642$ . Ponieważ dla wszystkich wierszy macierzy wyników

eksperymentu (tablica 12.4) spełniony jest warunek  $B_{6i}^+ \leq b_6^+(0,05;5)$  nie ma podstaw do odrzucenia maksymalnych wartości wyników eksperymentu otrzymanych dla poszczególnych punktów planu. Analogicznie nie ma podstaw do odrzucenia minimalnych wartości wyników, gdyż zachowany jest warunek:  $B_{6i}^- \geq b_6^-(0,05;5)$ .

### 12.8. Obliczenie wariancji międzywierszowej i odchylenia standardowego

Wariancję międzywierszową  $s_i^2$  i odchylenie standardowe  $s_i$  obliczono ze wzorów:

$$s_i^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad (12.23)$$

$$s_i = \sqrt{s_i^2}, \quad (12.24)$$

wykorzystując dane zawarte w tablicy 12.3, dla  $r=5$ , otrzymując:

$$s_1^2 = 0,25(0 + 0,02^2 + 0,02^2 + 0,01^2 + 0,01^2) = 0,0002500; \quad s_1=0,0158114,$$

$$s_2^2 = 0,25(0,002^2 + 0,028^2 + 0,008^2 + 0,012^2 + 0,022^2) = 0,0003700; \quad s_2=0,0192354,$$

$$s_3^2 = 0,25(0,003^2 + 0,023^2 + 0,028^2 + 0,017^2 + 0,027^2) = 0,0004700; \quad s_3=0,0216795,$$

$$s_4^2 = 0,25(0,006^2 + 0,014^2 + 0,009^2 + 0,016^2 + 0,001^2) = 0,0001425; \quad s_4=0,0119373,$$

$$s_5^2 = 0,25(0,002^2 + 0,012^2 + 0,002^2 + 0,013^2 + 0,007^2) = 0,0001075; \quad s_5=0,0103682,$$

$$s_6^2 = 0,25(0,003^2 + 0,007^2 + 0,013^2 + 0,002^2 + 0,007^2) = 0,0000700; \quad s_6=0,0083666,$$

$$s_7^2 = 0,25(0 + 0,01^2 + 0,005^2 + 0,005^2 + 0,01^2) = 0,0000625; \quad s_7=0,0079056,$$

$$s_8^2 = 0,25(0,017^2 + 0,003^2 + 0,013^2 + 0,007^2 + 0,008^2) = 0,0001450; \quad s_8=0,0120416,$$

$$s_9^2 = 0,25(0,002^2 + 0,022^2 + 0,018^2 + 0,013^2 + 0,007^2) = 0,0002575; \quad s_9=0,0160468,$$



$$\begin{aligned}
s_{10}^2 &= 0,25(0,003^2 + 0,017^2 + 0,007^2 + 0,013^2 + \\
&\quad + 0,008^2) = 0,0001450; \quad s_{10}=0,0120416, \\
s_{11}^2 &= 0,25(0 + 0,005^2 + 0,005^2 + 0,01^2 + \\
&\quad + 0,01^2) = 0,0000625; \quad s_{11}=0,0079057, \\
s_{12}^2 &= 0,25(0 + 0,005^2 + 0,01^2 + 0,01^2 + 0,005^2) = 0,0000625; \quad s_{12}=0,0079057, \\
s_{13}^2 &= 0,25(0,013^2 + 0,007^2 + 0,017^2 + 0,003^2 + \\
&\quad + 0,008^2) = 0,0001450; \quad s_{13}=0,0120416, \\
s_{14}^2 &= 0,25(0,003^2 + 0,007^2 + 0,017^2 + 0,013^2 + \\
&\quad + 0,008^2) = 0,0001450; \quad s_{14}=0,0120416, \\
s_{15}^2 &= 0,25(0,005^2 + 0,005^2 + 0 + 0,01^2 + 0,01^2) = 0,0000625; \quad s_{15}=0,0079057, \\
s_{16}^2 &= 0,25(0,005^2 + 0,005^2 + 0,002^2 + 0,005^2 + \\
&\quad + 0,003^2) = 0,0000220; \quad s_{16}=0,0046904, \\
s_{17}^2 &= 0,25(0,004^2 + 0,009^2 + 0,011^2 + 0,006^2 + \\
&\quad + 0,004^2) = 0,0000675; \quad s_{17}=0,0082158, \\
s_{18}^2 &= 0,25(0,016^2 + 0,004^2 + 0,014^2 + 0,006^2 + \\
&\quad + 0,004^2) = 0,0001300; \quad s_{18}=0,0114018, \\
s_{19}^2 &= 0,25(0,002^2 + 0,012^2 + 0,012^2 + 0,008^2 + \\
&\quad + 0,018^2) = 0,0001700; \quad s_{19}=0,0130384, \\
s_{20}^2 &= 0,25(0,002^2 + 0,008^2 + 0,003^2 + 0,007^2 + \\
&\quad + 0,002^2) = 0,0000325; \quad s_{20}=0,0057009, \\
s_{21}^2 &= 0,25(0,001^2 + 0,009^2 + 0,019^2 + 0,009^2 + \\
&\quad + 0,016^2) = 0,0002050; \quad s_{21}=0,0143178, \\
s_{22}^2 &= 0,25(0,001^2 + 0,006^2 + 0,016^2 + 0,014^2 + \\
&\quad + 0,009^2) = 0,0001425; \quad s_{22}=0,0119373, \\
s_{23}^2 &= 0,25(0 + 0,01^2 + 0,005^2 + 0,01^2 + 0,005^2) = 0,0000625; \quad s_{23}=0,0079057, \\
s_{24}^2 &= 0,25(0,004^2 + 0,001^2 + 0,006^2 + 0,011^2 + \\
&\quad + 0,014^2) = 0,0000925; \quad s_{24}=0,0096177, \\
s_{25}^2 &= 0,25(0,004^2 + 0,005^2 + 0,005^2 + 0,005^2 + \\
&\quad + 0,009^2) = 0,0000430; \quad s_{25}=0,0065574, \\
s_{26}^2 &= 0,25(0,013^2 + 0,002^2 + 0,003^2 + 0,008^2 + \\
&\quad + 0,0022^2) = 0,0001825; \quad s_{26}=0,0135093,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
s_{27}^2 &= 0,25(0,01^2 + 0,015^2 + 0,005^2 + 0 + 0,02^2) = 0,00018750; & s_{27} &= 0,0136931, \\
s_{28}^2 &= 0,25(0,015^2 + 0,02^2 + 0,015^2 + 0 + 0,02^2) = 0,00031250; & s_{28} &= 0,0176777, \\
s_{29}^2 &= 0,25(0,005^2 + 0,01^2 + 0,005^2 + 0,01^2 + 0) = 0,0000625; & s_{29} &= 0,0079057, \\
s_{30}^2 &= 0,25(0 + 0,02^2 + 0,01^2 + 0,02^2 + 0,01^2) = 0,0002500, & s_{30} &= 0,0158114, \\
s_{31}^2 &= 0,25(0,012^2 + 0,002^2 + 0,003^2 + 0,013^2 + \\
& \quad + 0,002^2) = 0,0000825; & s_{31} &= 0,0090829.
\end{aligned}$$

Maksymalna wariancja wynosi  $s_{i\max}^2 = s_3^2 = 0,0004700$ . Natomiast suma wariancji wynosi:  $\sum_{i=1}^{31} s_i^2 = 0,0045425$ .

### 12.9. Sprawdzenie jednorodności wariancji w próbie

Ze względu na identyczną liczbę powtórzeń doświadczeń dla wszystkich punktów planu, jednorodność wariancji sprawdzono za pomocą testu Cochra. Wartość tego testu wynosi:

$$G = \frac{s_{i\max}^2}{\sum_{i=1}^{31} s_i^2} = \frac{0,0004700}{0,0045425} = 0,10344672 \cong 0,1034. \quad (12.25)$$

Wartość krytyczną testu Cochra należy obliczyć dla poziomu istotności  $\alpha=0,05$  oraz liczby stopni swobody  $k=n=31$  i  $v=r-1=4$ . Natomiast w tabelicy 15.11 wartości krytyczne testu Cochra dla  $\alpha=0,05$  i  $v=r-1=4$  występują jedynie dla liczby stopni swobody  $k=n=30$  oraz  $k=n=40$  i wynoszą:  $G_{kr}(0,05;30;4) = 0,1377$  oraz  $G_{kr}(0,05;40;4) = 0,1082$ . Wykorzystując te dane, wymaganą wartość krytyczną testu Cochra, dla  $\alpha=0,05$ ,  $k=n=31$  i  $v=4$ , obliczono stosując interpolację liniową, ze wzoru:

$$\begin{aligned}
G_{kr}(0,05;31;4) &= G_{kr}(0,05;30;4) - \frac{G_{kr}(0,05;30;4) - G_{kr}(0,05;40;4)}{10} = \\
&= 0,1377 - \frac{0,1377 - 0,1082}{10} = 0,13475.
\end{aligned}$$

Ponieważ zachodzi nierówność  $G = 0,1034 < G_{kr}(0,05;31;4) = 0,13475$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności wariancji.

### 12.10. Obliczenie współczynników w funkcji regresji

W celu obliczenia współczynników w funkcji regresji najpierw, wykorzystując dane zawarte w tablicy 12.6, obliczono sumy pomocnicze następujących iloczynów:

$$\begin{aligned} (0\bar{y}), & \quad \text{dla } s=0, \\ (\bar{s}y), & \quad \text{dla } s=1,2,3,4 \\ [(s-1)s\bar{y}], & \quad \text{dla } s=2,3,4, \\ (ss\bar{y}), & \quad \text{dla } s=1,2,3,4, \end{aligned}$$

otrzymując:

$$\begin{aligned} (0\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{0i} \bar{y}_i = 10,488, & \text{kolumna nr 3 w tablicy 12.6,} \\ (\bar{1}\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{1i} \bar{y}_i = -3,472, & \text{kolumna nr 5,} \\ (2\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{2i} \bar{y}_i = 2,612, & \text{kolumna nr 7,} \\ (3\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i = -0,184, & \text{kolumna nr 9,} \\ (4\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i = -1,180, & \text{kolumna nr 11,} \\ (12\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{2i} \bar{y}_i = -1,030, & \text{kolumna nr 13,} \\ (13\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i = 0,648, & \text{kolumna nr 15,} \\ (14\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i = 2,062, & \text{kolumna nr 17,} \\ (23\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{2i} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i = -1,016, & \text{kolumna nr 19,} \\ (24\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{2i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i = -0,754, & \text{kolumna nr 21,} \\ (34\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{3i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i = 0,888, & \text{kolumna nr 23,} \\ (11\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{1i} \bar{x}_{1i} \bar{y}_i = 11,706, & \text{kolumna nr 25,} \\ (22\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{2i} \bar{x}_{2i} \bar{y}_i = 8,818, & \text{kolumna nr 27,} \end{aligned}$$

$$(33\bar{y}) = \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{3i} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i = 7,654, \quad \text{kolumna nr 29,}$$

$$(44\bar{y}) = \sum_{i=1}^{31} \bar{x}_{4i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i = 7,570, \quad \text{kolumna nr 30.}$$

Tablica 12.6. Tablica pomocnicza do obliczenia współczynników w równaniu regresji.

Lp	$\bar{x}_{0i}$	$\bar{x}_{0i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{1i}$	$\bar{x}_{1i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{2i}$	$\bar{x}_{2i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{3i}$	$\bar{x}_{3i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{4i}$	$\bar{x}_{4i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{1i} \bar{x}_{2i}$	$\bar{x}_{1i} \bar{x}_{2i} \bar{y}_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	+1	+0,520	-1	-0,520	-1	-0,520	-1	-0,520	-1	-0,520	+1	+0,520
2	+1	+0,078	+1	+0,078	-1	-0,078	-1	-0,078	-1	-0,078	-1	-0,078
3	+1	+0,337	+1	+0,337	+1	+0,337	-1	-0,337	-1	-0,337	+1	+0,337
4	+1	+0,126	+1	+0,126	+1	+0,126	+1	+0,126	-1	-0,126	+1	+0,126
5	+1	+0,102	+1	+0,102	-1	-0,102	+1	+0,102	-1	-0,102	-1	-0,102
6	+1	+0,497	-1	-0,497	+1	+0,497	-1	-0,497	+1	+0,497	-1	-0,497
7	+1	+0,420	-1	-0,420	-1	-0,420	+1	+0,420	-1	-0,420	+1	+0,420
8	+1	+0,767	-1	-0,767	+1	+0,767	+1	+0,767	-1	-0,767	-1	-0,767
9	+1	+0,178	-1	-0,178	-1	-0,178	-1	-0,178	+1	+0,178	+1	+0,178
10	+1	+1,103	-1	-1,103	+1	+1,103	-1	-1,103	-1	-1,103	-1	-1,103
11	+1	+0,120	+1	+0,120	-1	-0,120	-1	-0,120	+1	+0,120	-1	-0,120
12	+1	+0,450	+1	+0,450	-1	-0,450	+1	+0,450	+1	+0,450	-1	-0,450
13	+1	+0,253	-1	-0,253	-1	-0,253	+1	+0,253	+1	+0,253	+1	+0,253
14	+1	+0,303	+1	+0,303	+1	+0,303	-1	-0,303	+1	+0,303	+1	+0,303
15	+1	+0,355	-1	-0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	-1	-0,355
16	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305
17	+1	+0,424	+2	+0,848	0	0	0	0	0	0	0	0
18	+1	+1,024	-2	-2,048	0	0	0	0	0	0	0	0
19	+1	+0,598	0	0	+2	+1,196	0	0	0	0	0	0
20	+1	+0,128	0	0	-2	-0,256	0	0	0	0	0	0
21	+1	+0,261	0	0	0	0	+2	+0,522	0	0	0	0
22	+1	+0,174	0	0	0	0	-2	-0,348	0	0	0	0
23	+1	+0,160	0	0	0	0	0	0	+2	+0,320	0	0
24	+1	+0,254	0	0	0	0	0	0	-2	-0,508	0	0
25	+1	+0,170	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	+1	+0,278	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	+1	+0,175	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	+1	+0,245	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	+1	+0,205	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	+1	+0,260	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	+1	+0,218	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=		(0 $\bar{y}$ ) =		(1 $\bar{y}$ ) =		(2 $\bar{y}$ ) =		(3 $\bar{y}$ ) =		(4 $\bar{y}$ ) =		(12 $\bar{y}$ ) =
31		10,488		-3,472		2,612		-0,184		-1,180		-1,030

c.d. tablicy 12.6

Lp	$\bar{x}_{li} \bar{x}_{3i}$	$\bar{x}_{li} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{li} \bar{x}_{4i}$	$\bar{x}_{li} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{2i} \bar{x}_{3i}$	$\bar{x}_{2i} \bar{x}_{3i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{2i} \bar{x}_{4i}$	$\bar{x}_{2i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{3i} \bar{x}_{4i}$	$\bar{x}_{3i} \bar{x}_{4i} \bar{y}_i$	$\bar{x}_{li}^2$	$\bar{x}_{li}^2 \bar{y}_i$
1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520
2	-1	-0,078	-1	-0,078	+1	+0,078	+1	+0,078	+1	+0,078	+1	+0,078
3	-1	-0,337	-1	-0,337	-1	-0,337	-1	-0,337	+1	+0,337	+1	+0,337
4	+1	+0,126	-1	-0,126	+1	+0,126	-1	-0,126	-1	-0,126	+1	+0,126
5	+1	+0,102	-1	-0,102	-1	-0,102	+1	+0,102	-1	-0,102	+1	+0,102
6	+1	+0,497	-1	-0,497	-1	-0,497	+1	+0,497	-1	-0,497	+1	+0,497
7	-1	-0,420	+1	+0,420	-1	-0,420	+1	+0,420	-1	-0,420	+1	+0,420
8	-1	-0,767	+1	+0,767	+1	+0,767	-1	-0,767	-1	-0,767	+1	+0,767
9	+1	+0,178	-1	-0,178	+1	+0,178	-1	-0,178	-1	-0,178	+1	+0,178
10	+1	+1,103	+1	+1,103	-1	-1,103	-1	-1,103	+1	+1,103	+1	+1,103
11	-1	-0,120	+1	+0,120	+1	+0,120	-1	-0,120	-1	-0,120	+1	+0,120
12	+1	+0,450	+1	+0,450	-1	-0,450	-1	-0,450	+1	+0,450	+1	+0,450
13	-1	-0,253	-1	-0,253	-1	-0,253	-1	-0,253	+1	+0,253	+1	+0,253
14	-1	-0,303	+1	+0,303	-1	-0,303	+1	+0,303	-1	-0,303	+1	+0,303
15	-1	-0,355	-1	-0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	+1	+0,355
16	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+4	+1,696
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+4	+4,096
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=		(13 $\bar{y}$ ) =		(14 $\bar{y}$ ) =		(23 $\bar{y}$ ) =		(24 $\bar{y}$ ) =		(34 $\bar{y}$ ) =		(11 $\bar{y}$ ) =
31		0,648		2,062		-1,016		-0,754		0,888		11,706

c.d. tablicy 12.6

Lp	$\bar{x}_{2i}^2$	$\bar{x}_{2i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{x}_{3i}^2$	$\bar{x}_{3i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{x}_{4i}^2$	$\bar{x}_{4i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{y}_{0i}$	$(\bar{y}_{0i} - \bar{y}_0)^2$	$\hat{y}_i$	$\bar{y}_i - \hat{y}_i$	$(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
1	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520	-	-	0,514	0,006	0,000036
2	+1	+0,078	+1	+0,078	+1	+0,078	-	-	0,015	0,063	0,003969
3	+1	+0,337	+1	+0,337	+1	+0,337	-	-	0,325	0,012	0,000144
4	+1	+0,126	+1	+0,126	+1	+0,126	-	-	0,153	0,027	0,000729
5	+1	+0,102	+1	+0,102	+1	+0,102	-	-	0,097	0,005	0,000025
6	+1	+0,497	+1	+0,497	+1	+0,497	-	-	0,520	0,023	0,000529
7	+1	+0,420	+1	+0,420	+1	+0,420	-	-	0,434	0,014	0,000196
8	+1	+0,767	+1	+0,767	+1	+0,767	-	-	0,747	0,02	0,000400
9	+1	+0,178	+1	+0,178	+1	+0,178	-	-	0,141	0,037	0,001369
10	+1	+1,103	+1	+1,103	+1	+1,103	-	-	1,081	0,022	0,000484
11	+1	+0,120	+1	+0,120	+1	+0,120	-	-	0,158	0,038	0,001444
12	+1	+0,450	+1	+0,450	+1	+0,450	-	-	0,462	0,012	0,000144
13	+1	+0,253	+1	+0,253	+1	+0,253	-	-	0,283	0,030	0,000900
14	+1	+0,303	+1	+0,303	+1	+0,303	-	-	0,279	0,024	0,000576
15	+1	+0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	-	-	0,408	0,053	0,002809
16	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	-	-	0,329	0,024	0,000576
17	0	0	0	0	0	0	-	-	0,430	0,006	0,000036
18	0	0	0	0	0	0	-	-	1,007	0,017	0,000289
19	+4	+2,392	0	0	0	0	-	-	0,574	0,024	0,000576
20	+4	+0,512	0	0	0	0	-	-	0,140	0,012	0,000144
21	0	0	+4	+1,044	0	0	-	-	0,196	0,065	0,004225
22	0	0	+4	+0,696	0	0	-	-	0,226	0,052	0,002704
23	0	0	0	0	+4	+0,640	-	-	0,102	0,058	0,003364
24	0	0	0	0	+4	+1,016	-	-	0,299	0,045	0,002025
25	0	0	0	0	0	0	0,170	0,002660	0,221	0,051	0,002601
26	0	0	0	0	0	0	0,278	0,003184	0,221	0,057	0,003249
27	0	0	0	0	0	0	0,175	0,002169	0,221	0,046	0,002116
28	0	0	0	0	0	0	0,245	0,000549	0,221	0,024	0,000576
29	0	0	0	0	0	0	0,205	0,000275	0,221	0,016	0,000256
30	0	0	0	0	0	0	0,260	0,001477	0,221	0,039	0,001521
31	0	0	0	0	0	0	0,218	0,000013	0,221	0,003	0,000009
n=31		(22 $\bar{y}$ ) = 8,818		(33 $\bar{y}$ ) = 7,654		(44 $\bar{y}$ ) = 7,570	$\bar{y}_0 =$ 0,2215	$S_E =$ 0,010327			$S_R =$ 0,038021

Wartości współczynników regresji obliczono minimalizując sumę kwadratów błędów (por. 9.2) otrzymując następujące zależności:

$$a) k_0 = \frac{a}{n} (0\bar{y}) - \frac{b}{n} \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}) = D(0\bar{y}) + E \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}), \quad (12.26)$$



gdzie  $n$  jest liczbą wierszy w macierzy planu eksperymentu (tablica 12.2),  $a$  i  $b$  są stałymi obliczanymi ze wzorów (12.63)<sub>1</sub> i (12.63)<sub>2</sub>, natomiast  $D$  i  $E$  są współczynnikami pomocniczymi. Po obliczeniu wartości tych współczynników, dla  $n=31$  (porównaj dane w tablicy 12.7):

$$D = \frac{a}{n} = \frac{4,429}{31} = 0,1428, \quad E = -\frac{b}{n} = -\frac{1,107}{31} = -0,0357,$$

oraz po obliczeniu wartości sum:  $(0\bar{y})$  i  $(ss\bar{y})$ , dla  $s=1,2,3,4$ , po podstawieniu do wzoru (12.26) otrzymano:

$$k_0 = 0,1428 \cdot 10,488 - 0,0357(11,706 + 8,818 + 7,654 + 7,570) = 0,2214828,$$

Tablica 12.7. Wartości współczynników pomocniczych stosowanych w analizie regresji wyników badań zrealizowanych według programu PS/DS.-P:  $\lambda$ .

S	1	2	3	4	5
D	0,3211	0,200	0,1663	0,1428	0,0988
E	-0,2584	-0,100	-0,0568	-0,0357	-0,0191
$e^{-1}$	0,2071	0,1250	0,0732	0,0416	0,0230
$n_k^{-1}$	0,500	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312
F-G	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0165
G	0,1246	0,0187	0,0069	0,0037	0,0015
F	0,3746	0,1437	0,0694	0,0350	0,0180
$\alpha$	1,1890	1,4140	1,6820	2,000	2,378
$n_0$	3	5	6	7	10
$n$	7	13	20	31	52

$$b) k_s = \frac{1}{n\lambda_2} (s\bar{y}) = e^{-1} (s\bar{y}), \quad (12.27)$$

gdzie  $\lambda_2$  jest momentem parzystym planu ekspeymentu według wzoru (12.55)<sub>1</sub>, zaś  $e^{-1} = \frac{1}{n\lambda_2}$  jest współczynnikiem pomocniczym. Po pod-

c.d. tablicy 12.6

Lp	$\bar{x}_{2i}^2$	$\bar{x}_{2i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{x}_{3i}^2$	$\bar{x}_{3i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{x}_{4i}^2$	$\bar{x}_{4i}^2 \bar{y}_i$	$\bar{y}_{0i}$	$(\bar{y}_{0i} - \bar{y}_0)^2$	$\hat{y}_i$	$\bar{y}_i - \hat{y}_i$	$(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
1	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	+1	+0,520	+1	+0,520	+1	+0,520	-	-	0,514	0,006	0,000036
2	+1	+0,078	+1	+0,078	+1	+0,078	-	-	0,015	0,063	0,003969
3	+1	+0,337	+1	+0,337	+1	+0,337	-	-	0,325	0,012	0,000144
4	+1	+0,126	+1	+0,126	+1	+0,126	-	-	0,153	0,027	0,000729
5	+1	+0,102	+1	+0,102	+1	+0,102	-	-	0,097	0,005	0,000025
6	+1	+0,497	+1	+0,497	+1	+0,497	-	-	0,520	0,023	0,000529
7	+1	+0,420	+1	+0,420	+1	+0,420	-	-	0,434	0,014	0,000196
8	+1	+0,767	+1	+0,767	+1	+0,767	-	-	0,747	0,02	0,000400
9	+1	+0,178	+1	+0,178	+1	+0,178	-	-	0,141	0,037	0,001369
10	+1	+1,103	+1	+1,103	+1	+1,103	-	-	1,081	0,022	0,000484
11	+1	+0,120	+1	+0,120	+1	+0,120	-	-	0,158	0,038	0,001444
12	+1	+0,450	+1	+0,450	+1	+0,450	-	-	0,462	0,012	0,000144
13	+1	+0,253	+1	+0,253	+1	+0,253	-	-	0,283	0,030	0,000900
14	+1	+0,303	+1	+0,303	+1	+0,303	-	-	0,279	0,024	0,000576
15	+1	+0,355	+1	+0,355	+1	+0,355	-	-	0,408	0,053	0,002809
16	+1	+0,305	+1	+0,305	+1	+0,305	-	-	0,329	0,024	0,000576
17	0	0	0	0	0	0	-	-	0,430	0,006	0,000036
18	0	0	0	0	0	0	-	-	1,007	0,017	0,000289
19	+4	+2,392	0	0	0	0	-	-	0,574	0,024	0,000576
20	+4	+0,512	0	0	0	0	-	-	0,140	0,012	0,000144
21	0	0	+4	+1,044	0	0	-	-	0,196	0,065	0,004225
22	0	0	+4	+0,696	0	0	-	-	0,226	0,052	0,002704
23	0	0	0	0	+4	+0,640	-	-	0,102	0,058	0,003364
24	0	0	0	0	+4	+1,016	-	-	0,299	0,045	0,002025
25	0	0	0	0	0	0	0,170	0,002660	0,221	0,051	0,002601
26	0	0	0	0	0	0	0,278	0,003184	0,221	0,057	0,003249
27	0	0	0	0	0	0	0,175	0,002169	0,221	0,046	0,002116
28	0	0	0	0	0	0	0,245	0,000549	0,221	0,024	0,000576
29	0	0	0	0	0	0	0,205	0,000275	0,221	0,016	0,000256
30	0	0	0	0	0	0	0,260	0,001477	0,221	0,039	0,001521
31	0	0	0	0	0	0	0,218	0,000013	0,221	0,003	0,000009
n=31		(22 $\bar{y}$ ) = 8,818		(33 $\bar{y}$ ) = 7,654		(44 $\bar{y}$ ) = 7,570	$\bar{y}_0 =$ 0,2215	$S_E =$ 0,010327			$S_R =$ 0,038021

Wartości współczynników regresji obliczono minimalizując sumę kwadratów błędów (por. 9.2) otrzymując następujące zależności:

$$a) k_0 = \frac{a}{n} (0\bar{y}) - \frac{b}{n} \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}) = D(0\bar{y}) + E \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}), \quad (12.26)$$



gdzie  $n$  jest liczbą wierszy w macierzy planu eksperymentu (tablica 12.2),  $a$  i  $b$  są stałymi obliczonymi ze wzorów (12.63)<sub>1</sub> i (12.63)<sub>2</sub>, natomiast  $D$  i  $E$  są współczynnikami pomocniczymi. Po obliczeniu wartości tych współczynników, dla  $n=31$  (porównaj dane w tablicy 12.7):

$$D = \frac{a}{n} = \frac{4,429}{31} = 0,1428, \quad E = -\frac{b}{n} = -\frac{1,107}{31} = -0,0357,$$

oraz po obliczeniu wartości sum:  $(0\bar{y})$  i  $(ss\bar{y})$ , dla  $s=1,2,3,4$ , po podstawieniu do wzoru (12.26) otrzymano:

$$k_0 = 0,1428 \cdot 10,488 - 0,0357(11,706 + 8,818 + 7,654 + 7,570) = 0,2214828,$$

Tablica 12.7. Wartości współczynników pomocniczych stosowanych w analizie regresji wyników badań zrealizowanych według programu PS/DS.-P:  $\lambda$ .

S	1	2	3	4	5
D	0,3211	0,200	0,1663	0,1428	0,0988
E	-0,2584	-0,100	-0,0568	-0,0357	-0,0191
$e^{-1}$	0,2071	0,1250	0,0732	0,0416	0,0230
$n_k^{-1}$	0,500	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312
F-G	0,2500	0,1250	0,0625	0,0313	0,0165
G	0,1246	0,0187	0,0069	0,0037	0,0015
F	0,3746	0,1437	0,0694	0,0350	0,0180
$\alpha$	1,1890	1,4140	1,6820	2,000	2,378
$n_0$	3	5	6	7	10
$n$	7	13	20	31	52

$$b) k_s = \frac{1}{n\lambda_2} (s\bar{y}) = e^{-1} (s\bar{y}), \quad (12.27)$$

gdzie  $\lambda_2$  jest momentem parzystym planu ekspeymentu według wzoru (12.55)<sub>1</sub>, zaś  $e^{-1} = \frac{1}{n\lambda_2}$  jest współczynnikiem pomocniczym. Po pod-

stawieniu do wzoru (12.27) obliczonych wartości:  $e^{-1} = \frac{1}{24} = 0,0416$  oraz sum  $(s\bar{y})$  dla  $s=1,2,3,4$ , otrzymano:

$$k_1 = 0,0416 (-3,472) = -0,144435 ,$$

$$k_2 = 0,0416 \times 2,612 = 0,108659 ,$$

$$k_3 = 0,0416 (-0,184) = -0,007654 ,$$

$$k_4 = 0,0416 (-1,180) = -0,049088 ,$$

$$c) k_{(s-1)s} = \frac{1}{n\lambda_3} = n_K^{-1} [(s-1)s\bar{y}] , \quad (12.28)$$

gdzie  $\lambda_3$  jest momentem parzystym planu eksperymentu, czwartego rzędu, według wzoru (12.55)<sub>2</sub> lub ze wzoru  $\lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_4$ , przy czym  $\lambda_4$  jest momentem parzystym czwartego rzędu, planu eksperymentu, według wzoru (12.55)<sub>3</sub>, zaś  $n_K^{-1}$  jest współczynnikiem pomocniczym. Po podstawieniu do wzoru (12.28) obliczonej wartości współczynnika  $n_K^{-1} = \frac{1}{n\lambda_3} = \frac{1}{16} = 0,0625$  oraz obliczonych wartości sum  $(s-1)s\bar{y}$ , dla  $s=2,3,4$ , otrzymano:

$$k_{12} = 0,0625 (-1,030) = -0,064375 ,$$

$$k_{13} = 0,0625 \times 0,648 = 0,040500 ,$$

$$k_{14} = 0,0625 \times 2,062 = 0,128875 ,$$

$$k_{23} = 0,0625 (-1,016) = -0,063500 ,$$

$$k_{24} = 0,0625 (-0,754) = -0,047125 ,$$

$$k_{34} = 0,0625 \times 0,888 = 0,055500 ,$$

$$d) k_{ss} = \frac{c}{n}(ss\bar{y}) - \frac{d}{n} \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}) - \frac{b}{n}(0\bar{y}) = \quad (12.29)$$

$$= (F - G)(ss\bar{y}) + G \sum_{s=1}^4 (ss\bar{y}) + E(0\bar{y}) ,$$

gdzie  $b$ ,  $c$ ,  $d$  są stałymi obliczanymi ze wzorów odpowiednio (12.63)<sub>2</sub>, (12.63)<sub>3</sub> i (12.63)<sub>4</sub>, natomiast  $(F-G)$ ,  $G$  i  $E$  są współczynnikami pomocniczymi. Po podstawieniu do wzoru (12.29) wartości współczynników pomocniczych:

$$(F - G) = \frac{c}{n} = \frac{0,9688}{31} = 0,0313, \quad G = -\frac{d}{n} = \frac{0,1154}{31} = 0,0037,$$

$$E = -\frac{b}{n} = -\frac{1,1074}{31} = 0,0357,$$

oraz wartości obliczonych sum  $(0\bar{y})$  i  $(ss\bar{y})$ , dla  $s=1,2,3,4$ , otrzymano:

$$k_{11} = 0,0313 \times 11,706 + 0,0037 \times 35,748 - 0,0357 \times 10,488 = 0,124244,$$

$$k_{22} = 0,0313 \times 8,818 + 0,0037 \times 35,748 - 0,0357 \times 10,488 = 0,033849,$$

$$k_{33} = 0,0313 \times 7,654 + 0,0037 \times 35,748 - 0,0357 \times 10,488 = -0,002584,$$

$$k_{44} = 0,0313 \times 7,57 + 0,0037 \times 35,748 - 0,0357 \times 10,488 = -0,005213.$$

Funkcja regresji opisująca proces nagniatania z prądem, przedstawiająca zależność średniego odchylenia profilu od linii średniej od warunków nagniatania (uwzględniająca zmienne zakodowane) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = \hat{R}_a = & 0,221483 - 0,144435\bar{x}_1 + 0,108659\bar{x}_2 - 0,007654\bar{x}_3 + \\ & -0,049088\bar{x}_4 - 0,064375\bar{x}_1\bar{x}_2 + 0,040500\bar{x}_1\bar{x}_3 + 0,128875\bar{x}_1\bar{x}_4 + \\ & -0,063500\bar{x}_2\bar{x}_3 - 0,047125\bar{x}_2\bar{x}_4 + 0,055500\bar{x}_3\bar{x}_4 + 0,124244\bar{x}_1^2 + \\ & + 0,033849\bar{x}_2^2 - 0,002584\bar{x}_3^2 - 0,005213\bar{x}_4^2. \end{aligned} \quad (12.30)$$

### 12.11. Analiza statystyczna funkcji regresji

Kolejnym etapem obliczeń jest ocena istotności współczynników regresji wykonana za pomocą testu  $t$  Studenta. W tym celu wykorzystuje się następujący schemat obliczeń:

a) obliczenie wariancji „międzywierszowej” w centrum programu:

$$s_c^2 = \frac{S_E}{f_E}, \quad (12.31)$$

gdzie:

$$S_E = \sum_{u=1}^{n_0} (\bar{y}_{0u} - \bar{\bar{y}}_0)^2, \quad \bar{\bar{y}}_0 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} \bar{y}_{0u}}{n_0}, \quad (12.32)$$

przy czym:

$\bar{y}_{0u}$  – kolejne wartości średnie pomiarów w centrum programu,

$\bar{\bar{y}}_0$  – średnia wartość pomiarów w centrum programu,

$n_0$  – liczba pomiarów w centrum programu,

$f_E = f_1 = n_0 - 1$  – liczba stopni swobody.

Dla analizowanych danych otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{y}}_0 &= \frac{\sum_{u=1}^7 \bar{y}_{0u}}{n_0} = \frac{1}{7} (0,170 + 0,278 + 0,175 + 0,245 + 0,205 + \\ &\quad + 0,260 + 0,218) = 0,22157, \\ &\quad \text{kolumna Nr 32 w tablicy 12.6,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{u=1}^7 (\bar{y}_{0u} - \bar{\bar{y}}_0)^2 = 0,002660 + 0,003184 + 0,002169 + 0,000549 + \\ &\quad + 0,000275 + 0,001477 + 0,000013 = 0,010327, \\ &\quad \text{kolumna Nr 33 w tablicy 12.6,} \end{aligned}$$

$$s_e^2 = \frac{S_E}{f_E} = \frac{0,010327}{6} = 0,0017212,$$

b) obliczenie wariancji współczynników regresji:

$$\diamond s^2(k_0) = Ds_e^2, \quad (12.33)$$

$$s^2(k_0) = 0,1428 \times 0,0017212 = 0,0002457,$$

$$\diamond s^2(k_s) = e^{-1} s_e^2, \quad s^2(k_1) = s^2(k_2) = s^2(k_3) = s^2(k_4) = e^{-1} s_e^2, \quad (12.34)$$

$$s^2(k_s) = e^{-1} s_e^2 = 0,0416 \times 0,0017212 = 0,0000715,$$

$$\diamond s^2(k_{(s-1)s}) = n_K^{-1} s_e^2, \quad (12.35)$$

$$s^2(k_{12}) = s^2(k_{13}) = s^2(k_{14}) = s^2(k_{23}) = s^2(k_{24}) = s^2(k_{34}) = n_K^{-1} s_e^2,$$

$$s^2(k_{(s-1)s}) = n_K^{-1} s_e^2 = 0,0625 \times 0,0017212 = 0,0001074,$$

$$\diamond s^2(k_{ss}) = Fs_e^2, \quad (12.36)$$

$$s^2(k_{11}) = s^2(k_{22}) = s^2(k_{33}) = s^2(k_{44}) = Fs_e^2,$$

$$s^2(k_{ss}) = Fs_e^2 = 0,035 \times 0,0017212 = 0,000601,$$

c) obliczenie odchylenia standardowego współczynników regresji:

$$\diamond s(k_0) = \sqrt{s^2(k_0)} \quad (12.37)$$

$$s(k_0) = \sqrt{0,0002457} = 0,0156748,$$

$$\diamond s(k_s) = \sqrt{s^2(k_s)}, \quad (12.38)$$

$$s(k_s) = \sqrt{0,0000715} = 0,0084557,$$

$$\diamond s(k_{(s-1)s}) = \sqrt{s^2(k_{(s-1)s})}, \quad (12.39)$$

$$s(k_{(s-1)s}) = \sqrt{0,0001074} = 0,010363,$$

$$\diamond s(k_{ss}) = \sqrt{s^2(k_{ss})}, \quad (12.40)$$

$$s(k_{ss}) = \sqrt{0,0000601} = 0,0077524,$$

d) statystyki obliczeniowe t Studenta:

$$\diamond t_0 = t(k_0) = \frac{|k_0|}{s(k_0)}, \quad t_0 = \frac{0,221483}{0,0156748} = 14,1299,$$

$$\diamond t_1 = t(k_1) = \frac{|k_1|}{s(k_1)}, \quad t_1 = \frac{0,144435}{0,0084557} = 17,0714,$$

$$\diamond t_2 = t(k_2) = \frac{|k_2|}{s(k_2)}, \quad t_2 = \frac{0,108659}{0,0084557} = 12,8403,$$

$$\diamond t_3 = t(k_3) = \frac{|k_3|}{s(k_3)}, \quad t_3 = \frac{0,007654}{0,0084557} = 0,9045,$$

$$\diamond t_4 = t(k_4) = \frac{|k_4|}{s(k_4)}, \quad t_4 = \frac{0,049088}{0,0084557} = 5,8053,$$

$$\begin{aligned}
 \diamond \quad t_{11} &= t(k_{11}) = \frac{|k_{11}|}{s(k_{11})}, & t_{11} &= \frac{0,124244}{0,0077524} = 16,0265, \\
 \diamond \quad t_{22} &= t(k_{22}) = \frac{|k_{22}|}{s(k_{22})}, & t_{22} &= \frac{0,033849}{0,0077524} = 4,3663, \\
 \diamond \quad t_{33} &= t(k_{33}) = \frac{|k_{33}|}{s(k_{33})}, & t_{33} &= \frac{0,002584}{0,0077524} = 0,3333, \\
 \diamond \quad t_{44} &= t(k_{44}) = \frac{|k_{44}|}{s(k_{44})}, & t_{44} &= \frac{0,005213}{0,0077524} = 0,6724, \\
 \diamond \quad t_{12} &= t(k_{12}) = \frac{|k_{12}|}{s(k_{12})}, & t_{12} &= \frac{0,064375}{0,0103633} = 6,2062, \\
 \diamond \quad t_{13} &= t(k_{13}) = \frac{|k_{13}|}{s(k_{13})}, & t_{13} &= \frac{0,040500}{0,0103633} = 3,9046, \\
 \diamond \quad t_{14} &= t(k_{14}) = \frac{|k_{14}|}{s(k_{14})}, & t_{14} &= \frac{0,128875}{0,0103633} = 12,4357, \\
 \diamond \quad t_{23} &= t(k_{23}) = \frac{|k_{23}|}{s(k_{23})}, & t_{23} &= \frac{0,063500}{0,0103633} = 6,1274, \\
 \diamond \quad t_{24} &= t(k_{24}) = \frac{|k_{24}|}{s(k_{24})}, & t_{24} &= \frac{0,047125}{0,0103633} = 4,5433, \\
 \diamond \quad t_{34} &= t(k_{34}) = \frac{|k_{34}|}{s(k_{34})}, & t_{34} &= \frac{0,055500}{0,0103633} = 5,3506,
 \end{aligned}$$

e) wartość krytyczna  $t_{kr}$  statystyki  $t$  Studenta. Wartość krytyczna odczytana z tablicy 15.4 dla  $\alpha=0,05$  i  $f=f_E=n_0-1=7-1=6$  wynosi:  $t_{kr}(0,05;6)=2,4469$ .

Jeśli zachodzi warunek  $t_i \geq t_{kr}(\alpha; f_E)$  następuje odrzucenie hipotezy o nieistotności współczynników regresji, tzn. że współczynniki regresji mają wpływ istotny na czynnik wynikowy. Jeśli  $t_i < t_{kr}(\alpha; f_E)$  następuje przyjęcie hipotezy o nieistotności współczynników regresji i współczynniki te można pominąć. Ponieważ w naszym przypadku  $t_0, t_1, t_2, t_4, t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}$  i  $t_{34}$  są większe od wartości krytycznej to odpowiednie współczynniki regresji są istotne, natomiast statystyki  $t_3, t_{33}$ , i  $t_{44}$  są mniejsze od wartości krytycznej i odpowiednie współczynniki regresji są nieistotne i można je pominąć.

Zatem równanie regresji jako wielomian drugiego stopnia z podwójnymi interakcjami, po uwzględnieniu współczynników nieistotnych, ma teraz następującą postać zakodowaną:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = \hat{R}_a = & 0,221483 - 0,144435\bar{\bar{x}}_1 + 0,108659\bar{\bar{x}}_2 - 0,007654\bar{\bar{x}}_3 + \\ & - 0,049088\bar{\bar{x}}_4 - 0,064375\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2 + 0,040500\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3 + 0,128875\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_4 + \\ & - 0,063500\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 - 0,047125\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_4 + 0,055500\bar{\bar{x}}_3\bar{\bar{x}}_4 + 0,124244\bar{\bar{x}}_1^2 + \\ & + 0,033849\bar{\bar{x}}_2^2 - 0,002584\bar{\bar{x}}_3^2 - 0,005213\bar{\bar{x}}_4^2. \end{aligned} \quad (12.41)$$

przy czym wyrazy podkreślone w równaniu są nieistotne w sensie statystycznym na przyjętym poziomie  $\alpha=0,05$ .

### 12.12. Badanie istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej

Miarą wiarygodności otrzymanych wyników w postaci równania regresji jest badanie współczynnika korelacji wielowymiarowej  $R$ . Współczynnik  $R$  może być traktowany jako miara stopnia dopasowania funkcji regresji do wyników eksperymentu (objektu badań). Współczynnik  $R$  określa równanie:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}}, \quad (12.42)$$

gdzie:

$\hat{y}_i$  - wartości wyjścia modelu dla  $i$ -tej próby, obliczane z równania regresji,

$\bar{y}_i$  - uśredniona wartość wyjścia dla  $i$ -tego doświadczenia dla  $r$  powtórzeń,

$$\bar{y}_i = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r y_{ij},$$

$\bar{\bar{y}}$  - wartość średnia wyjścia obiektu (odpowiedzi) dla  $n$  doświadczeń,

$$\bar{\bar{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i.$$



W praktyce, często zachodzi potrzeba zbadania istotności otrzymanego współczynnika korelacji wielowymiarowej  $R$ . Istotność tę sprawdza się wykorzystując test F Snedecora, oparty na analizie wariancji w równaniu regresji, określony wzorem:

$$F = \frac{n - m}{m - 1} \frac{R^2}{1 - R^2}, \quad (12.43)$$

gdzie:

$m$  – liczba wyrazów równania regresji łącznie z wyrazem wolnym,

$n$  – liczba prób.

Obliczenie współczynnika korelacji wielowymiarowej oraz sprawdzenie jego istotności dla danych przykładowych przebiega następująco:

- 1) Obliczenie wartości wyjść modelu (12.41), bez pomijania współczynników nieistotnych, dla poszczególnych punktów planu:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= 0,221483 + 0,144435 - 0,108659 + 0,007654 + 0,049088 - 0,064375 + \\ &+ 0,0405 + 0,128875 - 0,06350 - 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,514172, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_2 &= 0,221483 - 0,144435 - 0,108659 + 0,007654 + 0,049088 + 0,064375 + \\ &- 0,0405 - 0,128875 - 0,06350 - 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,015302, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_3 &= 0,221483 - 0,144435 + 0,108659 + 0,007654 + 0,049088 - 0,064375 + \\ &- 0,0405 - 0,128875 + 0,06350 + 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,325120, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_4 &= 0,221483 - 0,144435 + 0,108659 - 0,007654 + 0,049088 - 0,064375 + \\ &+ 0,0405 - 0,128875 - 0,06350 + 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,152812, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_5 &= 0,221483 - 0,144435 - 0,108659 - 0,007654 + 0,049088 + 0,064375 + \\ &+ 0,0405 - 0,128875 + 0,06350 - 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,096994, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_6 &= 0,221483 + 0,144435 + 0,108659 + 0,0077654 - 0,049088 + 0,064375 + \\ &+ 0,0405 - 0,128875 + 0,06350 - 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ &+ 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,5204254, \end{aligned}$$

$$\hat{y}_7 = 0,221483 + 0,144435 - 0,108659 - 0,007654 + 0,049088 - 0,064375 + \\ - 0,0405 + 0,128875 + 0,06350 - 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,433864,$$

$$\hat{y}_8 = 0,221483 + 0,144435 + 0,108659 - 0,007654 + 0,049088 + 0,064375 + \\ - 0,0405 + 0,128875 - 0,06350 + 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,747182,$$

$$\hat{y}_9 = 0,221483 + 0,144435 - 0,108659 + 0,007654 - 0,049088 - 0,064375 + \\ + 0,0405 - 0,128875 - 0,06350 + 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,141496,$$

$$\hat{y}_{10} = 0,221483 + 0,144435 + 0,108659 + 0,007654 + 0,049088 + 0,064375 + \\ + 0,0405 + 0,128875 + 0,06350 + 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 1,081490,$$

$$\hat{y}_{11} = 0,221483 - 0,144435 - 0,108659 + 0,007654 - 0,049088 + 0,064375 + \\ - 0,0405 + 0,128875 - 0,06350 + 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,158126,$$

$$\hat{y}_{12} = 0,221483 - 0,144435 - 0,108659 - 0,007654 - 0,049088 + 0,064375 + \\ + 0,0405 + 0,128875 + 0,06350 + 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,461818,$$

$$\hat{y}_{13} = 0,221483 + 0,144435 - 0,108659 - 0,007654 - 0,049088 - 0,064375 + \\ - 0,0405 - 0,128875 + 0,06350 + 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,283238,$$

$$\hat{y}_{14} = 0,221483 - 0,144435 + 0,108659 + 0,007654 - 0,049088 - 0,064375 + \\ - 0,0405 + 0,128875 + 0,06350 - 0,047125 - 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,279444,$$

$$\hat{y}_{15} = 0,221483 + 0,144435 + 0,108659 - 0,007654 - 0,049088 + 0,064375 + \\ - 0,0405 - 0,128875 - 0,06350 - 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,408052,$$

$$\hat{y}_{16} = 0,221483 - 0,144435 + 0,108659 - 0,007654 - 0,049088 - 0,064375 + \\ + 0,0405 + 0,128875 - 0,06350 - 0,047125 + 0,0555 + 0,124244 + \\ + 0,033849 - 0,002584 - 0,005213 = 0,329136,$$

$$\hat{y}_{17} = 0,221483 - 2 \cdot 0,144435 + 4 \cdot 0,124244 = 0,4295895,$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{18} &= 0,221483 + 2 \cdot 0,144435 + 4 \cdot 0,124244 = 1,007329, \\
\hat{y}_{19} &= 0,221483 + 2 \cdot 0,108659 + 4 \cdot 0,033849 = 0,574197, \\
\hat{y}_{20} &= 0,221483 - 2 \cdot 0,108659 + 4 \cdot 0,033849 = 0,139561, \\
\hat{y}_{21} &= 0,221483 - 2 \cdot 0,007654 - 4 \cdot 0,002584 = 0,195839, \\
\hat{y}_{22} &= 0,221483 + 2 \cdot 0,007654 - 4 \cdot 0,002584 = 0,226455, \\
\hat{y}_{23} &= 0,221483 - 2 \cdot 0,049088 - 4 \cdot 0,005213 = 0,102455, \\
\hat{y}_{24} &= 0,221483 + 2 \cdot 0,049088 - 4 \cdot 0,005213 = 0,298807, \\
\hat{y}_{25} &= 0,221483, \quad \hat{y}_{26} = 0,221483, \quad \hat{y}_{27} = 0,221483, \\
\hat{y}_{28} &= 0,221483, \quad \hat{y}_{29} = 0,221483, \quad \hat{y}_{30} = 0,221483, \\
\hat{y}_{31} &= 0,221483.
\end{aligned}$$

2) Obliczenie wartości współczynnika korelacji wielowymiarowej R:

a) obliczenie wartości średniej wyjścia obiektu (odpowiedzi) dla n doświadczeń:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = \\
&= \frac{1}{31} (0,520 + 0,078 + 0,337 + 0,126 + 0,102 + 0,497 + 0,420 + \\
&\quad + 0,767 + 0,178 + 1,103 + 0,120 + 0,450 + 0,253 + 0,303 + 0,355 + \\
&\quad + 0,305 + 0,424 + 1,024 + 0,598 + 0,128 + 0,261 + 0,174 + 0,160 + \\
&\quad + 0,254 + 0,170 + 0,278 + 0,175 + 0,245 + 0,205 + 0,260 + 0,218) = \\
&= 0,338,
\end{aligned}$$

b) obliczenie wartości średniej wyjścia modelu dla n doświadczeń (po zaokrągleniu wartości wyjść do trzech miejsc po przecinku):

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \\
&= \frac{1}{31} (0,514 + 0,015 + 0,325 + 0,153 + 0,097 + 0,520 + 0,434 + \\
&\quad + 0,747 + 0,141 + 1,081 + 0,158 + 0,462 + 0,283 + 0,279 + 0,408 + \\
&\quad + 0,329 + 0,430 + 1,007 + 0,574 + 0,140 + 0,196 + 0,226 + 0,102 + \\
&\quad + 0,299 + 0,221 + 0,221 + 0,221 + 0,221 + 0,221 + 0,221 + 0,221) = \\
&= 0,33765 \cong 0,338,
\end{aligned}$$

c) sprawdzenie równości wartości średnich wyjść obiektu i modelu:

$$\bar{y} = 0,338 = \hat{y} = 0,338,$$

d) obliczenie wariancji resztowej  $S_R$ , która jest sumą kwadratów różnic wyjść modelu i obiektu, dla poszczególnych punktów planu (na podstawie danych zawartych w tabelicy 12.6):

$$\begin{aligned} S_R &= \sum_{i=1}^{31} (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 = \\ &= 0,000036 + 0,003969 + 0,000144 + 0,000729 + 0,000025 + \\ &+ 0,000529 + 0,000196 + 0,000400 + 0,0001369 + 0,000484 + \\ &+ 0,001444 + 0,000144 + 0,000900 + 0,000576 + 0,002809 + \\ &+ 0,000576 + 0,000036 + 0,000289 + 0,000576 + 0,000144 + \\ &+ 0,004225 + 0,002704 + 0,002364 + 0,002025 + 0,002601 + \\ &+ 0,003249 + 0,002116 + 0,000576 + 0,000256 + 0,001521 + \\ &+ 0,000009 = 0,038021, \end{aligned}$$

e) obliczenie sumy kwadratów różnic wyjść obiektu dla poszczególnych punktów planu (dla  $n$  doświadczeń) ze wzoru  $\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2$ :

1.  $(\bar{y}_1 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,520 - 0,338)^2 = 0,033124,$
2.  $(\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,078 - 0,338)^2 = 0,067600,$
3.  $(\bar{y}_3 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,337 - 0,338)^2 = 0,000001,$
4.  $(\bar{y}_4 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,126 - 0,338)^2 = 0,044944,$
5.  $(\bar{y}_5 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,102 - 0,338)^2 = 0,055696,$
6.  $(\bar{y}_6 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,497 - 0,338)^2 = 0,025281,$
7.  $(\bar{y}_7 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,420 - 0,338)^2 = 0,006724,$
8.  $(\bar{y}_8 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,767 - 0,338)^2 = 0,184041,$
9.  $(\bar{y}_9 - \bar{\bar{y}})^2 = (0,178 - 0,338)^2 = 0,025600,$
10.  $(\bar{y}_{10} - \bar{\bar{y}})^2 = (1,103 - 0,338)^2 = 0,585225,$
11.  $(\bar{y}_{11} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,120 - 0,338)^2 = 0,047524,$

12.  $(\bar{y}_{12} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,450 - 0,338)^2 = 0,012544,$
13.  $(\bar{y}_{13} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,253 - 0,338)^2 = 0,007225,$
14.  $(\bar{y}_{14} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,303 - 0,338)^2 = 0,001225,$
15.  $(\bar{y}_{15} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,355 - 0,338)^2 = 0,000289,$
16.  $(\bar{y}_{16} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,305 - 0,338)^2 = 0,001089,$
17.  $(\bar{y}_{17} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,424 - 0,338)^2 = 0,007396,$
18.  $(\bar{y}_{18} - \bar{\bar{y}})^2 = (1,024 - 0,338)^2 = 0,470596,$
19.  $(\bar{y}_{19} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,598 - 0,338)^2 = 0,067600,$
20.  $(\bar{y}_{20} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,128 - 0,338)^2 = 0,044100,$
21.  $(\bar{y}_{21} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,261 - 0,338)^2 = 0,005929,$
22.  $(\bar{y}_{22} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,174 - 0,338)^2 = 0,026896,$
23.  $(\bar{y}_{23} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,160 - 0,338)^2 = 0,031684,$
24.  $(\bar{y}_{24} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,254 - 0,338)^2 = 0,007056,$
25.  $(\bar{y}_{25} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,170 - 0,338)^2 = 0,028224,$
26.  $(\bar{y}_{26} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,278 - 0,338)^2 = 0,003600,$
27.  $(\bar{y}_{27} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,175 - 0,338)^2 = 0,026569,$
28.  $(\bar{y}_{28} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,245 - 0,338)^2 = 0,008649,$
29.  $(\bar{y}_{29} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,205 - 0,338)^2 = 0,017689,$
30.  $(\bar{y}_{30} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,260 - 0,338)^2 = 0,006084,$
31.  $(\bar{y}_{31} - \bar{\bar{y}})^2 = (0,218 - 0,338)^2 = 0,014400,$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2 &= 0,033124 + 0,067600 + 0,000001 + 0,044944 + 0,055696 + \\ &+ 0,025281 + 0,006724 + 0,184041 + 0,025600 + 0,585225 + 0,047524 + \\ &+ 0,012544 + 0,007225 + 0,001225 + 0,000289 + 0,001089 + 0,007396 + \\ &+ 0,470596 + 0,067600 + 0,044100 + 0,005929 + 0,026896 + 0,031684 + \\ &+ 0,007056 + 0,028224 + 0,003600 + 0,026569 + 0,008649 + 0,017689 + \\ &+ 0,006084 + 0,014400 = 1,834792, \end{aligned}$$

f) obliczenie wartości współczynnika korelacji wielowymiarowej:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,038021}{1,834792}} = \sqrt{1 - 0,02072} = 0,9896,$$

3) Obliczenie wartości testu F-Snedecora dla następujących danych  $n=31$ ,  $m=15$ ,  $R=0,9896$ :

$$F = \frac{n - m}{m - 1} \frac{R^2}{1 - R^2} = \frac{31 - 15}{15 - 1} \frac{(0,9896)^2}{1 - (0,9896)^2} = 54,113,$$

4) Odczytanie wartości krytycznej testu F-Snedecora z tablicy 15.6. Wartość ta dla następujących danych  $\alpha=0,05$ ;  $r_1=m-1=15-1=14$  oraz  $r_2=n-m=31-15=16$  wynosi:

$$F_{kr}(0,05;14;16)=2,37,$$

5) Porównanie wartości testu F-Snedecora z jego wartością krytyczną. Ponieważ zachodzi nierówność:  $F=54,113 > F_{kr}(0,05;14;16)=2,37$ , nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej. Oznacza to również, że nie można odrzucić hipotezy o prawdziwości współczynników funkcji regresji.

### 12.13. Sprawdzenie adekwatności modelu matematycznego

Ocenę adekwatności modelu matematycznego do obiektu rzeczywistego sprawdza się testem F, który jest stosunkiem wariancji adekwatności do wariancji charakteryzującej błąd doświadczenia według wzoru:

$$F = \frac{\frac{S_{LF}}{f_{LF}}}{\frac{S_E}{f_E}}, \quad \text{gdzie} \quad S_{LF} = S_R - S_E, \quad (12.44)$$

gdzie  $S_E$  jest wariancją obliczoną według wzoru (12.32),  $S_R$  jest wariancją resztową,  $f_{LF}=r_1=n-m-n_0-1$  oraz  $f_E=r_2=n_0-1$  są liczbami stopni swobody,  $n$  jest liczbą prób,  $m$  jest liczbą wyrazów równania regresji łącznie z wyrazem wolnym,  $n_0$  jest liczbą pomiarów w centrum programu. Dla przykładowych danych otrzymuje się:



$$f_{LF}=r_1=31-15-7-1=8, \quad f_E=r_2=7-1=6,$$

$$S_E=0,010327, \quad S_R=0,038021,$$

$$S_{LF} = 0,038021 - 0,010327 = 0,027694 ,$$

$$F = \frac{\frac{0,027694}{8}}{\frac{0,010327}{6}} = \frac{0,0034618}{0,0017211} = 2,0114 .$$

Wartość testu  $F$  porównuje się z wartością krytyczną testu  $F_{kr}(\alpha; r_1; r_2)$ . Wartość ta odczytana z tablicy 15.6, dla następujących danych  $\alpha=0,05$ ,  $r_1=8$ ,  $r_2=6$ , wynosi:  $F_{kr}(0,05;8;6)=4,15$ . Ponieważ zachodzi nierówność  $F=2,0114 < F_{kr}(0,05;8;6)=4,15$ , następuje przyjęcie hipotezy o adekwatności funkcji regresji na przyjętym poziomie istotności.

#### 12.14. Odkodowanie funkcji regresji

W celu odkodowania funkcji regresji (12.16) wykorzystuje się relacje kodowe według wzoru (12.13). Po odpowiednim podstawieniu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = \hat{R}_a = & k_0 + k_1 \left( \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{10}}{\Delta \bar{x}_1} \right) + k_2 \left( \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{20}}{\Delta \bar{x}_2} \right) + k_3 \left( \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}}{\Delta \bar{x}_3} \right) + k_4 \left( \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}}{\Delta \bar{x}_4} \right) + \\ & + k_{12} \left( \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{10}}{\Delta \bar{x}_1} \right) \left( \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{20}}{\Delta \bar{x}_2} \right) + k_{13} \left( \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{10}}{\Delta \bar{x}_1} \right) \left( \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}}{\Delta \bar{x}_3} \right) + \\ & + k_{14} \left( \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{10}}{\Delta \bar{x}_1} \right) \left( \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}}{\Delta \bar{x}_4} \right) + k_{23} \left( \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{20}}{\Delta \bar{x}_2} \right) \left( \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}}{\Delta \bar{x}_3} \right) + \\ & + k_{24} \left( \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{20}}{\Delta \bar{x}_2} \right) \left( \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}}{\Delta \bar{x}_4} \right) + k_{34} \left( \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}}{\Delta \bar{x}_3} \right) \left( \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}}{\Delta \bar{x}_4} \right) + \\ & + k_{11} \left( \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{10}}{\Delta \bar{x}_1} \right)^2 + k_{22} \left( \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{20}}{\Delta \bar{x}_2} \right)^2 + k_{33} \left( \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_{30}}{\Delta \bar{x}_3} \right)^2 + k_{44} \left( \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_{40}}{\Delta \bar{x}_4} \right)^2, \end{aligned} \quad (12.45)$$

natomiast po uporządkowaniu względem zmiennej  $\bar{x}_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , otrzymuje się ostatecznie funkcję badanego obiektu dla rzeczywistych wartości czynników badanych:



$$\begin{aligned}
\hat{Y} = \hat{R}_a = & k_0 - k_1 \frac{\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1} - k_2 \frac{\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2} - k_3 \frac{\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3} - k_4 \frac{\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4} + k_{12} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} + k_{13} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} + \\
& + k_{14} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} + k_{23} \frac{\bar{x}_{20}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} + k_{24} \frac{\bar{x}_{20}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} + k_{34} \frac{\bar{x}_{30}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} + k_{11} \left( \frac{\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1} \right)^2 + \\
& + k_{22} \left( \frac{\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2} \right)^2 + k_{33} \left( \frac{\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3} \right)^2 + k_{44} \left( \frac{\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4} \right)^2 + \left( \frac{k_1}{\Delta\bar{x}_1} - \frac{k_{12}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{13}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} + \right. \\
& - \left. \frac{k_{14}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{11}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1^2} \right) \bar{x}_1 + \left( \frac{k_2}{\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{12}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{23}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{24}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{22}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2^2} \right) \bar{x}_2 + \\
& + \left( \frac{k_3}{\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{13}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{23}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{34}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{33}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3^2} \right) \bar{x}_3 + \left( \frac{k_4}{\Delta\bar{x}_4} - \frac{k_{14}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} + \right. \\
& - \left. \frac{k_{24}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} - \frac{k_{34}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{44}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4^2} \right) \bar{x}_4 + \left( \frac{k_{12}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} \right) \bar{x}_1\bar{x}_2 + \left( \frac{k_{13}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} \right) \bar{x}_1\bar{x}_3 + \\
& + \left( \frac{k_{14}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} \right) \bar{x}_1\bar{x}_4 + \left( \frac{k_{23}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} \right) \bar{x}_2\bar{x}_3 + \left( \frac{k_{24}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} \right) \bar{x}_2\bar{x}_4 + \left( \frac{k_{34}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} \right) \bar{x}_3\bar{x}_4 + \\
& + \left( \frac{k_{11}}{\Delta\bar{x}_1^2} \right) \bar{x}_1^2 + \left( \frac{k_{22}}{\Delta\bar{x}_2^2} \right) \bar{x}_2^2 + \left( \frac{k_{33}}{\Delta\bar{x}_3^2} \right) \bar{x}_3^2 + \left( \frac{k_{44}}{\Delta\bar{x}_4^2} \right) \bar{x}_4^2.
\end{aligned} \tag{12.46}$$

Równanie (12.46) można również zapisać w prostszej postaci:

$$\begin{aligned}
\hat{Y} = & b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_4 + b_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 + b_{13}\bar{x}_1\bar{x}_3 + b_{14}\bar{x}_1\bar{x}_4 + \\
& + b_{23}\bar{x}_2\bar{x}_3 + b_{24}\bar{x}_2\bar{x}_4 + b_{34}\bar{x}_3\bar{x}_4 + b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2,
\end{aligned} \tag{12.47}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
b_0 = & k_0 - k_1 \frac{\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1} - k_2 \frac{\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2} - k_3 \frac{\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3} - k_4 \frac{\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4} + k_{12} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} + k_{13} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} + \\
& + k_{14} \frac{\bar{x}_{10}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} + k_{23} \frac{\bar{x}_{20}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} + k_{24} \frac{\bar{x}_{20}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} + k_{34} \frac{\bar{x}_{30}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} + k_{11} \left( \frac{\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1} \right)^2 + \\
& + k_{22} \left( \frac{\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2} \right)^2 + k_{33} \left( \frac{\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3} \right)^2 + k_{44} \left( \frac{\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4} \right)^2,
\end{aligned} \tag{12.47a}$$

$$b_1 = \frac{k_1}{\Delta\bar{x}_1} - \frac{k_{12}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{13}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{14}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{11}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1^2},$$

$$b_2 = \frac{k_2}{\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{12}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2} - \frac{k_{23}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{24}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{22}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2^2}, \quad (12.47)$$

$$b_3 = \frac{k_3}{\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{13}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{23}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3} - \frac{k_{34}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{33}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3^2},$$

$$b_4 = \frac{k_4}{\Delta\bar{x}_4} - \frac{k_{14}\bar{x}_{10}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4} - \frac{k_{24}\bar{x}_{20}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4} - \frac{k_{34}\bar{x}_{30}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4} - \frac{2k_{44}\bar{x}_{40}}{\Delta\bar{x}_4^2},$$

$$b_{12} = \frac{k_{12}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_2}, \quad b_{13} = \frac{k_{13}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_3}, \quad b_{14} = \frac{k_{14}}{\Delta\bar{x}_1\Delta\bar{x}_4}, \quad b_{23} = \frac{k_{23}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_3}, \quad b_{24} = \frac{k_{24}}{\Delta\bar{x}_2\Delta\bar{x}_4},$$

$$b_{34} = \frac{k_{34}}{\Delta\bar{x}_3\Delta\bar{x}_4}, \quad b_{11} = \frac{k_{11}}{\Delta\bar{x}_1^2}, \quad b_{22} = \frac{k_{22}}{\Delta\bar{x}_2^2}, \quad b_{33} = \frac{k_{33}}{\Delta\bar{x}_3^2}, \quad b_{44} = \frac{k_{44}}{\Delta\bar{x}_4^2}.$$

Po odkodowaniu funkcji regresji (12.41) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \hat{R}_a = & 2,88038994 - 0,00217189\bar{x}_1 + 4,3089826\bar{x}_2 + \\ & - 0,27841418\bar{x}_3 - 0,00462633\bar{x}_4 - 0,00070749\bar{x}_1\bar{x}_2 + \\ & + 0,00020030\bar{x}_1\bar{x}_3 + 0,00000255\bar{x}_1\bar{x}_4 - 1,56789147\bar{x}_2\bar{x}_3 + \\ & - 0,00465436\bar{x}_2\bar{x}_4 + 0,00246665\bar{x}_3\bar{x}_4 + 0,00000027\bar{x}_1^2 + \\ & + 1,85730924\bar{x}_2^2 - \underline{0,002870821\bar{x}_3^2} - \underline{0,00000093\bar{x}_4^2}, \end{aligned} \quad (12.48)$$

lub

$$\begin{aligned} \hat{R}_a = & 2,88038994 - 0,00217189\bar{F}_3 + 4,30898261\bar{p}_n + \\ & - 0,27841418\bar{v}_n - 0,00462633\bar{I} - 0,00070749\bar{F}_3\bar{p}_n + \\ & + 0,00020030\bar{F}_3\bar{v}_n + 0,00000255\bar{F}_3\bar{I} - 1,56789147\bar{p}_n\bar{v}_n + \\ & - 0,00465436\bar{p}_n\bar{I} + 0,00246665\bar{v}_n\bar{I} + 0,00000027(\bar{F}_3)^2 + \\ & + 1,85730924(\bar{p}_n)^2 - \underline{0,002870821(\bar{v}_n)^2} - \underline{0,00000093(\bar{I})^2}, \end{aligned} \quad (12.49)$$

gdzie  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{p}_n$ ,  $\bar{v}_n$  i  $\bar{I}$  są parametrami technologicznymi procesu nagniatania powierzchniowego z prądem, natomiast wyrażenia podkreślone są nieistotne w sensie statystycznym.

### 12.15. Określenie przedziału ufności funkcji regresji

Ostatnim etapem obliczeń przy ustalaniu postaci modelu matematycznego badanego obiektu jest określenie przedziału ufności otrzymanej funkcji regresji. Przedział ten zależy od wartości wejścia obiektu  $\bar{\bar{x}}_i$ . Dla prognozowanej wartości wyjścia modelu  $\hat{\bar{Y}}$ , na poziomie istotności  $\alpha$ , przedział ufności można obliczyć z następujących wzorów [15, 39]:

$$\hat{\bar{Y}} \pm t_{kr(\alpha, f=n-m)} \bullet s(\hat{\bar{Y}}), \quad (12.50)$$

lub

$$\hat{\bar{Y}} \pm t_{kr(\alpha, f=n-m)} \frac{S_R}{n-m-1} \sqrt{\{\bar{\bar{x}}\}^T ([\bar{\bar{X}}]^T [\bar{\bar{X}}])^{-1} \{\bar{\bar{x}}\}}, \quad (12.51)$$

gdzie:

$\hat{\bar{Y}}$  - wartość oczekiwana, obliczona z równania regresji,

$t_{kr(\alpha, f=n-m)}$  - wartość krytyczna rozkładu testu t-Studenta (tablica 15.4)

dla poziomu istotności  $\alpha$  i stopni swobody  $f=n-m$ ,

$n$  - liczba prób,

$m$  - liczba wyrazów równania regresji łącznie z wyrazem wolnym,

$s^2(\hat{\bar{Y}})$  - wariancja prognozowanej wartości funkcji regresji,

$([\bar{\bar{X}}]^T [\bar{\bar{X}}])^{-1}$  - macierz kowariancji,

$\{\bar{\bar{x}}\}$  - wektor kolumnowy zmiennych wejściowych (czynników badanych w postaci zakodowanej),

$S_R = \sum_{i=1}^{31} (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$  - wariancja resztowa.

Wariancję zapowiadanej wartości funkcji oblicza się wykorzystując prawo skumulowanych błędów, otrzymując:

$$\begin{aligned} s^2(\hat{\bar{Y}}) = & s^2(k_0) + s^2(k_i) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + s^2(k_{ij}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2 + s^2(k_{ii}) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 + \\ & + 2 \text{côv}(k_0 k_{ii}) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + 2 \text{côv}(k_{ii}, k_{ij}) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2, \end{aligned} \quad (12.52)$$

gdzie wariancje  $s^2(k_0)$ ,  $s^2(k_i)$ ,  $s^2(k_{ij})$  i  $s^2(k_{ii})$  oraz kowariancje oszacowań parametrów  $\hat{c}ov(k_0, k_{ii})$ ,  $\hat{c}ov(k_{ii}, k_{ij})$  można określić z następujących wzorów:

$$\frac{ns^2(k_0)}{s^2(y)} = a, \quad \frac{ns^2(k_{ii})}{s^2(y)} = c - d, \quad \frac{ns^2(k_i)}{s^2(y)} = \lambda_2^{-1}, \quad (12.53)$$

$$\frac{ns^2(k_{ij})}{s^2(y)} = \lambda_3^{-1}, \quad \frac{n \hat{c}ov(k_0, k_{ii})}{s^2(y)} = -b, \quad \frac{n \hat{c}ov(k_{ii}, k_{ij})}{s^2(y)} = -d,$$

przy czym  $s^2(y)$  oznacza wariancję w próbkę, związaną z błędem doświadczenia, zaś  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  są momentami planu, natomiast  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oraz  $d$  są współczynnikami, określanymi z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S\lambda_2^2}{\lambda_4 - \lambda_3 + S\lambda_3 - S\lambda_2^2} + 1, \\ b &= \frac{\lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3 + S\lambda_3 - S\lambda_2^2}, \\ c &= \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_3}, \\ d &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2^2}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3 + S\lambda_3 - S\lambda_2^2)}, \end{aligned} \quad (12.54)$$

$S$  jest liczbą czynników badanych,  $\lambda_4$  jest momentem planu. Momenty planu  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  i  $\lambda_4$  oblicza się ze wzorów:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{(2^S + 2\sqrt{2^S})}{n}, \\ \lambda_3 &= \frac{2^S}{n}, \\ \lambda_4 &= \frac{2^S + 2\alpha^4}{n}, \end{aligned} \quad (12.55)$$

gdzie:

$$n = 2^S + 2S + n_0.$$

Pomiędzy współczynnikami  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  a momentami planu  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  i  $\lambda_4$  zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} a - bk\lambda_2 &= 1, \\ b + (dk - c)\lambda_2 &= 0, \\ b\lambda_2 + [d(k - 1) - c]\lambda_3 + d\lambda_4 &= 0. \end{aligned} \quad (12.56)$$

Po uwzględnieniu zależności (12.53) wzór (12.52) przyjmuje postać:

$$s^2(\hat{Y}) = \frac{s^2(y)}{N} \left[ (c - d) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 + (\lambda_3^{-1} - 2d) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2 + (\lambda_2^{-1} - 2b) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + a \right] \quad (12.57)$$

gdzie  $N=nr$  jest ogólną liczbą doświadczeń.

Jeżeli plan drugiego rzędu jest planem rotabilnym, to wariancja wartości obliczanych na podstawie modelu powinna zależeć tylko od promienia kuli  $\rho$ . Zależność wariancji zapowiadanej wartości funkcji od promienia kuli określa równanie:

$$s^2(\hat{Y}) = A + B\rho^2 + C\rho^4, \quad (12.58)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2, \\ \rho^4 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2. \end{aligned} \quad (12.59)$$

Równanie postaci (12.57) można otrzymać z równań (12.54) lub (12.56), jeżeli współczynniki przy sumach  $\sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4$  i  $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2$  spełniają warunki:

$$\begin{aligned} 2s^2(k_{ii}) &= s^2(k_{ij}) + 2c\hat{v}(k_0 k_{ii}), \\ 2(c - d) &= \lambda_3^{-1} - 2d, \end{aligned} \quad (12.60)$$

skąd:

$$2c = \lambda_3^{-1}. \quad (12.61)$$

Podstawiając zależność (12.61) do wzoru (12.54)<sub>3</sub> otrzymuje się następujący warunek rotatabilności, dotyczący momentów planu:

$$\lambda_4 = 3\lambda_3, \quad (12.62)$$

zaś stałe we wzorach (12.54) przy warunku (12.62) wynoszą:

$$\begin{aligned} a &= \frac{(S+2)\lambda_2^2}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2}, \\ b &= \frac{\lambda_2}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2}, \\ c &= \frac{1}{2\lambda_3}, \\ d &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2^2}{2\lambda_3[(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2]}. \end{aligned} \quad (12.63)$$

Wykorzystując równanie (12.57) można otrzymać z równań (12.54) i (12.56) równania, które są słuszne tylko dla planu rotatabilnego:

$$\begin{aligned} s^2(\hat{Y}) &= s^2(k_0) + [s^2(k_i) + 2c\hat{v}(k_0 k_{ii})] \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + \\ &+ s^2(k_{ii}) \left[ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2 + \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 \right], \end{aligned} \quad (12.64)$$

lub

$$s^2(\hat{Y}) = \frac{s^2(y)}{n} \left\{ (c-d) \left[ \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2 \right] + (\lambda_2^{-1} - 2b) \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + a \right\}. \quad (12.65)$$

Wariancję w próbce  $s^2(y)$ , związaną z błędem doświadczenia, można obliczyć dwoma sposobami na podstawie wyników powtórnych obserwacji w różnych punktach planu.

Pierwszy sposób polega na uogólnieniu wariancji, odpowiadających poszczególnym punktom planu:

$$s^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^n (r_i - 1)}, \quad (12.66)$$

gdzie  $r_i$  oznacza liczbę powtórzeń w  $i$  tym punkcie planu,  $s_i^2$  jest  $i$ -tą wariancją wyników eksperymentu.

Drugi sposób polega na wyliczeniu wariancji w próbce  $s^2(y)$  za pomocą sumy kwadratów odchyłeń, związanej z „czystym błędem”:

$$s^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n(r_i - 1)}. \quad (12.67)$$

Dla analizowanych danych otrzymuje się:

a) wartość ramienia gwiazdowego:

$$\alpha = \sqrt[4]{2^S} = \sqrt[4]{2^4} = 2,$$

b) wartości momentów  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  i  $\lambda_4$ :

$$\begin{aligned} n &= 2^S + 2S + n_0 = 2^4 + 2 \cdot 4 + 7 = 31, \\ \lambda_2 &= \frac{2^S + 2\sqrt{2^S}}{n} = \frac{2^4 + 2\sqrt{2^4}}{31} = 0,774193548 \cong 0,7742, \\ \lambda_3 &= \frac{2^S}{n} = \frac{2^4}{31} = 0,516129032 \cong 0,5161, \\ \lambda_4 &= \frac{2^S + 2\alpha^4}{n} = \frac{2^4 + 2 \cdot 2^4}{31} = 1,548387097 \cong 1,5484, \end{aligned} \quad (12.68)$$

czyli:  $n\lambda_2 = 24$ ,  $n\lambda_3 = 16$ , i  $n\lambda_4 = 48$ , zaś  $\lambda_4 = 3\lambda_3$ .

c) wartości stałych a, b, c i d:

$$\begin{aligned} a &= \frac{(S+2)\lambda_3}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2} = \frac{6 \cdot 0,5161}{6 \cdot 0,5161 - 4 \cdot (0,7742)^2} = \frac{3,0966}{0,6991} = 4,429, \\ b &= \frac{\lambda_2}{(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2} = \frac{0,7742}{6 \cdot 0,5161 - 4 \cdot (0,7742)^2} = \frac{0,7742}{0,6991} = 1,1074, \end{aligned}$$



$$c = \frac{1}{2\lambda_3} = \frac{1}{2 \cdot 0,5161} = \frac{1}{1,0322} = 0,9688,$$

$$d = \frac{\lambda_3 - \lambda_2^2}{2\lambda_3[(S+2)\lambda_3 - S\lambda_2^2]} = \frac{0,5161 - (0,7742)^2}{2 \cdot 0,5161 \cdot [6 \cdot 0,5161 - 4 \cdot (0,7742)^2]} = \quad (12.69)$$

$$= -\frac{0,0833}{0,7216} = -0,1154,$$

d) wartości współczynników w równaniu (12.65):

$$c - d = 0,969 - (-0,115) = 1,084,$$

$$2(c - d) = 2[0,969 - (-0,115)] = 2,168, \quad (12.70)$$

$$\lambda_2^{-1} - 2b = \frac{1}{0,7742} - 2 \cdot 1,107 = -0,9223,$$

e) wariancja  $s^2(y)$  charakteryzująca błąd doświadczenia według wzoru (12.66) dla  $r_i = r = 5$ :

$$s^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^n (r_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{31} = \frac{0,00454}{31} = 0,0001465, \quad (12.71)$$

f) wartość krytyczna rozkładu t-Studenta dla poziomu istotności  $\alpha=0,05$  i stopni swobody  $f=n-m=31-15=16$  odczytana z tablicy 15.4 wynosi:

$$t_{kr}(0,05;16)=2,1199, \quad (12.72)$$

g) przedział ufności funkcji regresji według wzoru (12.50), wobec zależności (12.65) i (12.69)÷(12.72), ma następującą postać zakodowaną:

$$\hat{Y} \pm 0,0046 \sqrt{1,084 \sum_{i=1}^4 \bar{x}_i^4 + 2,168 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 - 0,922 \sum_{i=1}^4 \bar{x}_i^2 + 4,429}. \quad (12.73)$$

Zatem poszukiwany model matematyczny opisujący średnie odchylenie profilu chropowatości od linii średniej w funkcji parametrów technologicznych procesu nagniatania z prądem ma ostatecznie następującą postać zakodowaną:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_a = & 0,221483 - 0,144435\bar{x}_1 + 0,108659\bar{x}_2 - 0,007654\bar{x}_3 + \\
& - 0,049088\bar{x}_4 - 0,064375\bar{x}_1\bar{x}_2 + 0,040500\bar{x}_1\bar{x}_3 + 0,128875\bar{x}_1\bar{x}_4 + \\
& - 0,063500\bar{x}_2\bar{x}_3 - 0,047125\bar{x}_2\bar{x}_4 + 0,055500\bar{x}_3\bar{x}_4 + 0,124244\bar{x}_1^2 + \\
& + 0,033849\bar{x}_2^2 - 0,002584\bar{x}_3^2 - 0,005213\bar{x}_4^2 + \\
& \pm 0,0046 \sqrt{1,084 \sum_{i=1}^4 \bar{x}_i^4 + 2,168 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 - 0,922 \sum_{i=1}^4 \bar{x}_i^2 + 4,429},
\end{aligned} \quad (12.74)$$

lub odkodowaną:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_a = & 22,88038994 - 0,00217189 \bar{F}_3 + 4,30898261 \bar{p}_n - 0,27841418 \bar{v}_n + \\
& - 0,00462633 \bar{I} - 0,00070749 \bar{F}_3 \bar{p}_n + 0,00020030 \bar{F}_3 \bar{v}_n + \\
& + 0,00000255 \bar{F}_3 \bar{I} - 1,56789147 \bar{p}_n \bar{v}_n - 0,00465436 \bar{p}_n \bar{I} + \\
& + 0,00246665 \bar{v}_n \bar{I} + 0,00000027 (\bar{F}_3)^2 + 1,85730924 (\bar{p}_n)^2 + \\
& - 0,002870821 (\bar{v}_n)^2 - 0,00000093 (\bar{I})^2 + \\
& \pm 0,0046 \sqrt{1,084 \left[ \left( \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} \right)^4 + \left( \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} \right)^4 + \left( \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,30} \right)^4 + \left( \frac{\bar{I} - 450}{75} \right)^4 \right] +} \\
& + 2,168 \left[ \left( \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} \right)^2 \left( \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} \right)^2 + \left( \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} \right)^2 \left( \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,30} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} \right)^2 \left( \frac{\bar{I} - 450}{75} \right)^2 + \left( \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} \right)^2 \left( \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,30} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} \right)^2 \left( \frac{\bar{I} - 450}{75} \right)^2 + \left( \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,30} \right)^2 \left( \frac{\bar{I} - 450}{75} \right)^2 \right] + \\
& - 0,922 \left[ \left( \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} \right)^2 + \left( \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} \right)^2 + \left( \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,30} \right)^2 + \left( \frac{\bar{I} - 450}{75} \right)^2 \right] + 4,429.
\end{aligned} \quad (12.75)$$

Funkcje (12.74) i (12.75) stanowią model matematyczny identyfikujący proces nagniatania z prądem w określonych warunkach jego realizacji, przy poziomie istotności  $\alpha=0,05$ . Z punktu widzenia statystyki oznacza to, że dla zadanych wartości parametrów technologicznych, wynikających z przedziału ich zmienności, na 100 wyprodukowanych części, 95 będzie miało ukształtowaną

powierzchnię o takiej strukturze geometrycznej, której parametr  $R_a$  będzie należał do przedziału zdeterminowanego funkcjami (12.74) lub (12.75). Funkcje te mające postać wielomianu drugiego stopnia, mogą być wykorzystane do określenia ekstremum (por. rozdz. 13). Z postaci tych funkcji wynika również, że błąd rośnie w miarę oddalania się od centrum programu. Wynika to z zastosowanego w badaniach programu uniform-rotalnego (por. pkt. 10.5.3.2), cechującego się kulistym rozkładem informacji.

# 13

## OPTYMALIZACJA OBIEKTU NA PODSTAWIE MODELU MATEMATYCZNEGO

---

### 13.1. Wprowadzenie

Badając obiekt często znajdujemy się w sytuacji wyznaczenia jego stanu optymalnego lub polioptymalnego. Typowy przypadek polioptymalizacji polega na zdeterminowaniu wartości czynników wejściowych (zmiennie sterowalne) ze względu na określone kryteria polioptymalizacji, przy zadanych warunkach ograniczających. Dla tych celów niezbędna jest między innymi znajomość modelu matematycznego obiektów badań. W pewnych sytuacjach, wygodnie jest dla tego celu wykorzystać model empiryczny. Wyznaczenie stanu optymalnego lub polioptymalnego dla takiego przypadku jest celem niniejszego rozdziału. Problemy te zostaną omówione na przykładzie procesu powierzchniowego nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem, opisanego w rozdziale 12.

W celu otrzymania wyrobu o wymaganej jakości technologicznej należy dobrać odpowiedni stan przedmiotu po obróbce poprzedzającej i warunki realizacji procesu nagniatania. Kształtowanie nagniataniem wyrobu o określonej jakości technologicznej jest bardzo złożone. Wynika to między innymi z następujących przesłanek [25]:

1. Czynniki bezpośrednio wpływającymi na jakość wyrobu są procesy fizyczne występujące w obszarach kontaktu elementu nagniatającego z przedmiotem i w strefach odkształceń plastycznych. To dopiero przebieg tych procesów uzależniony jest od stanu przedmiotu po obróbce poprzedzającej i od warunków realizacji procesu nagniatania.
2. Wielkości charakteryzujące poszczególne procesy takie jak współczynnik tarcia, współczynnik przewodności cieplnej, ciepło właściwe, elektryczna oporność właściwa, elektryczna oporność właściwa, elektryczna oporność kontaktowa, naprężenia uplastyczniające, itp., są zależne od temperatury.
3. Zjawiska zachodzące w strefach odkształceń materiału oddziałują na zjawiska w obszarach kontaktu. Te z kolei - na niektóre warunki procesu nagniatania (wtórne oddziaływania skutków na przyczyny).
4. Jednocześnie występuje kilka współdziałających ze sobą procesów, np. pól temperatur i naprężeń.

5. Pomiar parametrów procesów decydujących o jakości technologicznej wyrobu takich jak: pole temperatury, pole naprężeń, dyfuzja, przemiany strukturalne, itp., w trakcie nagniatania jest przy obecnym poziomie techniki pomiarowej niemożliwy. O ich przebiegu można jedynie wnioskować na podstawie właściwości wyrobu po procesie nagniatania.

Efektom nagniatania jest zmniejszenie chropowatości i zwiększenie nośności powierzchni, przy jednoczesnym utwardzeniu warstwy wierzchniej obrabianego przedmiotu oraz kształtowanie w niej naprężeń ściskających. Jednoczesne występowanie tych efektów obróbki powoduje, że elementy nagniatane mają lepsze właściwości użytkowe niż elementy obrabiane w sposób konwencjonalny.

Proces powierzchniowego nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem, z punktu widzenia termodynamiki ciała stałego, jest fizycznie, geometrycznie i cieplnie nieliniowym problemem brzegowo-początkowym.

Nieliniowość fizyczna wynika z nieliniowych równań opisujących właściwości materiału części obrabianej.

Nieliniowość geometryczna powodowana jest zmianą początkowej geometrii części, prowadząca do nieliniowych związków odkształcenie-przemieszczenie.

Nieliniowość cieplna wynika z nieliniowych równań różniczkowych opisujących transport ciepła, nieliniowych i ruchomych zewnętrznych i wewnętrznych źródeł ciepła, z nieliniowych i ruchomych warunków brzegowych II i III rodzaju dla temperatury oraz ze zmienności parametrów termofizycznych (zależnych od temperatury).

### 13.2. Model matematyczny procesu nagniatania

Dla celów polioptymalizacji (optymalizacji) nagniatania powierzchniowego z elektrokontaktowym nagrzewaniem niezbędna jest znajomość modelu matematycznego tego procesu.

W zależności od sposobu uzyskania modelu rozróżnia się modele teoretyczne, empiryczne i półempiryczne.

Modele teoretyczne są najbardziej skomplikowane, a wyprowadza się je w oparciu o analizę ilościową wszystkich zjawisk fizycznych towarzyszących procesowi nagniatania. Pomimo ponad czterdziestoletnich badań nad tym procesem obróbki, dotychczas nie udało się opracować dokładnego modelu teoretycznego tego procesu. Trwają natomiast próby opracowania modeli przybliżonych, którymi są sformułowane w przyrostach, dyskretne modele materiałowy i kontaktu, dynamiczne równanie ruchu (uwzględniające wpływ ciepła) i równanie przepływu ciepła (uwzględniające dynamikę procesu). Wykorzystuje się przy tym między innymi rachunek wariacyjny, nieliniową mechanikę ośrod-

ków ciągłych, mechanikę kontaktu, termodynamiczną teorię materiałów i metodę elementów skończonych [21, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

Proces nagniatania powierzchniowego traktuje się jako stacjonarny, wieloparametrowy i nieliniowy obiekt sterowania. Ogólną postacią matematyczną tego obiektu jest następująca zależność funkcyjna:

$$F(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}, \mathbf{h}, \bar{\mathbf{y}}) = 0, \quad (13.1)$$

gdzie  $\mathbf{b} = \{b_0, \dots, b_K\}$  jest zbiorem nieznanymi współczynników (stałe) w modelu matematycznym,  $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_S\}$  jest zbiorem czynników badanych (zmiennych sterowalnych),  $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_C\}$  jest zbiorem czynników stałych,  $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_H\}$  jest zbiorem czynników zakłócających,  $\bar{\mathbf{y}} = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_Z\}$  jest zbiorem czynników wynikowych.

Zbiór  $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_S\}$  zawiera czynniki badane (zmiennie sterowalne), które są od siebie niezależne. Czynniki te w istotny sposób wpływają na czynniki wyjściowe  $\mathbf{y}$ , zaś ich regulacja w trakcie procesu technologicznego nie stanowi problemu. Zbiór tych czynników zależy od odmiany procesu nagniatania (z prądem -  $S=4$  lub bez prądu  $S=3$ ) oraz od sposobu wywierania docisku elementu nagniatanego do przedmiotu. W przypadku nagniatania tocznego z prądem z elastycznym dociskiem elementu nagniatanego, zbiór  $\bar{\mathbf{x}}$  stanowią następujące parametry technologiczne:  $\bar{x}_1 = \bar{F}_3$  - główna siła nagniatania, [N],  $\bar{x}_2 = \bar{p}_n$  - posuw nagniatania [mm/(2 $\pi$ rad)],  $\bar{x}_3 = \bar{v}_n$  - prędkość nagniatania, [m/s],  $\bar{x}_4 = \bar{I}$  - natężenie prądu elektrycznego, [A]. Natomiast w przypadku, gdy docisk elementów nagniatających jest sztywny, wówczas główna siła nagniatania nie jest parametrem technologicznym, lecz wielkością wynikową. Parametrem sterowalnym jest głębokość (wcisk) nagniatania ( $g$ ). Zatem  $\bar{x}_1 = \bar{g}$ , [mm]. Pozostałe parametry zbioru  $\bar{\mathbf{x}}$  nie ulegają zmianie. W przypadku nagniatania bez prądu ( $\bar{x}_4 = \bar{I} = 0$  [A]), a zbiór  $\bar{\mathbf{x}}$  składa się z trzech parametrów.

Zbiór  $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_C\}$  czynników stałych, stanowiących tzw. niezmiennie warunki badań, ustala się na pewnych wybranych poziomach. W zbiorze tym rozróżnia się następujące podzbiory (por. pkt. 12.1):

- a) podzbiór parametrów związanych z warunkami obróbki: parametry związane z elementem nagniatającym, parametry związane ze stanowiskiem obróbkowym, początkowe ustawienie elementu nagniatanego, rodzaj czynnika chłodzącego i jego parametry, liczba elementów nagniatających, napięcie prądu roboczego,
- b) podzbiór parametrów związanych z przedmiotem obrabianym,
- c) podzbiór parametrów towarzyszących procesowi obróbki.



Zbiór  $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_H\}$  czynników zakłócających, które mogą być mierzalne, lecz niesterowalne lub niemierzalne i niesterowalne, stanowią: niejednorodność materiału przedmiotu, losowe fluktuacje nastawionych parametrów obróbki, losowy charakter chropowatości powierzchni, niekontrolowane zużycie narzędzia, itp.

Zbiorem  $\bar{\mathbf{y}} = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_Z\}$  czynników wynikowych może być zbiór wielkości określających jakość technologiczną lub użytkową wyrobu. Na jakość technologiczną wyrobu składa się podzbiór parametrów związanych ze stanem warstwy wierzchniej i podzbiór parametrów związanych z dokładnością wymiarowo-kształtową.

Zbiór parametrów określających właściwości użytkowe warstwy wierzchniej obejmuje te parametry, które charakteryzują odporność warstwy wierzchniej na działanie określonych czynników wymuszających i może obejmować: wytrzymałość zmęczeniową objętościową i powierzchniową, współczynnik tarcia, odporność na zacieranie oraz odporność na zużycie ścierne i korozyjne.

Przy założeniu, że wpływ czynników zakłócających na proces jest nieistotny ( $\mathbf{h} \cong \text{const.}$ ), wobec  $\mathbf{c} = \text{const.}$ , model (13.1) można uprościć do postaci:

$$F(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0, \quad \text{przy } \mathbf{c} = \text{const.} \text{ i } \mathbf{h} \cong \text{const.}, \quad (13.2)$$

która jest zależnością statystyczną (korelacyjną).

W celu określenia jawnej postaci funkcji (13.2) należy zrealizować algorytm opisany w rozdziale 12, a w szczególności:

- przyjąć klasę modelu matematycznego,
- wykonać eksperyment zgodnie z opracowanym planem,
- przeprowadzić analizę statystyczną wyników eksperymentu: eliminacja błędów grubych, analiza jednorodności wariancji w poszczególnych punktach badań),
- dokonać identyfikacji i analizy otrzymanego modelu matematycznego (obliczenie współczynników, badanie ich istotności, badanie stopnia dopasowania funkcji do obiektu, badanie adekwatności modelu).

Jawną postacią modelu matematycznego (13.2) może być wielomian, funkcja wykładnicza lub potęgowa lub też odpowiednia suma tych modeli. Zarówno funkcję wykładniczą jak i potęgową poprzez logarytmowanie oraz po uzupełnieniu interakcji, można sprowadzić do wielomianu o postaci:

$$\hat{\bar{Y}} = b_0 + \sum_{i=1}^K b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^K b_{ii} \bar{x}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \quad (13.3)$$



lub w zapisie macierzowym:

$$\{\hat{y}\} = [\bar{x}] \{b\}. \quad (13.4)$$

Po unormowaniu zmiennych wejściowych, zgodnie ze wzorem:

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta \bar{x}_i}, \quad (13.5)$$

gdzie:

$\bar{\bar{x}}_i$  - zakodowana wartość czynnika badanego,

$\bar{x}_i$  - wartość czynnika w jego naturalnych jednostkach,

$\bar{x}_{i0}$  - wartość czynnika odpowiadająca podstawowemu centralnemu poziomowi w jednostkach naturalnych,

$\Delta \bar{x}_i$  - wartość bezwzględna kroku wzdłuż osi  $x_i$  w skali naturalnej,

równanie (13.3) przyjmuje wówczas postać:

$$\hat{y} = k_0 + \sum_{i=1}^K k_i \bar{\bar{x}}_i + \sum_{i=1}^K k_{ii} \bar{\bar{x}}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^K k_{ij} \bar{\bar{x}}_i \bar{\bar{x}}_j, \quad (13.6)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\{\hat{y}\} = [\bar{\bar{x}}] \{k\}. \quad (13.7)$$

Optymalny zbiór współczynników  $k$  tych modeli wyznacza się minimalizując funkcję  $S_R$ :

$$S_R \rightarrow \min! \quad (13.8)$$

która w ogólnym przypadku ma postać:

$$S_R = \sum_{i=1}^N W_i \left[ \bar{y}_i - \hat{y}_i(t_{i1}, \dots, t_{iS}; k_0, \dots, k_K) \right]^m, \quad S = 1, 2, 3, 4, \dots, \quad (13.9)$$

gdzie  $W_i$  jest funkcją wagi,  $\bar{y}_i$  są średnimi wartościami wyjść obiektu (wartości otrzymane z badań eksperymentalnych, zrealizowanych zgodnie z odpowiednim planem),  $\hat{y}_i$  są wartościami wyjść modelu matematycznego. Dla większości przypadków nagniatania postuluje się, że  $W_i=1$ ,  $m=2$ . Wówczas problem optymalizacji

sprowadza się do minimalizacji sumy kwadratów błędów, zaś wektor nieznanych współczynników  $\mathbf{k}$  określa równanie:

$$\{\mathbf{k}\} = \left( [\mathbf{T}]^T [\mathbf{T}] \right)^{-1} [\mathbf{T}]^T \{\bar{\mathbf{y}}\}, \quad (13.10)$$

gdzie  $[\mathbf{T}]$  jest macierzą planu eksperymentu,  $([\mathbf{T}]^T [\mathbf{T}])^{-1}$  jest macierzą kowariancji,  $\{\bar{\mathbf{y}}\}$  jest wektorem kolumnowym średnich wyników pomiarów w poszczególnych punktach planu eksperymentu  $[\mathbf{T}]$ .

### 13.3. Optymalizacja procesu nagniatania

Po określeniu postaci modelu matematycznego (F) procesu nagniatania oraz znając funkcję-kryterium (K) i warunki ograniczające (W) można przystąpić do optymalizacyjnych badań analitycznych, tj. analitycznego określenia optymalnego stanu obiektu badań. Spośród dużej liczby znanych obecnie metod optymalizacji do powyższego celu wystarczy stosować jedną z następujących metod:

1. Rachunek różniczkowy określania ekstremum.
2. Metoda mnożników Lagrange'a.
3. Programowanie matematyczne, a zwłaszcza:
  - a) metoda systematycznego poszukiwania,
  - b) metoda poszukiwania losowego tzw. metoda Monte Carlo,
  - c) metoda gradientowa.
4. Programowanie nieliniowe.
5. Teoria gier.
6. Metoda graficzna.

O wyborze odpowiedniej metody decyduje postać modelu matematycznego (F), rodzaj funkcji kryterium (K) oraz postać warunków ograniczających (W).

Rachunek różniczkowy określania ekstremum można stosować wówczas, gdy dla przyjętych K i W funkcja F posiada wypukłość (wklęsłość). Zdarza się jednak, że badana funkcja osiąga wartości ekstremalne na krańcach przedziału a ekstremum globalne leży poza przedziałem lub też w badanym przedziale istnieje jedynie punkt siodłowy, co można stwierdzić badając warunek wystarczający istnienia ekstremum. Wówczas stosowanie rachunku różniczkowego jest nieprzydatne. Natomiast stosować można jedną z metod programowania matematycznego np. metodę systematycznego poszukiwania lub metodę graficzną.

Metodę mnożników Lagrange'a wykorzystuje się do analitycznego określenia ekstremum funkcji zastępczej utworzonej na bazie kilku funkcji kryterium lub do

określenia ekstremum warunkowego funkcji zastępczej utworzonej z funkcji-kryterium i warunków ograniczających.

W dalszej części podane zostaną dwa przykłady zastosowania powyższych metod do rozwiązywania szczególnych przypadków optymalizacji procesu nagniatania powierzchniowego.

### 13.3.1. Przykład 1

Obiektem badań optymalizacyjnych jest nagniatanie toczne z prądem z elastycznym dociskiem krążka do przedmiotu [19]. Przedmiotem badań jest część walcowa, która po obróbce nagniataniem powinna posiadać wymiar  $\phi 30h7$ . Część ta w czasie eksploatacji będzie obciążana zmęczeniowo. W celu zapewnienia odpowiedniej wytrzymałości zmęczeniowej należy w warstwie wierzchniej części wytworzyć ściskające naprężenia wynikowe o maksymalnej wartości i jednocześnie uzyskać powierzchnię o minimalnej chropowatości, bez miejscowych karbów będących inicjatorami złomów zmęczeniowych. Mamy tutaj zatem do czynienia z optymalizacją dwukryterialną. Warunkami ograniczającymi są więzy słabe – przedziały zmienności czynników badanych. Zgodnie z istniejącymi już podstawami teoretycznymi procesu nagniatania [19-33] wymagane wyżej właściwości uzyskuje się jednocześnie, gdy zmiana średnicy  $\Delta d$  wałka w procesie nagniatania będzie maksymalna. Zatem rozważany problem można sprowadzić do optymalizacji jednokryterialnej.

Wobec nieznaności modelu matematycznego badanego obiektu, przyjęto ogólną koncepcję modelu obiektu badań w postaci:

$$\hat{\Delta d} = F(\bar{F}_3, \bar{p}_n, \bar{v}_n, \bar{I}). \quad (13.11)$$

Nagniatanie prowadzone jest w następujących stałych warunkach:

- obrabiarka: tokarka typ TSS-150,
- przyrząd nagniatający: trójkrażkowy,
- ciecz chłodząco-smarująca: olej maszynowy 8+10% ACP o natężeniu przepływu  $q_c=25 \text{ dm}^3/\text{min}$ ,
- geometria krążka i jego materiał: średnica  $D=54 \text{ mm}$ , szerokość części roboczej  $h=3 \text{ mm}$ , promień zaokrąglenia zarysu  $R=0,3 \text{ mm}$ , kąt pochyleńnia tworzącej  $\alpha_2=1^{\circ}15'$ , stal SW18 o twardości 62HRC,
- materiał obrabiany: stal 55 normalizowana, zdeterminowany profil chropowatości o średnim odchyleniu profilu od linii średniej równym  $R_{at}=2,6 \mu\text{m}$ ,
- ilość przejść:  $i=1$ .

W badaniach rozpoznawczych ustalono następujące przedziały zmienności czynników badanych, stanowiących więzy słabe:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 = \bar{F}_3 &: 193 \div 2889 && [\text{N}], \\ \bar{x}_2 = \bar{p}_n &: 0,05 \div 0,56 && [\text{mm}/2\pi\text{rad}], \\ \bar{x}_3 = \bar{v}_n &: 0,35 \div 1,55 && [\text{m/s}], \\ \bar{x}_4 = \bar{I} &: 300 \div 600 && [\text{A}].\end{aligned}$$

Po zakodowaniu powyższych czynników otrzymano:

$$\check{\check{x}}_1 = \frac{\bar{x}_1 - 1541}{674}, \quad \check{\check{x}}_2 = \frac{\bar{x}_2 - 0,3}{0,13}, \quad \check{\check{x}}_3 = \frac{\bar{x}_3 - 0,95}{0,3}, \quad \check{\check{x}}_4 = \frac{\bar{x}_4 - 450}{75}. \quad (13.12)$$

Badania właściwe przeprowadzono zgodnie z macierzą planu rotalnego, dla  $S=4$ . Stosowano pięciokrotną powtarzalność badań dla każdego punktu planu ( $r=5$ ). Otrzymane wyniki pomiarów poddano analizie zgodnie z metodyką przedstawioną w rozdziale 12. Ostatecznie otrzymano następującą postać funkcji regresji oraz jej przedział ufności dla poziomu istotności  $\alpha=0,05$  i liczby stopni swobody  $n-m=16$ :

$$\begin{aligned}\hat{\Delta d} &= 27,96 - 1,37\check{\check{x}}_1 - 2,14\check{\check{x}}_2 + 0,79\check{\check{x}}_4 - 1,46\check{\check{x}}_1\check{\check{x}}_2 - 1,76\check{\check{x}}_1^2 - 1,22\check{\check{x}}_2^2 + \\ &- 1,77\check{\check{x}}_4^2 \pm 0,2846 \sqrt{1,084 \sum_{i=1}^4 \check{\check{x}}_i^4 + 2,168 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \check{\check{x}}_i^2 \check{\check{x}}_j^2 - 0,9223 \sum_{i=1}^4 \check{\check{x}}_i^2} + 4,4286, \quad (13.13) \\ -2 \leq \check{\check{x}}_i &\leq +2, \quad i=1,2,3,4\end{aligned}$$

W powyższej funkcji uwzględniono jedynie współczynniki istotne. Z postaci tej funkcji wynika, że na poziomie istotności  $\alpha=0,05$  wpływ prędkości nagniatania, w badanym przedziale zmienności, na czynnik wynikowy jest nieistotny. Zatem można ją w tym przypadku traktować jako jeden z czynników stałych.

Wartości poszczególnych testów statystycznych i ich wartości krytyczne są następujące:

a) test Cochran'a:

$$G=0,1316; G_{kr}=0,1348;$$

b) test t-Studenta:

$$t_0=48,79; t_1=4,44; t_2=6,91; t_3=0,56; t_4=2,554; t_{12}=3,8578; t_{13}=0,89; \\ t_{14}=0,099; t_{23}=0,033; t_{24}=2,2422; t_{34}=0,231; t_{11}=6,231; t_{22}=4,311; \\ t_{33}=0,919; t_{44}=6,231; t_{kr(0,05;6)}=2,4469;$$

c) test F-Snedecora:

$$F=5,46 \text{ dla } R=0,909; F_{kr(0,05;14;16)}=2,37;$$

d) test F-Fischera

$$F=3,263; F_{kr(0,05;6;8)}=3,58.$$

Zadanie optymalizacji zapiszemy następująco:

$$\hat{\Delta d} \rightarrow \max!, \quad (13.14)$$

Przy warunkach ograniczających:

$$-2 \leq \bar{\bar{x}}_i \leq +2, \quad i = 1, 2, 4. \quad (13.15)$$

W celu określenia stanu optymalnego badanego obiektu zastosowano metodę rachunku różniczkowego. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum otrzymano następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\Delta d}}{\partial \bar{\bar{x}}_1} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\Delta d}}{\partial \bar{\bar{x}}_2} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\Delta d}}{\partial \bar{\bar{x}}_4} = 0, \end{cases} \equiv \begin{cases} 1,73 - 1,46\bar{\bar{x}}_2 - 3,52\bar{\bar{x}}_1 = 0, \\ -2,14 - 1,46\bar{\bar{x}}_1 - 2,44\bar{\bar{x}}_2 = 0, \\ 0,79 - 3,54\bar{\bar{x}}_4 = 0. \end{cases} \quad (13.16)$$

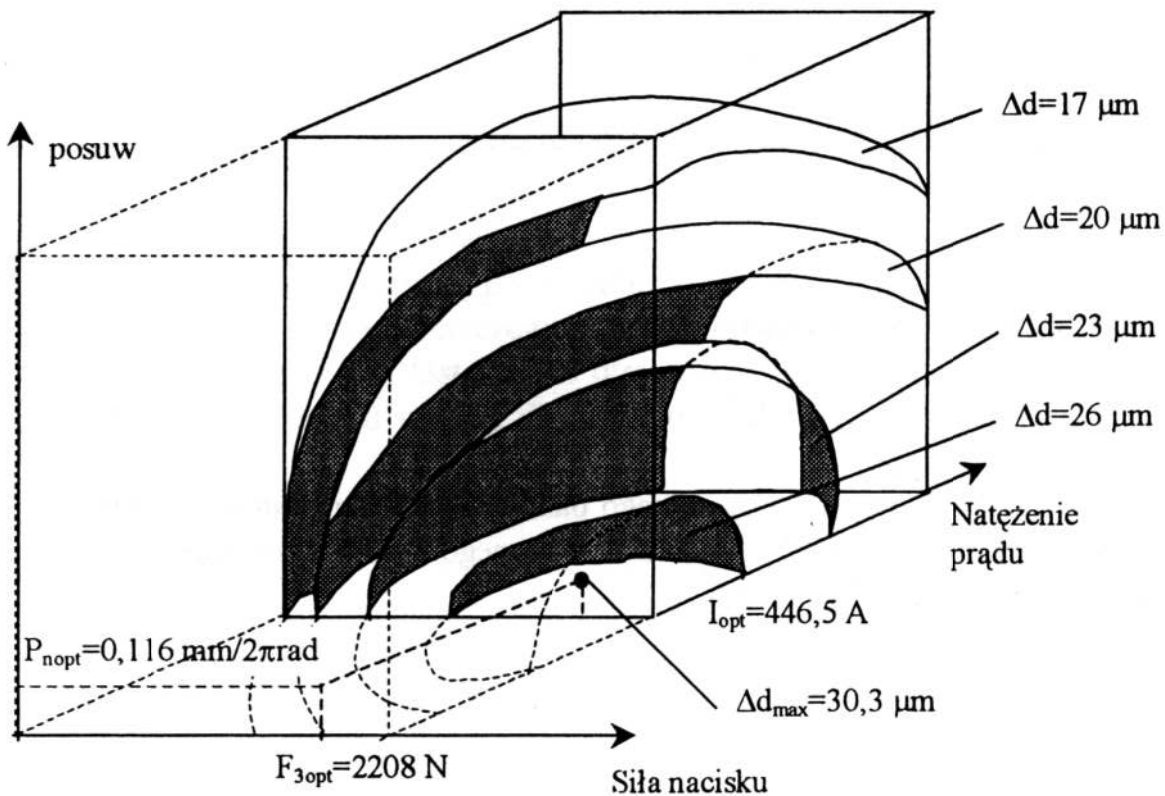
Po rozwiązaniu układu równań (13.16) i odkodowaniu zmiennych w oparciu o związek (13.5) otrzymano następujące wartości parametrów technologicznych:

$$\bar{F}_3 = 2208 \text{ N}, \quad \bar{p}_n = 0,116 \text{ mm} / 2\pi \text{ rad}, \quad \bar{I} = 466,5 \text{ A}. \quad (13.17)$$

Parametry te zapewniają maksymalną zmianę średnicy wałka w operacji nagniatania równą  $\hat{\Delta d}_{\max} = 30,3 \mu\text{m}$ , a zatem i otrzymanie pożądanych właściwości

warstwy wierzchniej. Wartość  $\hat{\Delta d}_{\max}$  określa jednocześnie naddatek technologiczny pod nagniatanie i średnicę wałka po obróbce poprzedzającej, która powinna wynosić  $\phi 30,03h7$  (odchyłki: górna=0; dolna=-0,025) mm.

Stałowartościowe zależności zmian średnicy  $\hat{\Delta d}$  oraz położenie punktu optymalnego, opracowane na podstawie modelu (13.13) przedstawia wykres przestrzenny (rys. 13.1).



Rys. 13.1. Stałowartościowe wykresy zmian średnicy  $\hat{\Delta d}$  w zależności od parametrów technologicznych nagniatania:  $\bar{F}_3, \bar{p}_n, \bar{I}$  [26].

### 13.3.2. Przykład 2

Obiektem badań optymalizacyjnych jest nagniatanie toczne z prądem z elastycznym dociskiem krążka [19, 25]. Przedmiotem badań są rury cienkościenne ze szwem o wymiarach  $\phi 20 \times 1,2$ . Efektem obróbki ma być chropowatość powierzchni, której wysokość powinna wynosić  $R_z \in [0,5; 1,6]$  mm. Ze względu na koszty obróbki należy dążyć do maksymalizacji wydajności  $W$ . Mała sztywność postaciowa rury powoduje, że wartość głównej siły nagniatania musi być mniejsza od siły granicznej  $F_{gr}$ , przy której następuje zniszczenie (zgniot) rury. War-



tość tej siły jest funkcją posuwu, prędkości nagniatania i natężenia prądu elektrycznego. Model matematyczny procesu nie jest znany. Postępując analogicznie jak w przykładzie pierwszym otrzymano następujące równanie regresji:

$$\begin{aligned} \hat{R}_z = & 1,607 - 0,367\bar{\bar{x}}_1 + 0,166\bar{\bar{x}}_3 - 0,154\bar{\bar{x}}_4 - 0,069\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_2 + \\ & - 0,052\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_3 + 0,196\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_4 - 0,076\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_4 + 0,007\bar{\bar{x}}_3\bar{\bar{x}}_4 + \\ & - 0,026\bar{\bar{x}}_1^2 + 0,038\bar{\bar{x}}_2^2 - 0,181\bar{\bar{x}}_3^2 - 0,152\bar{\bar{x}}_4^2 + \\ & \pm 0,02568 \sqrt{1,084 \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^4 + 2,168 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 \bar{\bar{x}}_j^2 - 0,9223 \sum_{i=1}^4 \bar{\bar{x}}_i^2 + 4,4286}, \\ & - 2 \leq \bar{\bar{x}}_i \leq +2, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Wartości krytyczne testów statystycznych są identyczne jak w przykładzie pierwszym, natomiast wartości testów wynoszą:

a) test Cochra:  $G=0,1298$ ,

b) test t-Studenta:

$$\begin{aligned} t_0=14,247; t_1=6,026; t_2=2,725; t_3=0,225; t_4=2,534; t_{12}=0,929; t_{13}=0,695; \\ t_{14}=2,62; t_{23}=1,01; t_{24}=0,578; t_{34}=0,092; t_{11}=0,46; t_{22}=0,688; t_{33}=3,234; \\ t_{44}=2,732; \end{aligned}$$

c) test F-Snedecora:  $F=2,69$  dla  $R=0,838$ ;

d) test F-Fischera:  $F=8,1$ .

Wydajność procesu nagniatania powierzchni walcowych dla  $i=1$  określa zależność:

$$W = \frac{60p_n v_n}{\pi d}, \quad \text{mm}/2\pi\text{rad}. \quad (13.19)$$

Zależność powyższa, dla zakodowanych wartości zmiennych, ma postać:

$$W = \frac{60(0,1235\bar{\bar{x}}_2 + 0,09\bar{\bar{x}}_3 + 0,039\bar{\bar{x}}_2\bar{\bar{x}}_3 + 0,285)}{\pi d}, \quad \text{mm}/2\pi\text{rad}. \quad (13.20)$$

Zadanie optymalizacji sformułujemy w tym przypadku następująco:

$$W \rightarrow \max! \quad (13.21)$$



przy warunkach ograniczających – więzach słabych:

$$\left. \begin{aligned} -2 \leq \bar{\bar{x}}_i \leq +2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \hat{F}_3 < F_{gr} = f(p_n, v_n, I), \\ 0,5 \leq \hat{R}_z \leq 1,6 \text{ } \mu\text{m}. \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Problem ten można rozwiązać stosując metodę systematycznego poszukiwania lub metodę mnożników Lagrange'a. W tym drugim przypadku konieczne jest uzupełnienie funkcji regresji (13.18) o pozostałe wyrazy, które ze względu na nieistotność współczynników można było pominąć. Zarówno w jednym, jak w drugim przypadku proces obliczeń jest stosunkowo złożony. Dlatego też wygodnie jest postąpić następująco. Maksymalną wydajność nagniatania zgodnie ze wzorem (13.20) uzyskuje się wtedy, gdy zarówno posuw nagniatania, jak i prędkość nagniatania będą maksymalne. Przy ograniczeniach (13.22)<sub>1</sub> mamy:  $\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{x}}_3 = +2$ . Zatem  $W_{\max} = 0,829 \text{ m/min}$ .

Przyjmując wartości  $\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{x}}_3 = +2$  jako stałe, zbiór rozwiązań kompromisowych spełniających ograniczenia (13.22) wyznaczymy stosując metodę graficzną.

Dla  $\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{x}}_3 = +2$  wartość siły krytycznej zależy jedynie od wartości natężenia prądu elektrycznego, który wpływa na wartość temperatury a zatem i na wartość oporu plastycznego materiału rury, zgodnie z zależnością:

$$F_{gr}(\bar{I}) = -0,00008\bar{I}^2 + 0,0485\bar{I} - 6,64 \quad [\text{N}], \quad (13.23)$$

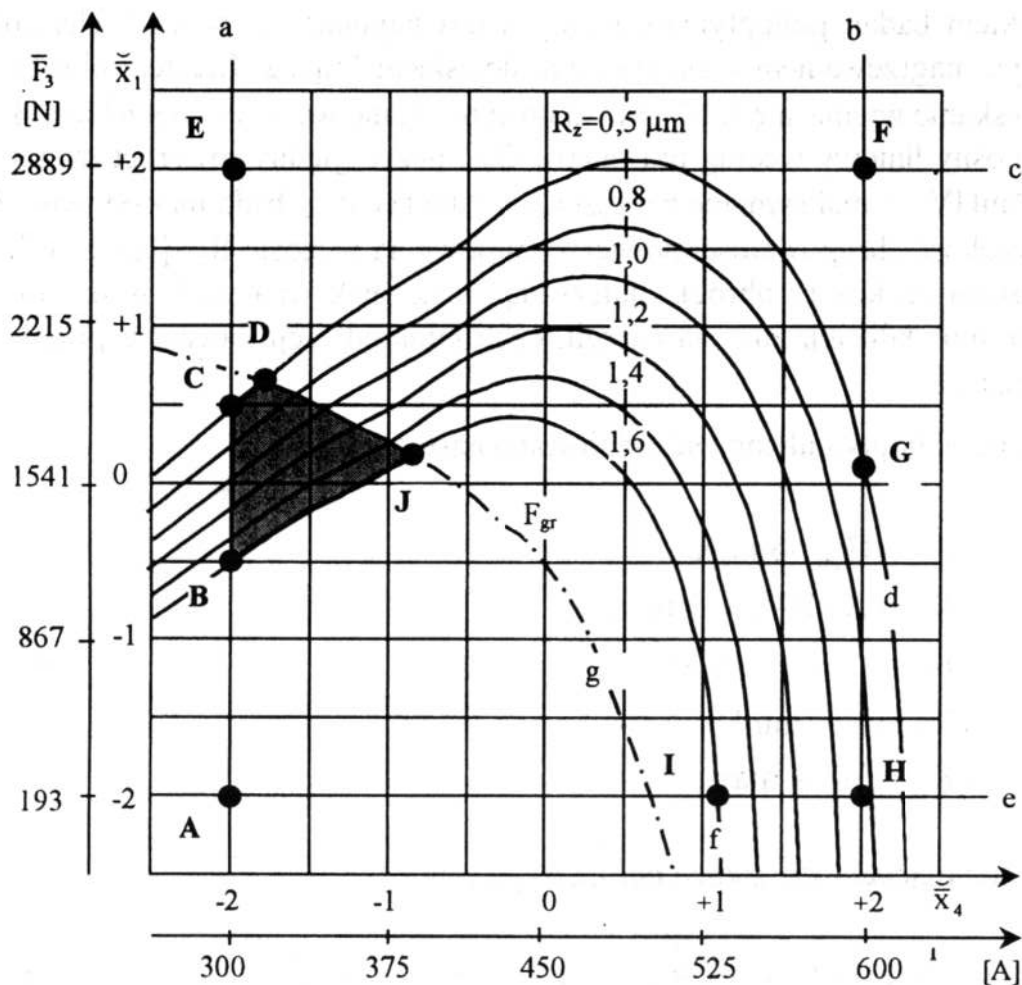
lub po zakodowaniu zmiennych:

$$F_{gr}(\bar{\bar{x}}_4) = -0,45\bar{\bar{x}}_4^2 - 1,76\bar{\bar{x}}_4 - 1 \quad [\text{N}]. \quad (13.24)$$

Dokonując stałowartościowych przekrojów hiperpowierzchni (13.18) otrzymamy szczególną postać równania regresji:

$$\hat{R}_z \Big|_{\substack{\bar{\bar{x}}_2 = +2 \\ \bar{\bar{x}}_3 = +2}} = 1,091 - 0,609\bar{\bar{x}}_1 - 0,226\bar{\bar{x}}_4 + 0,196\bar{\bar{x}}_1\bar{\bar{x}}_4 - 0,026\bar{\bar{x}}_1^2 - 0,152\bar{\bar{x}}_4^2. \quad (13.25)$$

Stałowartościowe wykresy chropowatości, zmieniającej się w interesującym przedziale  $[0,5; 1,6] \mu\text{m}$ , opracowane na podstawie równania (13.25), przedstawiono na rysunku 13.2.



Rys. 13.2. Zbiór kompromisów B-C-D-J (obszar zakreskowany) w obszarze sterowań, a,b,c,d,e,f,g – ograniczenia [26].

Zbiór możliwych rozwiązań kompromisowych przy uwzględnieniu ograniczeń (13.22) i (13.24) wyznacza obszar zakreskowany (stan optymalny obiektu badań).

#### 13.4. Polioptymalizacja procesu nagniatania

W projektowaniu procesu nagniatania typową jest sytuacja, kiedy należy minimalizować (bądź maksymalizować) jednocześnie wiele kryteriów. Najczęściej rezygnuje się wtedy z prób utworzenia zastępczego kryterium optymalizacji. Mamy zatem zbiór kryteriów  $K_i$  ( $i=1,..I$ ) i dla każdego z nich informację o tym, czy ma być ono jak najmniejsze, czy jak największe. Dane są również warunki ograniczające. Polioptymalizacja procesu sprowadza się wówczas do wyznaczenia zbioru rozwiązań polioptymalnych. Wybór odpowiedniego wariantu wymaga decyzji technologa. Zostanie to przedstawione na przykładzie pięciu kryteriów i sześciu warunków ograniczających [26].

Obiektem badań polioptymalizacyjnych jest nagniatanie toczne z elektrokontaktowym nagrzewaniem z elastycznym dociskiem krążka. Efektem obróbki ma być uzyskanie wymiaru  $\phi 22h7$  oraz ukonstytuowanie warstwy wierzchniej, której udział nośny liniowy według parametru  $G_{20}$ , bezwzględny przyrost mezotwardości  $\Delta mHV_{0,5}$  i maksymalne naprężenia ściskające  $\sigma_{max}$  będą maksymalne. Przy tym wysokość chropowatości powierzchni powinna wynosić  $R_z \in [0,3; 1,367] \mu m$ . Ze względu na koszty obróbki należy dążyć do maksymalizacji wydajności  $W$  oraz do minimalizacji zużycia energii, czyli minimalizacji natężenia prądu elektrycznego  $I$ .

Zadanie polioptymalizacji sformułowano następująco:

$$\begin{cases} K_1 = \hat{G}_{20} \rightarrow \max!, \\ K_2 = \Delta \hat{m}HV_{0,5} \rightarrow \max!, \\ K_3 = \hat{\sigma}_{max} \rightarrow \max!, \\ K_4 = \hat{I} \rightarrow \min!, \\ K_5 = W \rightarrow \max!, \end{cases} \quad (13.26)$$

przy następujących warunkach ograniczających:

$$-21 \leq \hat{\Delta d} \leq 0, [\text{mm}], \quad 0,3 \leq \hat{R}_z \leq 1,367, [\mu m], \quad -2 \leq \check{\bar{x}}_i \leq +2, \quad (13.27)$$

gdzie  $\check{\bar{x}}_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) jest zakodowaną wartością zmiennej sterowalnej  $\bar{x}_i$ :

$$\check{\bar{x}}_1 = \frac{\bar{F}_3 - 1541}{674} - \text{wartość kodowa głównej siły nagniatania},$$

$$\check{\bar{x}}_2 = \frac{\bar{p}_n - 0,3}{0,13} - \text{wartość kodowa posuwu nagniatania},$$

$$\check{\bar{x}}_3 = \frac{\bar{v}_n - 0,95}{0,3} - \text{wartość kodowa prędkości nagniatania},$$

$$\check{\bar{x}}_4 = \frac{\bar{I} - 450}{75} - \text{wartość kodowa natężenia prądu elektrycznego}.$$

W wyniku wykorzystania programu PLANEKS-STAT [22] otrzymano następujące postacie funkcji regresji  $\hat{\Delta d}$ ,  $\hat{G}_{20}$ ,  $\Delta \hat{m}HV_{0,5}$ ,  $\hat{\sigma}_{max}$ ,  $\hat{R}_z$ :

$$\hat{\Delta d} = 27,96 - 1,37\check{\bar{x}}_1 - 2,14\check{\bar{x}}_2 + 0,79\check{\bar{x}}_4 - 1,46\check{\bar{x}}_1\check{\bar{x}}_2 - 1,76\check{\bar{x}}_1^2 - 1,22\check{\bar{x}}_2^2 - 1,77\check{\bar{x}}_4^2, \quad (13.28)$$

$$\hat{G}_{20} = 1,924 - 10,269\bar{x}_1 - 0,25\bar{x}_3 - 0,278\bar{x}_4 - 0,252\bar{x}_2\bar{x}_4 + \\ - 0,285\bar{x}_2^2 - 0,41\bar{x}_4^2, \quad (13.29)$$

$$\Delta\hat{m}HV_{0,5} = 54,77 + 2,18\bar{x}_3 + 11,23\bar{x}_4 + 2,25\bar{x}_1\bar{x}_2 - 1,94\bar{x}_1\bar{x}_3 + \\ + 1,95\bar{x}_1\bar{x}_4 - 3,35\bar{x}_2\bar{x}_4 + 5,41\bar{x}_3\bar{x}_4 - 3,94\bar{x}_1^2 - 3,34\bar{x}_2^2 + 1,02\bar{x}_4^2, \quad (13.30)$$

$$\hat{\sigma}_{\max} = -415,6 - 55,6\bar{x}_1 - 23,7\bar{x}_2 - 53,7\bar{x}_3 + 26,5\bar{x}_4 - 46,9\bar{x}_1\bar{x}_2 + \\ + 26,2\bar{x}_1\bar{x}_3 - 24,9\bar{x}_2\bar{x}_3 - 25,5\bar{x}_2\bar{x}_4 + 17,81\bar{x}_3\bar{x}_4, \quad (13.31)$$

$$\hat{R}_z = 1,607 - 0,367\bar{x}_1 + 0,166\bar{x}_3 - 0,154\bar{x}_4 - 0,069\bar{x}_1\bar{x}_2 + \\ - 0,052\bar{x}_1\bar{x}_3 + 0,196\bar{x}_1\bar{x}_4 - 0,076\bar{x}_2\bar{x}_4 + 0,007\bar{x}_3\bar{x}_4 + \\ - 0,026\bar{x}_1^2 + 0,038\bar{x}_2^2 - 0,181\bar{x}_3^2 - 0,152\bar{x}_4^2, \quad (13.32)$$

$$W = \frac{60(0,1235\bar{x}_2 + 0,09\bar{x}_3 + 0,039\bar{x}_2\bar{x}_3 + 0,285)}{\pi d}, \quad \text{mm}/2\pi\text{rad}. \quad (13.33)$$

Maksymalna wydajność nagniatania uzyskuje się wówczas, gdy zarówno posuw nagniatania, jak i prędkość nagniatania będą maksymalne. Przy ograniczeniach (13.27)<sub>3</sub> mamy:  $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = +2$ , czyli  $p_n = 0,56$  mm/obr i  $v_n = 1,55$  m/s. Zatem maksymalna wydajność wynosi  $W_{\max} = 0,829$  m/min. Uwzględniając te wartości w równaniach (13.28)÷(13.33) rozważany problem sprowadza się do następującej optymalizacji czterokryterialnej:

$$K_1 = \hat{G}_{20} = 0,282 - 0,269\bar{x}_1 - 0,41\bar{x}_4 - 0,782\bar{x}_4^2 \rightarrow \max!, \quad (13.34)$$

$$K_2 = \Delta\hat{m}HV_{0,5} = 32,75 + 0,62\bar{x}_1 + 15,35\bar{x}_4 + \\ + 1,95\bar{x}_1\bar{x}_4 - 3,94\bar{x}_1^2 + 1,02\bar{x}_4^2 \rightarrow \max!, \quad (13.35)$$

$$K_3 = \hat{\sigma}_{\max} = -670 - 96,2\bar{x}_1 + 11,1\bar{x}_4 \rightarrow \max!, \quad (13.36)$$

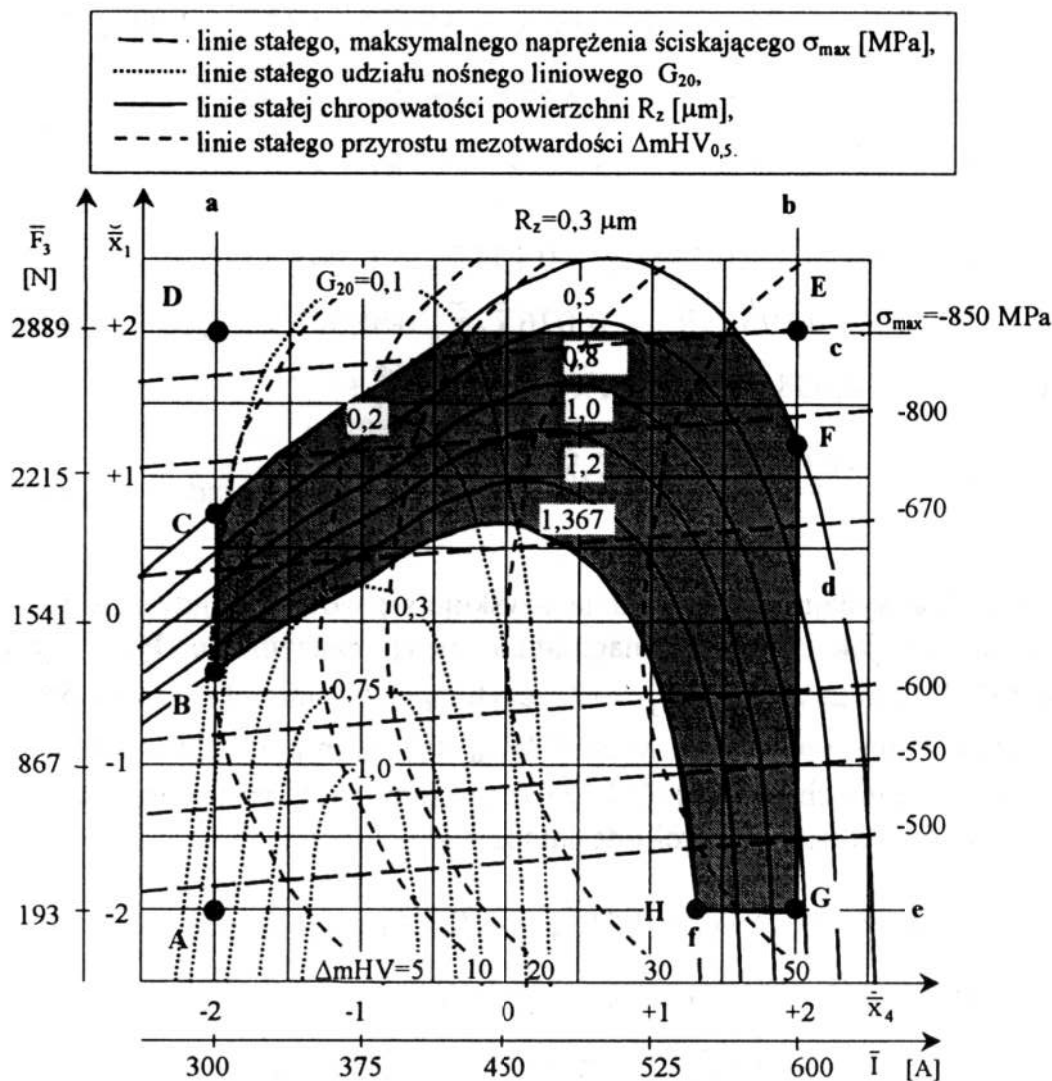
$$K_4 = \bar{I} = \bar{x}_4 \rightarrow \min!, \quad (13.37)$$

przy ograniczeniach:

$$0,3 \leq \hat{R}_z = 1,367 - 0,609\bar{x}_1 - 0,292\bar{x}_4 + 0,196\bar{x}_1\bar{x}_4 + \\ - 0,026\bar{x}_1^2 - 0,152\bar{x}_4^2 \leq 1,367,$$

$$-21 \leq \Delta \hat{d} = 27,96 - 1,55 \bar{x}_1 + 0,79 \bar{x}_4 - 1,76 \bar{x}_1^2 - 1,77 \bar{x}_4^2 \leq 0, \quad (13.38)$$

$$-2 \leq \bar{x}_1 \leq +2, \quad -2 \leq \bar{x}_4 \leq +2.$$



Rys. 13.3. Zbiór wariantów na płaszczyźnie zmiennych sterowalnych siły nacisku krążka  $\bar{F}_3$  i natężenia prądu  $\bar{I}$ , dla stałych wartości posuwu nagniatania  $\bar{p}_n = 0,56 \text{ mm/obr}$  ( $\bar{x}_2 = +2$ ) i prędkości nagniatania  $\bar{v}_n = 1,55 \text{ m/s}$  ( $\bar{x}_3 = +2$ ); a,b,d,e,f - ograniczenia, B-C-F-G-H - zbiór wariantów polioptymalnych [26].

Dla tego przykładu, zbiór wariantów dopuszczalnych w obszarze zmiennych sterowalnych  $\bar{x}_1$  i  $\bar{x}_4$ , wyznaczają linie a,b,c,d,e,f, które są graficzną

reprezentacją ograniczeń nierównościowych (13.38). Natomiast zbiór rozwiązań polioptymalnych wyznacza obszar B-C-F-G-H (rys. 13.3).

### 13.5. Zakończenie

Badając obiekt rzeczywisty, często zachodzi konieczność wyznaczenia stanu optymalnego lub polioptymalnego, przy braku znajomości jego modelu matematycznego. Model ten można wyprowadzić na drodze teoretycznej, w oparciu o pełną analizę zachodzących procesów fizycznych. Ze względu jednak na ich dużą złożoność wymagane jest wówczas prowadzenie bardzo skomplikowanych oraz długotrwałych badań i obliczeń. W uzasadnionych przypadkach, takich jak brak środków finansowych, krótki czas na podjęcie decyzji, wymagana dokładność obliczeń, itp. wygodniej jest posłużyć się przedstawioną w rozdziale 12 metodyką określania postaci modelu matematycznego i opisać badany obiekt układem równań regresji, otrzymanych w wyniku identyfikacji, przy zastosowaniu metody analizy czynnikowej. Niezbędne badania eksperymentalne zaleca się realizować zgodnie z pięciopoziomowymi planami rotacyjnymi, charakteryzującymi się kulistym rozkładem informacji. Pomocnym w tym celu może być program komputerowy np. PLANEKS-STAT [22].

W celu określenia stanu optymalnego i polioptymalnego badanego obiektu (opisanego równaniem regresji), ze względu na przyjęte funkcje-kryteria i warunki ograniczające, wystarczy stosować proste metody optymalizacji. Często tok obliczeń stanu optymalnego lub polioptymalnego można uprościć przez:

- sprowadzenie optymalizacji wielokryterialnej (polioptymalizacji) do optymalizacji jednokryterialnej. Uproszczenie takie jest możliwe jedynie wówczas, gdy w wyniku fizycznej analizy kryteriów stwierdzi się, że kryteria te są kooperatywne,
- odpowiednie uproszczenie postaci modelu matematycznego procesu nagniatania, tj. przez przecięcie hiperpowierzchni odpowiedzi odpowiednio dobranymi płaszczyznami stałymi. Położenie tych płaszczyzn określone jest przyjętymi kryteriami optymalizacji i warunkami ograniczającymi.

Korzystnie jest również przedstawić graficznie zbiór wariantów dopuszczalnych w obszarze zmiennych sterowalnych oraz zbiór rozwiązań optymalnych lub polioptymalnych. Ułatwia się wtedy wybór najlepszego rozwiązania.

Podane w niniejszym rozdziale przykłady optymalizacji i polioptymalizacji procesu nagniatania mogą być z powodzeniem wykorzystane do określenia stanu polioptymalnego lub optymalnego dla innych obiektów badań.



# 14

## KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE BADAŃ INŻYNIERSKICH

---

W niniejszym rozdziale przedstawione zostaną najważniejsze programy komputerowe wspomagające badania inżynierskie, ułatwiające realizację eksperymentów, zgodnie z zasadami teorii planowania badań doświadczalnych, a także statystyczne opracowanie otrzymanych wyników, ich optymalizację lub przedstawianie w postaci równań regresji, wykresów i tablic. Przedstawiono przykład komputerowego wspomaganie badań inżynierskich przy wykorzystaniu programu PLANEKS-STAT.

### 14.1. Program EUREKA

**EUREKA** jest programem służącym do rozwiązywania problemów, które mogą być wyrażone jako układ równań liniowych lub nieliniowych. Program pozwala również na sporządzanie wykresów funkcji, wygenerowania raportu obliczeń oraz rozwiązywanie układu równań i nierówności. Program ten jest wyposażony również w podstawowe funkcje statystyczne.

### 14.2. Program EXCEL

Program EXCEL [42] umożliwia budowanie arkuszy kalkulacyjnych, automatycznie sumuje kolumny liczb, graficznie prezentuje dane w postaci różnego typu wykresów, umożliwia szybkie sortowania, obliczanie sum pośrednich. Program wyposażony jest w *raport tabeli przestawnej*, który umożliwia oglądanie danych numerycznych z różnych perspektyw. Można także zaprojektować własne formularze, a także tak zaprogramować EXCEL, aby wykonywał powtarzające się czynności.

### 14.3. Program MATHCAD

Program MATHCAD służy do rozwiązywania układów równań, nierówności i podstawowej obróbki statystycznej danych. Program umożliwia umieszczenie komentarzy podczas pracy w edytorze tekstu oraz wprowadzania równań w postaci jawnej jako danych do dalszych obliczeń. Jest to możliwe dzięki wyposażeniu tego programu w interpreter równań. Program wykonuje również operacje: sumowania, mnożenia, całkowania, różniczkowania oraz posiada zdefiniowane funkcje matematyczne, które można używać bezpośrednio przez



napisanie symbolu i argumentów funkcji. Do funkcji statystycznych w jakie jest wyposażony **MATHCAD** należą:

- średnia wyników eksperymentu wprowadzonych w postaci wektora,
- wariancja wektora,
- odchylenie standardowe wektora,
- współczynnik korelacji.

Program **MATHCAD** jest wyposażony w moduł grafiki, który umożliwia sporządzenie wykresu funkcji i jego wydruk.

#### 14.4. Program MATLAB

MATLAB [43] jest interakcyjnym środowiskiem do wykonywania naukowych i inżynierskich obliczeń oraz do ich wizualizacji. Nazwa MATLABA pochodzi od słów MATtix LABoratory. Zakres zastosowań pakietu obejmuje różne dziedziny nauki i techniki, w tym również biologię, medycynę, ekonomię, meteorologię i wiele innych. Zasadnicze zalety MATLABA to: możliwość szybkiego uzyskania rezultatów, złożonych obliczeń i przedstawienia ich w postaci wykresów dwu- lub trójwymiarowych, a także jako mapy wielobarwne. Podstawowym typem danych, na których operuje MATLAB, jest macierz (rzeczywista lub zespolona). Zmienne są przechowywane w przestrzeni roboczej i są dostępne poprzez nazwę.

Na całość pakietu składają się następujące elementy:

- 1) Interpreter języka programowania wraz z bibliotekami podstawowych działań i obliczeń na macierzach (odwracanie macierzy, rozkłady macierzy, wartości własne i inne),
- 2) Standardowe biblioteki procedur napisanych w języku programu MATLAB – realizują one różnorodne obliczenia. Należą do nich m. in. procedury realizujące przekształcenia macierzy, obliczanie wartości funkcji elementarnych i specjalnych, całkowanie numeryczne, rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych, podstawowe obliczenia statystyczne,
- 3) Biblioteki dodatkowe (ang. Toolbox), które zawierają 20 wyspecjalizowanych pakietów wspomagających obliczenia numeryczne wykonywane w różnych zastosowaniach:
  - a) **Control System Toolbox** jest przeznaczony dla systemów ciągłych i dyskretnych, w wersji PC-MATLAB. Operuje zarówno zapisem w postaci transmitancji jak i przestrzeni stanu.
  - b) **System Identification Toolbox** jest przeznaczony do analizy sygnałów w systemach sterowania. Oferowane są parametryczne i nieparametryczne algorytmy identyfikacji jak:
    - estymacja parametryczna,
    - analiza widmowa,
    - symulacja i weryfikacja modelu,

- prezentacja i konwersja sygnałów,
- c) **Robust Control Toolbox** jest przeznaczony do badania wielowymiarowych systemów sterowania o podwyższonej niezawodności.
- d) **Spline Toolbox** jest przeznaczony do aproksymacji i interpolacji, z możliwością całkowania i różniczkowania otrzymanego równania. Pakiet został przygotowany przez de Boor'a, wynalazcę bazowych funkcji sklepanych B-Splin.
- e) **MMLE3 State Space Identification Toolbox**. Pozwala określić wskazane, nieznane parametry modelu w postaci równania stanu. Pozwala to uzyskać model uwzględniający naszą wiedzę apriory (prawa fizyczne) o modelowanym obiekcie i w rezultacie otrzymamy bardziej dokładny i bardziej wiarygodny model.
- f) **Model Predictive Control Toolbox** jest przeznaczony do analizy i syntezy algorytmów sterowania predykcyjnego, wykorzystujących modele obiektu.
- g) **Frequency Domain Identification Toolbox** jest przeznaczony do identyfikacji liniowych obiektów z wykorzystaniem metod częstotliwościowych.
- h) **Statistics Toolbox** zawiera funkcje szeroko pojętej statystyki, włączając w to modelowanie zdarzeń losowych oraz generatory liczb losowych.
- i) **Chemometrics Toolbox** to specjalistyczne oprogramowanie dla chemików.
- j) **Optimization Toolbox** oferuje metody programowania liniowego oraz różne metody optymalizacji funkcji liniowych i nieliniowych.
- k) **Control Kit** to uproszczony, interaktywny system do definiowania, badania i modyfikowania układów sterowania procesów.
- l) **Signal Processing Toolbox** jest przeznaczony do cyfrowego przetwarzania i analizy sygnałów w dziedzinie czasu i częstotliwości.
- m) **Mu Analysis ( $\mu$ -Analysis) and Synthesis Toolbox** jest pakietem do analizy i syntezy liniowych systemów sterowania o podwyższonej niezawodności.
- n) **Block Diagram Toolbox** pozwala na przekształcenie schematu blokowego o dowolnym stopniu komplikacji na odpowiadające mu równanie stanu.
- o) **Neural Network Toolbox** ułatwia budowę i badanie sieci neuronowych, wzorowanych na budowie organizmów żywych. Połączenie z SIMULINK-iem pozwala na włączenie wyuczonych sieci jako bloków do układu symulacji.
- p) **Nonlinear Control Design Toolbox** pozwala na optymalizację liniowych i nieliniowych systemów sterowania.
- q) **Hi-Spec Toolbox** zawiera funkcje do analizy sygnałów z wykorzystaniem widm wyższego rzędu.

- r) **Image Processing Toolbox** udostępnia złożone procedury przetwarzania i analizy obrazów, w tym graficznych rezultatów symulacji.
  - s) **Symbolic Toolbox** przenosi z pakietu Maple V możliwości pracy na zmiennych symbolicznych.
  - t) **GhostScript** przekształca rysunki postscriptowe na inne formaty.
- 4) Nakładki – są to dodatkowe programy napisane w języku pakietu MATLAB, które ułatwiają realizację obliczeń określonego rodzaju, np. **Simulink** – nakładka umożliwiająca interakcyjne definiowanie struktury dynamicznego układu sterowania przez wielopoziomowe schematy blokowe oraz wygodną jego symulację.

#### 14.5. Program STATBAZ

Program numeryczny obróbki statystycznej **STATBAZ** pozwala na analizę statystyczną zbiorów danych złożonych z rekordów o stałych pozycjach numerycznych. Program **STATBAZ** charakteryzuje się dużą samodzielnością przy układaniu struktur danych, wymaganych przez procedury statystyczne. Istnieje również możliwość wykonania niektórych standardowych operacji na zbiorach. Analiza zmiennych ilościowych obejmuje następujące zagadnienia:

- określenia średniej arytmetycznej,
- określenie odchylenia standardowego,
- określenia współczynnika zmienności,
- określenie błędu standardowego,
- określenia przedziału ufności,

Analiza rozkładów obejmuje:

- tworzenie szeregu rozdzielczego dla wybranej zmiennej,
- test studenta dla zmiennych powiązanych,
- test studenta dla zmiennych niepowiązanych,
- test Manna-Whitney'a-Wilcoxonona,
- test niezależności Kendlla,
- testy jednoczynnikowe analizy wariancji wraz z nowym wielokrotnym testem dostępu Duncana.

#### 14.6. Program STATGRAF

Program **STATGRAF** służy do obróbki statystycznej wyników opracowany przez amerykańską firmę STSC Inc. oraz Statistical Graphics Corp.

Program charakteryzuje się dużą uniwersalnością wyboru do obróbki danych. Struktura modułowa programu pozwala na indywidualny wybór drogi przejścia przez poszczególne stopnie programu. Tak duża uniwersalność programu wymaga znacznych kwalifikacji od użytkownika. Program jest wyposażony

zony w szereg procedur pozwalających na otrzymywanie graficznych obrazów przebiegu funkcji. Program umożliwia również wykonywanie opisu otrzymanych wykresów. Różnorodność testów możliwych do wykorzystania podczas obróbki danych sprawia, że program charakteryzuje się dużą uniwersalnością. W programie **STATGRAF** istnieje między innymi możliwość skorzystania z następujących testów: serii, Wilcoxon, Fishera, studenta, Snedecora, Bartletta, Cochrańa oraz wielu innych. Użytkownik programu ma możliwość:

- wybrania rozkładu zmiennej losowej,
- przeprowadzenia weryfikacji wyników eksperymentu,
- przeprowadzenia estymacji punktowej i przedziałowej,
- ekstrapolacji otrzymanych wyników,
- operacji na danych wejścia-wyjścia,
- kreślenia różnego rodzaju wykresów,
- wykorzystanie metod opisowych procedur statystycznych,
- określenia funkcji rozkładu,
- analizy wariancji i regresji,
- prognozowania,
- wygładzania,
- analizy szeregów czasowych i danych klasyfikowanych,
- planowania eksperymentu,
- analizy numerycznej,
- pobierania próby losowej.

#### 14.7. Program STATISTICA

STATISTICA to uniwersalny, zintegrowany system opracowany przez firmę StatSoft Inc. (USA), służący do statystycznej analizy danych, tworzenia wykresów i zarządzania bazami danych [62]. Obejmuje duży zestaw zaawansowanych procedur analitycznych, stosowanych w nauce, biznesie i technice. System ten zawiera nie tylko procedury statystyczne i graficzne ogólnego zastosowania, ale także specjalistyczne techniki analityczne (np. do badań społecznych, biomedycznych, technicznych). Może być stosowany wszędzie tam, gdzie z danych, poprzez opracowanie i analizę statystyczną, należy otrzymać istotne informacje i przedstawić je w formie wykresów lub tabel. Firma StatSoft wprowadziła rodzinę programów STATISTICA do której należą: STATISTICA Industrial System, Quick STATISTICA, STATISTICA Neural Networks, STATISTICA Connectivity Kit, Business Query for STATISTICA. Do najważniejszych grup oferowanych procedur należą:

- podstawowe statystyki,
- regresja wielokrotna,
- statystyki nieparametryczne i rozkłady ANOVA/MANOVA,
- estymacja nieliniowa,



- szeregi czasowe i prognozowanie,
- analiza skupień,
- analiza czynnikowa,
- analiza kanoniczna,
- skalowanie wielowymiarowe,
- drzewa klasyfikacyjne,
- analiza korespondencji,
- SEPATH – modelowanie równań strukturalnych,
- analiza rzetelności pozycji,
- analiza funkcji dyskryminacyjnej,
- analiza log-liniowa,
- analiza przeżycia,
- komponenty wariacyjne i model mieszany ANOVA/ANCOVA,
- uproszczone karty kontrolne,
- sterowanie jakością – karty kontrolne,
- interakcyjne karty kontrolne,
- analiza procesu,
- planowanie doświadczeń,
- sieci neuronowe.

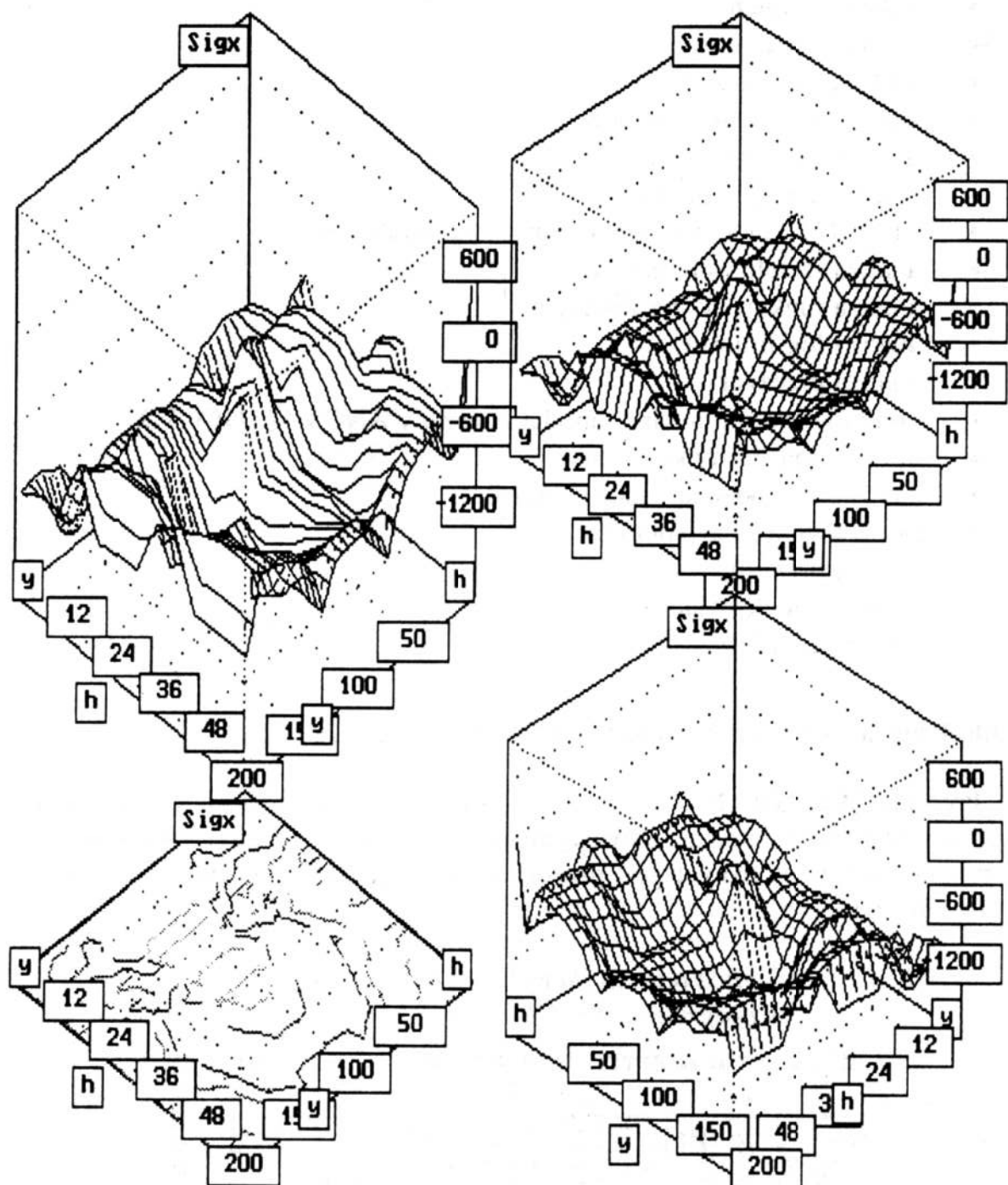
#### 14.8. Programy graficzne WK-GRAF i TB-WYKRES

Program WK-GRAF [14] służy do graficznego przedstawiania wyników wprowadzonych w postaci dwuwymiarowej tablicy wartości dyskretnych. Przykładowa tablica danych jest przedstawiona poniżej, a jej wykres przedstawia rysunek 14.1.

Tablica 14.1. Tablica danych do wykresu funkcji  $f=f(x,y)$  w programie WK-GRAF.

f(xy)		EDYTOR DANYCH DO WYKRESU FUNKCJI F=f(x,y)						
x	y	1	2	3	4	5	6	7
		5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00	35.00
1	0.00	-1100.00	-1023.00	-1023.00	-533.00	-1006.00	-966.00	-966.00
2	0.33	-1100.00	-1023.00	-1023.00	-533.00	-1006.00	-966.00	-966.00
3	16.67	-1059.00	-1206.00	-1206.00	-674.00	-524.00	-496.00	-495.00
4	25.00	-1059.00	-1421.00	-1029.00	-674.00	-533.00	-559.00	-559.00
5	33.33	-1131.00	-1509.00	-944.00	-740.00	-674.00	-559.00	-694.00
6	41.67	-1131.00	-1509.00	-944.00	-740.00	-1036.00	-694.00	-1012.00
7	50.00	-1340.00	-1236.00	-1210.00	-631.00	-1036.00	-1012.00	-1250.00
8	58.33	-1340.00	-1236.00	-1210.00	-631.00	-672.00	-1036.00	-1105.00
9	66.67	-1357.00	-1323.00	-1515.00	-1107.00	-704.00	-1255.00	-1241.00
10	75.00	-1357.00	-1323.00	-1515.00	-1107.00	-704.00	-1310.00	-1241.00
11	83.33	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1571.00	-1562.00
12	91.67	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1435.00	-1572.00
13	100.00	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1435.00	-1572.00
14	108.33	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1435.00	-1572.00
15	116.67	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1435.00	-1572.00
16	125.00	-1289.00	-1204.00	-1472.00	-1845.00	-1701.00	-1571.00	-1562.00

16 stycznia 1999  
 F1-help [\*,\*,MM,END]-pole DEL-del pole ESC-cof ENTER-dalej F-format  
 F2-zamień z tablicą na deskę F3-wpisz listę F4-F5-wpisz dane



Rys. 14.1. Przykładowy układ czterech wykresów rozkładu składowej  $\sigma_x$  tensora naprężenia  $T_\sigma$  w głąb warstwy wierzchniej ukształtowanej obróbką nagniataniem, otrzymane przy pomocy programu WK-GRAF.

Program TB-WYKRES [1] pozwala na sporządzanie wykresów, przy czym dane wprowadza się w postaci funkcji otrzymanych w procesie identyfikacji. Przykładowo na rysunku 14.2 przedstawiono wykres funkcji naprężeń upla-

styczniających dla stali 55. Naprężenia te obliczano przy zastosowaniu procedury akumulacji przyrostów naprężeń na typowym kroku, według wzoru [28]:

$$\begin{aligned} {}^t\Delta\sigma_p = & {}^tF_3({}^t y) \cdot {}^t\Delta y + {}^tF_5({}^t T) \cdot {}^t\Delta T + \frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t T} \cdot {}^t\Delta T + \frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)}} \cdot {}^t\Delta \dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)} + \\ & + \frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \sigma_{st}} \cdot {}^tF_4({}^t \epsilon_{eq}^{(VP)}) \cdot {}^t\Delta \epsilon_{eq}^{(VP)} + \frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \sigma_{st}} \cdot {}^tF_6(t) \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (14.1)$$

gdzie:

${}^t\Delta \epsilon_{eq}^{(VP)} = \sqrt{2 \cdot {}^t\Delta \epsilon_{ij}^{(VP)} \cdot {}^t\Delta \epsilon_{ij}^{(VP)} / 3}$ ,  ${}^t\Delta \dot{\epsilon}_i^{(VP)} = \sqrt{2 \cdot {}^t\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)} \cdot {}^t\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)} / 3}$  są przyrostami intensywności odpowiednio odkształceń i prędkości odkształceń lepkoplastycznych na kroku,

${}^tF_3({}^t y) \cdot {}^t\Delta y$  - określa zmianę początkowej granicy plastyczności wynikającą ze zmiany struktury,

${}^tF_4({}^t T) \cdot {}^t\Delta T$  - określa zmianę początkowej granicy plastyczności wynikającą ze zmian temperatury,

$\frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t T} \cdot {}^t\Delta T$  - składowa opisująca umacnianie lub osłabianie materiału wywołane temperatura i wiąże się z kształtem krzywej  $\sigma_p - T$ ,

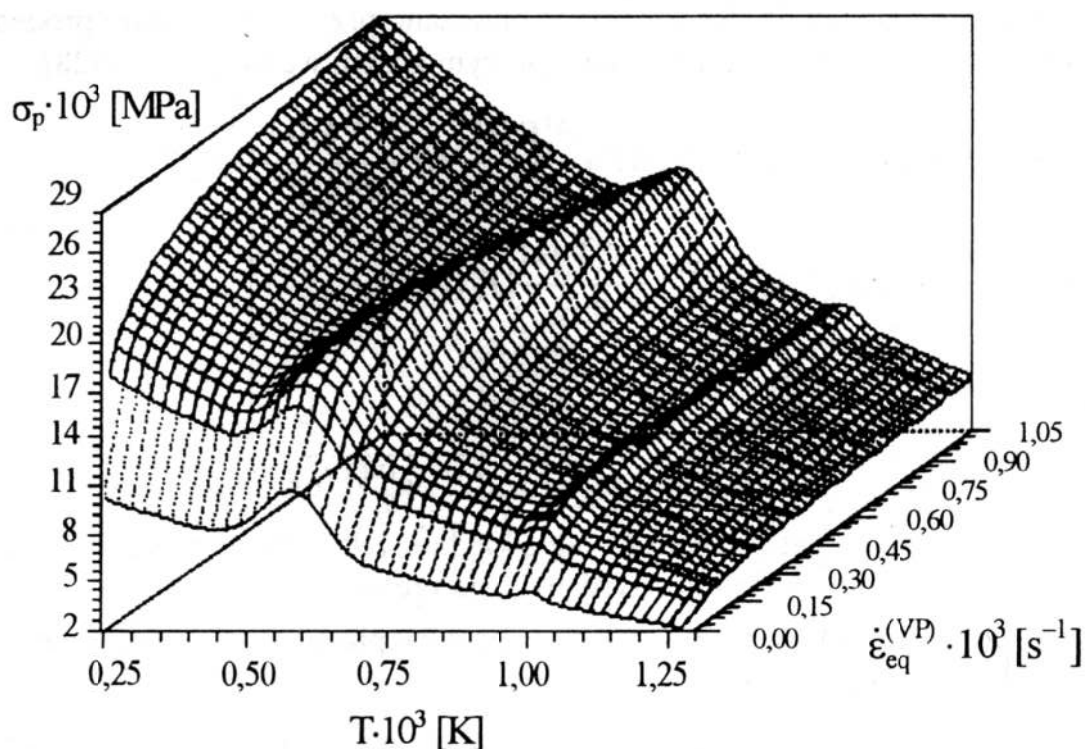
$\frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \sigma_{st}} \cdot {}^tF_5({}^t \epsilon_{eq}^{(VP)}) \cdot {}^t\Delta \epsilon_{eq}^{(VP)}$  - opisuje umacnianie lub osłabianie materiału wywołane jego odkształceniem i wynika z kształtu krzywej  $\sigma_p - \epsilon_{eq}^{(VP)}$ ,

$\frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)}} \cdot {}^t\Delta \dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)}$  - składowa charakteryzująca zmianę chwilowej granicy plastyczności wraz ze zmianą intensywności prędkości odkształceń lepkoplastycznych i wynika z relacji  $\sigma_p - \dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)}$ ,

$\frac{\partial {}^tF_1[\bullet]}{\partial {}^t \sigma_{st}} \cdot {}^tF_6(t) \cdot \Delta t$  - opisuje zmiany naprężenia uplastyczniającego zachodzące

w miarę upływu czasu bez udziału odkształcania. Przyczyną tych zmian mogą być na przykład zjawiska starzenia, zdrowienia i ewentualnie rekrytalizacji.





Rys. 14.2. Przykładowy wykres skumulowanych naprężeń uplastyczniających  $\sigma_p$  dla stali 55, w zależności od intensywności prędkości odkształceń lepkoplastycznych  $\dot{\epsilon}_{eq}^{(VP)}$  i temperatury  $T$ , przy stałej wartości skumulowanej intensywności odkształceń lepkoplastycznych  $\epsilon_{eq}^{(VP)} = 0,3$ , otrzymany przy pomocy programu TB-WYKRES [28].

#### 14.9. Program POLIOPT

Program POLIOPT [2, 64] służy do optymalizacji i polioptymalizacji (przy dwóch kryteriach) ciągłych i ograniczonych funkcji wielu zmiennych. Pochodne funkcji kryterialnych muszą być ograniczone. Zmienne muszą być ciągłe i ograniczone. Na funkcje i zmienne mogą być nałożone ograniczenia, które muszą być również ciągłe i ograniczone. Obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji celu realizowane jest numerycznie.

Optymalizacja jest realizowana jako minimalizacja funkcji [64]:

$$S_R = (1 - \text{wag}) * \text{kryt}[1] + \text{wag} * \text{kryt}[2], \quad (14.2)$$

gdzie:

wag – współczynnik wagi deklarowany przez użytkownika,  
 kryt[1], kryt[2] – kryteria optymalizacji.

Poliptymalizacja jest realizowana jako minimalizacja sumy ważonej (14.2) dwóch funkcji kryterialnych kryt[1] i kryt[2] dla kilku wartości współczynnika wagi ( $wag \in [0,1]$ ). Liczba współczynników wagi jest deklarowana przez użytkownika programu przed uruchomieniem polioptymalizacji.

Ograniczenia są uwzględniane metodą zewnętrznej funkcji kary, za pomocą funkcji [2]:

$$G = \sum_{i=1}^M g[i], \quad (14.3)$$

gdzie:

$$g[i] = \begin{cases} og[i]^2 \cdot k[i], & \text{gdy } og[i] < 0, \\ 0, & \text{gdy } og[i] \geq 0, \end{cases}$$

$og[i]$  – wartość przekroczenia  $i$ -tego ograniczenia,

$k[i]$  – współczynnik kary,

$M$  – liczba ograniczeń.

Minimalizacja, a ściślej określenie kierunku poszukiwań może być realizowana metodami należącymi do klasy metod gradientowych, to znaczy wykorzystujących w obliczeniach wartości pochodnych cząstkowych funkcji celu. Określenie minimum w wybranym kierunku realizowane jest metodą aproksymacji kwadratowej. Program POLIOPT umożliwia minimalizację funkcji następującymi metodami:

- gradientową,
- Davidona-Fletcher-Powella,
- Broydena,
- Pearsona,
- projekcji gradientu.

Wybór poniższych opcji programu POLIOPT następuje poprzez klawisze ruchu kursora lub klawisze funkcyjne:

- OPCJE – umożliwia ustawienie domyślnych parametrów optymalizacji, wyświetlania wyników i wprowadzania (lub nie) danych z klawiatury.
- OPTYMALIZACJA – przeprowadzenie obliczeń optymalizacyjnych dla jednego z kryteriów lub obliczeń z zadaniem współczynnikiem wagi,
- POLIOPTYMALIZACJA – cykl obliczeń ze zmieniającym się współczynnikiem wagi na podstawie zadanej liczby punktów kompromisowych (szukanie zbioru Pareto),

- **WYŚWIETLANIE** – wyświetlanie wyników optymalizacji lub poliop-  
tymalizacji na ekranie,
- **DRUKOWANIE** – wydruk w trybie tekstowym wyników optymalizacji  
z możliwością wydruku stałych i informacji o programie,
- **RYSUNEK** – program realizujący w trybie graficznym wykreślanie wy-  
kresów funkcji kryterialnych w zależności od zmiennych decyzyjnych  
lub innej funkcji zdefiniowanej przez użytkownika,
- **KONIEC** – zakończenie pracy z programem POLIOPT.

Przedstawione dotychczas programy (pkt. 14.1÷14.9) są konstruowane w ta-  
ki sposób aby były uniwersalne. Szeroki zakres ich zastosowań wynika z po-  
trzeb rynku oprogramowania. Duża wszechstronność programu może okazać się  
jednak wadą w przypadku, gdy wielokrotnie wykonujemy te same operacje  
matematyczne, prowadzące do celu. W tym przypadku optymalnym rozwiąza-  
niem jest korzystanie z programów specjalistycznych opracowanych dla potrzeb  
konkretnego przypadku. Przykładowo, obliczanie współczynników funkcji re-  
gresji w sposób tradycyjny jest bardzo pracochłonne i przy trzech czynnikach  
wejściowych wymaga wykonania około 700 operacji matematycznych. Pro-  
gram specjalistyczny znacznie ułatwia obliczenia i skraca czas obliczeń, a za-  
tem obniża koszty. Dalej przedstawione zostaną dwa takie programy: **CADEX**  
i **PLANEKS-STAT**.

#### 14.10. Program CADEX

Program **CADEX** [53] to symbol pakietu zintegrowanych programów, uła-  
twiających realizację badań doświadczalnych. W programie wykorzystano me-  
tody współczesnej teorii eksperymentu, zaawansowanej statystyki matematycz-  
nej i analizy procesów stochastycznych oraz teorii optymalizacji. Program **CA-  
DEX** tworzą następujące zintegrowane programy:

- 1) **ESDET** – podstawowy program pakietu **CADEX** stosowany w przypadku  
statycznych obiektów badań. Uwzględnia najczęściej stosowane plany do-  
świadczeń i metody analizy statystycznej wyników łącznie z przetwarzaniem  
funkcji wielu zmiennych (ekstrema, wykresy, itp.). Plany doświad-  
czeń opracowane są zgodnie z zasadami współczesnej teorii eksperymentu.  
Bank zawiera ponad 240 planów, a wśród nich: D-optymalne plany Kiefera,  
Hartley'a, Boxa, Rechtschaffnera oraz plany kompletne, ułamkowe i rotal-  
ne. Liczba czynników badanych zawiera się w przedziale:  $1 \leq S \leq 16$ . Ponadto  
możliwe jest wprowadzenie indywidualnie opracowanego planu doświad-  
czenia dla  $1 \leq S \leq 20$ .

- 2) IDEF – program przeznaczony jest do identyfikacji jednoweściowych statycznych obiektów badań przy zastosowaniu:
  - aproksymacji średniokwadratowej linearyzowanymi funkcjami jednej zmiennej, metodą najmniejszych kwadratów i formalnym stosowaniu techniki rachunku macierzowego,
  - interpolacji funkcją sklejaną jednej zmiennej w postaci wielomianów sześciennych, przy warunku zerowej krzywizny funkcji, czyli zerowych wartości jej drugich pochodnych na końcu przedziału.
- 3) PROFES – program przeznaczony do przetwarzania funkcji wielu zmiennych. Najważniejsze możliwości funkcjonalne to:
  - a) efektywne stosowanie metod teorii optymalizacji do wyznaczania ekstremów (minimum-maksimum) funkcji wielu zmiennych, z możliwością sukcesywnego, indywidualnego ustalania ograniczeń dla obszaru poszukiwań, punktu startu. W programie zastosowano następujące metody optymalizacji:
    - **metoda Complex (Boxa)**, stosowana do poszukiwania ekstremum z ograniczeniami z zastosowaniem nieregularnego sympleksu,
    - **metoda według Hooke'a-Jeeves'a**, stanowiąca tzw. metodę prostych poszukiwań ekstremum,
    - **metoda Monte-Carlo**, stosowana do poszukiwania ekstremum z zastosowaniem losowego wyboru wartości zmiennych niezależnych w ustalonych zakresach,
    - **metoda według Gaussa-Seidela**, stosowana do poszukiwania ekstremum według koncepcji tzw. podstawowych kierunków poprawy.
  - b) wykonywanie wykresów (2D) funkcji jednej zmiennej uzyskanej na podstawie funkcji wielu zmiennych przez ustalenie wartości pozostałych zmiennych,
  - c) obliczanie wartości funkcji i tabelaryzacja z uwzględnieniem różnych wariantów obliczeń,
  - d) ustalanie i zmienianie obszaru, w którym poszukuje się ekstremum funkcji, przez określenie zakresów zmienności czynników badanych.
- 4) SPECTRA – program umożliwia analizę sygnału dyskretnego o długości maksymalnej  $N_{\max}=32768$  wartości. Sygnał może być:
  - a) wprowadzony bezpośrednio z klawiatury,
  - b) odczytany z pliku stanowiącego:
    - plik programu SPECTRA, zawierający dane uprzednio wprowadzone i zapisane,
    - plik zewnętrzny, utworzony niezależnie od programu SPECTRA (komputerowa rejestracja danych z aparatury pomiarowej),
  - c) generowany według 11 predefiniowanych w programie SPECTRA generatorów sygnału (pseudolosowe i zdeterminowane), z możliwością

dowolnego ustalania ich parametrów – symulacja komputerowa sygnału.

Sygnał można przedstawić w postaci tablicy jego wartości lub w formie wykresu (2D). Wprowadzony sygnał można przetwarzać dokonując:

- korekty błędów nadmiernych z uwzględnieniem „reguły trzech sigm” lub całkowicie arbitralnej,
- wyznaczenia trendu liniowego i ewentualnie jego usunięcia.

Sygnał podlega automatycznemu przekształceniu na standardowy sygnał o zerowej średniej (centrowanie sygnału). Następnie program SPECTRA wyznacza między innymi następujące parametry statystyczne sygnału centrowanego:

- wariancja w próbkę i estymator wariancji w populacji oraz odpowiednie odchylenia standardowe,
- wartości ekstremalne,
- odchylenie przeciętne,
- współczynniki: skośności (asymetria) i spłaszczenia (eksces).

Możliwe jest wyznaczenie szeregu rozdzielczego – histogramu i dystrybucyjności empirycznej.

#### 14.11. Program PLANEKS-STAT

Program PLANEKS-STAT [22] jest przeznaczony do komputerowego wspomaganie badań doświadczalnych z zastosowaniem najczęściej stosowanych tzw. planów statycznych zdeterminowanych [51, 52]. Program stosowany jest w przypadku statycznych obiektów badań. Program użytkowany jest w trybie konwersacyjnym i zapewnia użytkownikowi pełny wpływ na tok przetwarzania danych. Użytkownik programu ma możliwość praktycznego stosowania metod współczesnej teorii eksperymentu oraz zaawansowanej statystyki matematycznej. Unika się w ten sposób konieczności prowadzenia skomplikowanych studiów i żmudnych rachunków. Efektem obliczeń wykonywanych przez program jest jawna postać funkcji regresji w postaci zakodowanej lub jawnej oraz przedział jej zmienności. Treść programu została zapisana w procedurach i funkcjach umieszczonych w modułach, jako biblioteka programu, w programach dołączanych i nakładkach. Program napisano w języku Turbo Pascal 5.5 opracowanym przez firmę Borland International, przeznaczony na komputery osobiste IBM PC (MS-DOS).

Program PLANEKS-STAT posiada szereg opcji w zakresie:

- planowania eksperymentu,
- statystycznego opracowanie wyników badań,
- eliminacji wyników obciążonych błędem grubym,
- badania jednorodności wariancji,



- obliczenia współczynników funkcji regresji,
- badania istotności współczynników w równaniu regresji,
- badania stopnia dopasowania otrzymanej funkcji do badanego obiektu – badanie istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej,
- szacowania niedokładności,
- badania adekwatności modelu,
- kodowania (normowania) i odkodowania (renormowania) zmiennych,
- określania przedziału ufności funkcji regresji.

Program główny wykorzystuje następujące moduły:

- 1) Moduły standardowe łatwo dostępne dzięki temu, iż biblioteka tych modułów jest ładowana do pamięci operacyjnej wraz z kompilatorem. Biblioteka ta może być tworzona za pomocą programu usługowego i zawiera najczęściej następujące moduły:
  - a) SYSTEM – zawiera między innymi deklaracje procedur: arytmetycznych, łańcuchowych i zarządzania pamięcią operacyjną. W skład tego modułu wchodzi również deklaracje zmiennych identyfikujące pliki standardowe Input i Output oraz zmienną Randseed przeznaczoną do przechowywania danej typu Loginit.
  - b) CRT – moduł zawiera między innymi procedury współpracy z ekranem i klawiaturą konsoli, tworzenie okienek tekstowych, określenie koloru tła i znaków, generowania dźwięku oraz szereg deklaracji zmiennych.
  - c) DOS – moduł ten zawiera procedury operacji systemowych takich jak:
    - poszukiwanie katalogu,
    - określenie daty i czasu,
    - określenie pojemności dysków i wykonywanie funkcji systemu DOS,
  - d) PRINTER – moduł zawiera deklaracje zmiennej plikowej LST identyfikującej plik tekstowy skojarzony z drukarką.
  - e) OVERLAY – moduł zawierający procedury zarządzania nakładkami oraz deklaracje symboli umożliwiających kontrolę pomyślności wykonywania procedur nakładkowania.
- 2) Moduły, które utworzono wyłącznie na potrzeby programu PLANEKS-STAT:
  - a) DANE.TPU, DANE\_KL.TPU, DANE\_POP.TPU, DANE\_TST.TPU, DANE\_WYS.TPU – moduły bazy danych pozwalających na wprowadzanie danych z klawiatury, poprawianie danych, analiza statystyczna, archiwizowanie i wyświetlanie danych w postaci tablicy,

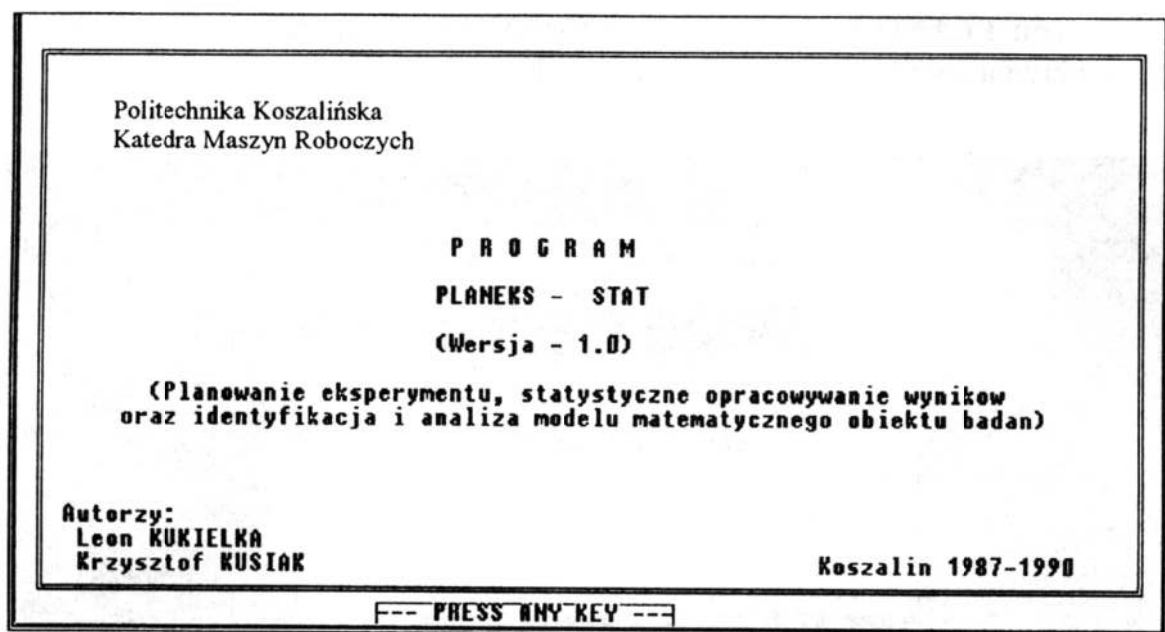
- b) PLAN.TPU, TABLICE.TPU – moduły służące do planowania eksperymentu, zawierające następujące macierze planu: MA\_PLAN1, MA\_PLAN2, MA\_PLAN3, MA\_PLAN4, MA\_PLAN5, MA\_PLAN6, MA\_PLAN7 i MA\_PLAN8,
  - c) OBL\_WSP.TPU – moduł do obliczania współczynników w równaniu regresji, określania ich istotności, obliczania współczynnika korelacji wielowymiarowej i badania jego istotności, badania adekwatności równania regresji,
  - d) SKLAD.TPU – są to moduły zawierające takie elementy programu jak: komunikaty, szatę graficzną, procedury wstrzymania programu, gaszenia i wyświetlania zaniku kursora na ekranie, funkcje czytania i kontroli poprawności wprowadzanych danych, procedury generowania sygnałów dźwiękowych, informacje pomocnicze, procedury kontroli aktywności drukarki oraz stanu bufora drukarki,
  - e) REG\_HELP.TPU – moduły zawierające wszystkie procedury niezbędne do obróbki bazy danych, analizy statystycznej wyników, obliczania współczynników w równaniu regresji, testowanie, teksty help,
  - f) UNCODE.TPU - są to moduły do kodowania i odkodowania funkcji.
- 3) Programy dołączane za pomocą dyrektywy kompilatora  $\{ \$I \}$ . Są to programy zawarte w oddzielnych plikach z rozszerzeniem DOL.
- 4) Procedury nakładkowe. Nakładkowanie polega na takim przydzieleniu pamięci operacyjnej programowi aby pewne jego części były wykonywane w tym samym obszarze pamięci. W programie stworzono i wykorzystano moduł nakładkowy SUPER.OVR skompilowany w zasięgu dyrektywy  $\{ \$O+ \}$ .

#### 14.12. Przykład komputerowego wspomagania badań

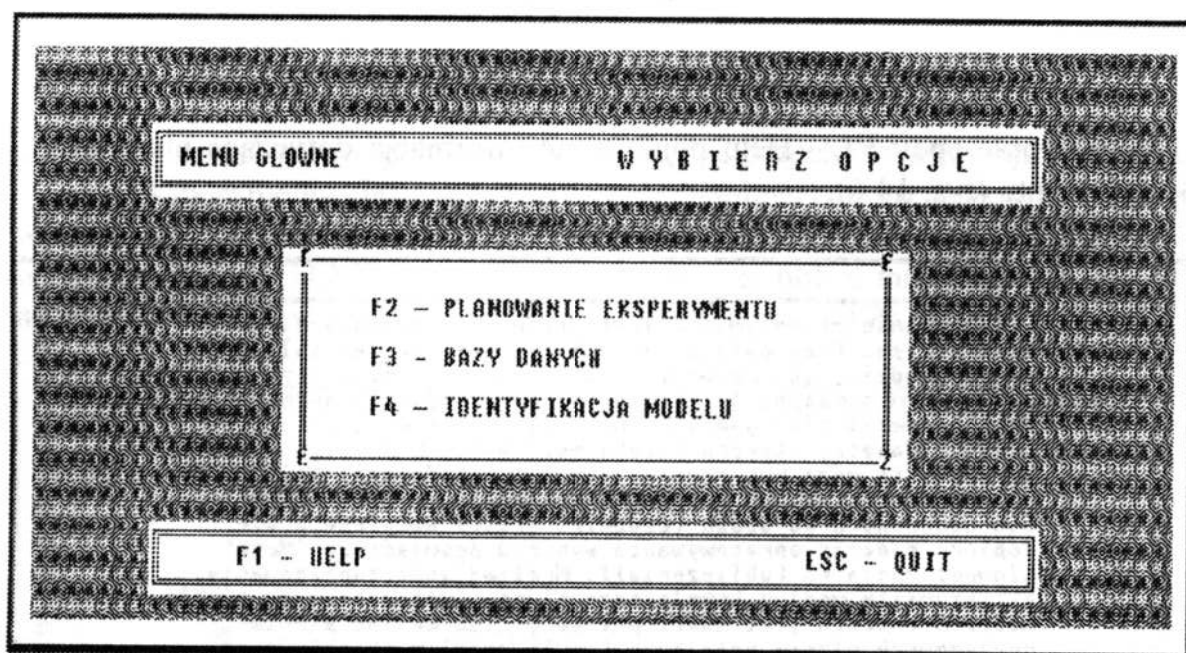
W niniejszym punkcie przedstawiony zostanie przykład komputerowego wspomagania badań przy pomocy programu **PLANEKS-STAT**. Po uruchomieniu programu pojawi się wizytówka programu, która wygląda tak, jak na rysunku 14.3.

Po naciśnięciu dowolnego klawisza i wpisaniu kodu pojawia się MENU GŁÓWNE z trzema opcjami: F2 – PLANOWANIE EKSPERYMENTU, F3 – BAZY DANYCH, F4 – IDENTYFIKACJA MODELU. Ponadto można otrzymać bieżącą informację (przycisk F1 - Help) lub wyjść z programu naciskając przycisk funkcyjny ESC – QUIT (rys. 14.4).





Rys. 14.3. Program PLANEKS-STAT.

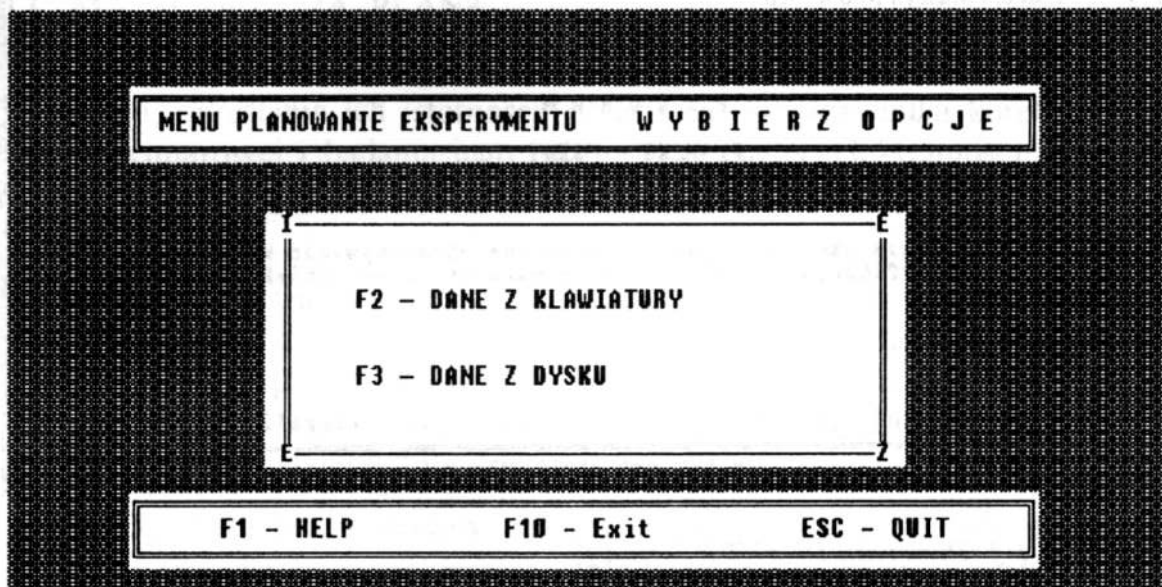


Rys. 14.4. MENU GŁÓWNE.

Po wyborze opcji F1 pojawia się opis przeznaczenia programu. Jeśli wybrana zostanie opcja F2 przechodzi się do menu PLANOWANIE EKSPERYMENTU, gdy F3 – do menu BAZY DANYCH, a F4 – do menu IDENTYFIKACJA MODELU.

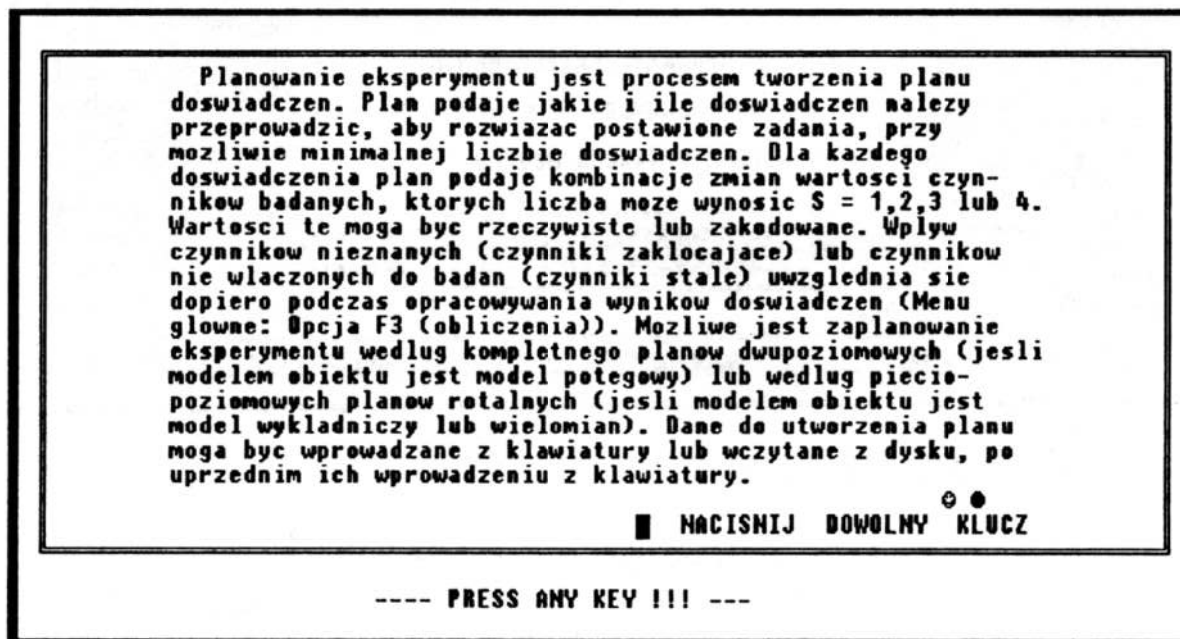
W każdym menu podrzędnym występują trzy opcje: F1 – Help, F10 – Exit (wyjście do menu nadrzędnego) i ESC – QUIT.

W menu PLANOWANIE EKSPERYMENTU występują dwie opcje F2 – dane z klawiatury i F3 – dane z dysku (rys. 14.5).



Rys. 14.5. Menu PLANOWANIE EKSPERYMENTU

Po wyborze opcji F1 – Help pojawia się informacja dotycząca planowania eksperymentu (rys. 14.6).



Rys. 14.6. Okienko dialogowe opcji Help w menu PLANOWANIE EKSPERYMENTU.

Jeżeli eksperyment planujemy po raz pierwszy wówczas dane należy wprowadzić z klawiatury – opcja F2. Następuje wyświetlenie nazw zbiorów, z którymi program jest skojarzony (rys. 14.7).

NAZWY ZBIORÓW Z KTÓRYM JEST SKOJARZONY PROGRAM	
1.PLA	NAPR.PLA
1SP1A.PLA	PROJEKT.PLA
2SP1A.PLA	S.PLA
55.PLA	SIGMA1.PLA
A.PLA	T.PLA
C.PLA	TA.PLA
CHROP.PLA	TEST.PLA
EDEK.PLA	W.PLA
ERM.PLA	W1.PLA
F.PLA	W2.PLA
G.PLA	2.PLA
J.PLA	UZUP.PLA
L.PLA	LEON.PLA
M.PLA	12.PLA
MGU.PLA	BONI.PLA

PODAJ NAZWE PLIKU (max = 8 ZNAKÓW) : WEDŁUG SCHEMATU " \*\*\*\*\* "

WPISZ NAZWE WYBRANEGO PLIKU : █ \F1-HELP\ESC-QUIT

Rys. 14.7. Dialog DANE Z KLAWIATURY.

Należy podać nazwę pliku w którym ma być przechowywany opracowywany plan eksperymentu. Jeśli wpisujemy nazwę istniejącego już zbioru, to zawarte w nim dane zostaną usunięte i wprowadzone zostaną nowe. Przykładowo jeśli wpisujemy nazwę TEST pojawi się informacja, że plik o takiej nazwie już istnieje! Czy zmieniasz nazwę? Odpowiedź: [T/N]? (rys. 14.8).

NAZWY ZBIORÓW Z KTÓRYM JEST SKOJARZONY PROGRAM	
1.PLA	NAPR.PLA
1SP1A.PLA	PROJEKT.PLA
2SP1A.PLA	S.PLA
55.PLA	SIGMA1.PLA
A.PLA	T.PLA
C.PLA	TA.PLA
CHROP.PLA	TEST.PLA
EDEK.PLA	W.PLA
ERM.PLA	W1.PLA
F.PLA	W2.PLA
G.PLA	2.PLA
J.PLA	UZUP.PLA
L.PLA	LEON.PLA
M.PLA	12.PLA
MGU.PLA	BONI.PLA

PODAJ NAZWE PLIKU (max = 8 ZNAKÓW) : WEDŁUG SCHEMATU " \*\*\*\*\* "

Plik TEST.ERS istnieje. Zmieniasz nazwe ODPOWIEDZ : [T/N]

Rys. 14.8. Okienko zmiany nazwy pliku.

Jeśli odpowiedź jest TAK, to program ponownie pyta o nazwę pliku. Przyjmijmy, że wprowadzono nową nazwę PROBA (rys. 14.9).

NAZWY ZBIORÓW Z KTÓRYM JEST SKOJARZONY PROGRAM	
1.PLA	NAPR.PLA
1SP1A.PLA	PROJEKT.PLA
2SP1A.PLA	S.PLA
55.PLA	SIGMA1.PLA
A.PLA	T.PLA
C.PLA	TA.PLA
CHROP.PLA	TEST.PLA
EDEK.PLA	W.PLA
ERM.PLA	W1.PLA
F.PLA	W2.PLA
G.PLA	2.PLA
J.PLA	UZUP.PLA
L.PLA	LEON.PLA
M.PLA	12.PLA
MGU.PLA	BONI.PLA

PODAJ NAZWE PLIKU (max = 8 ZNAKÓW) : WEDŁUG SCHEMATU " \*\*\*\*\* "

WPISZ NAZWE WYBRANEGO PLIKU : PROBA

Rys. 14.9. Wprowadzenie nazwy PROBA nowego pliku.

Wówczas przechodzi się do następnego okna i dokonuje się wyboru klasy modelu matematycznego (rys. 14.10). Możliwe jest aproksymowanie wielomianem, funkcją multiplikatywną (model potęgowy) lub funkcją eksponentialną (wykładniczą).

WYBIERZ KLASE MODELU :

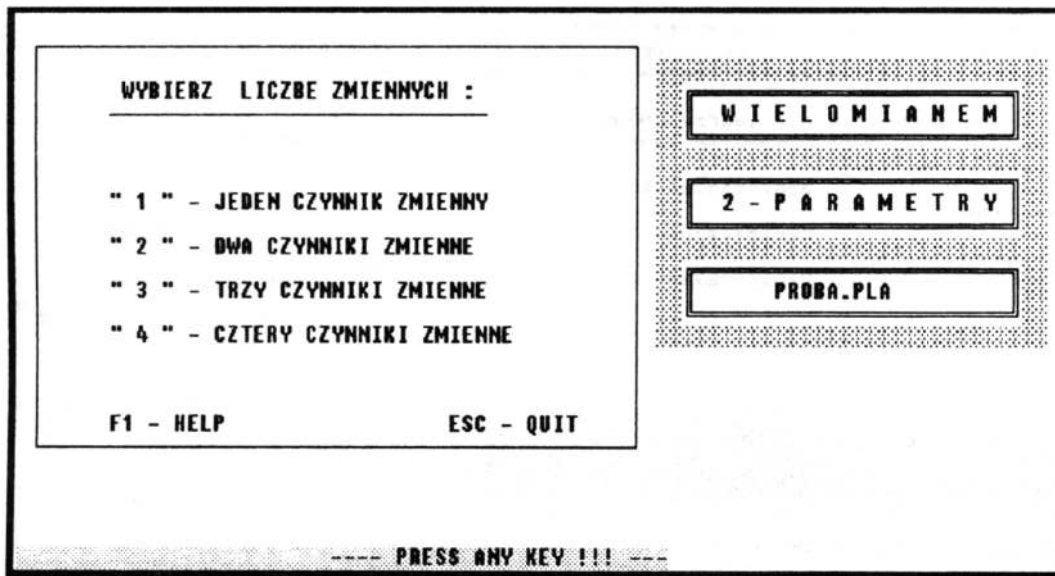
F2 - WIELOMIAN  
 F3 - MODEL POTĘGOWY  
 F4 - MODEL WYKŁADNICZY

F1- HELP

NACISNIJ ODPOWIEDNI KLAWISZ :

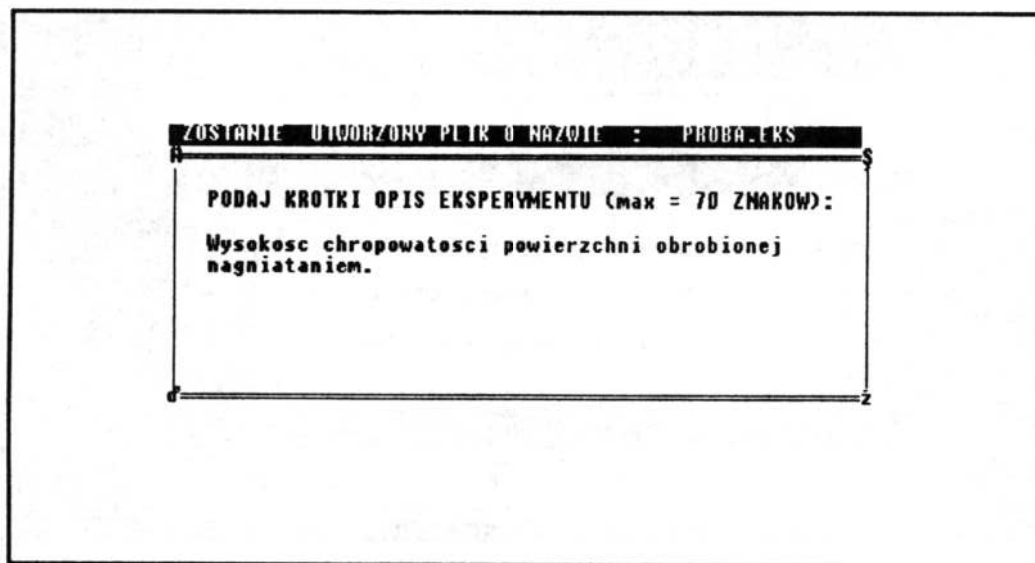
Rys. 14.10. Okienko dialogowe WYBIERZ KLASĘ MODELU.

Przyjmijmy, że wybrano model WIELOMIAN – opcja F2. Pojawi się kolejne okno (rys. 14.11), w którym należy określić liczbę zmiennych wejściowych (zmiennych niezależnych) z przedziału  $S \in [1; 4]$ . Wybrano  $S=2$ . Po prawej stronie tabel widnieją informacje dotyczące: wybranego modelu matematycznego, liczby zmiennych i nazwy pliku z przedłużeniem PLA, w którym będą przechowywane dane.



Rys. 14.11. Dialog WYBIERZ LICZBĘ ZMIENNYCH.

Po naciśnięciu dowolnego klawisza pojawi się okno (rys. 14.12), w którym należy wpisać krótki opis eksperymentu. W niniejszym przykładzie przyjęto: **Wysokość chropowatości powierzchni obrabianej nagniataniem.**



Rys. 14.12. Dialog PODAJ KRÓTKI OPIS EKSPERYMENTU.



Po naciśnięciu ENTER pojawi się kolejne okno (rys. 14.13), w którym należy wpisać: nazwę i oznaczenie zmiennej wynikowej (tutaj odpowiednio: chrop i  $R_z$ ), nazwy i oznaczenia poszczególnych czynników badanych i ich zakresy zmienności w jednostkach rzeczywistych. W przypadku wprowadzenia błędnych danych można je poprawić.

<b>Opis eksperymentu:</b>			
Wysokosc chropowatosci powierzchni obrobionej nagniataniem.			
<b>Nazwa, oznaczenie i zakres zmian czynnikow :</b>			
<b>Czynnik wynikowy :</b>			
Nazwa: chrop	Oznaczenie: Rz		
Zmienna 1:			
Nazwa: sila	Oznaczenie: F	Min = 400.000	Max = 2000.000
Zmienna 2:			
Nazwa: predk	Oznaczenie: V	Min = 0.500	Max = 1.200
<b>POPRAWIASZ OPIS EKSPERYMENTU ?</b>		<b>ODPOWIEDZ : [T/N]</b>	

Rys. 14.13. Okno dialogowe POPRAWIANIE OPISU EKSPERYMENTU, NAZWY, OZNACZENIA I ZAKRESY ZMIAN CZYNNIKÓW.

Jeśli wszystkie dane są prawidłowe, przechodzi się do menu MACIERZE (rys. 14.14).

<b>MENU MACIERZE</b>		<b>WYBIERZ OPCJE</b>				
<table border="1"> <tr> <td>F2 - MACIERZ PLANU ZAKODOWANA</td> </tr> <tr> <td>F3 - MACIERZ PLANU ODKODOWANA</td> </tr> <tr> <td>F4 - MACIERZ WYNIKOW EKSPERYMENTU</td> </tr> </table>				F2 - MACIERZ PLANU ZAKODOWANA	F3 - MACIERZ PLANU ODKODOWANA	F4 - MACIERZ WYNIKOW EKSPERYMENTU
F2 - MACIERZ PLANU ZAKODOWANA						
F3 - MACIERZ PLANU ODKODOWANA						
F4 - MACIERZ WYNIKOW EKSPERYMENTU						
<b>F1 - HELP</b>		<b>F10 - EXIT</b>				
<b>ESC - QUIT</b>						

Rys. 14.14. Menu MACIERZE.

Istnieje możliwość wygenerowania macierzy dla zakodowanych wartości zmiennych – opcja F2 – wówczas ekran wygląda jak na rysunku 14.15.

PLAN EKSPERYMENTU DLA ZAKODOWANYCH WARTOSCI ZMIENNYCH		
Wysokość chropowatości powierzchni obrabianej nagniataniem. Przewidywany model - wielomian. Liczba zmiennych = 2.		
Nr dosw	Wartosci zmiennych	
	x1	x2
Dosw. 1	-1	-1
Dosw. 2	+1	-1
Dosw. 3	-1	+1
Dosw. 4	+1	+1
Dosw. 5	0	0
Dosw. 6	0	0
Dosw. 7	0	0
Dosw. 8	0	0
Dosw. 9	0	0
Dosw. 10	-1.4140	0
Dosw. 11	1.4140	0
Dosw. 12	0	-1.4140
Dosw. 13	0	1.4140

Rys. 14.15. Okno MACIERZ PLANU ZAKODOWANA.

Po naciśnięciu opcji F3 pojawia się macierz dla rzeczywistych wartości zmiennych (rys. 14.16).

PLAN EKSPERYMENTU DLA RZECZYWISTYCH WARTOSCI ZMIENNYCH		
Wysokość chropowatości powierzchni obrabianej nagniataniem. Przewidywany model - wielomian. Liczba zmiennych = 2.		
Nr dosw	Wartosci zmiennych	
	F	v
Dosw. 1	400.000	0.500
Dosw. 2	2000.000	0.500
Dosw. 3	400.000	1.200
Dosw. 4	2000.000	1.200
Dosw. 5	1200.000	0.850
Dosw. 6	1200.000	0.850
Dosw. 7	1200.000	0.850
Dosw. 8	1200.000	0.850
Dosw. 9	1200.000	0.850
Dosw. 10	68.800	0.850
Dosw. 11	2331.200	0.850
Dosw. 12	1200.000	0.355
Dosw. 13	1200.000	1.345

---- PRESS ANY KEY !!! ----

Rys. 14.16. Okno MACIERZ PLANU ODKODOWANA.



Natomiast naciśnięcie opcji F4 generuje ekran z macierzą wyników eksperymentu, po uprzednim wpisaniu założonej liczby powtórzeń pomiarów (przyjęto  $r=5$ ) i daty pomiarów (tutaj: 1999.01.15) (rys. 14.17).

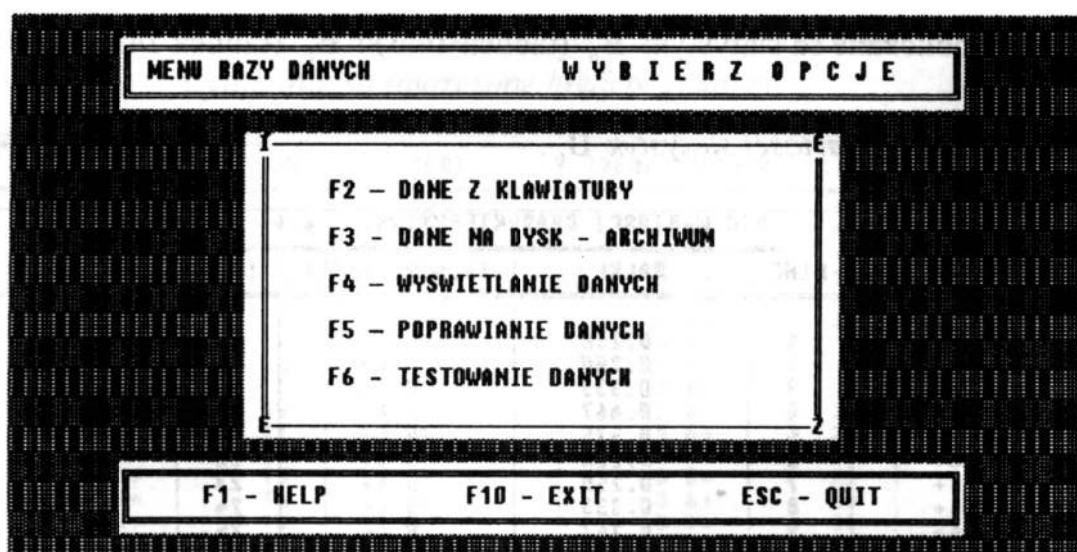
WYNIKI EKSPERYMENTU		Data: 1999.01.15			
Wysokosc chropowatosci powierzchni obrobionej nagniataniem. Przewidywany model - wielomian. Liczba zmiennych = 2.					
Nr dosw	Powt.1	Powt.2	Powt.3	Powt.4	Powt.5
Dosw. 1					
Dosw. 2					
Dosw. 3					
Dosw. 4					
Dosw. 5					
Dosw. 6					
Dosw. 7					
Dosw. 8					
Dosw. 9					
Dosw.10					
Dosw.11					
Dosw.12					
Dosw.13					

---- PRESS ANY KEY !!! ----

Rys. 14.17. Okno MACIERZ WYNIKÓW EKSPERYMENTU.

Jeśli istnieje konieczność powrotu do opracowanego planu eksperymentu należy przejść do menu PLAN EKSPERYMENTU i wybrać opcję DANE Z KLAWIATURY, a następnie wpisać nazwę pliku, w którym przechowywane są dane.

Po wypełnieniu macierzy planu eksperymentu należy te dane wprowadzić do programu. W tym celu należy powrócić do MENU GŁÓWNE i wybrać opcję F3 – BAZY DANYCH (rys. 14.4). W menu BAZY DANYCH istnieje możliwość wprowadzania danych z klawiatury - pierwsze wprowadzanie danych, archiwizowanie danych – tworzenie dodatkowego pliku z przedłużeniem ARV, wyświetlanie danych, poprawianie danych i ich testowanie (rys. 14.18).



rys. 14.10. Menu BAZY DANYCH.

Testowanie danych (opcja F6) obejmuje eliminację błędów grubych. W tym celu program uporządkowuje wprowadzone wyniki eksperymentu w ciągu liczb niemalejących (tablica 14.2).

Tablica 14.2. Macierz uporządkowanych wyników pomiarów.

WYDRUK MACIERZY UPORZĄDKOWANEJ DO OBLICZEN											
Z 1 1 =	0.500	Z 1 2 =	0.510	Z 1 3 =	0.520	Z 1 4 =	0.530				
Z 1 5 =	0.540	Z 2 1 =	0.050	Z 2 2 =	0.070	Z 2 3 =	0.080				
Z 2 4 =	0.090	Z 2 5 =	0.100	Z 3 1 =	1.090	Z 3 2 =	1.095				
Z 3 3 =	1.100	Z 3 4 =	1.110	Z 3 5 =	1.120	Z 4 1 =	0.415				
Z 4 2 =	0.415	Z 4 3 =	0.417	Z 4 4 =	0.423	Z 4 5 =	0.430				
Z 5 1 =	0.160	Z 5 2 =	0.165	Z 5 3 =	0.180	Z 5 4 =	0.185				
Z 5 5 =	0.200	Z 6 1 =	0.345	Z 6 2 =	0.350	Z 6 3 =	0.355				
Z 6 4 =	0.360	Z 6 5 =	0.365	Z 7 1 =	0.440	Z 7 2 =	0.445				
Z 7 3 =	0.450	Z 7 4 =	0.455	Z 7 5 =	0.460	Z 8 1 =	0.290				
Z 8 2 =	0.295	Z 8 3 =	0.300	Z 8 4 =	0.310	Z 8 5 =	0.320				
Z 9 1 =	0.110	Z 9 2 =	0.120	Z 9 3 =	0.125	Z 9 4 =	0.135				
Z 9 5 =	0.140	Z 10 1 =	0.240	Z 10 2 =	0.245	Z 10 3 =	0.250				
Z 10 4 =	0.260	Z 10 5 =	0.270	Z 11 1 =	0.490	Z 11 2 =	0.490				
Z 11 3 =	0.495	Z 11 4 =	0.500	Z 11 5 =	0.510	Z 12 1 =	0.090				
Z 12 2 =	0.095	Z 12 3 =	0.100	Z 12 4 =	0.110	Z 12 5 =	0.115				
Z 13 1 =	0.310	Z 13 2 =	0.320	Z 13 3 =	0.340	Z 13 4 =	0.355				
Z 13 5 =	0.360	Z 14 1 =	0.750	Z 14 2 =	0.760	Z 14 3 =	0.770				
Z 14 4 =	0.775	Z 14 5 =	0.780	Z 15 1 =	0.108	Z 15 2 =	0.115				
Z 15 3 =	0.120	Z 15 4 =	0.125	Z 15 5 =	0.130	Z 16 1 =	0.300				
Z 16 2 =	0.300	Z 16 3 =	0.305	Z 16 4 =	0.308	Z 16 5 =	0.310				
Z 17 1 =	0.165	Z 17 2 =	0.165	Z 17 3 =	0.170	Z 17 4 =	0.175				
Z 17 5 =	0.175	Z 18 1 =	0.265	Z 18 2 =	0.270	Z 18 3 =	0.275				
Z 18 4 =	0.280	Z 18 5 =	0.300	Z 19 1 =	0.160	Z 19 2 =	0.165				
Z 19 3 =	0.175	Z 19 4 =	0.180	Z 19 5 =	0.195	Z 20 1 =	0.225				
Z 20 2 =	0.230	Z 20 3 =	0.245	Z 20 4 =	0.260	Z 20 5 =	0.265				
Z 21 1 =	0.195	Z 21 2 =	0.200	Z 21 3 =	0.205	Z 21 4 =	0.210				
Z 21 5 =	0.215	Z 22 1 =	0.240	Z 22 2 =	0.250	Z 22 3 =	0.260				
Z 22 4 =	0.270	Z 22 5 =	0.280	Z 23 1 =	0.200	Z 23 2 =	0.218				
Z 23 3 =	0.220	Z 23 4 =	0.220	Z 23 5 =	0.230	Z 24 1 =	1.010				
Z 24 2 =	1.020	Z 24 3 =	1.020	Z 24 4 =	1.030	Z 24 5 =	1.040				
Z 25 1 =	0.415	Z 25 2 =	0.420	Z 25 3 =	0.420	Z 25 4 =	0.430				
Z 25 5 =	0.435	Z 26 1 =	0.120	Z 26 2 =	0.125	Z 26 3 =	0.130				
Z 26 4 =	0.130	Z 26 5 =	0.135	Z 27 1 =	0.580	Z 27 2 =	0.590				
Z 27 3 =	0.600	Z 27 4 =	0.610	Z 27 5 =	0.610	Z 28 1 =	0.160				
Z 28 2 =	0.165	Z 28 3 =	0.175	Z 28 4 =	0.180	Z 28 5 =	0.190				
Z 29 1 =	0.245	Z 29 2 =	0.250	Z 29 3 =	0.260	Z 29 4 =	0.270				
Z 29 5 =	0.280	Z 30 1 =	0.240	Z 30 2 =	0.250	Z 30 3 =	0.255				
Z 30 4 =	0.260	Z 30 5 =	0.265	Z 31 1 =	0.150	Z 31 2 =	0.155				
Z 31 3 =	0.160	Z 31 4 =	0.165	Z 31 5 =	0.170						

Następnie obliczane są statystyki  $B_6^+$  (tablica 14.3) i  $B_6^-$  (tablica 14.4).

Tablica 14.3. Wartości statystyk  $B_6^+$ .

OTO WARTOSCI CHARAKTERYSTYKI " B 6+ "					
IDENTYFIKETER	LINE	VALUE	IDENTYFIKETER	LINE	VALUE
B 6+	1	0.250	B 6+	17	0.000
B 6+	2	0.200	B 6+	18	0.571
B 6+	3	0.333	B 6+	19	0.429
B 6+	4	0.467	B 6+	20	0.125
B 6+	5	0.375	B 6+	21	0.250
B 6+	6	0.250	B 6+	22	0.250
B 6+	7	0.250	B 6+	23	0.333
B 6+	8	0.333	B 6+	24	0.333
B 6+	9	0.167	B 6+	25	0.250
B 6+	10	0.333	B 6+	26	0.333
B 6+	11	0.500	B 6+	27	0.000
B 6+	12	0.200	B 6+	28	0.333
B 6+	13	0.100	B 6+	29	0.286
B 6+	14	0.167	B 6+	30	0.200
B 6+	15	0.227	B 6+	31	0.250
B 6+	16	0.200			

Tablica 14.4. Wartości statystyk  $B_6^-$ .

OTO WARTOSCI CHARAKTERYSTYKI " B 6- "					
IDENTYFIKETER	LINE	VALUE	IDENTYFIKETER	LINE	VALUE
B 6-	1	-0.250	B 6-	17	0.000
B 6-	2	-0.400	B 6-	18	-0.143
B 6-	3	-0.167	B 6-	19	-0.143
B 6-	4	0.000	B 6-	20	-0.125
B 6-	5	-0.125	B 6-	21	-0.250
B 6-	6	-0.250	B 6-	22	-0.250
B 6-	7	-0.250	B 6-	23	-0.600
B 6-	8	-0.167	B 6-	24	-0.333
B 6-	9	-0.334	B 6-	25	-0.250
B 6-	10	-0.167	B 6-	26	-0.333
B 6-	11	0.000	B 6-	27	-0.333
B 6-	12	-0.200	B 6-	28	-0.167
B 6-	13	-0.200	B 6-	29	-0.143
B 6-	14	-0.333	B 6-	30	-0.400
B 6-	15	-0.318	B 6-	31	-0.250
B 6-	16	0.000			

Po wpisaniu wartości krytycznej testu (w przykładzie  $b_6^+ = 0.642$ ) (rys. 14.19), program podaje wyniki obarczone błędem grubym (napis VALID), które należy odrzucić. Jeśli takich wyników nie ma to pojawia się napis OK (tablica 14.5 i tablica 14.6).

I    E	PODAJ WARTOSC GRANICZNA " Bo (krytyczne) " : 0.642	F1 - HELP Z
--------------	--	----------------

Rys. 14.19. Dialog PODAJ WARTOŚĆ KRYTYCZNA  $B_6^+$ .

Tablica 14.5. Tablica prawidłowych wyników eksperymentu – maksymalne wyniki nie są obciążone błędem grubym.

IDENTYFIKETER	LINE	TEST	IDENTYFIKETER	LINE	TEST
B 6+	1	OK !!	B 6+	17	OK !!
B 6+	2	OK !!	B 6+	18	OK !!
B 6+	3	OK !!	B 6+	19	OK !!
B 6+	4	OK !!	B 6+	20	OK !!
B 6+	5	OK !!	B 6+	21	OK !!
B 6+	6	OK !!	B 6+	22	OK !!
B 6+	7	OK !!	B 6+	23	OK !!
B 6+	8	OK !!	B 6+	24	OK !!
B 6+	9	OK !!	B 6+	25	OK !!
B 6+	10	OK !!	B 6+	26	OK !!
B 6+	11	OK !!	B 6+	27	OK !!
B 6+	12	OK !!	B 6+	28	OK !!
B 6+	13	OK !!	B 6+	29	OK !!
B 6+	14	OK !!	B 6+	30	OK !!
B 6+	15	OK !!	B 6+	31	OK !!
B 6+	16	OK !!			

Tablica 14.6. Tablica prawidłowych wyników eksperymentu – minimalne wyniki nie są obciążone błędem grubym.

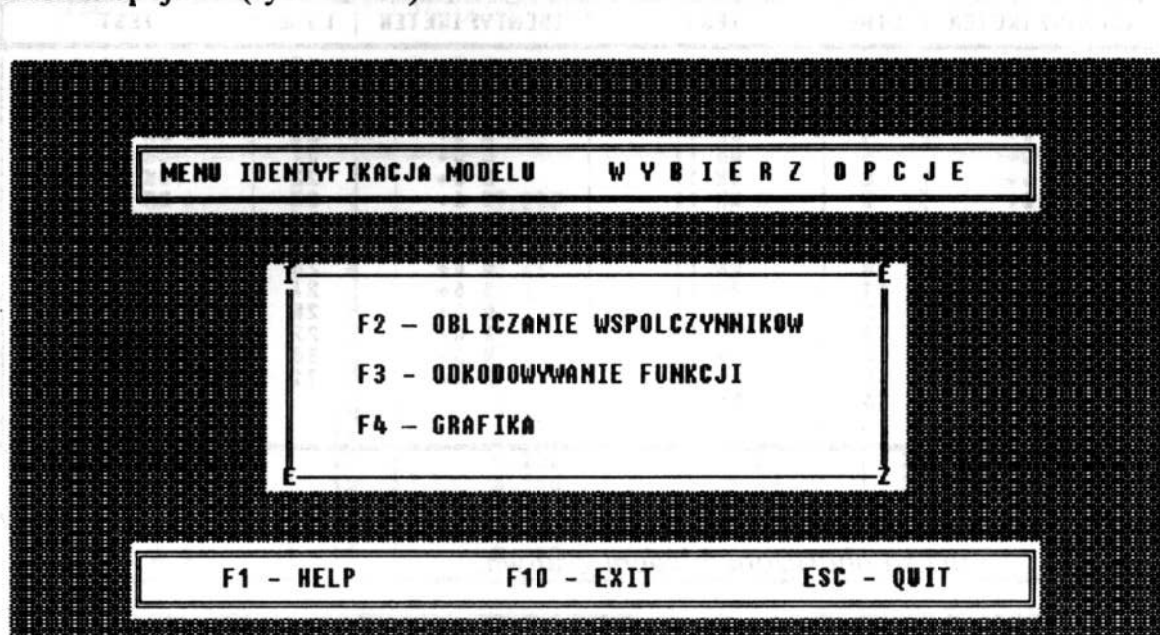
IDENTYFIKETER	LINE	TEST	IDENTYFIKETER	LINE	TEST
B 6-	1	OK !!	B 6-	17	OK !!
B 6-	2	OK !!	B 6-	18	OK !!
B 6-	3	OK !!	B 6-	19	OK !!
B 6-	4	OK !!	B 6-	20	OK !!
B 6-	5	OK !!	B 6-	21	OK !!
B 6-	6	OK !!	B 6-	22	OK !!
B 6-	7	OK !!	B 6-	23	OK !!
B 6-	8	OK !!	B 6-	24	OK !!
B 6-	9	OK !!	B 6-	25	OK !!
B 6-	10	OK !!	B 6-	26	OK !!
B 6-	11	OK !!	B 6-	27	OK !!
B 6-	12	OK !!	B 6-	28	OK !!
B 6-	13	OK !!	B 6-	29	OK !!
B 6-	14	OK !!	B 6-	30	OK !!
B 6-	15	OK !!	B 6-	31	OK !!
B 6-	16	OK !!			

Następnie program oblicza wariancje wyników w poszczególnych punktach programu badań oraz oblicza wartość testu Cochran (w przykładzie: 0,1033) (rys. 14.20), który jest testem jednorodności wariancji. Po wpisaniu wartości krytycznej testu (tutaj: 0,13475) podawane są informacje o jednorodności (SUCCESS TEST COCHRANA „OK.”), bądź nie wariancji.

WARIANCJA (max) = 0.00047	SUCCESS TEST COCHRANA " OK " !!
SUMA WARIANCJI = 0.00455	
TEST COCHRANA = 0.10330	
PODAJ WARTOSC KRYTYCZNA TESTU COCHRANA G(krytyczne) = 0.13475	

Rys. 14.20. Dialog JEDNORODNOŚCI WARIANCJI.

Kolejnym etapem identyfikacji jest powrót do MENU GŁÓWNE (rys. 14.4) i wybór opcji IDENTYFIKACJA MODELU. Pojawia się wówczas menu z trzema opcjami (rys. 14.21).



Rys. 14.21. Menu IDENTYFIKACJA MODELU.

Po wyborze opcji F2 następuje obliczanie współczynników w równaniu regresji i pojawiają się dwie tablice jak na rysunku 14.22. Lewa tablica jest pomocniczą, natomiast prawa zawiera wartości poszukiwanych współczynników.

WSPzer[ 0] = 10.4868	WSP fr[ 0] = 0.2214
WSPpar[ 1] = -3.4728	WSP fr[ 1] = -0.1445
WSPpar[ 2] = 2.6120	WSP fr[ 2] = 0.1087
WSPpar[ 3] = -0.1840	WSP fr[ 3] = -0.0077
WSPpar[ 4] = -1.1808	WSP fr[ 4] = -0.0491
WSPmno[ 5] = -1.0300	WSP fr[ 5] = -0.0644
WSPmno[ 6] = 0.6480	WSP fr[ 6] = 0.0405
WSPmno[ 7] = 2.0612	WSP fr[ 7] = 0.1288
WSPmno[ 8] = -1.0168	WSP fr[ 8] = -0.0635
WSPmno[ 9] = -0.7540	WSP fr[ 9] = -0.0471
WSPmno[10] = 0.8880	WSP fr[10] = 0.0555
WSPkwa[11] = 11.7052	WSP fr[11] = 0.1242
WSPkwa[12] = 8.8172	WSP fr[12] = 0.0339
WSPkwa[13] = 7.6532	WSP fr[13] = -0.0026
WSPkwa[14] = 7.5692	WSP fr[14] = -0.0052

Rys. 14.22. Tablica pomocnicza (lewa) i tablica współczynników równania regresji (prawa).



Następnym etapem jest sprawdzenie istotności obliczonych współczynników za pomocą testu t-Studenta. W tym celu program oblicza statystyki testu i porównuje je z wartością krytyczną oraz ustala te współczynniki, które są nieistotne w sensie statystycznym. Współczynniki te można pominąć w opcji pomijanie współczynników (tablica 14.7).

Tablica 14.7. Wyniki sprawdzenia istotności współczynników.

WSP. FUN. REGRESJI		TEST STUDENTA		WYNIK TESTU	
	SA		SA		
0.221426		14.122664		WSPOLCZYNNIK [ 0 ]	ZNACZACY
-0.144468		17.071759		WSPOLCZYNNIK [ 1 ]	ZNACZACY
0.108659		12.840251		WSPOLCZYNNIK [ 2 ]	ZNACZACY
-0.007654		0.904487		WSPOLCZYNNIK [ 3 ]	NIE ISTOTNY
-0.049122		5.804676		WSPOLCZYNNIK [ 4 ]	ZNACZACY
-0.064375		6.206220		WSPOLCZYNNIK [ 5 ]	ZNACZACY
0.040500		3.904558		WSPOLCZYNNIK [ 6 ]	ZNACZACY
0.128825		12.419709		WSPOLCZYNNIK [ 7 ]	ZNACZACY
-0.063550		6.126684		WSPOLCZYNNIK [ 8 ]	ZNACZACY
-0.047125		4.543260		WSPOLCZYNNIK [ 9 ]	ZNACZACY
0.055500		5.350600		WSPOLCZYNNIK [10]	ZNACZACY
0.124250		16.007163		WSPOLCZYNNIK [11]	ZNACZACY
0.033855		4.361610		WSPOLCZYNNIK [12]	ZNACZACY
-0.002578		0.332097		WSPOLCZYNNIK [13]	NIE ISTOTNY
-0.005207		0.670818		WSPOLCZYNNIK [14]	NIE ISTOTNY

Następnie program oblicza: wartości wyjść modelu, wartość współczynnika korelacji wielowymiarowej R i bada jego istotność. Po czym można przystąpić do wydrukowania otrzymanej funkcji w postaci zakodowanej:

**ROWNANIE REGRESJI W POSTACI ZAKODOWANEJ** **WYJECIOM**

$$\begin{aligned}
 R_a = & 0.22142575 - 0.14446822 * X_1 + 0.10865946 * X_2 + \\
 & + \boxed{-0.00765414 * X_3} - 0.04912154 * X_4 - 0.06437460 * X_1 * X_2 + \\
 & + 0.04050040 * X_1 * X_3 + 0.12882460 * X_1 * X_4 - 0.06354960 * X_2 * X_3 + \\
 & - 0.04712540 * X_2 * X_4 + 0.05549960 * X_3 * X_4 + 0.12424982 * X_1 * X_1 + \\
 & + 0.03385542 * X_2 * X_2 \quad \boxed{-0.00257778 * X_3 * X_3} \quad \boxed{-0.00520698 * X_4 * X_4}
 \end{aligned}$$

gdzie  $\boxed{\phantom{0}}$  oznacza współczynnik nieistotny w sensie statystycznym,

i odkodowanej:

**RÓWNANIE REGRESJI W POSTACI ODKODOWANEJ "WIELEMIAN"**

$$\begin{aligned}
 Ra = & 2.87989107 - 0.00217154 * F + 4.30994949 * pn + \\
 & - 0.27815107 * Un - 0.00462621 * I - 0.00070749 * F * pn + \\
 & + 0.00020030 * F * Un + 0.00000255 * F * I - 1.56912604 * pn * Un + \\
 & - 0.00465436 * pn * I + 0.00246665 * Un * I + 0.00000027 * F * F + \\
 & + 1.85763616 * pn * pn - 0.02864201 * Un * Un - 0.00000093 * I * I
 \end{aligned}$$

F - Siła, pn - posuw, Un - predkosć, I - nat prad.

Program kończy określenie przedziału ufności dla funkcji regresji:

$$\hat{Y} \pm 0,02568 \cdot \text{SQRT}(1,084 \sum_{i=1}^4 \tilde{x}_i^4 + 2,168 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 \tilde{x}_i^2 \tilde{x}_j^2 - 0,922 \sum_{i=1}^4 \tilde{x}_i^2 + 4,429) \cdot$$

Otrzymaną analityczną postać funkcji regresji można dalej wizualizować. W tym celu można wykorzystać jeden z opisanych wcześniej programów graficznych, np. TB-WYKRES lub WK-GRAF.

### 14.13. Podsumowanie

Proces planowania eksperymentu, opracowania otrzymanych wyników badań oraz identyfikacji obiektu można znacznie przyspieszyć i ulepszyć wykorzystując opracowane programy komputerowe. Bardzo skomplikowane obliczenia wykonywane dotychczas najczęściej za pomocą kalkulatorów są już przeszłością. Obecnie czas otrzymywania interesującego nas równania regresji skraca się z około jednego miesiąca do zaledwie kilku godzin. Zaoszczędzony czas można wykorzystać na niezbędne analizy otrzymanego modelu, poszukiwanie ekstremów oraz prezentację graficzną wyników. Zawarty w niniejszym rozdziale materiał pozwala na wybór odpowiedniego oprogramowania komputerowego. Przykład identyfikacji przy wykorzystaniu programu PLANEKS-STAT, zawarty na końcu rozdziału, może być wykorzystany do samodzielnej identyfikacji dowolnego obiektu badań.

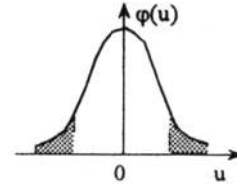


# 15

## TABLICE STATYSTYCZNE

### 15.1. Gęstość rozkładu normalnego<sup>1)</sup>

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad \varphi(-u) = \varphi(u)$$



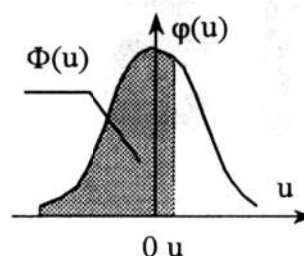
u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,398 942	0,398 922	0,398 862	0,398 763	0,398 623	0,398 444	0,398 225	0,397 966	0,397 668	0,397 330	0,0
0,1	0,396 953	0,396 536	0,396 080	0,395 585	0,395 052	0,394 479	0,393 868	0,393 219	0,392 531	0,391 806	0,1
0,2	0,391 043	0,390 242	0,389 404	0,388 529	0,387 617	0,386 668	0,385 683	0,384 663	0,383 606	0,382 515	0,2
0,3	0,381 388	0,380 226	0,379 031	0,377 801	0,376 537	0,375 240	0,373 911	0,372 548	0,371 154	0,369 728	0,3
0,4	0,368 270	0,366 782	0,365 263	0,363 714	0,362 135	0,360 527	0,358 890	0,357 225	0,355 533	0,353 812	0,4
0,5	0,352 065	0,350 292	0,348 493	0,346 668	0,344 818	0,342 944	0,341 046	0,339 124	0,337 180	0,335 213	0,5
0,6	0,333 225	0,331 215	0,329 184	0,327 133	0,325 062	0,322 972	0,320 864	0,318 737	0,316 593	0,314 432	0,6
0,7	0,312 254	0,310 060	0,307 851	0,305 627	0,303 389	0,301 137	0,298 872	0,296 595	0,294 305	0,292 004	0,7
0,8	0,289 692	0,287 369	0,285 036	0,282 694	0,280 344	0,277 985	0,275 618	0,273 244	0,270 864	0,268 477	0,8
0,9	0,266 085	0,263 688	0,261 286	0,258 881	0,256 471	0,254 059	0,251 644	0,249 228	0,246 809	0,244 390	0,9
1,0	0,241 971	0,239 551	0,237 132	0,234 714	0,232 297	0,229 882	0,227 470	0,225 060	0,222 653	0,220 251	1,0
1,1	0,217 852	0,215 458	0,213 069	0,210 686	0,208 308	0,205 936	0,203 571	0,201 214	0,198 863	0,196 520	1,1
1,2	0,194 186	0,191 860	0,189 543	0,187 235	0,184 937	0,182 649	0,180 371	0,178 104	0,175 847	0,173 602	1,2
1,3	0,171 369	0,169 147	0,166 937	0,164 740	0,162 555	0,160 383	0,158 225	0,156 080	0,153 948	0,151 831	1,3
1,4	0,149 727	0,147 639	0,145 564	0,143 505	0,141 460	0,139 431	0,137 417	0,135 418	0,133 435	0,131 468	1,4
1,5	0,129 518	0,127 583	0,125 665	0,123 763	0,121 878	0,120 009	0,118 157	0,116 323	0,114 505	0,112 704	1,5
1,6	0,110 921	0,109 155	0,107 406	0,105 675	0,103 961	0,102 265	0,100 586	0,98 925	0,97 282	0,95 657	1,6
1,7	0,094 049	0,092 459	0,090 887	0,089 333	0,087 796	0,086 277	0,084 776	0,083 293	0,081 828	0,080 380	1,7
1,8	0,078 950	0,077 538	0,076 143	0,074 766	0,073 407	0,072 065	0,070 740	0,069 433	0,068 144	0,066 871	1,8
1,9	0,065 616	0,064 378	0,063 157	0,061 952	0,060 765	0,059 595	0,058 441	0,057 304	0,056 183	0,055 079	1,9
2,0	0,053 991	0,052 919	0,051 864	0,050 824	0,049 800	0,048 792	0,047 800	0,046 823	0,045 861	0,044 915	2,0
2,1	0,043 984	0,043 067	0,042 166	0,041 280	0,040 408	0,039 550	0,038 707	0,037 878	0,037 063	0,036 262	2,1
2,2	0,035 475	0,034 710	0,033 941	0,033 194	0,032 460	0,031 740	0,031 032	0,030 337	0,029 655	0,028 985	2,2
2,3	0,028 327	0,027 682	0,027 048	0,026 426	0,025 817	0,025 218	0,024 631	0,024 056	0,023 491	0,022 937	2,3
2,4	0,022 395	0,021 862	0,021 341	0,020 829	0,020 328	0,019 837	0,019 356	0,018 885	0,018 423	0,017 971	2,4
2,5	0,017 528	0,017 095	0,016 670	0,016 254	0,015 848	0,015 449	0,015 060	0,014 678	0,014 305	0,013 940	2,5
2,6	0,013 583	0,013 234	0,012 892	0,012 558	0,012 232	0,011 912	0,011 600	0,011 295	0,010 997	0,010 706	2,6
2,7	0,010 421	0,010 143	0,009 871	0,009 606	0,009 347	0,009 094	0,008 846	0,008 605	0,008 370	0,008 140	2,7
2,8	0,007 915	0,007 697	0,007 483	0,007 274	0,007 071	0,006 873	0,006 679	0,006 491	0,006 307	0,006 127	2,8
2,9	0,005 953	0,005 782	0,005 616	0,005 454	0,005 296	0,005 143	0,004 993	0,004 847	0,004 705	0,004 567	2,9
3,0	0,004 432	0,004 301	0,004 173	0,004 049	0,003 928	0,003 810	0,003 695	0,003 584	0,003 475	0,003 370	3,0
3,1	0,003 267	0,003 167	0,003 070	0,002 975	0,002 884	0,002 794	0,002 707	0,002 623	0,002 541	0,002 461	3,1
3,2	0,002 384	0,002 309	0,002 236	0,002 165	0,002 096	0,002 029	0,001 964	0,001 901	0,001 840	0,001 780	3,2
3,3	0,001 723	0,001 667	0,001 612	0,001 560	0,001 508	0,001 459	0,001 411	0,001 364	0,001 319	0,001 275	3,3
3,4	0,001 232	0,001 191	0,001 151	0,001 112	0,001 075	0,001 038	0,001 003	0,0 <sup>9</sup> 689	0,0 <sup>9</sup> 358	0,0 <sup>9</sup> 037	3,4
3,5	0,0 <sup>8</sup> 727	0,0 <sup>8</sup> 426	0,0 <sup>8</sup> 135	0,0 <sup>7</sup> 853	0,0 <sup>7</sup> 581	0,0 <sup>7</sup> 317	0,0 <sup>7</sup> 061	0,0 <sup>6</sup> 814	0,0 <sup>6</sup> 575	0,0 <sup>6</sup> 343	3,5
3,6	0,0 <sup>6</sup> 119	0,0 <sup>5</sup> 902	0,0 <sup>5</sup> 693	0,0 <sup>5</sup> 490	0,0 <sup>5</sup> 294	0,0 <sup>5</sup> 105	0,0 <sup>4</sup> 921	0,0 <sup>4</sup> 744	0,0 <sup>4</sup> 573	0,0 <sup>4</sup> 408	3,6
3,7	0,0 <sup>4</sup> 248	0,0 <sup>4</sup> 093	0,0 <sup>3</sup> 944	0,0 <sup>3</sup> 800	0,0 <sup>3</sup> 661	0,0 <sup>3</sup> 526	0,0 <sup>3</sup> 396	0,0 <sup>3</sup> 271	0,0 <sup>3</sup> 149	0,0 <sup>3</sup> 032	3,7
3,8	0,0 <sup>2</sup> 919	0,0 <sup>2</sup> 810	0,0 <sup>2</sup> 705	0,0 <sup>2</sup> 604	0,0 <sup>2</sup> 506	0,0 <sup>2</sup> 411	0,0 <sup>2</sup> 320	0,0 <sup>2</sup> 232	0,0 <sup>2</sup> 147	0,0 <sup>2</sup> 065	3,8
3,9	0,0 <sup>1</sup> 987	0,0 <sup>1</sup> 910	0,0 <sup>1</sup> 837	0,0 <sup>1</sup> 766	0,0 <sup>1</sup> 698	0,0 <sup>1</sup> 633	0,0 <sup>1</sup> 569	0,0 <sup>1</sup> 508	0,0 <sup>1</sup> 449	0,0 <sup>1</sup> 393	3,9
4,0	0,0 <sup>1</sup> 338	0,0 <sup>1</sup> 286	0,0 <sup>1</sup> 235	0,0 <sup>1</sup> 186	0,0 <sup>1</sup> 140	0,0 <sup>1</sup> 094	0,0 <sup>1</sup> 051	0,0 <sup>1</sup> 009	0,0 <sup>9</sup> 687	0,0 <sup>9</sup> 299	4,0
4,1	0,0 <sup>8</sup> 926	0,0 <sup>8</sup> 567	0,0 <sup>8</sup> 222	0,0 <sup>7</sup> 890	0,0 <sup>7</sup> 570	0,0 <sup>7</sup> 263	0,0 <sup>6</sup> 967	0,0 <sup>6</sup> 683	0,0 <sup>6</sup> 410	0,0 <sup>6</sup> 147	4,1
4,2	0,0 <sup>5</sup> 894	0,0 <sup>5</sup> 652	0,0 <sup>5</sup> 418	0,0 <sup>5</sup> 194	0,0 <sup>4</sup> 979	0,0 <sup>4</sup> 772	0,0 <sup>4</sup> 573	0,0 <sup>4</sup> 382	0,0 <sup>4</sup> 199	0,0 <sup>4</sup> 023	4,2
4,3	0,0 <sup>3</sup> 854	0,0 <sup>3</sup> 691	0,0 <sup>3</sup> 535	0,0 <sup>3</sup> 386	0,0 <sup>3</sup> 242	0,0 <sup>3</sup> 104	0,0 <sup>2</sup> 972	0,0 <sup>2</sup> 845	0,0 <sup>2</sup> 723	0,0 <sup>2</sup> 606	4,3
4,4	0,0 <sup>2</sup> 494	0,0 <sup>2</sup> 387	0,0 <sup>2</sup> 284	0,0 <sup>2</sup> 185	0,0 <sup>2</sup> 090	0,0 <sup>1</sup> 999	0,0 <sup>1</sup> 912	0,0 <sup>1</sup> 829	0,0 <sup>1</sup> 749	0,0 <sup>1</sup> 672	4,4
4,5	0,0 <sup>1</sup> 598	0,0 <sup>1</sup> 528	0,0 <sup>1</sup> 461	0,0 <sup>1</sup> 396	0,0 <sup>1</sup> 334	0,0 <sup>1</sup> 275	0,0 <sup>1</sup> 218	0,0 <sup>1</sup> 164	0,0 <sup>1</sup> 112	0,0 <sup>1</sup> 062	4,5
4,6	0,0 <sup>1</sup> 014	0,0 <sup>9</sup> 684	0,0 <sup>9</sup> 248	0,0 <sup>8</sup> 830	0,0 <sup>8</sup> 430	0,0 <sup>8</sup> 047	0,0 <sup>7</sup> 681	0,0 <sup>7</sup> 331	0,0 <sup>6</sup> 996	0,0 <sup>6</sup> 676	4,6
4,7	0,0 <sup>6</sup> 370	0,0 <sup>6</sup> 077	0,0 <sup>5</sup> 797	0,0 <sup>5</sup> 530	0,0 <sup>5</sup> 274	0,0 <sup>5</sup> 030	0,0 <sup>4</sup> 796	0,0 <sup>4</sup> 573	0,0 <sup>4</sup> 360	0,0 <sup>4</sup> 156	4,7
4,8	0,0 <sup>3</sup> 961	0,0 <sup>3</sup> 775	0,0 <sup>3</sup> 598	0,0 <sup>3</sup> 428	0,0 <sup>3</sup> 267	0,0 <sup>3</sup> 112	0,0 <sup>2</sup> 965	0,0 <sup>2</sup> 824	0,0 <sup>2</sup> 690	0,0 <sup>2</sup> 561	4,8
4,9	0,0 <sup>2</sup> 439	0,0 <sup>2</sup> 322	0,0 <sup>2</sup> 211	0,0 <sup>2</sup> 105	0,0 <sup>2</sup> 003	0,0 <sup>1</sup> 907	0,0 <sup>1</sup> 814	0,0 <sup>1</sup> 727	0,0 <sup>1</sup> 643	0,0 <sup>1</sup> 563	4,9

<sup>1)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.2. Dystrybuanta rozkładu normalnego<sup>2)</sup>

$$P(U < u) = \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \varphi(u) du = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du,$$

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,500 000	0,503 989	0,507 978	0,511 966	0,515 953	0,519 939	0,523 922	0,527 903	0,531 881	0,535 856	0,0
0,1	0,539 828	0,543 795	0,547 758	0,551 717	0,555 670	0,559 618	0,563 559	0,567 495	0,571 424	0,575 345	0,1
0,2	0,579 260	0,583 166	0,587 064	0,590 954	0,594 835	0,598 706	0,602 568	0,606 420	0,610 261	0,614 092	0,2
0,3	0,617 911	0,621 720	0,625 516	0,629 300	0,633 072	0,636 831	0,640 576	0,644 309	0,648 027	0,651 732	0,3
0,4	0,655 422	0,659 097	0,662 757	0,666 402	0,670 031	0,673 645	0,677 242	0,680 822	0,684 386	0,687 933	0,4
0,5	0,691 462	0,694 974	0,698 468	0,701 944	0,705 401	0,708 840	0,712 260	0,715 661	0,719 043	0,722 405	0,5
0,6	0,725 747	0,729 069	0,732 371	0,735 653	0,738 914	0,742 154	0,745 373	0,748 571	0,751 748	0,754 903	0,6
0,7	0,758 036	0,761 148	0,764 238	0,767 305	0,770 350	0,773 373	0,776 373	0,779 350	0,782 305	0,785 236	0,7
0,8	0,788 145	0,791 030	0,793 892	0,796 731	0,799 546	0,802 337	0,805 105	0,807 850	0,810 570	0,813 267	0,8
0,9	0,815 940	0,818 589	0,821 214	0,823 814	0,826 391	0,828 944	0,831 472	0,833 977	0,836 457	0,838 913	0,9
1,0	0,841 345	0,843 752	0,846 136	0,848 495	0,850 830	0,853 141	0,855 428	0,857 690	0,859 929	0,862 143	1,0
1,1	0,864 334	0,866 500	0,868 643	0,870 762	0,872 857	0,874 928	0,876 976	0,879 000	0,881 000	0,882 977	1,1
1,2	0,884 930	0,886 861	0,888 768	0,890 651	0,892 512	0,894 350	0,896 165	0,897 958	0,899 727	0,901 475	1,2
1,3	0,903 200	0,904 902	0,906 582	0,908 241	0,909 877	0,911 492	0,913 085	0,914 657	0,916 207	0,917 736	1,3
1,4	0,919 243	0,920 730	0,922 196	0,923 641	0,925 066	0,926 471	0,927 855	0,929 219	0,930 563	0,931 888	1,4
1,5	0,933 193	0,934 478	0,935 745	0,936 992	0,938 220	0,939 429	0,940 620	0,941 792	0,942 947	0,944 083	1,5
1,6	0,945 201	0,946 301	0,947 384	0,948 449	0,949 497	0,950 529	0,951 543	0,952 540	0,953 521	0,954 486	1,6
1,7	0,955 435	0,956 367	0,957 284	0,958 185	0,959 070	0,959 941	0,960 796	0,961 636	0,962 462	0,963 273	1,7
1,8	0,964 070	0,964 852	0,965 620	0,966 375	0,967 116	0,967 843	0,968 557	0,969 258	0,969 946	0,970 621	1,8
1,9	0,971 283	0,971 933	0,972 571	0,973 197	0,973 810	0,974 412	0,975 002	0,975 581	0,976 148	0,976 705	1,9
2,0	0,977 250	0,977 784	0,978 308	0,978 822	0,979 325	0,979 818	0,980 301	0,980 774	0,981 237	0,981 691	2,0
2,1	0,982 136	0,982 571	0,982 997	0,983 414	0,983 823	0,984 222	0,984 614	0,984 997	0,985 371	0,985 738	2,1
2,2	0,986 097	0,986 447	0,986 791	0,987 126	0,987 455	0,987 776	0,988 089	0,988 396	0,988 696	0,988 989	2,2
2,3	0,989 276	0,989 556	0,989 830	0,990 097	0,990 358	0,990 613	0,990 863	0,991 106	0,991 344	0,991 576	2,3
2,4	0,991 802	0,992 024	0,992 240	0,992 451	0,992 656	0,992 857	0,993 053	0,993 244	0,993 431	0,993 613	2,4
2,5	0,993 790	0,993 963	0,994 132	0,994 297	0,994 457	0,994 614	0,994 766	0,994 915	0,995 060	0,995 201	2,5
2,6	0,995 339	0,995 473	0,995 604	0,995 731	0,995 855	0,995 975	0,996 093	0,996 207	0,996 319	0,996 427	2,6
2,7	0,996 533	0,996 636	0,996 736	0,996 833	0,996 928	0,997 020	0,997 110	0,997 197	0,997 282	0,997 365	2,7
2,8	0,997 445	0,997 523	0,997 599	0,997 673	0,997 744	0,997 814	0,997 882	0,997 948	0,998 012	0,998 074	2,8
2,9	0,998 134	0,998 193	0,998 250	0,998 305	0,998 359	0,998 411	0,998 462	0,998 511	0,998 559	0,998 605	2,9
3,0	0,998 650	0,998 694	0,998 736	0,998 777	0,998 817	0,998 856	0,998 893	0,998 930	0,998 965	0,998 999	3,0
3,1	0,999 0324	0,999 0646	0,999 0957	0,999 1260	0,999 1553	0,999 1836	0,999 2112	0,999 2378	0,999 2636	0,999 2886	3,1
3,2	0,999 3129	0,999 3363	0,999 3590	0,999 3810	0,999 4024	0,999 4230	0,999 4429	0,999 4623	0,999 4810	0,999 4991	3,2
3,3	0,999 5166	0,999 5335	0,999 5499	0,999 5658	0,999 5811	0,999 5959	0,999 6103	0,999 6242	0,999 6376	0,999 6505	3,3
3,4	0,999 6631	0,999 6752	0,999 6869	0,999 6982	0,999 7091	0,999 7197	0,999 7299	0,999 7398	0,999 7493	0,999 7585	3,4
3,5	0,999 7674	0,999 7759	0,999 7842	0,999 7922	0,999 7999	0,999 8074	0,999 8146	0,999 8215	0,999 8282	0,999 8347	3,5
3,6	0,999 8409	0,999 8469	0,999 8527	0,999 8583	0,999 8637	0,999 8689	0,999 8739	0,999 8787	0,999 8834	0,999 8879	3,6
3,7	0,999 8922	0,999 8964	0,999 90039	0,999 90426	0,999 90799	0,999 91158	0,999 91504	0,999 91858	0,999 92159	0,999 92468	3,7
3,8	0,999 92765	0,999 93052	0,999 93327	0,999 93593	0,999 93848	0,999 94094	0,999 94331	0,999 94558	0,999 94777	0,999 94988	3,8
3,9	0,999 95190	0,999 95385	0,999 95573	0,999 95753	0,999 95926	0,999 96092	0,999 96253	0,999 96406	0,999 96554	0,999 96696	3,9
4,0	0,999 96833	0,999 96964	0,999 97090	0,999 97211	0,999 97327	0,999 97439	0,999 97546	0,999 97649	0,999 97748	0,999 97843	4,0
4,1	0,999 97934	0,999 98022	0,999 98106	0,999 98186	0,999 98263	0,999 98338	0,999 98409	0,999 98477	0,999 98542	0,999 98605	4,1
4,2	0,999 98665	0,999 98723	0,999 98778	0,999 98832	0,999 98882	0,999 98931	0,999 98978	0,999 990226	0,999 990655	0,999 991066	4,2
4,3	0,999 991460	0,999 991837	0,999 992199	0,999 992545	0,999 992876	0,999 993193	0,999 993497	0,999 993788	0,999 994066	0,999 994332	4,3
4,4	0,999 994587	0,999 994831	0,999 995065	0,999 995288	0,999 995502	0,999 995706	0,999 995902	0,999 996089	0,999 996268	0,999 996439	4,4
4,5	0,999 996602	0,999 996759	0,999 996908	0,999 997051	0,999 997187	0,999 997318	0,999 997442	0,999 997561	0,999 997675	0,999 997784	4,5
4,6	0,999 997888	0,999 997987	0,999 998081	0,999 998172	0,999 998258	0,999 998340	0,999 998419	0,999 998494	0,999 998566	0,999 998634	4,6
4,7	0,999 998699	0,999 998761	0,999 998821	0,999 998877	0,999 998931	0,999 998983	0,999 9990320	0,999 9990789	0,999 9991235	0,999 9991661	4,7
4,8	0,999 9992067	0,999 9992453	0,999 9992822	0,999 9993173	0,999 9993508	0,999 9993827	0,999 9994131	0,999 9994420	0,999 9994696	0,999 9994958	4,8
4,9	0,999 9995208	0,999 9995446	0,999 9995673	0,999 9995889	0,999 9996094	0,999 9996289	0,999 9996475	0,999 9996652	0,999 9996821	0,999 9996981	4,9

<sup>2)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.3. Kwantyle rozkładu normalnego<sup>3)</sup>

$$u_p = \Phi^{-1}(p)$$

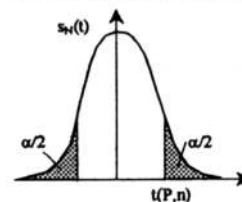
p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	p
0,50	0,000 000	0,002 507	0,005 013	0,007 520	0,010 027	0,012 533	0,015 040	0,017 547	0,020 054	0,022 562	0,50
0,51	0,025 069	0,027 576	0,030 084	0,032 592	0,035 100	0,037 608	0,040 117	0,042 626	0,045 135	0,047 644	0,51
0,52	0,050 154	0,052 664	0,055 174	0,057 684	0,060 195	0,062 707	0,065 219	0,067 731	0,070 243	0,072 756	0,52
0,53	0,075 270	0,077 784	0,080 298	0,082 813	0,085 329	0,087 845	0,090 361	0,092 879	0,095 396	0,097 915	0,53
0,54	0,100 434	0,102 953	0,105 474	0,107 995	0,110 516	0,113 039	0,115 562	0,118 085	0,120 610	0,123 135	0,54
0,55	0,125 661	0,128 188	0,130 716	0,133 245	0,135 774	0,138 304	0,140 835	0,143 367	0,145 900	0,148 434	0,55
0,56	0,150 969	0,153 505	0,156 042	0,158 580	0,161 119	0,163 658	0,166 199	0,168 741	0,171 285	0,173 829	0,56
0,57	0,176 374	0,178 921	0,181 468	0,184 017	0,186 567	0,189 118	0,191 671	0,194 225	0,196 780	0,199 336	0,57
0,58	0,201 893	0,204 452	0,207 013	0,209 574	0,212 137	0,214 702	0,217 267	0,219 835	0,222 403	0,224 973	0,58
0,59	0,227 545	0,230 118	0,232 693	0,235 269	0,237 847	0,240 426	0,243 007	0,245 590	0,248 174	0,250 760	0,59
0,60	0,253 347	0,255 936	0,258 527	0,261 120	0,263 714	0,266 311	0,268 909	0,271 508	0,274 110	0,276 714	0,60
0,61	0,279 319	0,281 926	0,284 536	0,287 147	0,289 760	0,292 375	0,294 992	0,297 611	0,300 232	0,302 855	0,61
0,62	0,305 481	0,308 108	0,310 738	0,313 369	0,316 003	0,318 639	0,321 278	0,323 918	0,326 561	0,329 206	0,62
0,63	0,331 853	0,334 503	0,337 155	0,339 809	0,342 466	0,345 126	0,347 787	0,350 451	0,353 118	0,355 787	0,63
0,64	0,358 459	0,361 133	0,363 810	0,366 489	0,369 171	0,371 856	0,374 544	0,377 234	0,379 926	0,382 622	0,64
0,65	0,385 320	0,388 022	0,390 726	0,393 433	0,396 142	0,398 855	0,401 571	0,404 289	0,407 011	0,409 735	0,65
0,66	0,412 463	0,415 194	0,417 928	0,420 665	0,423 405	0,426 148	0,428 894	0,431 644	0,434 397	0,437 154	0,66
0,67	0,439 913	0,442 676	0,445 443	0,448 212	0,450 986	0,453 762	0,456 542	0,459 326	0,462 113	0,464 904	0,67
0,68	0,467 699	0,470 497	0,473 299	0,476 104	0,478 914	0,481 727	0,484 544	0,487 365	0,490 189	0,493 018	0,68
0,69	0,495 850	0,498 687	0,501 527	0,504 372	0,507 221	0,510 073	0,512 930	0,515 792	0,518 657	0,521 527	0,69
0,70	0,524 401	0,527 279	0,530 161	0,533 049	0,535 940	0,538 836	0,541 737	0,544 642	0,547 551	0,550 466	0,70
0,71	0,553 385	0,556 308	0,559 237	0,562 170	0,565 108	0,568 052	0,570 999	0,573 952	0,576 910	0,579 873	0,71
0,72	0,582 842	0,585 815	0,588 793	0,591 777	0,594 766	0,597 760	0,600 760	0,603 765	0,606 775	0,609 791	0,72
0,73	0,612 813	0,615 840	0,618 873	0,621 912	0,624 956	0,628 006	0,631 062	0,634 124	0,637 192	0,640 266	0,73
0,74	0,643 345	0,646 431	0,649 524	0,652 622	0,655 727	0,658 838	0,661 955	0,665 079	0,668 209	0,671 346	0,74
0,75	0,674 490	0,677 640	0,680 797	0,683 961	0,687 131	0,690 309	0,693 493	0,696 685	0,699 884	0,703 089	0,75
0,76	0,706 303	0,709 523	0,712 751	0,715 986	0,719 229	0,722 479	0,725 737	0,729 003	0,732 276	0,735 558	0,76
0,77	0,738 847	0,742 144	0,745 450	0,748 763	0,752 085	0,755 415	0,758 754	0,762 101	0,765 456	0,768 820	0,77
0,78	0,772 193	0,775 575	0,778 966	0,782 365	0,785 774	0,789 192	0,792 619	0,796 055	0,799 501	0,802 956	0,78
0,79	0,806 421	0,809 896	0,813 380	0,816 875	0,820 379	0,823 894	0,827 418	0,830 953	0,834 499	0,838 055	0,79
0,80	0,841 621	0,845 199	0,848 787	0,852 386	0,855 996	0,859 617	0,863 250	0,866 894	0,870 550	0,874 217	0,80
0,81	0,877 896	0,881 587	0,885 290	0,889 006	0,892 733	0,896 473	0,900 226	0,903 991	0,907 770	0,911 561	0,81
0,82	0,915 365	0,919 183	0,923 014	0,926 859	0,930 717	0,934 589	0,938 476	0,942 376	0,946 291	0,950 221	0,82
0,83	0,954 165	0,958 124	0,962 099	0,966 088	0,970 093	0,974 114	0,978 150	0,982 203	0,986 271	0,990 356	0,83
0,84	0,994 458	0,998 576	1,002 712	1,006 964	1,011 034	1,015 222	1,019 428	1,023 651	1,027 893	1,032 154	0,84
0,85	1,036 433	1,040 732	1,045 050	1,049 387	1,053 744	1,058 122	1,062 519	1,066 938	1,071 377	1,075 837	0,85
0,86	1,080 319	1,084 823	1,089 349	1,093 897	1,098 468	1,103 063	1,107 680	1,112 321	1,116 987	1,121 677	0,86
0,87	1,126 391	1,131 131	1,135 896	1,140 687	1,145 505	1,150 349	1,155 221	1,160 120	1,165 047	1,170 002	0,87
0,88	1,174 987	1,180 001	1,185 044	1,190 118	1,195 223	1,200 359	1,205 527	1,210 727	1,215 960	1,221 227	0,88
0,89	1,226 528	1,231 864	1,237 235	1,242 641	1,248 085	1,253 565	1,259 084	1,264 641	1,270 238	1,275 874	0,89
0,90	1,281 552	1,287 271	1,293 032	1,298 837	1,304 685	1,310 579	1,316 519	1,322 505	1,328 539	1,334 622	0,90
0,91	1,340 755	1,346 939	1,353 174	1,359 463	1,365 806	1,372 204	1,378 659	1,385 172	1,391 744	1,398 377	0,91
0,92	1,405 072	1,411 830	1,418 654	1,425 544	1,432 503	1,439 531	1,446 632	1,453 806	1,461 056	1,468 384	0,92
0,93	1,475 791	1,483 280	1,490 853	1,498 513	1,506 262	1,514 102	1,522 036	1,530 068	1,538 199	1,546 433	0,93
0,94	1,554 774	1,563 224	1,571 787	1,580 467	1,589 268	1,598 193	1,607 248	1,616 436	1,625 763	1,635 234	0,94
0,95	1,644 854	1,654 628	1,664 563	1,674 665	1,684 941	1,695 398	1,706 043	1,716 886	1,727 934	1,739 198	0,95
0,96	1,750 686	1,762 410	1,774 382	1,786 613	1,799 118	1,811 911	1,825 007	1,837 424	1,851 180	1,866 296	0,96
0,97	1,880 794	1,895 698	1,911 036	1,926 837	1,943 134	1,959 964	1,977 368	1,995 393	2,014 091	2,033 520	0,97
0,98	2,053 749	2,074 855	2,096 927	2,120 072	2,144 411	2,170 090	2,197 286	2,226 212	2,257 129	2,290 368	0,98
0,99	2,326 348	2,365 618	2,408 916	2,457 263	2,512 144	2,575 829	2,652 070	2,747 781	2,878 162	3,090 232	0,99

<sup>3)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.4. Wartości krytyczne  $t(P, n)$  rozkładu  $t$  Studenta<sup>4)</sup>

$$P\{|t_n| > t(P, n)\} = \int_{t(P, n)}^{\infty} s_N(t) dt = \alpha$$



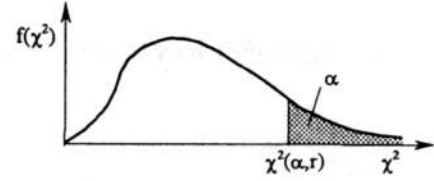
Tablica podaje wartości krytyczne  $t(P, n)$  w funkcji poziomu istotności  $P$  i liczby stopni swobody  $n$ .

$n \backslash P$	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001	$P \backslash n$
1	1,0000	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,6192	1
2	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991	2
3	0,7649	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240	3
4	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103	4
5	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688	5
6	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588	6
7	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079	7
8	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413	8
9	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809	9
10	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869	10
11	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370	11
12	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178	12
13	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208	13
14	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405	14
15	0,6912	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728	15
16	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150	16
17	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651	17
18	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216	18
19	0,6876	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834	19
20	0,6870	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495	20
21	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193	21
22	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921	22
23	0,6853	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676	23
24	0,6848	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7455	24
25	0,6844	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251	25
26	0,6840	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066	26
27	0,6837	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896	27
28	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739	28
29	0,6830	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594	29
30	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460	30
32	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218	32
34	0,6818	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007	34
36	0,6814	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	3,5821	36
38	0,6810	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657	38
40	0,6807	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510	40
42	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377	42
44	0,6801	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258	44
46	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150	46
48	0,6796	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051	48
50	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960	50
55	0,6790	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2561	3,4764	55
60	0,6786	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602	60
65	0,6786	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,9060	3,2204	3,4466	65
70	0,6783	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350	70
80	0,6780	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163	80
90	0,6776	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019	90
100	0,6772	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905	100
120	0,6770	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	2,8599	3,1595	3,3735	120
150	0,6765	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8492	3,1455	3,3566	150
200	0,6761	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398	200
250	0,6757	1,2849	1,6510	1,9695	2,3414	2,5956	2,8322	3,1232	3,3299	250
300	0,6753	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233	300
400	0,6751	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150	400
500	0,6750	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	2,8195	3,1066	3,3101	500
$\infty$	0,6745	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	2,8070	3,0902	3,2905	$\infty$

<sup>4</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.5. Wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, r)$  rozkładu  $\chi^2$ <sup>5)</sup>

$$P\{\chi_r^2 \geq \chi_r^2(\alpha, r)\} = \int_{\chi_r^2(\alpha, r)}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2 = \alpha$$



Tablica podaje wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, r)$  testu  $\chi^2$  w funkcji poziomu istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody  $r$ .

$r \backslash \alpha$	0,9995	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	$\alpha \backslash r$
1	0,0 <sup>3</sup> 393	0,0 <sup>5</sup> 157	0,0 <sup>4</sup> 393	0,0 <sup>3</sup> 157	0,0 <sup>3</sup> 982	0,0 <sup>2</sup> 393	0,0158	0,0642	0,148	0,275	1
2	0,0 <sup>2</sup> 100	0,0 <sup>2</sup> 200	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,022	2
3	0,0153	0,0243	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	1,869	3
4	0,0639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	2,753	4
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	3,655	5
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	4,570	6
7	0,485	0,598	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	5,493	7
8	0,710	0,857	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	6,423	8
9	0,972	1,153	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	7,357	9
10	1,265	1,479	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	8,295	10
11	1,587	1,834	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	9,237	11
12	1,934	2,214	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	10,182	12
13	2,305	2,617	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	11,129	13
14	2,697	3,041	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	12,079	14
15	3,108	3,483	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	13,030	15
16	3,536	3,942	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	13,983	16
17	3,980	4,416	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	14,937	17
18	4,439	4,905	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	15,893	18
19	4,912	5,407	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	13,716	15,352	16,850	19
20	5,398	5,921	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	14,578	16,266	17,809	20
21	5,896	6,447	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	15,445	17,182	18,768	21
22	6,404	6,983	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	16,314	18,101	19,729	22
23	6,924	7,529	9,260	10,196	11,688	13,091	14,848	17,187	19,021	20,690	23
24	7,453	8,085	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	18,062	19,943	21,652	24
25	7,991	8,649	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	18,940	20,867	22,616	25
26	8,538	9,222	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	19,820	21,792	23,579	26
27	9,093	9,803	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114	20,703	22,719	24,544	27
28	9,656	10,391	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	21,588	23,647	25,509	28
29	10,227	10,986	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	22,475	24,577	26,475	29
30	10,804	11,588	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	23,364	25,508	27,442	30
31	11,389	12,196	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	24,255	26,440	28,409	31
32	11,979	12,811	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	25,148	27,373	29,376	32
33	12,576	13,431	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	26,042	28,307	30,344	33
34	13,176	14,057	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	26,938	29,242	31,313	34
35	13,788	14,688	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	27,836	30,178	32,282	35
36	14,401	15,324	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	28,735	31,115	33,252	36
37	15,020	15,965	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	29,635	32,053	34,222	37
38	15,644	16,611	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	30,537	32,992	35,192	38
39	16,273	17,262	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	31,441	33,932	36,163	39
40	16,906	17,916	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	32,345	34,872	37,134	40
41	17,544	18,575	21,421	22,906	25,215	27,326	29,907	33,251	35,813	38,105	41
42	18,185	19,238	22,138	23,650	25,909	28,144	30,765	34,157	36,755	39,077	42
43	18,832	19,905	22,859	24,398	26,785	28,965	31,625	35,065	37,698	40,050	43
44	19,482	20,576	23,584	25,148	27,575	29,787	32,487	35,974	38,641	41,022	44
45	20,137	21,251	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	36,884	39,585	41,955	45
46	20,794	21,929	25,041	26,657	29,160	31,439	34,215	37,795	40,529	42,968	46
47	21,456	22,610	25,775	27,416	29,956	32,268	35,081	38,708	41,474	43,942	47
48	22,121	23,295	26,511	28,177	30,755	33,098	35,949	39,621	42,420	44,915	48
49	22,789	23,983	27,249	28,941	31,555	33,930	36,818	40,534	43,366	45,889	49
50	23,461	24,674	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	41,449	44,313	46,864	50
51	24,136	25,368	28,735	30,475	33,162	35,600	38,560	42,365	45,261	47,838	51
52	24,814	26,065	29,481	31,246	33,968	36,437	39,433	43,281	46,209	48,813	52
53	25,495	26,765	30,230	32,018	34,776	37,276	40,308	44,199	47,157	49,788	53
54	26,179	27,468	30,981	32,793	35,586	38,116	41,183	45,117	48,106	50,764	54
55	26,866	28,173	31,735	33,570	36,398	38,958	42,060	46,036	49,054	51,739	55

<sup>5)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



c.d. wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, r)$  rozkładu  $\chi^2$  <sup>6)</sup>

$\alpha \backslash r$	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	$\alpha \backslash r$
1	0,455	0,708	1,074	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828	12,116	1
2	1,386	1,833	2,408	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816	15,202	2
3	2,366	2,946	3,665	4,642	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266	17,730	3
4	3,357	4,045	4,878	5,989	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467	19,997	4
5	4,351	5,132	6,064	7,289	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	20,515	22,105	5
6	5,348	6,211	7,231	8,558	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458	24,103	6
7	6,346	7,283	8,383	9,803	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322	26,018	7
8	7,344	8,351	9,524	11,030	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125	27,868	8
9	8,343	9,414	10,656	12,242	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877	29,666	9
10	9,342	10,473	11,781	13,442	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588	31,420	10
11	10,341	11,530	12,899	14,631	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264	33,136	11
12	11,340	12,584	14,011	15,812	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300	32,909	34,821	12
13	12,340	13,636	15,119	16,985	19,812	22,362	24,735	27,688	29,819	34,528	36,478	13
14	13,339	14,685	16,222	18,151	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123	38,109	14
15	14,339	15,733	17,322	19,311	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697	39,719	15
16	15,338	16,780	18,418	20,465	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252	41,308	16
17	16,338	17,824	19,511	21,615	24,769	27,578	30,191	33,409	35,718	40,790	42,879	17
18	17,338	18,868	20,601	22,760	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312	44,434	18
19	18,338	19,910	21,689	23,900	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820	45,973	19
20	19,337	20,951	22,775	25,038	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315	47,498	20
21	20,337	21,991	23,858	26,171	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797	49,010	21
22	21,337	23,031	24,939	27,301	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268	50,511	22
23	22,337	24,069	26,018	28,429	32,007	35,172	38,086	41,638	44,181	49,728	52,000	23
24	23,337	25,106	27,096	29,553	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	51,179	53,479	24
25	24,337	26,143	28,172	30,675	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,618	54,947	25
26	25,336	27,179	29,246	31,795	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052	56,407	26
27	26,336	28,214	30,319	32,912	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645	55,476	57,858	27
28	27,336	29,249	31,391	34,027	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892	59,300	28
29	28,336	30,283	32,461	35,139	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301	60,735	29
30	29,336	31,316	33,530	36,250	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703	62,162	30
31	30,336	32,349	34,598	37,359	41,422	44,985	48,232	52,191	55,003	61,098	63,582	31
32	31,336	33,381	35,665	38,466	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328	62,487	64,995	32
33	32,336	34,413	36,731	39,572	43,745	47,400	50,725	54,776	57,648	63,870	66,402	33
34	33,336	35,444	37,795	40,676	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964	65,247	67,803	34
35	34,336	36,475	38,859	41,778	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275	66,619	69,199	35
36	35,336	37,505	39,922	42,879	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581	67,985	70,588	36
37	36,336	38,535	40,984	43,978	48,363	52,192	55,668	59,892	62,882	69,346	71,972	37
38	37,335	39,564	42,045	45,076	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181	70,703	73,351	38
39	38,335	40,593	43,105	46,173	50,660	54,572	58,120	62,428	65,476	72,055	74,725	39
40	39,335	41,622	44,165	47,269	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402	76,095	40
41	40,335	42,651	45,224	48,363	52,949	56,942	60,561	64,950	68,053	74,745	77,459	41
42	41,335	43,679	46,282	49,456	54,090	58,124	61,777	66,206	69,336	76,084	78,820	42
43	42,335	44,706	47,339	50,548	55,230	59,304	62,990	67,459	70,616	77,419	80,176	43
44	43,335	45,734	48,396	51,639	56,369	60,481	64,201	68,709	71,893	78,749	81,528	44
45	44,335	46,761	49,452	52,729	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166	80,077	82,876	45
46	45,335	47,787	50,507	53,818	58,641	62,830	66,617	71,201	74,437	81,400	84,220	46
47	46,335	48,814	51,562	54,906	59,774	64,001	67,821	72,443	75,704	82,720	85,560	47
48	47,335	49,840	52,616	55,993	60,907	65,171	69,023	73,683	76,969	84,037	86,897	48
49	48,335	50,866	53,670	57,079	62,038	66,339	70,222	74,919	78,231	85,351	88,231	49
50	49,335	51,892	54,723	58,164	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661	89,561	50
51	50,335	52,917	55,775	59,248	64,295	68,669	72,616	77,386	80,747	87,968	90,881	51
52	51,335	53,942	56,827	60,332	65,422	69,832	73,810	78,616	82,001	89,272	92,211	52
53	52,335	54,967	57,879	61,414	66,548	70,993	75,002	79,843	83,253	90,573	93,531	53
54	53,335	55,992	58,930	62,496	67,673	72,153	76,192	81,069	84,502	91,872	94,849	54
55	54,335	57,016	59,980	63,577	68,796	73,311	77,380	82,292	85,749	93,167	96,163	55

<sup>6</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, r)$  rozkładu  $\chi^2$  <sup>7)</sup>

$r \backslash \alpha$	0,9995	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	$\alpha \backslash r$
56	27,555	28,881	32,490	34,350	37,212	39,801	42,937	46,955	50,005	52,715	56
57	28,248	29,592	33,248	35,131	38,027	40,646	43,816	47,876	50,956	53,691	57
58	28,943	30,305	34,008	35,913	38,844	41,492	44,696	48,797	51,906	54,667	58
59	29,640	31,020	34,770	36,698	39,662	42,339	45,577	49,718	52,857	55,643	59
60	30,340	31,738	35,535	37,485	40,482	43,188	46,459	50,641	53,809	56,620	60
61	31,043	32,459	36,301	38,273	41,303	44,038	47,342	51,564	54,761	57,597	61
62	31,748	33,181	37,068	39,063	42,126	44,889	48,226	52,487	55,714	58,574	62
63	32,455	33,906	37,838	39,855	42,950	45,741	49,111	53,412	56,666	59,55	63
64	33,165	34,633	38,610	40,649	43,776	46,595	49,996	54,336	57,619	60,528	64
65	33,877	35,362	39,383	41,444	44,603	47,450	50,883	55,262	58,573	61,506	65
66	34,591	36,093	40,158	42,240	45,431	48,305	51,770	56,188	59,527	62,484	66
67	35,307	36,826	40,935	43,038	46,261	49,162	52,659	57,115	60,481	63,461	67
68	36,025	37,561	41,713	43,838	47,092	50,020	53,548	58,042	61,436	64,440	68
69	36,745	38,298	42,494	44,639	47,924	50,879	54,438	58,970	62,391	65,418	69
70	37,467	39,036	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	59,898	63,346	66,396	70
71	38,192	39,777	44,058	46,246	49,592	52,600	56,221	60,827	64,302	67,375	71
72	38,918	40,520	44,843	47,051	50,428	53,462	57,113	61,756	65,258	68,353	72
73	39,646	41,264	45,629	47,858	51,265	54,325	58,006	62,686	66,214	69,332	73
74	40,376	42,010	46,417	48,666	52,103	55,189	58,900	63,616	67,170	70,311	74
75	41,107	42,757	47,206	49,475	52,942	56,054	59,795	64,547	68,127	71,290	75
76	41,841	43,507	47,997	50,286	53,782	56,920	60,690	65,478	69,084	72,270	76
77	42,576	44,258	48,788	51,097	54,623	57,786	61,586	66,409	70,042	73,249	77
78	43,313	45,010	49,582	51,910	55,466	58,654	62,483	67,341	70,999	74,228	78
79	44,051	45,764	50,376	52,725	56,309	59,522	63,308	68,274	71,957	75,208	79
80	44,791	46,520	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	69,207	72,915	76,188	80
81	45,533	47,277	51,969	54,357	57,998	61,261	65,176	70,140	73,874	77,168	81
82	46,276	48,036	52,767	55,174	58,845	62,132	66,076	71,074	74,833	78,148	82
83	47,021	48,796	53,567	55,993	59,692	63,004	66,976	72,008	75,792	79,128	83
84	47,767	49,557	54,368	56,813	60,540	63,876	67,876	72,943	76,751	80,108	84
85	48,515	50,320	55,170	57,634	61,389	64,749	68,777	73,878	77,710	81,089	85
86	49,264	51,085	55,973	58,456	62,239	65,623	69,679	74,813	78,670	82,069	86
87	50,015	51,850	56,777	59,279	63,089	66,498	70,581	75,749	79,630	83,050	87
88	50,767	52,617	57,582	60,103	63,941	67,373	71,484	76,685	80,590	84,031	88
89	51,521	53,386	58,389	60,928	64,793	68,249	72,387	77,622	81,550	85,012	89
90	52,276	54,155	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	78,558	82,511	85,993	90
91	53,032	54,926	60,005	62,581	66,501	70,003	74,196	79,496	83,472	86,974	91
92	53,790	55,698	60,815	63,409	67,356	70,882	75,101	80,433	84,433	87,955	92
93	54,549	56,472	61,625	64,238	68,211	71,760	76,006	81,371	85,394	88,936	93
94	55,309	57,246	62,437	65,068	69,068	72,640	76,912	82,309	86,356	89,917	94
95	56,070	58,022	63,250	65,898	69,925	73,520	77,818	83,248	87,317	90,899	95
96	56,833	58,799	64,063	66,730	70,783	74,400	78,725	84,187	88,279	91,881	96
96	57,597	59,577	64,878	67,562	71,642	75,282	79,633	85,126	89,241	92,862	96
98	58,362	60,356	65,694	68,396	72,501	76,164	80,541	86,065	90,204	93,844	98
99	59,128	61,136	66,510	69,230	73,361	77,046	81,449	87,005	91,166	94,826	99
100	59,896	61,918	67,328	70,075	74,222	77,929	82,358	87,945	92,129	95,808	100

<sup>7)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



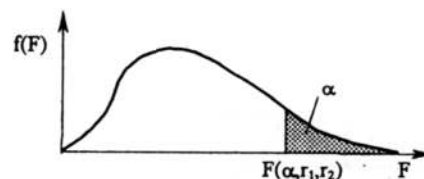
c.d. wartości krytyczne  $\chi^2(\alpha, r)$  rozkładu  $\chi^2$ <sup>8)</sup>

$\alpha \backslash r$	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005	$\alpha \backslash r$
56	55,335	58,040	61,031	64,658	69,918	74,468	78,567	83,513	86,994	94,460	97,475	56
57	56,335	59,064	62,080	65,737	71,040	75,624	79,752	84,733	88,236	95,751	98,784	57
58	57,335	60,088	63,129	66,816	72,160	76,778	80,936	85,950	89,477	97,039	100,090	58
59	58,335	61,111	64,178	67,894	73,279	77,931	82,117	87,166	90,715	98,324	101,394	59
60	59,335	62,135	65,226	68,972	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607	102,695	60
61	60,335	63,158	66,274	70,049	75,514	80,232	84,476	89,591	93,186	100,888	103,993	61
62	61,335	64,181	67,322	71,125	76,630	81,381	85,654	90,802	94,419	102,166	105,289	62
63	62,335	65,204	68,369	72,201	77,745	82,529	86,830	92,010	95,649	103,442	106,583	63
64	63,335	66,226	69,416	73,276	78,860	83,675	88,004	93,217	96,878	104,716	107,875	64
65	64,335	67,249	70,462	74,351	79,973	84,821	89,177	94,422	98,105	105,988	109,164	65
66	65,335	68,271	71,508	75,425	81,086	85,965	90,349	95,626	99,330	107,258	110,451	66
67	66,335	69,293	72,554	76,498	82,197	87,108	91,519	96,828	100,554	108,526	111,736	67
68	67,334	70,315	73,600	77,571	83,308	88,250	92,688	98,028	101,776	109,791	113,018	68
69	68,334	71,337	74,645	78,643	84,418	89,391	93,856	99,227	102,996	111,055	114,299	69
70	69,334	72,358	75,689	79,715	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317	115,578	70
71	70,334	73,380	76,734	80,786	86,635	91,670	96,189	101,621	105,432	113,577	116,854	71
72	71,334	74,401	77,778	81,857	87,743	92,808	97,353	102,816	106,648	114,835	118,129	72
73	72,334	75,422	78,822	82,927	88,850	93,945	98,516	104,010	107,862	116,092	119,402	73
74	73,334	76,443	79,865	83,997	89,956	95,081	99,678	105,202	109,074	117,346	120,673	74
75	74,334	77,464	80,908	85,066	91,061	96,217	100,839	106,393	110,286	118,599	121,942	75
76	75,334	78,485	81,951	86,135	92,166	97,351	101,999	107,582	111,495	119,850	123,209	76
77	76,334	79,505	82,994	87,203	93,270	98,484	103,158	108,771	112,704	121,100	124,475	77
78	77,334	80,526	84,036	88,271	94,374	99,617	104,316	109,958	113,911	122,348	125,739	78
79	78,334	81,546	85,078	89,338	95,476	100,749	105,473	111,144	115,117	123,594	127,001	79
80	79,334	82,566	86,120	90,405	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839	128,261	80
81	80,334	83,586	87,161	91,472	97,608	103,010	107,783	113,512	117,524	126,082	129,520	81
82	81,334	84,606	88,202	92,538	98,780	104,139	108,937	114,695	118,726	127,324	130,778	82
83	82,334	85,626	89,243	93,604	99,880	105,267	110,090	115,876	119,927	128,565	132,033	83
84	83,334	86,646	90,284	94,669	100,980	106,395	111,242	117,057	121,126	129,804	133,288	84
85	84,334	87,665	91,325	95,734	102,079	107,522	112,393	118,236	122,325	131,041	134,540	85
86	85,334	88,685	92,365	96,799	103,177	108,648	113,544	119,414	123,522	132,277	135,792	86
87	86,334	89,704	93,405	97,863	104,275	109,773	114,693	120,591	124,718	133,512	137,041	87
88	87,334	90,723	94,445	98,927	105,372	110,898	115,841	121,767	125,913	134,745	138,290	88
89	88,334	91,742	95,484	99,991	106,469	112,022	116,989	122,942	127,106	135,978	139,537	89
90	89,334	92,761	96,524	101,054	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208	140,782	90
91	90,334	93,780	97,563	102,117	108,661	114,268	119,282	125,289	129,491	138,438	142,027	91
92	91,334	94,799	98,602	103,179	109,756	115,390	120,427	126,462	130,681	139,666	143,269	92
93	92,334	95,818	99,641	104,241	110,850	116,511	121,571	127,633	131,871	140,893	144,511	93
94	93,334	96,836	100,679	105,303	111,944	117,632	122,715	128,803	133,059	142,119	145,751	94
95	94,334	97,855	101,717	106,364	113,038	118,752	123,858	129,973	134,247	143,344	146,990	95
96	95,334	98,873	102,755	107,425	114,131	119,871	125,000	131,141	135,433	144,567	148,228	96
96	96,334	99,892	103,793	108,486	115,223	120,990	126,141	132,309	136,619	145,789	149,465	96
98	97,334	100,910	104,831	109,547	116,315	122,108	127,282	133,476	137,803	147,010	150,700	98
99	98,334	101,928	105,868	110,607	117,407	123,225	128,422	134,642	138,987	148,230	151,934	99
100	99,334	102,946	106,906	111,667	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449	153,167	100

<sup>8</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.6. Wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $F^9)$ 

$$\alpha=0,10$$



Tablica podaje wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$ , zmiennej losowej  $F$  Snedecora, spełniające warunek  $P(F \geq F_{kr}) = \alpha$ , gdzie:  $r_1$  jest liczbą stopni swobody licznika  $r_2$  jest liczbą stopni swobody mianownika.

$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	$\infty$	$r_1$
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	61,2	61,7	62,3	62,7	63,0	63,2	63,3	63,3	1
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,42	9,44	9,46	9,47	9,48	9,49	9,49	9,49	2
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,20	5,18	5,17	5,15	5,14	5,14	5,14	5,13	3
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,87	3,84	3,82	3,80	3,78	3,77	3,76	3,76	4
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,24	3,21	3,17	3,15	3,13	3,12	3,11	3,10	5
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,87	2,84	2,80	2,77	2,75	2,73	2,73	2,72	6
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,63	2,59	2,56	2,52	2,50	2,48	2,48	2,47	7
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,46	2,42	2,38	2,35	2,32	2,31	2,30	2,29	8
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,34	2,30	2,25	2,22	2,19	2,17	2,17	2,16	9
10	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,24	2,20	2,16	2,12	2,09	2,07	2,06	2,06	10
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,17	2,12	2,08	2,04	2,00	1,99	1,98	1,97	11
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,10	2,06	2,01	1,97	1,94	1,92	1,91	1,90	12
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,05	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,85	1,85	13
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83	1,82	1,80	1,80	14
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	1,97	1,92	1,87	1,83	1,79	1,77	1,76	1,76	15
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,94	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,73	1,72	16
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,91	1,86	1,81	1,76	1,73	1,71	1,69	1,69	17
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,89	1,84	1,78	1,74	1,70	1,68	1,67	1,66	18
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,86	1,81	1,76	1,71	1,67	1,65	1,64	1,63	19
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,84	1,79	1,74	1,69	1,65	1,63	1,62	1,61	20
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,81	1,76	1,70	1,65	1,61	1,59	1,58	1,57	22
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,78	1,73	1,67	1,62	1,58	1,56	1,54	1,53	24
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,76	1,71	1,65	1,59	1,55	1,53	1,51	1,50	26
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,74	1,69	1,63	1,57	1,53	1,50	1,49	1,48	28
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,72	1,67	1,61	1,55	1,51	1,48	1,47	1,46	30
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,66	1,61	1,54	1,48	1,43	1,41	1,39	1,38	40
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,63	1,57	1,50	1,44	1,39	1,36	1,34	1,33	50
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,60	1,54	1,48	1,41	1,36	1,33	1,31	1,29	60
80	2,77	2,37	2,15	2,02	1,92	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,57	1,51	1,44	1,38	1,32	1,28	1,26	1,24	80
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,70	1,66	1,56	1,49	1,42	1,35	1,29	1,26	1,23	1,21	100
200	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,52	1,46	1,38	1,31	1,24	1,20	1,17	1,14	200
500	2,72	2,31	2,10	1,96	1,86	1,79	1,73	1,68	1,64	1,61	1,50	1,44	1,36	1,28	1,21	1,16	1,12	1,09	500
$\infty$	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,49	1,42	1,34	1,26	1,18	1,13	1,08	1,00	$\infty$

<sup>9</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $F^{(10)}$  $\alpha=0,05$ 

$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	$r_1$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245	246	247	248	1
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	2
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33	15
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28	16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23	17
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19	18
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16	19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12	20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,16	2,12	2,10	21
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07	22
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,11	2,07	2,05	23
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03	24
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99	26
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,97	27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	28
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93	30
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,07	2,01	1,97	1,94	1,91	32
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	34
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,03	1,98	1,93	1,90	1,87	36
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,02	1,96	1,92	1,88	1,85	38
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84	40
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	42
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	1,98	1,92	1,88	1,84	1,81	44
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	1,97	1,91	1,87	1,83	1,80	46
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,96	1,90	1,86	1,82	1,79	48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,28	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	50
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75	60
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,82	1,77	1,73	1,70	80
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	100
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,83	1,77	1,72	1,69	1,65	125
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,82	1,76	1,71	1,67	1,64	150
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,80	1,74	1,69	1,66	1,62	200
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61	300
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,77	1,71	1,66	1,62	1,59	500
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,76	1,70	1,65	1,61	1,58	1000
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,69	1,64	1,60	1,57	$\infty$

<sup>10</sup> Sporządzono na podstawie [71].



c.d. wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $F^{(1)}$  $\alpha=0,05$ 

$r_1 \backslash r_2$	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	$\infty$	$r_2$
1	249	249	249	250	250	251	251	251	252	252	252	253	254	254	254	1
2	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	2
3	8,65	8,64	8,63	8,62	8,62	8,60	8,59	8,59	8,58	8,57	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53	3
4	5,79	5,77	5,76	5,75	5,75	5,73	5,72	5,71	5,70	5,69	5,67	5,66	5,65	5,64	5,63	4
5	4,54	4,53	4,52	4,50	4,50	4,48	4,46	4,45	4,44	4,43	4,41	4,41	4,39	4,37	4,37	5
6	3,86	3,84	3,83	3,82	3,81	3,79	3,77	3,76	3,75	3,74	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67	6
7	3,43	3,41	3,40	3,39	3,38	3,36	3,34	3,33	3,32	3,30	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23	7
8	3,13	3,12	3,10	3,09	3,08	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93	8
9	2,92	2,92	2,89	2,87	2,86	2,84	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71	9
10	2,75	2,74	2,72	2,71	2,70	2,68	2,66	2,65	2,64	2,62	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54	10
11	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,55	2,53	2,52	2,51	2,49	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40	11
12	2,52	2,51	2,49	2,48	2,47	2,44	2,43	2,41	2,40	2,38	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30	12
13	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,36	2,34	2,33	2,31	2,30	2,27	2,26	2,23	2,22	2,21	13
14	2,37	2,35	2,33	2,32	2,31	2,28	2,27	2,25	2,24	2,22	2,20	2,19	2,16	2,14	2,13	14
15	2,31	2,29	2,27	2,26	2,25	2,22	2,20	2,19	2,18	2,16	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07	15
16	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,17	2,15	2,14	2,12	2,11	2,08	2,07	2,04	2,02	2,01	16
17	2,21	2,19	2,17	2,16	2,15	2,12	2,10	2,09	2,08	2,06	2,03	2,02	1,99	1,97	1,96	17
18	2,17	2,15	2,13	2,12	2,11	2,08	2,06	2,05	2,04	2,02	1,99	1,98	1,95	1,93	1,92	18
19	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88	19
20	2,10	2,08	2,07	2,05	2,04	2,01	1,99	1,98	1,97	1,95	1,92	1,91	1,88	1,86	1,84	20
21	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,98	1,96	1,95	1,94	1,92	1,89	1,88	1,84	1,82	1,81	21
22	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89	1,86	1,85	1,82	1,80	1,78	22
23	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96	1,93	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76	23
24	2,00	1,98	1,97	1,95	1,94	1,91	1,89	1,88	1,86	1,84	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73	24
25	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,89	1,87	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71	25
26	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,87	1,85	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69	26
27	1,95	1,93	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	1,82	1,81	1,79	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67	27
28	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,84	1,82	1,80	1,79	1,77	1,74	1,73	1,69	1,67	1,65	28
29	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,83	1,81	1,79	1,77	1,75	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64	29
30	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,71	1,70	1,66	1,64	1,62	30
32	1,88	1,86	1,85	1,83	1,82	1,79	1,77	1,75	1,74	1,71	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59	32
34	1,86	1,84	1,82	1,80	1,80	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,66	1,65	1,61	1,59	1,57	34
36	1,85	1,82	1,81	1,79	1,78	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,64	1,62	1,59	1,56	1,55	36
38	1,83	1,81	1,79	1,77	1,76	1,73	1,71	1,69	1,68	1,65	1,62	1,61	1,57	1,54	1,53	38
40	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,72	1,69	1,67	1,66	1,64	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51	40
42	1,80	1,78	1,76	1,74	1,73	1,70	1,68	1,66	1,65	1,62	1,59	1,57	1,53	1,51	1,49	42
44	1,79	1,77	1,75	1,73	1,72	1,69	1,67	1,65	1,63	1,61	1,58	1,56	1,52	1,49	1,48	44
46	1,78	1,76	1,74	1,72	1,71	1,68	1,65	1,64	1,62	1,60	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46	46
48	1,77	1,75	1,73	1,71	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,59	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45	48
50	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,66	1,63	1,61	1,60	1,58	1,54	1,52	1,48	1,46	1,44	50
60	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,62	1,59	1,57	1,56	1,53	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39	60
80	1,68	1,65	1,63	1,62	1,60	1,57	1,54	1,52	1,51	1,48	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32	80
100	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,54	1,52	1,49	1,48	1,45	1,41	1,39	1,34	1,31	1,28	100
125	1,63	1,60	1,58	1,57	1,55	1,52	1,49	1,47	1,45	1,42	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25	125
150	1,61	1,59	1,57	1,55	1,53	1,50	1,48	1,45	1,44	1,41	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22	150
200	1,60	1,57	1,55	1,53	1,52	1,48	1,46	1,43	1,41	1,39	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19	200
300	1,58	1,55	1,53	1,51	1,50	1,46	1,43	1,41	1,39	1,36	1,32	1,30	1,23	1,19	1,15	300
500	1,56	1,54	1,52	1,50	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38	1,34	1,30	1,28	1,21	1,16	1,11	500
1000	1,55	1,53	1,51	1,49	1,47	1,44	1,41	1,38	1,36	1,33	1,29	1,26	1,19	1,13	1,08	1000
$\infty$	1,54	1,52	1,50	1,48	1,46	1,42	1,39	1,37	1,35	1,32	1,27	1,24	1,17	1,11	1,00	$\infty$

<sup>11</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $F^{(2)}$  $\alpha=0,01$ 

$r_2$	$r_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	$r_1$	$r_2$
1		405	500	540	563	576	586	593	598	602	606	611	614	617	619	621		1
2		98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4		2
3		34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	26,9	26,8	26,8	26,7		3
4		21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,2	14,1	14,0		4
5		16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55		5
6		13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40		6
7		12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,36	6,27	6,21	6,16		7
8		11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,56	5,48	5,41	5,36		8
9		10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	5,00	4,92	4,86	4,81		9
10		10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41		10
11		9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10		11
12		9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86		12
13		9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66		13
14		8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51		14
15		8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37		15
16		8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26		16
17		8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16		17
18		8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08		18
19		8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00		19
20		8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94		20
21		8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,07	2,99	2,93	2,88		21
22		7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83		22
23		7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,97	2,89	2,83	2,78		23
24		7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74		24
25		7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,89	2,81	2,75	2,70		25
26		7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66		26
27		7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,82	2,75	2,68	2,63		27
28		7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60		28
29		7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,77	2,69	2,63	2,57		29
30		7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55		30
32		7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,80	2,70	2,62	2,55	2,50		32
34		7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,76	2,66	2,58	2,51	2,46		34
36		7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,72	2,62	2,54	2,48	2,43		36
38		7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,69	2,59	2,51	2,45	2,40		38
40		7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37		40
42		7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,64	2,54	2,46	2,40	2,34		42
44		7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,62	2,52	2,44	2,37	2,32		44
46		7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30		46
48		7,19	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91	2,80	2,72	2,58	2,48	2,40	2,33	2,28		48
50		7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27		50
60		7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20		60
80		6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,42	2,31	2,23	2,17	2,12		80
100		6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37	2,26	2,19	2,12	2,07		100
135		6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2,55	2,47	2,33	2,23	2,15	2,08	2,03		135
150		6,81	4,75	3,92	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,31	2,20	2,12	2,06	2,00		150
200		6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,27	2,17	2,09	2,02	1,97		200
300		6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,24	2,14	2,06	1,99	1,94		300
500		6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,22	2,12	2,04	1,97	1,92		500
1000		6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,20	2,10	2,02	1,95	1,90		1000
$\infty$		6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,08	2,00	1,93	1,88		$\infty$

<sup>12</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $F_{kr}(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $F^{13)}$  $\alpha=0,01$ 

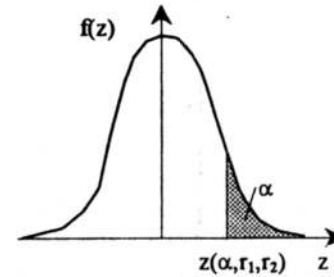
$r_2 \backslash r_1$	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	$\infty$	$r_1 \backslash r_2$
1	622	623	624	625	626	628	629	630	630	631	633	633	635	636	637	1
2	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	2
3	26,6	26,6	26,6	26,5	26,5	26,5	26,4	26,4	26,4	26,3	26,3	26,2	26,2	26,1	26,1	3
4	14,0	13,9	13,9	13,9	13,8	13,8	13,7	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5	4
5	9,51	9,47	9,43	9,40	9,38	9,33	9,29	9,26	9,24	9,20	9,16	9,13	9,08	9,04	9,02	5
6	7,35	7,31	7,28	7,25	7,23	7,18	7,14	7,11	7,09	7,06	7,01	6,99	6,93	6,90	6,88	6
7	6,11	6,07	6,04	6,02	5,99	5,94	5,91	5,88	5,86	5,82	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65	7
8	5,32	5,28	5,25	5,22	5,20	5,15	5,12	5,09	5,07	5,03	4,99	4,96	4,91	4,88	4,86	8
9	4,77	4,73	4,70	4,67	4,65	4,60	4,57	4,54	4,52	4,48	4,44	4,42	4,36	4,33	4,31	9
10	4,36	4,33	4,30	4,27	4,25	4,20	4,17	4,14	4,12	4,08	4,04	4,01	3,96	3,93	3,91	10
11	4,06	4,02	3,99	3,96	3,94	3,89	3,86	3,83	3,81	3,78	3,73	3,71	3,66	3,62	3,60	11
12	3,82	3,78	,75	,72	,70	,65	,62	,59	,57	,54	,49	,47	,41	,38	,36	12
13	,62	,59	,56	,53	,51	,46	,43	,40	,38	,34	,30	,27	,22	,19	,17	13
14	,46	,43	,40	,37	,35	,30	,27	,24	,22	,18	,14	,11	,06	3,03	,00	14
15	,33	,29	,26	,24	,21	,17	,13	,10	,08	,05	,00	2,98	2,92	2,89	2,87	15
16	3,22	3,18	3,15	3,12	3,10	3,05	3,02	2,99	2,97	2,93	2,89	2,86	2,81	2,78	2,75	16
17	,12	,08	,05	,03	,00	2,96	2,92	,89	,87	,83	,79	,76	,71	,68	,65	17
18	,03	,00	2,97	2,94	2,92	,87	,84	,81	,78	,75	,70	,68	,62	,59	,57	18
19	2,96	2,92	,89	,87	,84	,80	,76	,73	,71	,67	,63	,60	,55	,51	,49	19
20	,90	,86	,83	,80	,78	,73	,69	,67	,64	,61	,56	,54	,48	,44	,42	20
21	2,84	2,80	2,77	2,74	2,72	2,67	2,64	2,61	2,58	2,55	2,50	2,48	2,42	2,38	2,36	21
22	,78	,75	,72	,69	,67	,62	,58	,55	,53	,50	,45	,42	,36	,33	,31	22
23	,74	,70	,67	,64	,62	,57	,54	,51	,48	,45	,40	,37	,32	,28	,26	23
24	,70	,66	,63	,60	,58	,53	,49	,46	,44	,40	,36	,33	,27	,24	,21	24
25	,66	,62	,59	,56	,54	,49	,45	,42	,40	,36	,32	,29	,23	,19	,17	25
26	2,62	2,58	2,55	2,53	2,50	2,45	2,42	2,39	2,36	2,33	2,28	2,25	2,19	2,16	2,13	26
27	,59	,55	,52	,49	,47	,42	,38	,35	,33	,29	,25	,22	,16	,12	,10	27
28	,56	,52	,49	,46	,44	,39	,35	,32	,30	,26	,22	,19	,13	,09	,06	28
29	,53	,49	,46	,44	,41	,36	,33	,30	,27	,23	,19	,16	,10	,06	,03	29
30	,51	,47	,44	,41	,39	,34	,30	,27	,25	,21	,16	,13	,07	,03	,01	30
32	2,46	2,42	2,39	2,36	2,34	2,29	2,25	2,22	2,20	2,16	2,11	2,08	2,02	1,98	1,96	32
34	,42	,38	,35	,32	,30	,25	,21	,18	,16	,12	,07	,04	1,98	,94	,91	34
36	,38	,35	,32	,29	,26	,21	,17	,14	,12	,08	,03	,00	,94	,90	,87	36
38	,35	,32	,28	,26	,23	,18	,14	,11	,09	,05	,00	1,97	,90	,86	,84	38
40	,33	,29	,26	,23	,20	,15	,11	,08	,06	,02	1,97	,94	,87	,83	,80	40
42	2,30	2,26	2,23	2,20	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,91	1,85	1,80	,78	42
44	,28	,24	,21	,18	,15	,10	,06	,03	,01	,97	,92	,89	,82	,78	,75	44
46	,26	,22	,19	,16	,13	,08	,04	,01	1,99	,95	,90	,86	,80	,75	,73	46
48	,24	,20	,17	,14	,12	,06	,02	1,99	,97	,93	,88	,84	,78	,73	,70	48
50	,22	,18	,15	,12	,10	,05	,01	,97	,95	,91	,86	,82	,76	,71	,68	50
60	2,15	2,12	2,08	2,05	2,03	1,98	1,94	1,90	1,88	1,84	1,78	1,75	1,68	1,63	1,60	60
80	,07	,03	,00	1,97	1,94	,89	,85	,81	,79	,75	,69	,66	,58	,53	,49	80
100	,02	1,98	1,94	,92	,89	,84	,80	,76	,73	,69	,63	,60	,52	,47	,43	100
125	1,98	,94	,91	,88	,85	,80	,76	,72	,69	,65	,59	,55	,47	,41	,37	125
150	,96	,92	,88	,85	,83	,77	,73	,69	,66	,62	,56	,52	,43	,38	,33	150
200	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,58	1,52	1,48	1,39	1,33	1,28	200
300	,89	,85	,82	,79	,76	,71	,66	,62	,59	,55	,48	,44	,35	,28	,22	300
500	,87	,83	,79	,76	,74	,68	,63	,60	,56	,52	,45	,41	,31	,23	,16	500
1000	,85	,81	,77	,74	,72	,66	,61	,57	,54	,50	,43	,38	,28	,19	,11	1000
$\infty$	,83	,79	,76	,72	,70	,64	,59	,55	,52	,47	,40	,36	,25	,15	,00	$\infty$

<sup>13</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.7. Wartości krytyczne  $z(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $z$  Fishera<sup>14)</sup>

$$\alpha=0,10$$



Tablica podaje wartości krytyczne  $z(\alpha, r_1, r_2)$  testu  $z$  Fishera w funkcji poziomu istotności  $\alpha$  i liczby stopni swobody licznika  $r_1$  i mianownika  $r_2$ .

$r_2 \backslash r_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$	$r_1 \backslash r_2$
1	1,8427	1,9510	1,9907	2,0112	2,0236	2,0320	2,0425	2,0530	2,0636	2,0742	1
2	1,0716	1,0986	1,1075	1,1120	1,1146	1,1164	1,1186	1,1208	1,1230	1,1252	2
3	0,8558	0,8489	0,8423	0,8379	0,8347	0,8324	0,8283	0,8258	0,8221	0,8179	3
4	0,7570	0,7322	0,7164	0,7064	0,6994	0,6944	0,6875	0,6799	0,6716	0,6623	4
5	0,7006	0,6648	0,6432	0,6293	0,6196	0,6125	0,6029	0,5921	0,5801	0,5665	5
6	0,6643	0,6211	0,5953	0,5786	0,5669	0,5583	0,5465	0,5332	0,5181	0,5007	6
7	0,6390	0,5905	0,5615	0,5427	0,5295	0,5197	0,5061	0,4907	0,4730	0,4523	7
8	0,6203	0,5678	0,5364	0,5160	0,5015	0,4907	0,4757	0,4585	0,4386	0,4148	8
9	0,6060	0,5504	0,5171	0,4953	0,4798	0,4682	0,4520	0,4333	0,4114	0,3849	9
10	0,5947	0,5366	0,5017	0,4788	0,4624	0,4502	0,4330	0,4130	0,3893	0,3602	10
11	0,5855	0,5253	0,4892	0,4653	0,4483	0,4355	0,4173	0,3962	0,3710	0,3395	11
12	0,5799	0,5160	0,4788	0,4541	0,4365	0,4231	0,4043	0,3821	0,3555	0,3219	12
13	0,5715	0,5082	0,4701	0,4447	0,4265	0,4127	0,3932	0,3702	0,3422	0,3066	13
14	0,5661	0,5015	0,4626	0,4366	0,4180	0,4038	0,3836	0,3598	0,3308	0,2931	14
15	0,5614	0,4957	0,4561	0,4296	0,4106	0,3961	0,3754	0,3508	0,3207	0,2813	15
16	0,5572	0,4907	0,4504	0,4235	0,4041	0,3893	0,3681	0,3429	0,3118	0,2706	16
17	0,5537	0,4863	0,4455	0,4181	0,3984	0,3833	0,3617	0,3359	0,3038	0,2611	17
18	0,5505	0,4823	0,4411	0,4134	0,3933	0,3780	0,3560	0,3296	0,2967	0,2524	18
19	0,5476	0,4788	0,4371	0,4091	0,3887	0,3732	0,3508	0,3240	0,2904	0,2445	19
20	0,5451	0,4757	0,4336	0,4052	0,3846	0,3689	0,3462	0,3189	0,2846	0,2373	20
21	0,5427	0,4728	0,4304	0,4017	0,3809	0,3650	0,3420	0,3143	0,2793	0,2307	21
22	0,5407	0,4703	0,4275	0,3986	0,3776	0,3615	0,3382	0,3101	0,2744	0,2245	22
23	0,5388	0,4679	0,4248	0,3957	0,3745	0,3582	0,3347	0,3062	0,2700	0,2188	23
24	0,5370	0,4657	0,4224	0,3931	0,3717	0,3553	0,3315	0,3027	0,2659	0,2135	24
25	0,5354	0,4638	0,4201	0,3906	0,3691	0,3526	0,3286	0,2994	0,2621	0,2086	25
26	0,5339	0,4620	0,4181	0,3884	0,3667	0,3500	0,3258	0,2964	0,2585	0,2039	26
27	0,5326	0,4603	0,4162	0,3863	0,3645	0,3477	0,3233	0,2936	0,2553	0,1996	27
28	0,5313	0,4587	0,4144	0,3844	0,3624	0,3455	0,3210	0,2910	0,2522	0,1955	28
29	0,5301	0,4572	0,4128	0,3826	0,3605	0,3435	0,3188	0,2885	0,2493	0,1916	29
30	0,5290	0,4559	0,4112	0,3809	0,3587	0,3416	0,3167	0,2863	0,2466	0,1880	30
40	0,5211	0,4461	0,4001	0,3688	0,3458	0,3280	0,3019	0,2696	0,2268	0,1599	40
60	0,5133	0,4363	0,3891	0,3567	0,3328	0,3142	0,2868	0,2526	0,2063	0,1279	60
120	0,5054	0,4266	0,3781	0,3446	0,3198	0,3005	0,2717	0,2354	0,1848	0,0081	120
$\infty$	0,4976	0,4170	0,3671	0,3326	0,3069	0,2866	0,2565	0,2178	0,1622	0,0000	$\infty$

<sup>14)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $z(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $z$  Fishera<sup>15)</sup> $\alpha=0,05$ 

$r_2 \backslash r_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$	$r_1 \backslash r_2$
1	2,5421	2,6479	2,6870	2,7071	2,7194	2,7276	2,7380	2,7484	2,7588	2,7693	1
2	1,4592	1,4722	1,4765	1,4787	1,4800	1,4808	1,4819	1,4830	1,4840	1,4851	2
3	1,1577	1,1284	1,1137	1,1051	1,0994	1,0953	1,0899	1,0842	1,0781	1,0716	3
4	1,0212	0,9690	0,9429	0,9297	0,9168	0,9093	0,8993	0,8885	0,8767	0,8639	4
5	0,9441	0,8777	0,8441	0,8236	0,8097	0,7997	0,7862	0,7714	0,7550	0,7368	5
6	0,8948	0,8188	0,7798	0,7558	0,7394	0,7274	0,7112	0,6931	0,6729	0,6499	6
7	0,8606	0,7777	0,7347	0,7080	0,6896	0,6761	0,6576	0,6369	0,6134	0,5862	7
8	0,8355	0,7475	0,7014	0,6725	0,6525	0,6378	0,6175	0,5945	0,5682	0,5371	8
9	0,8163	0,7242	0,6757	0,6450	0,6238	0,6080	0,5862	0,5513	0,5324	0,4979	9
10	0,8012	0,7058	0,6553	0,6232	0,6009	0,5843	0,5611	0,5346	0,5035	0,4657	10
11	0,7889	0,6909	0,6387	0,6055	0,5822	0,5648	0,5406	0,5126	0,4795	0,4387	11
12	0,7788	0,6786	0,6250	0,5907	0,5666	0,5487	0,5234	0,4941	0,4592	0,4156	12
13	0,7703	0,6682	0,6134	0,5783	0,5535	0,5350	0,5089	0,4785	0,4419	0,3957	13
14	0,7630	0,6594	0,6036	0,5677	0,5423	0,5233	0,4964	0,4649	0,4269	0,3782	14
15	0,7568	0,6518	0,5950	0,5585	0,5326	0,5131	0,4855	0,4532	0,4138	0,3628	15
16	0,7514	0,6451	0,5876	0,5505	0,5241	0,5042	0,4760	0,4428	0,4022	0,3490	16
17	0,7466	0,6393	0,5811	0,5434	0,5166	0,4964	0,4676	0,4337	0,3919	0,3356	17
18	0,7424	0,6341	0,5753	0,5371	0,5099	0,4894	0,4602	0,4255	0,3827	0,3253	18
19	0,7386	0,6295	0,5701	0,5315	0,5040	0,4832	0,4535	0,4182	0,3743	0,3151	19
20	0,7352	0,6254	0,5654	0,5265	0,4986	0,4776	0,4474	0,4116	0,3668	0,3057	20
21	0,7322	0,6216	0,5612	0,5219	0,4938	0,4725	0,4420	0,4055	0,3599	0,2971	21
22	0,7294	0,6182	0,5574	0,5178	0,4894	0,4679	0,4370	0,4001	0,3536	0,2892	22
23	0,7269	0,6151	0,5540	0,5140	0,4854	0,4636	0,4325	0,3950	0,3478	0,2818	23
24	0,7246	0,6123	0,5508	0,5106	0,4817	0,4598	0,4283	0,3904	0,3425	0,2749	24
25	0,7225	0,6097	0,5478	0,5074	0,4783	0,4562	0,4244	0,3862	0,3376	0,2685	25
26	0,7205	0,6073	0,5451	0,5045	0,4752	0,4529	0,4209	0,3823	0,3330	0,2625	26
27	0,7187	0,6051	0,5427	0,5017	0,4723	0,4499	0,4176	0,3786	0,3287	0,2569	27
28	0,7171	0,6030	0,5403	0,4992	0,4696	0,4471	0,4146	0,3752	0,3248	0,2516	28
29	0,7155	0,6011	0,5382	0,4969	0,4671	0,4444	0,4117	0,3720	0,3211	0,2466	29
30	0,7141	0,5994	0,5362	0,4947	0,4648	0,4420	0,4090	0,3691	0,3176	0,2419	30
40	0,7037	0,5866	0,5217	0,4789	0,4479	0,4242	0,3897	0,3475	0,2920	0,2057	40
60	0,6933	0,5738	0,5073	0,4632	0,4311	0,4064	0,3702	0,3255	0,2654	0,1644	60
120	0,6830	0,5611	0,4930	0,4475	0,4133	0,3885	0,3506	0,3032	0,2376	0,1131	120
$\infty$	0,6729	0,5486	0,4787	0,4319	0,3974	0,3706	0,3309	0,2804	0,2085	0,0000	$\infty$

<sup>15)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $z(\alpha, r_1, r_2)$  rozkładu  $z$  Fishera<sup>16)</sup> $\alpha=0,01$ 

$r_2 \backslash r_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$	$r_1 \backslash r_2$
1	4,1535	4,2585	4,2974	4,3175	4,3297	4,3379	4,3482	4,3585	4,3689	4,3794	1
2	2,2950	2,2976	2,2984	2,2988	2,2991	2,2992	2,2994	2,2997	2,2999	2,3001	2
3	1,7649	1,7140	1,6915	1,6786	1,6703	1,6645	1,6569	1,6489	1,6404	1,6314	3
4	1,5270	1,4452	1,4075	1,3856	1,3711	1,3609	1,3473	1,3327	1,3170	1,3000	4
5	1,3943	1,2929	1,2449	1,2164	1,1974	1,1838	1,1656	1,1457	1,1239	1,0997	5
6	1,3103	1,1955	1,1401	1,1068	1,0843	1,0680	1,0460	1,0218	0,9948	0,9643	6
7	1,2526	1,1281	1,0672	1,0300	1,0048	0,9864	0,9614	0,9335	0,9020	0,8658	7
8	1,2106	1,0787	1,0135	0,9734	0,9459	0,9259	0,8983	0,8673	0,8319	0,7904	8
9	1,1786	1,0411	0,9724	0,9299	0,9006	0,8791	0,8494	0,8157	0,7769	0,7305	9
10	1,1535	1,0114	0,9399	0,8954	0,8646	0,8419	0,8104	0,7744	0,7324	0,6816	10
11	1,1333	0,9874	0,9136	0,8674	0,8354	0,8116	0,7785	0,7405	0,6958	0,6408	11
12	1,1166	0,9677	0,8919	0,8443	0,8111	0,7864	0,7520	0,7122	0,6649	0,6061	12
13	1,1027	0,9511	0,8737	0,8248	0,7907	0,7652	0,7295	0,6882	0,6386	0,5761	13
14	1,0909	0,9370	0,8581	0,8082	0,7732	0,7471	0,7103	0,6675	0,6159	0,5500	14
15	1,0807	0,9249	0,8448	0,7939	0,7582	0,7314	0,6937	0,6496	0,5961	0,5269	15
16	1,0719	0,9144	0,8331	0,7814	0,7450	0,7177	0,6791	0,6339	0,5786	0,5064	16
17	1,0641	0,9051	0,8229	0,7705	0,7335	0,7057	0,6663	0,6199	0,5630	0,4879	17
18	1,0572	0,8970	0,8138	0,7607	0,7232	0,6950	0,6549	0,6075	0,5491	0,4712	18
19	1,0511	0,8897	0,8057	0,7521	0,7140	0,6854	0,6447	0,5964	0,5366	0,4560	19
20	1,0457	0,8831	0,7985	0,7443	0,7058	0,6768	0,6355	0,5864	0,5253	0,4421	20
21	1,0408	0,8772	0,7920	0,7372	0,6984	0,6690	0,6272	0,5773	0,5150	0,4294	21
22	1,0363	0,8719	0,7860	0,7309	0,6916	0,6620	0,6196	0,5691	0,5056	0,4176	22
23	1,0322	0,8670	0,7806	0,7251	0,6855	0,6555	0,6127	0,5615	0,4969	0,4068	23
24	1,0285	0,8626	0,7757	0,7197	0,6799	0,6496	0,6064	0,5545	0,4890	0,3967	24
25	1,0251	0,8585	0,7712	0,7148	0,6747	0,6442	0,6006	0,5481	0,4816	0,3872	25
26	1,0220	0,8548	0,7670	0,7103	0,6699	0,6392	0,5952	0,5422	0,4748	0,3784	26
27	1,0191	0,8513	0,7631	0,7062	0,6655	0,6346	0,5902	0,5367	0,4685	0,3701	27
28	1,0164	0,8481	0,7595	0,7023	0,6614	0,6303	0,5856	0,5316	0,4626	0,3624	28
29	1,0139	0,8451	0,7562	0,6987	0,6576	0,6263	0,5813	0,5269	0,4570	0,3550	29
30	1,0116	0,8423	0,7531	0,6954	0,6540	0,6226	0,5773	0,5224	0,4519	0,3481	30
40	0,9949	0,8223	0,7307	0,6712	0,6283	0,5956	0,5481	0,4901	0,4138	0,2952	40
60	0,9784	0,8025	0,7086	0,6472	0,6028	0,5687	0,5189	0,4574	0,3746	0,2352	60
120	0,9622	0,7829	0,6867	0,6234	0,5774	0,5419	0,4897	0,4243	0,3339	0,1612	120
$\infty$	0,9462	0,7636	0,6651	0,5999	0,5522	0,5152	0,4604	0,3908	0,2913	0	$\infty$

<sup>16)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

**15.8. Wartości krytyczne  $B(P, n)$  statystyki Grubbsa<sup>17)</sup>**

Tablica podaje wartości krytyczne  $B(P, n)$  statystyki Grubbsa dla liczby stopni swobody  $n$  i poziomu ufności  $P=1-\alpha$ .

Liczba doświadczeń $n$	Prawdopodobieństwo ufności (poziom ufności) $P=1-\alpha$			
	0,90	0,95	0,975	0,99
3	1,406	1,412	1,414	1,414
4	1,645	1,689	1,710	1,723
5	1,791	1,869	1,917	1,955
6	1,894	1,996	2,067	2,130
7	1,974	2,093	2,182	2,265
8	2,041	2,172	2,273	2,374
9	2,097	2,237	2,349	2,464
10	2,146	2,294	2,414	2,540
11	2,190	2,343	2,470	2,660
12	2,229	2,387	2,519	2,663
13	2,264	2,426	2,562	2,714
14	2,297	2,461	2,602	2,759
15	2,326	2,493	2,638	2,800
16	2,354	2,523	2,670	2,837
17	2,380	2,551	2,701	2,871
18	2,404	2,577	2,728	2,903
19	2,426	2,600	2,754	2,932
20	2,447	2,623	2,778	2,959
21	2,467	2,644	2,801	2,984
22	2,486	2,664	2,823	3,008
23	2,504	2,683	2,843	3,030
24	2,520	2,701	2,862	3,051
25	2,537	2,717	2,880	3,071

<sup>17)</sup> Sporządzono na podstawie [15].



15.9. Wartości krytyczne  $m_1(\alpha, k, c_1)$  i  $m_2(\alpha, k, c_1)$  testu Bartletta<sup>18</sup> $m_1(0,01; k, c_1)$  i  $m_2(0,01; k, c_1)$ 

k	c <sub>1</sub>	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0
		3	m <sub>1</sub>	9,21	9,92	10,47	10,78	10,81	10,50	9,83									
	m <sub>2</sub>	9,21	9,29	9,38	9,48	9,59	9,71	9,83											
4	m <sub>1</sub>	11,34	11,95	12,46	12,86	13,11	13,18	13,03	12,65	12,03									
	m <sub>2</sub>	11,34	11,40	11,46	11,54	11,63	11,72	11,82	11,92	12,03									
5	m <sub>1</sub>	13,28	13,81	14,30	14,71	15,03	15,25	15,34	15,28	15,06	14,66	14,07							
	m <sub>2</sub>	13,28	13,33	13,39	13,45	13,53	13,61	13,69	13,78	13,87	13,97	14,07							
6	m <sub>1</sub>	15,09	15,58	16,03	16,44	16,79	17,07	17,27	17,37	17,37	17,24	16,98	16,03						
	m <sub>2</sub>	15,09	15,14	15,20	15,26	15,33	15,41	15,48	15,57	15,65	15,74	15,84	16,03						
7	m <sub>1</sub>	16,81	17,27	17,10	18,10	18,46	18,77	19,02	19,21	19,32	19,35	19,28	18,84	17,92					
	m <sub>2</sub>	16,81	16,87	16,93	16,99	17,06	17,14	17,21	17,29	17,37	17,46	17,55	17,73	17,92					
8	m <sub>1</sub>	18,48	18,91	19,32	19,71	20,07	20,39	20,67	20,90	21,08	21,20	21,25	21,13	20,64	19,76				
	m <sub>2</sub>	18,48	18,54	18,60	18,67	18,74	18,81	18,88	18,96	19,04	19,13	19,21	19,39	19,57	19,76				
9	m <sub>1</sub>	20,09	20,50	20,90	21,28	21,64	21,97	22,26	22,52	22,74	22,91	23,03	23,10	22,91	22,41	21,56			
	m <sub>2</sub>	20,09	20,15	20,22	20,29	20,36	20,44	20,51	20,59	20,67	20,75	20,84	21,01	21,19	21,37	21,56			
10	m <sub>1</sub>	21,67	22,06	22,45	22,82	23,17	23,50	23,80	24,08	24,32	24,52	24,69	24,90	24,90	24,66	24,15	23,33		
	m <sub>2</sub>	21,67	21,73	21,80	21,88	21,95	22,05	22,10	22,18	22,26	22,34	22,42	22,60	22,77	22,95	23,40	23,33		
11	m <sub>1</sub>	23,21	23,59	23,97	24,33	24,67	25,00	25,31	25,59	25,85	26,08	26,28	26,57	26,70	26,65	26,38	25,86		
	m <sub>2</sub>	23,21	23,28	23,35	23,43	23,50	23,58	23,66	23,74	23,82	23,80	23,98	24,15	24,33	24,51	24,69	24,88		
12	m <sub>1</sub>	24,72	25,10	25,46	25,81	26,15	26,48	26,79	27,08	27,35	27,59	27,81	28,16	28,39	28,46	28,37	28,07	26,79	
	m <sub>2</sub>	24,72	24,80	24,87	24,95	25,03	25,11	25,18	25,27	25,35	25,43	25,51	25,68	25,86	26,04	26,22	26,41	26,79	
13	m <sub>1</sub>	26,22	26,58	26,93	27,28	27,62	27,94	28,25	28,54	28,81	29,07	29,30	29,70	29,99	30,16	30,19	30,06	29,22	
	m <sub>2</sub>	26,22	26,29	26,37	26,45	26,53	26,61	26,69	26,77	26,85	26,94	27,02	27,19	27,37	27,55	27,73	27,91	28,29	
14	m <sub>1</sub>	27,69	28,04	28,39	28,73	29,06	29,38	29,69	29,98	30,26	30,52	30,77	31,19	31,53	31,77	31,89	31,88	31,39	30,16
	m <sub>2</sub>	27,69	27,77	27,85	27,93	28,01	28,09	28,17	28,25	28,34	28,42	28,51	28,68	28,68	29,03	29,22	29,40	29,77	30,16
15	m <sub>1</sub>	29,14	29,49	29,83	30,16	30,49	30,80	30,11	31,40	31,68	31,95	32,20	32,66	33,03	33,32	33,51	33,59	33,37	32,52
	m <sub>2</sub>	29,14	29,22	29,30	29,38	29,47	29,55	29,63	29,72	29,80	29,89	24,97	30,15	30,32	30,50	30,69	30,87	31,24	31,62

 $m_1(0,05; k, c_1)$  i  $m_2(0,05; k, c_1)$ 

k	c <sub>1</sub>	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0
		3	m <sub>1</sub>	5,99	6,47	6,89	7,20	7,38	7,39	7,22									
	m <sub>2</sub>	5,99	6,22	6,43	6,64	6,84	7,03	7,22											
4	m <sub>1</sub>	7,81	8,24	8,63	8,96	9,21	9,38	9,43	9,37	9,18									
	m <sub>2</sub>	7,81	8,00	8,17	8,35	8,52	8,69	8,85	9,02	9,18									
5	m <sub>1</sub>	9,49	9,88	10,24	10,57	10,86	11,08	11,24	11,32	11,31	11,21	11,02							
	m <sub>2</sub>	9,49	9,65	9,80	9,96	10,11	10,27	10,44	10,57	10,72	10,87	11,02							
6	m <sub>1</sub>	11,07	11,43	11,78	12,11	12,40	12,65	12,86	13,01	13,11	13,14	13,10	12,78						
	m <sub>2</sub>	11,07	11,22	11,36	11,51	11,65	11,79	11,94	12,08	12,22	12,36	12,50	12,78						

<sup>18</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne  $m_1(\alpha, k, c_1)$  i  $m_2(\alpha, k, c_1)$  testu Bartletta<sup>19)</sup> $m_1(0,05; k, c_1)$  i  $m_2(0,05; k, c_1)$ 

k \ c <sub>1</sub>	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	
7	m <sub>1</sub>	12,59	12,94	13,27	13,59	13,88	14,15	14,38	14,58	14,73	14,83	14,88	14,81	14,49					
	m <sub>2</sub>	12,59	12,73	12,87	13,00	13,14	13,27	13,41	13,55	13,68	13,82	13,95	14,22	14,49					
8	m <sub>1</sub>	14,07	14,40	14,72	15,03	15,32	15,60	15,84	16,06	16,25	16,40	16,51	16,50	16,49	16,16				
	m <sub>2</sub>	14,07	14,20	14,33	14,46	14,59	14,72	14,85	14,98	15,11	15,25	15,38	15,64	15,90	16,16				
9	m <sub>1</sub>	15,51	15,83	16,14	16,44	16,73	17,01	17,26	17,49	17,70	17,88	18,03	18,22	18,26	18,12	17,79			
	m <sub>2</sub>	15,51	15,63	15,76	15,89	16,02	16,14	16,27	16,40	16,52	16,65	16,78	17,03	17,29	17,54	17,79			
10	m <sub>1</sub>	16,92	17,23	17,54	17,83	18,12	18,39	18,65	18,89	19,11	19,31	19,48	19,75	19,89	19,89	19,73	19,40		
	m <sub>2</sub>	16,92	17,04	17,17	17,29	17,41	17,54	17,66	17,79	17,91	18,04	18,16	18,41	18,66	18,91	19,16	19,40		
11	m <sub>1</sub>	18,31	18,61	18,91	19,20	19,48	19,76	20,02	20,26	20,49	20,70	20,89	21,21	21,42	21,52	21,49	21,32		
	m <sub>2</sub>	18,31	18,43	18,55	18,67	18,79	18,91	19,04	19,16	19,28	19,40	19,52	19,77	20,01	20,26	20,50	20,75		
12	m <sub>1</sub>	19,68	19,97	20,26	20,55	20,83	21,10	21,36	21,61	21,84	22,06	22,27	22,62	22,88	23,06	23,12	23,07	22,56	
	m <sub>2</sub>	19,68	19,79	19,91	20,03	20,15	20,27	20,39	20,51	20,63	20,75	20,87	21,12	21,36	21,60	21,54	22,08	22,56	
13	m <sub>1</sub>	21,03	21,32	21,60	21,89	22,16	22,43	22,69	22,94	23,18	23,40	23,62	23,99	24,30	24,53	24,66	24,70	24,44	
	m <sub>2</sub>	21,03	21,14	21,26	21,38	21,50	21,62	21,74	21,85	21,97	22,09	22,21	22,45	22,69	22,92	23,16	23,40	23,88	
14	m <sub>1</sub>	22,36	22,65	22,93	23,21	23,48	23,75	24,01	24,26	24,50	24,73	24,95	25,34	25,68	25,95	26,14	25,25	26,17	25,66
	m <sub>2</sub>	22,36	22,48	22,60	22,71	22,83	22,95	23,06	23,18	23,30	23,42	23,53	23,77	24,00	24,24	24,48	24,71	25,19	25,66
15	m <sub>1</sub>	23,68	23,97	24,24	24,52	24,79	25,05	25,31	25,56	25,80	26,04	26,26	26,67	27,03	27,33	27,56	27,73	27,80	27,50
	m <sub>2</sub>	23,68	23,80	23,92	24,03	24,15	24,26	24,38	24,50	24,61	24,73	24,85	25,08	25,31	25,55	25,78	26,01	26,48	26,95

<sup>19)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.10. Wartości pomocnicze  $c = c_1^3 / k^2$  testu Bartletta<sup>20)</sup>

$k \backslash c_1$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	10,0	12,0	14,0
3	0,014	0,111	0,375	0,889	1,736	3,000										
4	,008	,062	,211	,500	0,977	1,688	2,680	4,000								
5	,005	,040	,135	,320	,625	,080	1,715	2,560	3,645	5,000						
6	0,003	0,028	0,094	0,222	0,434	0,750	1,191	1,778	2,531	3,472	6,000					
7	,003	,020	,069	,163	,319	,551	0,875	,306	1,860	2,551	4,408	7,000				
8	,002	,016	,053	,125	,244	,422	,670	,000	,424	1,953	3,375	5,359	8,000			
9	,002	,012	,042	,099	,193	,333	,529	0,790	,125	,543	2,667	4,235	6,321			
10	,001	,010	,034	,080	,156	,270	,429	,640	0,911	,250	,160	3,430	5,120	10,000		
11	0,001	0,008	0,028	0,066	0,129	0,223	0,354	0,529	0,753	1,033	1,785	2,835	4,231	8,264		
12	,001	,007	,023	,056	,109	,188	,298	,444	,633	0,808	,500	,382	3,556	6,944	12,000	
13	,001	,006	,020	,047	,092	,160	,254	,379	,539	,740	,278	,030	,030	5,917	10,225	
14	,001	,005	,017	,041	,080	,138	,219	,327	,465	,638	,103	1,750	2,612	,102	8,816	14,000
15	,001	,004	,015	,036	,069	,120	,191	,284	,405	,556	0,960	,524	,276	4,444	7,680	12,196

<sup>20)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.11. Wartości krytyczne  $g(\alpha, k, n)$  testu Cochran<sup>21)</sup>

$$g(0,01; k, v)$$

$k \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$	$v \backslash k$
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000	2
3	,9933	,9423	,8831	,8335	,7933	,7606	,7335	,7107	,6912	,6743	,6059	,5153	,4230	,3333	3
4	,9676	,8643	,7814	,7212	,6761	,6410	,6129	,5897	,5702	,5536	,4884	,4057	,3251	,2500	4
5	,9279	,7885	,6957	,6329	,5875	,5531	,5259	,5037	,4854	,4697	,4094	,3351	,2644	,2000	5
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667	6
7	,8376	,6644	,5685	,5080	,4659	,4347	,4105	,3911	,3751	,3616	,3105	,2494	,1929	,1429	7
8	,7945	,6152	,5209	,4627	,4226	,3932	,3704	,3522	,3373	,3248	,2779	,2214	,1700	,1250	8
9	,7544	,5727	,4810	,4251	,3870	,3592	,3378	,3207	,3067	,2950	,2514	,1992	,1521	,1111	9
10	,7175	,5358	,4469	,3934	,3572	,3308	,3106	,2945	,2813	,2704	,2297	,1811	,1376	,1000	10
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833	12
15	,5747	,4069	,3317	,2882	,2593	,2386	,2228	,2104	,2002	,1918	,1612	,1251	,0934	,0667	15
20	,4799	,3297	,2654	,2288	,2048	,1877	,1748	,1646	,1567	,1501	,1248	,0960	,0709	,0500	20
24	,4247	,2871	,2295	,1970	,1759	,1608	,1495	,1406	,1338	,1283	,1060	,0810	,0595	,0417	24
30	,3632	,2412	,1913	,1635	,1454	,1327	,1232	,1157	,1100	,1054	,0867	,0658	,0480	,0333	30
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250	40
60	,2151	,1371	,1069	,0902	,0796	,0722	,0668	,0625	,0594	,0567	,0461	,0344	,0245	,0167	60
120	,1225	,0759	,0585	,0489	,0429	,0387	,0357	,0334	,0316	,0302	,0242	,0178	,0125	,0083	120
$\infty$	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	$\infty$

$$g(0,05; k, v)$$

$k \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	$\infty$	$v \backslash k$
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000	2
3	,9669	,8709	,7977	,7457	,7071	,6771	,6530	,6333	,6167	,6025	,5466	,4748	,4031	,3333	3
4	,9065	,7679	,6841	,6287	,5895	,5598	,5365	,5175	,5017	,4884	,4366	,3720	,3093	,2500	4
5	,8412	,6838	,5938	,5440	,5063	,4783	,4564	,4387	,4241	,4118	,3645	,3066	,2513	,2000	5
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667	6
7	,7271	,5612	,4800	,4307	,3974	,3726	,3535	,3384	,3259	,3154	,2756	,2278	,1833	,1429	7
8	,6798	,5157	,4377	,3910	,3595	,3362	,3185	,3043	,2926	,2829	,2462	,2022	,1616	,1250	8
9	,6385	,4775	,4027	,3584	,3286	,3067	,2901	,2768	,2659	,2568	,2226	,1820	,1446	,1111	9
10	,6020	,4450	,3733	,3311	,3029	,2823	,2666	,2541	,2439	,2353	,2032	,1655	,1308	,1000	10
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833	12
15	,4709	,3346	,2758	,2419	,2195	,2034	,1911	,1815	,1736	,1671	,1429	,1144	,0889	,0667	15
20	,3894	,2705	,2205	,1921	,1735	,1602	,1501	,1422	,1357	,1303	,1108	,0879	,0675	,0500	20
24	,3434	,2354	,1907	,1656	,1493	,1374	,1286	,1216	,1160	,1113	,0942	,0743	,0567	,0417	24
30	,2929	,1980	,1593	0,1377	,1237	,1137	,1061	,1002	,0958	,0921	,0771	,0604	,0457	,0333	30
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250	40
60	,1737	,1131	,0895	,0765	,0682	,0623	,0583	,0552	,0520	,0497	,0411	,0316	,0234	,0167	60
120	,0998	,0632	,0495	,0419	,0371	,0337	,0312	,0292	,0279	,0266	,0218	,0165	,0120	,0083	120
$\infty$	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	$\infty$

<sup>21)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.12. Wartości krytyczne statystyki  $F_{\max} = S_{\max}^2 / S_{\min}^2$  <sup>22)</sup>

$$f_{\max}(0,05;k,v)$$

$v \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	104	114	124
4	9,60	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,0	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,30	2,33	2,36
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

$$f_{\max}(0,01;k,v)$$

$v \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23,2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15,5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12,1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,50	9,9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	18,9	19,8	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16,0	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6,0	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8,0
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3,0	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
$\infty$	1,00	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

<sup>22)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.13. Wartości krytyczne  $b_4^+(\alpha, n)$  statystyki  $B_4^{+23}$ 

$n \backslash \alpha$	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,730	1,728	1,723	1,710	1,689
5	1,982	1,972	1,955	1,917	1,869
6	2,183	2,161	2,130	2,067	1,996
7	2,344	2,310	2,265	2,182	2,093
8	2,476	2,431	2,374	2,273	2,172
9	2,586	2,532	2,464	2,349	2,238
10	2,680	2,616	2,540	2,414	2,294
11	2,760	2,689	2,606	2,470	2,343
12	2,830	2,753	2,663	2,519	2,387
13	2,892	2,809	2,713	2,563	2,426
14	2,947	2,859	2,759	2,602	2,461
15	2,997	2,905	2,800	2,638	2,494
16	3,042	2,946	2,837	2,670	2,523
17	3,083	2,983	2,871	2,701	2,551
18	3,120	3,017	2,903	2,728	2,577
19	3,155	3,049	2,932	2,754	2,601
20	3,187	3,079	2,959	2,779	2,623
21	3,217	3,106	2,984	2,801	2,644
22	3,245	3,132	3,008	2,823	2,664
23	3,271	3,156	3,030	2,843	2,683
24	3,295	3,179	3,051	2,862	2,701
25	3,318	3,200	3,071	2,880	2,718
26	3,340	3,220	3,089	2,897	2,734
27	3,360	3,239	3,107	2,913	2,749
28	3,380	3,258	3,124	2,929	2,764
29	3,399	3,275	3,140	2,944	2,778
30	3,416	3,291	3,156	2,958	2,792
31	3,433	3,307	3,171	2,972	2,805
32	3,449	3,322	3,185	2,985	2,818
33	3,465	3,337	3,199	2,998	2,830
34	3,480	3,351	3,212	3,010	2,842
35	3,494	3,364	3,224	3,022	2,853
36	3,507	3,377	3,236	3,033	2,864
37	3,521	3,389	3,248	3,044	2,874
38	3,533	3,401	3,259	3,055	2,885
39	3,545	3,413	3,270	3,065	2,894
40	3,557	3,424	3,281	3,075	2,904
41	3,568	3,435	3,291	3,084	2,913
42	3,579	3,445	3,301	3,094	2,922
43	3,590	3,455	3,310	3,103	2,931
44	3,600	3,465	3,320	3,112	2,940
45	3,610	3,474	3,329	3,120	2,948
46	3,620	3,483	3,338	3,129	2,956
47	3,630	3,492	3,346	3,137	2,964
48	3,639	3,501	3,354	3,145	2,972
49	3,648	3,510	3,363	3,152	2,980
50	3,656	3,518	3,370	3,160	2,987

<sup>23</sup> Sporządzono na podstawie [71].

15.14. Wartości krytyczne  $b_6^+(\alpha, n)$ ,  $b_7^+(\alpha, n)$ ,  $b_8^+(\alpha, n)$   
statystyk  $B_6^+$ ,  $B_7^+$ ,  $B_8^+$  <sup>24)</sup>

$b_6^+(\alpha, n)$  - pierwszy wiersz

$b_7^+(\alpha, n)$  - drugi wiersz

$b_8^+(\alpha, n)$  - trzeci wiersz

n \ α	0,005	0,010	0,020	0,050	0,100
3	0,994	0,988	0,976	0,941	0,886
	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,926	0,889	0,846	0,765	0,679
	0,995	0,991	0,981	0,955	0,910
	0,996	0,992	0,987	0,967	0,935
5	0,821	0,780	0,729	0,642	0,557
	0,937	0,916	0,876	0,807	0,728
	0,950	0,929	0,901	0,845	0,782
6	0,740	0,698	0,644	0,560	0,482
	0,839	0,805	0,763	0,689	0,609
	0,865	0,836	0,800	0,736	0,670
7	0,680	0,637	0,586	0,507	0,434
	0,782	0,740	0,689	0,610	0,530
	0,814	0,778	0,732	0,661	0,596
8	0,634	0,590	0,543	0,468	0,399
	0,725	0,683	0,631	0,554	0,479
	0,746	0,710	0,670	0,607	0,545
9	0,598	0,555	0,510	0,437	0,370
	0,677	0,635	0,587	0,512	0,441
	0,700	0,667	0,627	0,565	0,505
10	0,568	0,527	0,483	0,412	0,349
	0,639	0,597	0,551	0,477	0,409
	0,664	0,632	0,592	0,531	0,474
11	0,542	0,502	0,460	0,392	0,332
	0,606	0,566	0,521	0,450	0,385
	0,627	0,603	0,564	0,504	0,449
12	0,522	0,482	0,441	0,376	0,318
	0,580	0,541	0,498	0,428	0,367
	0,612	0,579	0,540	0,481	0,429
15	0,475	0,438	0,399	0,338	0,285
	0,522	0,486	0,445	0,381	0,323
	0,554	0,522	0,486	0,440	0,382
20	0,425	0,391	0,356	0,300	0,252
	0,464	0,430	0,392	0,334	0,282
	0,494	0,464	0,430	0,372	0,333
24	0,399	0,367	0,333	0,281	0,234
	0,432	0,400	0,365	0,309	0,260
	0,462	0,434	0,401	0,347	0,309
30	0,372	0,341	0,309	0,260	0,215
	0,399	0,369	0,336	0,283	0,236
	0,428	0,402	0,372	0,322	0,285

<sup>24)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.15. Wartości krytyczne  $D_n(\alpha)^{25}$ 

$n \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	$n \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,900 00	0,950 00	0,975 00	0,990 00	0,995 00	51	0,146 97	0,167 96	0,186 59	0,208 64	0,223 86
2	,683 77	,776 39	,841 89	,900 00	,929 29	52	,145 58	,166 37	,184 82	,206 67	,221 74
3	,564 81	,636 04	,707 60	,784 56	,829 00	53	,144 23	,164 83	,183 11	,204 75	,219 68
4	,492 65	,565 22	,623 94	,688 87	,734 24	54	,142 92	,163 32	,181 44	,202 89	,217 68
5	,446 98	,509 45	,563 28	,627 18	,668 53	55	,141 64	,161 86	,179 81	,201 07	,215 74
6	0,410 37	0,467 99	0,519 26	0,577 41	0,616 61	56	0,140 40	0,160 44	0,178 23	0,199 30	0,213 84
7	,381 48	,436 07	,483 42	,538 44	,575 81	57	,139 19	,159 06	,176 69	,197 58	,211 99
8	,358 31	,409 62	,454 27	,506 54	,541 79	58	,138 01	,157 71	,175 19	,195 90	,210 19
9	,339 10	,387 46	,430 01	,479 60	,513 32	59	,136 86	,156 39	,173 73	,194 27	,208 44
10	,322 60	,368 66	,409 25	,456 62	,488 93	60	,135 73	,155 11	,172 31	,192 67	,206 73
11	0,308 29	0,352 42	0,391 22	0,436 70	0,467 70	61	0,134 64	0,153 85	0,170 91	0,191 12	0,205 06
12	,295 77	,338 15	,375 43	,419 18	,449 05	62	,133 57	,152 63	,169 56	,189 60	,203 43
13	,284 70	,325 49	,361 43	,403 62	,432 47	63	,132 53	,151 44	,168 23	,188 12	,201 84
14	,274 81	,314 17	,348 90	,389 70	,417 62	64	,131 51	,150 27	,166 93	,186 67	,200 29
15	,265 88	,303 97	,337 60	,377 13	,404 20	65	,130 52	,149 13	,165 67	,185 25	,198 77
16	0,257 78	0,294 72	0,327 33	0,365 71	0,392 01	66	0,129 54	0,148 02	0,164 43	0,183 87	0,197 29
17	,250 39	,286 27	,317 96	,355 28	,380 86	67	,128 59	,146 93	,163 22	,182 52	,195 84
18	,243 60	,278 51	,309 36	,345 69	,370 62	68	,127 66	,145 87	,162 04	,181 19	,194 42
19	,237 35	,271 36	,301 43	,336 85	,361 17	69	,126 75	,144 83	,160 88	,179 90	,193 03
20	,231 56	,264 73	,294 08	,328 66	,352 41	70	,125 86	,143 81	,159 75	,178 63	,191 67
21	0,226 17	0,258 58	0,287 24	0,321 04	0,344 27	71	0,124 99	0,142 81	0,158 64	0,177 39	0,190 34
22	,221 15	,252 83	,280 87	,313 94	,336 66	72	,124 13	,141 83	,157 55	,176 18	,189 03
23	,216 45	,247 46	,274 90	,307 28	,329 54	73	,123 29	,140 87	,156 49	,174 98	,187 76
24	,212 05	,242 42	,269 31	,301 04	,322 86	74	,122 47	,139 93	,155 44	,173 82	,186 50
25	,207 90	,237 68	,264 04	,295 16	,316 57	75	,121 67	,139 01	,154 42	,172 68	,185 28
26	0,203 99	0,233 20	0,259 07	0,289 62	0,310 64	76	0,120 88	0,138 11	0,153 42	0,171 55	0,184 08
27	,200 30	,228 98	,254 38	,284 38	,305 02	77	,120 11	,137 23	,152 44	,170 45	,182 90
28	,196 80	,224 97	,249 93	,279 42	,299 71	78	,119 35	,136 36	,151 47	,169 38	,181 74
29	,193 48	,221 17	,245 71	,274 71	,294 66	79	,118 60	,135 51	,150 52	,168 32	,180 60
30	,190 32	,217 56	,241 70	,270 23	,289 87	80	,117 87	,134 67	,149 60	,167 28	,179 49
31	0,187 32	0,214 12	0,237 88	0,265 96	0,285 30	81	0,117 16	0,133 85	0,148 68	0,166 26	0,178 40
32	,184 45	,210 85	,234 24	,261 89	,280 94	82	,116 45	,133 05	,147 79	,165 26	,177 33
33	,181 71	,207 71	,230 76	,258 01	,276 77	83	,115 76	,132 26	,146 91	,164 28	,176 27
34	,179 09	,204 72	,227 43	,254 29	,272 79	84	,115 08	,131 48	,146 05	,163 31	,175 23
35	,176 59	,201 85	,224 25	,250 73	,268 97	85	,114 42	,130 72	,145 20	,162 36	,174 21
36	0,174 18	0,199 10	0,221 19	0,247 32	0,265 32	86	0,113 76	0,129 97	0,144 37	0,161 43	0,173 21
37	,171 88	,196 46	,218 26	,244 04	,261 80	87	,113 11	,129 23	,143 55	,160 51	,172 23
38	,169 66	,193 92	,215 44	,240 89	,258 43	88	,112 48	,128 50	,142 74	,159 61	,171 26
39	,167 53	,191 48	,212 73	,237 86	,255 18	89	,111 86	,127 79	,141 95	,158 73	,170 31
40	,165 47	,189 13	,210 12	,234 94	,252 05	90	,111 25	,127 09	,141 17	,157 86	,169 38
41	0,163 49	0,186 87	0,207 60	0,232 13	0,249 04	91	0,110 64	0,126 40	0,140 40	0,157 00	0,168 46
42	,161 58	,184 68	,205 17	,229 41	,246 13	92	,110 05	,125 72	,139 65	,156 16	,167 55
43	,159 74	,182 57	,202 83	,226 79	,243 32	93	,109 47	,125 06	,138 91	,155 33	,166 66
44	,157 96	,180 53	,200 56	,224 26	,240 60	94	,108 89	,124 40	,138 18	,154 51	,165 79
45	,156 23	,178 56	,198 37	,221 81	,237 98	95	,108 33	,123 75	,137 46	,153 71	,164 93
46	0,154 57	0,176 65	0,196 25	0,219 44	0,235 44	96	0,107 77	0,123 12	0,136 75	0,152 91	0,164 08
47	,152 95	,174 81	,194 20	,217 15	,232 98	97	,107 22	,122 49	,136 06	,152 14	,163 24
48	,151 39	,173 02	,192 21	,214 93	,230 59	98	,106 68	,121 87	,135 37	,151 37	,162 42
49	,149 87	,171 28	,190 28	,212 77	,228 28	99	,106 15	,121 26	,134 69	,150 61	,161 61
50	,148 40	,169 59	,188 41	,210 68	,22604	100	,105 63	,120 67	,134 03	,149 87	,160 81

<sup>25</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.16. Rozkład  $K(y)$  Kolmogorowa<sup>26)</sup>

Y	K(y)	Y	K(y)	Y	K(y)	Y	K(y)	Y	K(y)
0,28	0,000001	0,75	0,372833	1,22	0,898104	1,69	0,99389	2,16	0,999822
0,29	0,000004	0,76	0,389640	1,23	0,902972	1,70	0,993828	2,17	0,999838
0,30	0,000009	0,77	0,406372	1,24	0,907648	1,71	0,994230	2,18	0,999852
0,31	0,000021	0,78	0,423002	1,25	0,912132	1,72	0,994612	2,19	0,999864
0,32	0,000046	0,79	0,439505	1,26	0,916432	1,73	0,994972	2,20	0,999874
0,33	0,000091	0,80	0,455857	1,27	0,920556	1,74	0,995309	2,21	0,999886
0,34	0,000171	0,81	0,472041	1,28	0,924505	1,75	0,995625	2,22	0,999896
0,35	0,000303	0,82	0,488030	1,29	0,928288	1,76	0,995922	2,23	0,999904
0,36	0,000511	0,83	0,503808	1,30	0,931908	1,77	0,996200	2,24	0,999912
0,37	0,000826	0,84	0,519366	1,31	0,935370	1,78	0,996460	2,25	0,999920
0,38	0,001285	0,85	0,534682	1,32	0,938682	1,79	0,996704	2,26	0,999926
0,39	0,001929	0,86	0,549744	1,33	0,941848	1,80	0,996932	2,27	0,999934
0,40	0,002808	0,87	0,564546	1,34	0,944872	1,81	0,997146	2,28	0,999940
0,41	0,003972	0,88	0,579070	1,35	0,947756	1,82	0,997346	2,29	0,999944
0,42	0,005476	0,89	0,593316	1,36	0,950512	1,83	0,997533	2,30	0,999949
0,43	0,007377	0,90	0,607270	1,37	0,953142	1,84	0,997707	2,31	0,999954
0,44	0,009730	0,91	0,620928	1,38	0,955650	1,85	0,997870	2,32	0,999958
0,45	0,012590	0,92	0,634286	1,39	0,958040	1,86	0,998023	2,33	0,999962
0,46	0,016005	0,93	0,647338	1,40	0,960318	1,87	0,998145	2,34	0,999965
0,47	0,020022	0,94	0,660082	1,41	0,962486	1,88	0,998297	2,35	0,999968
0,48	0,024682	0,95	0,672516	1,42	0,964552	1,89	0,998421	2,36	0,999970
0,49	0,030017	0,96	0,684636	1,43	0,966516	1,90	0,998536	2,37	0,999973
0,50	0,036055	0,97	0,696444	1,44	0,968382	1,91	0,998644	2,38	0,999976
0,51	0,042814	0,98	0,707940	1,45	0,970158	1,92	0,998744	2,39	0,999978
0,52	0,050306	0,99	0,719126	1,46	0,971846	1,93	0,998837	2,40	0,999980
0,53	0,058534	1,00	0,730000	1,47	0,973448	1,94	0,998924	2,41	0,999982
0,54	0,067497	1,01	0,740566	1,48	0,974970	1,95	0,999004	2,42	0,999984
0,55	0,077183	1,02	0,750826	1,49	0,976412	1,96	0,999079	2,43	0,999986
0,56	0,087577	1,03	0,760780	1,50	0,977782	1,97	0,999149	2,44	0,999987
0,57	0,098656	1,04	0,770434	1,51	0,979080	1,98	0,999213	2,45	0,999988
0,58	0,110395	1,05	0,779794	1,52	0,980310	1,99	0,999273	2,46	0,999989
0,59	0,122760	1,06	0,788860	1,53	0,981476	2,00	0,999329	2,47	0,999990
0,60	0,135718	1,07	0,797636	1,54	0,982578	2,01	0,999380	2,48	0,999991
0,61	0,149229	1,08	0,806128	1,55	0,983622	2,02	0,999428	2,49	0,999992
0,62	0,163225	1,09	0,814342	1,56	0,984610	2,03	0,999474	2,50	0,9999925
0,63	0,177753	1,10	0,822282	1,57	0,985544	2,04	0,999516	2,55	0,9999956
0,64	0,192677	1,11	0,829950	1,58	0,986426	2,05	0,999552	2,60	0,9999974
0,65	0,207987	1,12	0,837356	1,59	0,987260	2,06	0,999588	2,65	0,9999984
0,66	0,223637	1,13	0,844502	1,60	0,988048	2,07	0,999620	2,70	0,9999990
0,67	0,239582	1,14	0,851394	1,61	0,988791	2,08	0,999650	2,75	0,9999994
0,68	0,255780	1,15	0,858038	1,62	0,989492	2,09	0,999680	2,80	0,9999997
0,69	0,272189	1,16	0,864442	1,63	0,990154	2,10	0,999705	2,85	0,99999982
0,70	0,288765	1,17	0,870612	1,64	0,990777	2,11	0,999723	2,90	0,99999990
0,71	0,305471	1,18	0,876548	1,65	0,991364	2,12	0,999750	2,95	0,99999994
0,72	0,322265	1,19	0,882258	1,66	0,991917	2,13	0,999770	3,00	0,99999997
0,73	0,339113	1,20	0,887750	1,67	0,992438	2,14	0,999790		
0,74	0,355981	1,21	0,893030	1,68	0,992928	2,15	0,999806		

<sup>26)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

**15.17. Wartości krytyczne statystyki  $D_{n,m}(\alpha)$  Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych<sup>27)</sup>**

n	m	$\alpha$				k				
		0,10		0,05			0,02		0,01	
3	3	3	0,100	-	-	-	-	-	3	
4	4	4	0,029	4	0,029	-	-	-	4	
	3	12	,057	-	-	-	-	-	12	
5	5	4	0,079	5	0,008	5	0,008	5	0,008	5
	4	16	0,079	20	,016	20	,016	20	,016	20
	3	15	,036	15	,036	-	-	-	-	15
	2	10	,095	-	-	-	-	-	-	10
6	6	5	0,026	5	0,002	6	0,002	6	0,002	6
	5	24	,048	24	0,048	30	0,004	30	0,004	30
	4	9	,095	10	0,048	12	0,010	12	0,010	12
	3	5	,095	6	0,024	-	-	-	-	6
	2	6	,071	-	-	-	-	-	-	6
7	7	5	0,053	6	0,008	6	0,008	6	0,008	7
	6	28	,091	30	,038	35	,015	35	,015	42
	5	25	,066	29	,030	30	,015	30	,015	35
	4	21	,067	24	,030	28	,006	28	,006	28
	3	18	,067	21	,017	21	,017	21	,017	21
	2	14	,056	-	-	-	-	-	-	14
8	8	5	0,087	6	0,019	6	0,019	6	0,019	8
	7	34	,087	40	,033	42	,013	42	,013	56
	6	15	,093	17	,043	20	,009	20	,009	24
	5	27	,079	29	,042	35	,009	35	,009	40
	4	6	,085	7	,020	8	,004	8	,004	8
	3	21	,048	21	,048	24	,012	24	,012	24
	2	8	,044	8	,044	-	-	-	-	8
	9	9	6	0,034	6	0,034	7	0,006	7	0,006
9	8	40	,079	46	,047	54	,011	55	,008	72
	7	17	,098	42	,034	47	,015	49	,008	63
	6	29	,095	13	,028	14	,014	15	,006	18
	5	7	,086	35	,028	36	,014	40	,006	45
	4	21	,062	28	,042	32	,014	36	,003	36
	3	8	,091	8	,036	9	,009	9	,009	9
	2	18	,036	18	,036	-	-	-	-	18
	10	10	6	0,052	7	0,012	6	0,012	8	0,002
10	9	50	,084	53	,045	61	,018	63	,007	90
	8	22	,095	24	,050	28	,012	30	,007	40
	7	40	,087	46	,036	50	,016	56	,006	70
	6	18	,092	20	,042	22	,019	24	,009	30
	5	7	,061	8	,019	8	,019	9	,004	10
	4	14	,084	15	,046	18	,010	18	,010	20
	3	24	,070	27	,028	30	,007	30	,007	30
	2	9	,091	10	,030	-	-	-	-	10
11	11	6	0,075	7	0,021	8	0,004	8	0,004	11
	10	57	,092	60	,043	69	,017	77	,008	110
	9	52	,089	59	,039	63	,019	70	,007	99
	8	48	,081	53	,047	61	,013	64	,007	88
	7	44	,083	48	,049	55	,014	59	,006	77
	6	38	,092	43	,048	49	,013	54	,006	66
	5	35	,074	39	,044	44	,014	45	,010	55
	4	29	,098	33	,035	40	,007	40	,007	44
	3	27	,055	30	,022	33	,005	33	,005	33
	2	20	,077	22	,026	-	-	-	-	22

<sup>27)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne statystyki  $D_{n,m}(\alpha)$  Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych<sup>28)</sup>

n	m	$\alpha$								k
		0,1		0,05		0,02		0,01		
12	12	6	0,100	7	0,031	8	0,008	8	0,008	12
	11	64	0,091	72	0,050	77	0,017	86	0,009	132
	10	30	0,093	33	0,049	37	0,020	40	0,007	60
	9	19	0,078	21	0,041	23	0,018	25	0,007	36
	8	13	0,091	15	0,032	16	0,018	17	0,009	24
	7	46	0,098	53	0,034	58	0,017	60	0,010	84
	6	8	0,046	8	0,046	9	0,015	10	0,004	12
	5	36	0,096	43	0,033	48	0,010	50	0,007	60
	4	9	0,048	9	0,048	10	0,016	11	0,005	12
	3	9	0,088	10	0,044	11	0,018	12	0,004	12
	2	11	0,066	12	0,022	-	-	-	-	12
	13	13	7	0,044	7	0,044	8	0,013	9	0,003
12		71	0,091	81	0,049	92	0,019	25	0,009	156
11		67	0,100	75	0,048	86	0,015	91	0,009	143
10		64	0,094	70	0,049	78	0,018	84	0,010	130
9		59	0,098	65	0,042	73	0,018	78	0,008	117
8		54	0,099	62	0,039	67	0,019	72	0,009	104
7		50	0,094	56	0,046	63	0,017	65	0,007	91
6		46	0,086	52	0,034	54	0,019	59	0,007	78
5		40	0,087	45	0,040	50	0,015	52	0,007	65
4		35	0,089	39	0,038	44	0,013	48	0,004	52
3		30	0,071	33	0,036	36	0,014	39	0,004	39
2		24	0,057	26	0,019	26	0,019	-	-	26
14	14	7	0,059	8	0,019	8	0,019	9	0,005	14
	13	78	0,097	89	0,049	102	0,017	104	0,010	182
	12	39	0,087	43	0,044	47	0,020	52	0,008	84
	11	73	0,090	82	0,041	90	0,017	96	0,009	154
	10	34	0,091	37	0,049	42	0,016	45	0,008	70
	9	63	0,082	70	0,046	80	0,015	84	0,008	126
	8	29	0,091	32	0,046	36	0,018	38	0,009	56
	7	8	0,083	9	0,033	10	0,012	11	0,003	14
	6	24	0,086	27	0,037	30	0,014	32	0,008	42
	5	42	0,079	46	0,047	51	0,019	56	0,006	70
	4	19	0,072	21	0,030	24	0,010	24	0,010	28
	3	33	0,050	36	0,029	39	0,012	42	0,003	42
2	12	0,100	13	0,050	14	0,017	-	-	14	
15	15	7	0,075	8	0,026	9	0,008	9	0,008	15
	14	92	0,100	98	0,044	111	0,017	123	0,009	210
	13	87	0,088	96	0,047	107	0,019	115	0,008	195
	12	28	0,078	31	0,040	34	0,017	36	0,010	60
	11	76	0,099	84	0,048	95	0,018	102	0,009	165
	10	15	0,077	16	0,050	18	0,018	20	0,006	30
	9	38	0,073	25	0,042	28	0,015	30	0,007	45
	8	60	0,086	67	0,042	75	0,014	81	0,010	120
	7	56	0,079	62	0,047	70	0,014	75	0,009	105
	6	17	0,087	19	0,040	21	0,016	23	0,006	30
	5	10	0,052	11	0,023	12	0,009	12	0,009	15
	4	40	0,086	44	0,042	48	0,018	52	0,008	60
3	11	0,086	12	0,049	14	0,010	14	0,010	15	
2	26	0,088	28	0,044	30	0,015	-	-	30	
16	16	7	0,093	8	0,035	9	0,011	10	0,003	16
	15	101	0,093	114	0,048	120	0,019	133	0,009	240
	14	48	0,093	53	0,048	60	0,017	63	0,009	112
	13	91	0,089	101	0,047	112	0,018	121	0,009	208
	12	22	0,084	24	0,047	27	0,017	29	0,008	48
	11	80	0,086	89	0,049	100	0,019	106	0,009	176

<sup>28)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

c.d. wartości krytyczne statystyki  $D_{n,m}(\alpha)$  Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych<sup>29)</sup>

n	m	$\alpha$								k
		0,10		0,05		0,02		0,01		
16	10	38	0,088	42	0,044	47	0,017	50	0,009	80
	9	69	0,100	78	0,043	87	0,016	94	0,007	144
	8	9	0,058	10	0,024	11	0,009	11	0,009	16
	7	59	0,094	64	0,048	73	0,018	77	0,010	112
	6	27	0,086	30	0,042	33	0,019	36	0,008	48
	5	48	0,088	54	0,041	59	0,018	64	0,007	80
	4	11	0,070	12	0,034	13	0,014	14	0,006	16
	3	36	0,072	39	0,041	45	0,008	45	0,008	48
17	2	14	0,078	15	0,039	16	0,013	-	-	16
	17	8	0,045	8	0,045	9	0,016	10	0,005	17
	16	109	0,096	124	0,045	139	0,020	143	0,009	272
	15	105	0,094	116	0,049	131	0,018	142	0,009	255
	14	100	0,096	111	0,048	125	0,018	134	0,009	238
	13	96	0,091	105	0,050	118	0,019	127	0,008	221
	12	90	0,093	100	0,046	112	0,017	119	0,009	204
	11	85	0,092	93	0,046	104	0,018	110	0,010	187
	10	79	0,097	89	0,044	99	0,017	106	0,008	170
	9	74	0,091	82	0,049	92	0,016	99	0,009	153
18	8	68	0,097	77	0,044	85	0,018	88	0,009	136
	7	61	0,099	68	0,046	77	0,019	84	0,007	119
	6	56	0,084	62	0,040	68	0,016	73	0,010	102
	5	50	0,094	55	0,048	63	0,015	68	0,005	85
	4	44	0,085	48	0,046	56	0,012	60	0,005	68
	3	36	0,098	42	0,035	45	0,018	48	0,007	51
	2	30	0,070	32	0,035	34	0,012	-	-	34
	18	8	0,056	9	0,021	10	0,007	10	0,007	18
	17	118	0,091	133	0,047	150	0,018	164	0,009	306
	16	58	0,093	64	0,048	71	0,019	77	0,009	144
15	37	0,096	41	0,046	46	0,017	49	0,010	90	
14	52	0,100	58	0,048	65	0,018	70	0,008	126	
13	99	0,098	110	0,050	123	0,020	131	0,010	234	
12	16	0,094	18	0,042	20	0,016	21	0,010	36	
11	88	0,097	97	0,048	108	0,019	118	0,009	198	
10	41	0,099	46	0,047	52	0,016	54	0,010	90	
9	9	0,088	10	0,041	11	0,017	12	0,007	18	
8	36	0,088	40	0,040	44	0,017	47	0,010	72	
7	65	0,095	72	0,046	83	0,014	87	0,008	126	
6	11	0,053	12	0,025	13	0,011	14	0,004	18	
5	52	0,099	60	0,038	65	0,019	70	0,008	90	
4	23	0,090	25	0,049	28	0,019	30	0,010	36	
3	13	0,084	15	0,030	16	0,015	17	0,006	18	
2	16	0,063	17	0,032	18	0,011	-	-	18	
19	19	8	0,068	9	0,027	10	0,009	10	0,009	19
	18	133	0,097	142	0,049	160	0,019	176	0,009	342
	17	126	0,095	141	0,046	158	0,018	166	0,010	323
	16	120	0,096	133	0,048	151	0,018	160	0,009	304
	15	114	0,100	127	0,048	142	0,020	152	0,010	285
	14	110	0,095	121	0,047	135	0,019	148	0,008	266
	13	104	0,097	114	0,046	130	0,018	138	0,009	247
	12	99	0,090	108	0,050	121	0,019	130	0,010	228
	11	92	0,094	102	0,049	114	0,018	122	0,009	209
	10	85	0,089	94	0,047	104	0,019	113	0,009	190
	9	80	0,092	89	0,046	99	0,016	107	0,009	171
	8	74	0,097	82	0,049	93	0,018	98	0,010	152
7	69	0,088	76	0,044	86	0,016	91	0,009	133	
6	64	0,082	70	0,043	77	0,019	83	0,009	114	

<sup>29)</sup> Sporządzono na podstawie [71].

**c.d. wartości krytyczne statystyki  $D_{n,m}(\alpha)$  Smirnowa zgodności dwóch rozkładów empirycznych<sup>30)</sup>**

n	m	$\alpha$				k				
		0,10		0,05			0,02		0,01	
19	5	56	0,082	61	0,043	70	0,015	71	0,009	95
	4	49	0,077	53	0,041	57	0,019	64	0,008	76
	3	42	0,073	45	0,045	51	0,013	54	0,005	57
	2	32	0,095	36	0,029	38	0,010	38	0,010	38
20	20	8	0,081	9	0,034	10	0,012	11	0,004	20
	19	144	0,098	160	0,049	171	0,019	187	0,010	380
	18	68	0,098	76	0,048	85	0,019	91	0,009	180
	17	130	0,099	146	0,048	163	0,019	175	0,009	340
	16	32	0,089	35	0,049	39	0,020	42	0,009	80
	15	25	0,079	27	0,046	30	0,019	32	0,010	60
	14	57	0,095	63	0,049	71	0,019	76	0,009	140
	13	108	0,099	120	0,049	135	0,018	143	0,009	260
	12	26	0,091	29	0,043	32	0,018	35	0,007	60
	11	96	0,096	107	0,046	18	0,020	127	0,010	220
	10	10	0,062	11	0,029	12	0,012	12	0,005	20
	9	84	0,095	93	0,049	104	0,020	111	0,010	180
	8	20	0,087	22	0,044	25	0,014	26	0,009	40
	7	72	0,085	79	0,043	91	0,016	93	0,008	140
	6	33	0,082	36	0,035	40	0,016	44	0,007	60
	5	12	0,085	13	0,047	15	0,012	16	0,005	20
4	13	0,087	15	0,027	16	0,013	17	0,007	20	
3	42	0,095	48	0,040	54	0,011	57	0,005	60	
2	17	0,087	19	0,026	20	0,009	20	0,009	20	

<sup>30)</sup> Sporządzono na podstawie [71].



15.18. Wartości funkcji Laplace'a<sup>31)</sup>

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000	0,31	0,122	0,61	0,229	0,91	0,319
0,01	0,004	0,32	0,126	0,62	0,232	0,92	0,321
0,02	0,008	0,33	0,129	0,63	0,236	0,93	0,324
0,03	0,012	0,34	0,133	0,64	0,239	0,94	0,326
0,04	0,016	0,35	0,137	0,65	0,242	0,95	0,329
0,05	0,020	0,36	0,141	0,66	0,245	0,96	0,331
0,06	0,024	0,37	0,144	0,67	0,249	0,97	0,334
0,07	0,028	0,38	0,148	0,68	0,252	0,98	0,336
0,08	0,032	0,39	0,152	0,69	0,254	0,99	0,339
0,09	0,036	0,40	0,155	0,70	0,258	1,00	0,341
0,10	0,040	0,41	0,159	0,71	0,261	1,01	0,344
0,11	0,044	0,42	0,163	0,72	0,264	1,02	0,346
0,12	0,048	0,43	0,166	0,73	0,267	1,03	0,349
0,13	0,052	0,44	0,170	0,74	0,270	1,04	0,351
0,14	0,056	0,45	0,174	0,75	0,273	1,05	0,353
0,15	0,060	0,46	0,177	0,76	0,276	1,06	0,355
0,16	0,064	0,47	0,181	0,77	0,279	1,07	0,358
0,17	0,067	0,48	0,184	0,78	0,282	1,08	0,360
0,18	0,071	0,49	0,187	0,79	0,285	1,09	0,362
0,19	0,075	0,50	0,191	0,80	0,288	1,10	0,364
0,20	0,079	0,51	0,195	0,81	0,291	1,11	0,367
0,21	0,083	0,52	0,198	0,82	0,294	1,12	0,369
0,22	0,087	0,53	0,202	0,83	0,297	1,13	0,371
0,23	0,091	0,54	0,205	0,84	0,300	1,14	0,373
0,24	0,095	0,55	0,209	0,85	0,302	1,15	0,375
0,25	0,099	0,56	0,212	0,86	0,305	1,16	0,377
0,26	0,103	0,57	0,216	0,87	0,308	1,17	0,379
0,27	0,106	0,58	0,219	0,88	0,311	1,18	0,381
0,28	0,110	0,59	0,222	0,89	0,313	1,19	0,383
0,29	0,114	0,60	0,226	0,90	0,316	1,20	0,385
0,30	0,118						

<sup>31)</sup> Sporządzono na podstawie [48].



c.d. Wartości funkcji Laplace'a<sup>32)</sup>

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,21	0,387	1,56	0,441	2,12	0,483
1,22	0,389	1,57	0,442	2,14	0,484
1,23	0,391	1,58	0,443	2,16	0,485
1,24	0,393	1,59	0,444	2,18	0,485
1,25	0,394	1,60	0,445	2,20	0,486
1,26	0,396	1,61	0,446	2,22	0,487
1,27	0,398	1,62	0,447	2,24	0,487
1,28	0,400	1,63	0,448	2,26	0,488
1,29	0,401	1,64	0,450	2,28	0,489
1,30	0,403	1,65	0,451	2,30	0,4893
1,31	0,405	1,66	0,452	2,32	0,4898
1,32	0,407	1,67	0,453	2,34	0,4904
1,33	0,408	1,68	0,454	2,36	0,4909
1,34	0,410	1,69	0,455	2,38	0,4913
1,35	0,411	1,70	0,455	2,40	0,4918
1,36	0,413	1,72	0,457	2,42	0,4922
1,37	0,415	1,74	0,459	2,44	0,4927
1,38	0,416	1,76	0,461	2,46	0,4931
1,39	0,418	1,78	0,462	2,48	0,4934
1,40	0,419	1,80	0,464	2,50	0,4938
1,41	0,421	1,82	0,466	2,55	0,4946
1,42	0,422	1,84	0,467	2,60	0,4953
1,43	0,424	1,86	0,469	2,65	0,4960
1,44	0,425	1,88	0,470	2,70	0,4965
1,45	0,426	1,90	0,471	2,75	0,4970
1,46	0,428	1,92	0,473	2,80	0,4974
1,47	0,429	1,94	0,474	2,9	0,4981
1,48	0,431	1,96	0,475	3,0	0,4987
1,49	0,432	2,98	0,476	3,2	0,4993
1,50	0,433	2,00	0,477	3,4	0,4997
1,51	0,434	2,02	0,478	3,6	0,4998
1,52	0,436	2,04	0,479	3,8	0,49993
1,53	0,437	2,06	0,480	4,0	0,49997
1,54	0,438	2,08	0,481	4,5	0,499997
1,55	0,439	2,10	0,482	5,0	0,4999997

<sup>32)</sup> Sporządzono na podstawie [48].

15.19. Liczby losowe<sup>33)</sup>

15	77	01	64	69	69	58	40	81	16	60	20	00	84	22	28	26	46	66	36	86	66	17	35	49
85	40	51	40	10	15	33	94	11	65	57	62	94	04	99	05	57	22	71	77	99	68	12	11	14
47	69	35	90	95	16	17	45	86	29	16	70	48	02	00	59	33	93	28	58	34	32	24	34	07
13	26	87	40	20	40	81	46	08	09	74	99	16	92	99	85	19	01	23	11	74	00	79	41	69
10	55	33	20	47	54	16	86	11	16	59	34	71	55	84	03	48	17	60	13	38	71	23	91	83
05	06	67	26	77	14	85	40	52	68	60	41	94	98	18	62	20	94	03	71	60	26	45	17	92
65	50	89	18	74	42	07	50	15	69	86	97	40	25	88	14	17	73	92	07	93	11	93	45	15
59	68	53	31	55	73	47	16	49	79	69	80	76	16	60	58	53	07	04	53	66	94	94	18	13
31	31	05	36	48	75	16	00	21	11	42	44	84	46	84	83	20	49	17	12	21	93	34	61	16
91	59	46	44	45	49	25	36	12	07	24	90	89	55	25	83	47	17	23	93	99	56	14	39	16
63	59	73	21	67	80	00	25	58	25	72	06	12	86	74	54	79	70	86	88	71	58	21	98	48
89	72	47	46	94	78	56	10	65	97	84	79	42	31	49	94	15	31	13	09	45	43	03	82	81
70	51	21	03	18	50	21	99	49	73	06	99	19	24	96	39	43	10	14	12	94	08	55	54	70
14	15	99	60	44	62	72	38	18	36	63	92	61	55	93	77	66	82	10	91	81	51	67	01	47
92	46	90	39	99	64	08	00	97	27	54	96	63	40	54	34	70	27	48	18	68	59	91	83	32
81	23	17	13	01	37	57	92	16	34	15	80	90	25	64	67	77	29	95	84	80	84	84	87	22
87	54	42	46	56	28	89	02	06	98	59	90	74	13	38	98	66	23	20	23	90	55	31	83	48
74	73	84	98	13	11	48	25	33	39	27	36	08	99	57	60	42	88	68	25	22	89	67	83	16
94	55	14	00	97	32	51	92	47	03	92	33	73	20	21	29	77	37	06	98	64	63	34	31	43
69	21	94	26	20	73	90	70	92	76	49	14	60	34	43	90	51	72	11	07	75	94	19	49	40
82	36	36	89	29	87	70	08	71	98	49	00	89	89	99	29	08	02	72	32	68	16	29	82	19
25	06	22	30	87	87	44	48	90	91	38	53	10	60	29	40	07	58	97	84	09	04	33	56	72
82	37	97	60	92	76	39	17	84	34	67	65	52	89	90	62	97	04	33	81	91	27	56	46	35
83	71	07	22	15	17	55	56	82	62	88	83	86	38	14	63	89	39	81	90	25	62	58	68	87
73	13	79	15	12	18	34	22	24	75	56	47	45	22	81	30	82	38	34	52	57	43	30	34	17
91	28	00	57	30	92	12	38	95	21	15	70	78	50	88	01	07	90	72	77	99	53	04	34	73
33	47	55	62	57	08	21	77	31	05	64	74	04	93	42	20	19	09	71	46	37	32	69	69	89
56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	29	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	90	85	75	67	80	05	57	05	71	70	21	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	13	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79

<sup>33)</sup> Sporządzono na podstawie [48].

c.d. Liczby losowe<sup>34)</sup>

82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	55	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	6	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	68	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	47	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	36	20	82	53	32	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	91
23	97	10	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	69	45	96	80	46	26	39	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	81	15	14	67	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	45	14	72	41	46	12	67	46	72	02	59	06	17	49	12	73	28	23	52	48
08	58	53	63	66	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	71	11	15	23	17
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84
54	13	05	46	17	05	51	24	53	57	46	51	14	39	17	21	39	89	07	35	47	87	44	36	62
95	27	23	17	39	80	24	44	48	93	75	94	77	09	23	48	75	91	69	03	55	51	09	74	47
22	39	44	74	80	25	95	28	63	90	41	19	48	46	72	51	12	97	39	83	35	83	23	17	29
69	95	21	30	11	98	81	38	00	53	41	40	04	16	78	67	29	83	41	18	30	90	44	37	64
75	75	63	97	12	11	57	05	86	52	82	72	47	72	14	37	72	69	75	48	72	21	52	51	81
08	74	79	30	80	70	11	66	79	25	88	01	94	52	31	38	57	98	71	62	12	56	61	01	54
04	88	45	98	60	90	92	74	77	87	40	18	65	87	37	08	68	62	39	52	84	74	90	68	18
97	35	74	05	75	42	13	49	48	38	74	19	06	42	60	20	79	90	81	77	18	51	71	27	27
53	09	93	28	29	80	19	68	30	45	94	49	49	71	21	93	93	71	30	34	52	65	83	40	13
26	36	68	48	09	37	69	26	22	80	23	34	10	45	70	83	51	07	37	44	62	96	74	42	64
49	16	57	15	79	56	63	22	94	28	11	39	69	55	38	53	06	97	20	42	09	14	90	43	48
03	51	79	78	74	75	23	73	75	98	47	85	07	26	02	61	28	01	22	16	14	12	15	67	22
22	88	87	28	48	23	44	03	03	80	53	89	07	87	93	30	17	84	17	74	16	53	31	39	01
56	41	73	33	41	59	16	59	50	98	24	24	87	06	75	99	52	09	88	05	86	25	43	50	94
72	39	19	70	17	01	04	01	22	33	04	84	63	27	65	84	39	45	55	31	95	88	93	90	37
97	28	25	81	49	71	69	22	04	51	56	46	56	15	10	69	59	99	50	29	33	50	16	93	09
18	87	02	72	08	74	52	16	03	82	20	19	66	23	62	37	51	04	89	31	32	19	59	85	57
53	40	11	75	45	13	56	85	31	37	09	17	71	96	79	39	50	79	27	62	71	14	95	53	03
60	49	03	41	56	78	33	77	28	02	21	90	10	62	01	97	06	45	01	19	95	12	24	18	52

<sup>34)</sup> Sporządzono na podstawie [48].

## LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

1. **Bil T.:** TB-WYKRES. Program komputerowy i opis użytkowania programu. WSInż. Koszalin, ETO, 1990.
2. **Bil T.:** POLIOPT. Program komputerowy i opis użytkowania programu. WSInż. Koszalin, ETO, 1990.
3. **Brémond J., Salort M.M.:** Odkrywanie ekonomii. PWN, Warszawa, 1994.
4. **Czekaj J., Dresler Z.:** Podstawy zarządzania finansami firm. PWN, Warszawa, 1996.
5. **Dobiaš I.:** Identyfikacja krivoj nielinejnosti na osnovie eksperimentalno ustanovlennych koefficientov statičeskoj linearizaciji. Materiały X Konferencji Dynamiki Maszyn, Referaty, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1976.
6. **Eykhoff P.:** System identifikation. Wiley, London, 1974.
7. **Findeisen W.:** Technika regulacji automatycznej. PWN, Warszawa, 1965.
8. **Fisher R.:** Statistical for Research Workers. Warszawa, 1972.
9. **Fleszar J., Kukielka L.:** Urządzenia techniczne w rolnictwie. Materiały pomocnicze do wykładów i ćwiczeń laboratoryjnych. Skrypt Wydziału Mechanicznego, Wyższa Szkoła Inżynierska, Koszalin, 1983.
10. **Greń J.:** Statystyka matematyczna. Modele i zadania. PWN, Warszawa, 1978.
11. **Hellwig Z.:** Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa, 1978.
12. **Hobler T.:** Ruch ciepła i wymienniki. WNT, Warszawa, 1986.
13. **Janiszowski K.:** Minimalna suma modułów błędów jako wskaźnik przy szacowaniu parametrów modelu. Materiały XV Ogólnopolskiej Konferencji nt. „Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania - Mielno '97”, Koszalin-Mielno, 1997, s. 101-108.
14. **Kacalak W.:** WK-GRAF. Program komputerowy i opis użytkowania programu. WSInż. Koszalin, ETO, 1990.
15. **Kacew P.G.:** Kontrola narzędzi skrawających metodami statystycznymi. WNT, Warszawa, 1978.
16. **Kacprzycki B.L.:** Planowanie eksperymentu. podstawy matematyczne. WNT, Warszawa, 1974.



17. **Kasprzak W., Lysik B.:** Analiza wymiarowa. Algorytmiczne procedury obsługi eksperymentu. WNT, Warszawa, 1988.
18. **Kujath M.:** Rozwinięcie metody funkcji modulującej do identyfikacji silnie nieliniowych układów mechanicznych. Rozprawa doktorska. Prace IPPT nr 2. Warszawa, 1980.
19. **Kukielka L.:** Wpływ dodatkowego prądu płynącego w układzie OUPN na charakterystykę warstwy wierzchniej przedmiotów nagniatanych tocznie. Praca doktorska (Promotor: Prof. zw. dr inż. dr h. c. Kazimierz Wieczorowski), Politechnika Poznańska, 1983.
20. **Kukielka L.:** Optymalizacja procesu nagniatania powierzchniowego. ZN WM nr 13, WSInż. Koszalin, 1988, s. 119-146
21. **Kukielka L.:** Designating the field areas for the contact of a rotary burnishing element with the rough surface of a part, providing a high-quality product. Journal of Mechanical Working Technology, 19, Amsterdam, 1989, pp. 319-356.
22. **Kukielka L., Kusiak K.:** Planeks-stat (wersja 1). Planowanie eksperymentu, statystyczne opracowywanie wyników oraz identyfikacja i analiza modelu matematycznego obiektu badań. Opis użytkowania programu komputerowego. WSInż. Koszalin, ETO, 1990.
23. **Kukielka L.:** Wariacyjne sformułowanie modelu procesu powierzchniowego, tocznego nagniatania elektromechanicznego, Materiały V Ogólnopolskiej Konferencji nt. "Technologia obróbki przez nagniatanie". PAN-ART. Bydgoszcz, 1992, s. 105-118
24. **Kukielka L.:** Przyrostowa analiza procesu nagniatania z elektrokontaktowym nagrzewaniem. Prace Katedr Wydziału Mechanicznego WSInż. W Koszalinie w zakresie technologii maszyn. Zeszyt nr 51 z posiedzenia Sekcji Podstaw Technologii KBM PAN, Koszalin, 7.9.1993, s. 62-75
25. **Kukielka L.:** Teoretyczne i doświadczalne podstawy powierzchniowego nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem. Monografia Wydziału Mechanicznego nr 47. WSInż. Koszalin, 1994, s. 348
26. **Kukielka L.:** Polioptymalizacja procesu powierzchniowego nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem, Materiały XIV Ogólnopolskiej Konferencji nt. "Polioptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania" Kołobrzeg, 1996, s. 179-186
27. **Kukielka L.:** Designating the temperature field in the object during the burnishing rolling operation with electric current. 2nd International Conference on Modelling of metal rolling process. London, pp. 596÷605, 1996.

28. **Kukielka L.:** Incremental model of yield stress of metals in the conditions of burnishing rolling operation with electrical current. Surface treatment. Computer Method and experimental measurements. Boston, pp. 93-102, 1997.
29. **Kukielka L.:** Dynamic incremental nonlinear analysis of the burnishing rolling operation with electric current, University Eds., WM nr 22, Technical University of Koszalin, Poland, 1998, pp. 127÷142.
30. **Kukielka L., Dudek P., Przybylski M.:** Numeryczna analiza rozkładu temperatury w procesie nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem. XI KN „Problemy rozwoju maszyn roboczych”, Gliwice-Zakopane, 1998, t. 1, s. 223-230.
31. **Kukielka L., Cienkowski W., Dudek P.:** Numeryczna analiza rozkładu temperatury w procesie nagniatania tocznego z elektrokontaktowym nagrzewaniem. XI KN „Problemy rozwoju maszyn roboczych”, Gliwice-Zakopane, 1998, t. 2, s. 235-242.
32. **Kukielka L.:** Numerical Simulation of the Heat Transfer in the Burnishing Rolling Operation with Electrical Current, 7<sup>th</sup> International Conference of Steel Rolling, Steel Rolling'98, Tokyo, 1998, p. 233-238.
33. **Kukielka L.:** Nonlinear Modelling and Simulation of the Burnishing Rolling Operation with Electrical Current, 7<sup>th</sup> International Conference of Steel Rolling, Steel Rolling'98, Tokyo, 1998, p. 200-205.
34. **Kurcysz S.:** Matematyczne podstawy teorii optymalizacji. PWN, Warszawa, 1982.
35. **Lehmann E.L.:** Testowanie hipotez statystycznych. PWN, Warszawa, 1968.
36. **Linnik J.W.:** Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji. PWN, Warszawa, 1962.
37. **Livašyc N.A., Pugačev W.N.:** Veroyatnostnyj analiz sistem avtomaticheskogo upravleniya, Tom 2, Sovetskoje Radio, Moskwa, 1963.
38. **Łastowiecki K., Madeja A.:** Sprawozdawczość i analiza statystyczna. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1974.
39. **Mańczak K.:** Technika planowania eksperymentu. WNT, Warszawa, 1976.
40. **Mańczak K.:** Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa, 1979.
41. **Masri S.F., Bekey G.A., Safford F.B.:** An adaptive random search method for identifikation of large scale nonlinear systemus. Preprint, IV IFAC Symposium, Tibilisi, 1976.



42. **Moseley L.E., Boodey D.M.:** Microsoft Office 97 PL. EXIT, Warszawa, 1997.
43. **Mrozek B., Mrozek Z.:** MATLAB. Uniwersalne środowisko do obliczeń naukowo-technicznych. AGO, Kraków, 1994.
44. **Nalimow W.W., Czernowa N.A.:** Statystyczne metody planowania doświadczeń ekstremalnych. WNT, Warszawa, 1967.
45. **Oktała W.:** Metody statystyki matematycznej w doświadczalnictwie. PWN, Warszawa, 1971.
46. **Ordyncew W.M.:** Opis matematyczny obiektów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa, 1968.
47. **Ostrowska-Maciejewska J.:** Mechanika ciał odkształcalnych. PWN, Warszawa, 1994.
48. **Pająk E., Wieczorowski K.:** Podstawy optymalizacji operacji technologicznych w przykładach. PWN, 1982.
49. **Piesiak S.:** Identyfikacja własności mechanicznych układu o  $n$ -stopniach swobody metodą bilansu harmonicznego. Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1973.
50. **Piesiak S.:** Identyfikacja własności mechanicznych o  $n$ -stopniach swobody z uwzględnieniem wyższych harmonicznych metodą bilansu harmonicznego. Komunikaty Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1974.
51. **Polański Z.:** Metody optymalizacji w technologii maszyn. PWN, Warszawa, 1977.
52. **Polański Z.:** Planowanie doświadczeń w technice. PWN, Warszawa, 1984.
53. **Polański Z., Górecka R.:** Opis programu komputerowego CADEX: ESDET, IDEF, PROFES, SPECTRA. Podręczniki użytkownika programów komputerowych. Wyd. CERMET, Kraków, 1992.
54. **Puchalski T.:** Elementy statystycznej kontroli jakości produkcji. PWN, Warszawa, 1973.
55. **Pugaczew W.S.:** Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego. MON, Warszawa, 1960.
56. **Radzikowski W.:** Metody matematyczne i statystyczne w przedsiębiorstwie. PWE, Warszawa, 1976.
57. **Sadowski W. i inni:** Tablice statystyczne. PWE, Warszawa, 1957.

58. **Siedow L.I.:** Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice. WNT, Warszawa, 1968.
59. **Sikora J.:** Optymalizacja procesów obróbki skrawaniem z zastosowaniem maszyn cyfrowych. WNT, Warszawa, 1978.
60. **Smirnow N.W., Dunin-Barkowski I.W.:** Krótki kurs statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych. PWN, Warszawa, 1966.
61. **Stanchev E.S., Minchev N.D.:** Identification of the parameters in the nonlinear elastodynamics of machine aggregates. IX Conference on Dynamics of Machines. Smolenice, 1974.
62. **StatSoft Polska:** Produkty firmy StatSoft, Kraków, 1999.
63. **Szulc B.:** Statystyka teoretyczna. Kurs elementarny. Łódź-Warszawa, 1966.
64. **Tarnowski W., Kiczowski T.:** Komputerowe wspomaganie projektowania. Dodatek B - Opis programu komputerowego POLIOPT, s. 331-354. WSIInż. Koszalin, 1994.
65. **Wicher J.:** Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych. Prace IPPT nr 67, Warszawa, 1975.
66. **Wilenski S. J.:** Statystyczne metody badania układów sterowania automatycznego. WNT, Warszawa, 1969.
67. **Vic Barnett:** Elementy teorii pobierania prób. PWN, Warszawa, 1982.
68. **Volk W.:** Statystyka stosowana dla inżynierów. WNT, Warszawa, 1965.
69. **Zalewski A., Cegiela R.:** Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowania. Nakom, Poznań, 1996.
70. **Zeigler B. P.:** Teoria modelowania i symulacji. PWN, Warszawa, 1984.
71. **Zieliński R.:** Tablice statystyczne. PWN, Warszawa, 1972.
72. **Zieliński R.:** Wybrane zagadnienia optymalizacji statystycznej. PWN, Warszawa, 1974.
73. **Zieliński R., Neumann P.:** Stochastyczne metody poszukiwania minimum funkcji. WNT, 1986.
74. **Zubrzycki S.:** Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa, 1966.