

GRAŻYNA MALATYŃSKA
PRZEKSZTAŁCENIA
CAŁKOWE
I RACHUNEK
OPERATOROWY

$$\mathcal{L}: f(t) \rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{F}: f(t) \rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$$

Grażyna Malatyńska

Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy

Koszalin 2001

PODREĆCZNIK WYDZIAŁU BUDOWNICTWA
I INŻYNIERII ŚRODOWISKA

ISBN 83-88283-76-6

Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej
Szymon Pałkowski

Opiniodawcy
Jan Kubarski
Ewa Łazarow

Redaktor
Zdzisław Hryniewicz

Projekt okładki
Tadeusz Walczak

Skład, łamanie
Irena Hajdasz

© Copyright by Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej
Koszalin 2001

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ
75-620 Koszalin, ul. Raławicka 15-17

Koszalin 2001, wyd. I, ark. wyd. 8,9, format B-5, nakład 1000 egz.
Druk: Drukarnia INTRO-DRUK, Koszalin

Spis treści

Przedmowa	5
Wstęp	7
1. Podstawowe pojęcia i twierdzenia	9
1.1. Określenie oryginału	9
1.2. Definicja przekształcenia Laplace'a	18
1.3. Przykłady transformat funkcji podstawowych	24
1.3.1. Transformata funkcji jednostkowej	24
1.3.2. Transformata funkcji wykładniczej	25
1.3.3. Transformata funkcji sinus	26
1.3.4. Transformata funkcji cosinus	27
1.3.5. Transformata funkcji liniowej	28
1.3.6. Transformata funkcji potęgowej	28
1.4. Odwrotne przekształcenie Laplace'a	30
Zadania do samodzielnego rozwiązania	35
2. Własności przekształcenia Laplace'a	39
2.1. Liniowość	39
2.2. Różniczkowanie i całkowanie oryginału	48
2.3. Różniczkowanie i całkowanie transformaty	58
2.4. Podobieństwo (zmiana skali)	65
2.5. Przesunięcia zespolone	67
2.6. Przesunięcia rzeczywiste	73
2.7. Transformata funkcji okresowej	105
2.8. Twierdzenia o wartościach granicznych	109
Zadania do samodzielnego rozwiązania	115
3. Splot funkcji	127
3.1. Określenie i podstawowe własności splotu	127
3.2. Transformata splotu	135
3.3. Całki Duhamela	142
Zadania do samodzielnego rozwiązania	148

4. Metody wyznaczania transformaty odwrotnej (oryginału)	155
4.1. Metoda bezpośrednia	155
4.2. Rozkład na ułamki proste	157
4.3. Metoda residuów	169
4.4. Twierdzenie o rozkładzie	174
4.5. Metoda oparta na twierdzeniu Borela	177
4.6. Rozwinięcie transformaty (obrazu) w szereg Laurenta	178
4.7. Inne metody wyznaczania oryginału	182
Zadania do samodzielnego rozwiązania	187
5. Zastosowania przekształcenia Laplace'a	197
5.1. Równania różniczkowe liniowe zwyczajne przy danych warunkach początkowych	199
5.2. Układy równań różniczkowych liniowych przy danych warunkach początkowych	212
5.3. Równania różniczkowe z przesuniętym argumentem	217
5.4. Równania całkowe typu splotu oraz równania różniczkowo-całkowe	220
Zadania do samodzielnego rozwiązania	224
6. Funkcje uogólnione	239
6.1. Wprowadzenie pojęcia delta funkcji Diraca	239
6.2. Związek δ -funkcji z funkcją jednostkową	247
6.3. Własność filtracji	248
6.4. Transformata δ -funkcji	250
6.5. Pochodne δ -funkcji i ich transformaty	251
6.6. Przykłady zastosowań δ -funkcji	255
Zadania do samodzielnego rozwiązania	262
7. Przekształcenie Fouriera	263
7.1. Wzór całkowy Fouriera	263
7.2. Postać zespolona wzoru całkowego Fouriera	275
7.3. Proste i odwrotne przekształcenie Fouriera.	277
7.4. Widmo funkcji. Widmo amplitudowe i widmo fazowe	280
7.5. Cosinusowe i sinusowe przekształcenia Fouriera	286
7.6. Własności przekształcenia Fouriera	291
7.7. Splot funkcji w przedziale $(-\infty, +\infty)$	302
Zadania do samodzielnego rozwiązania	305
Dodatek	319
Literatura	327

Przedmowa

Tematem niniejszego podręcznika są przekształcenia całkowe i zastosowania rachunku operatorowego w zakresie programu wyższych szkół technicznych. Podręcznik został przygotowany w taki sposób, aby mógł służyć jako konspekt wykładu i materiał do ćwiczeń praktycznych. Podręcznik ten powstał w oparciu o wykłady i ćwiczenia prowadzone przez autorkę na drugim roku studiów w ramach przedmiotu „Matematyka” na Wydziale Elektroniki Politechniki Koszalińskiej zgodnie z aktualnie realizowanym programem. Jest on adresowany przede wszystkim do studentów studiujących na studiach dziennych i wieczorowych na wydziale elektroniki. Ze skryptu mogą korzystać także studenci studiujący na innych kierunkach wyższych szkół technicznych, zwłaszcza na kierunkach: mechanicznym i budownictwa.

Dobór materiału i sposób przedstawienia podporządkowano celowi dydaktycznemu. Podręcznik składa się z siedmiu rozdziałów, a te z kolei podzielone zostały na podrozdziały, w których obowiązuje wewnętrzna numeracja definicji, twierdzeń, wzorów, wniosków i uwag. I tak na przykład wniosek 2.6.3 oznacza, że jest to trzeci wniosek w podrozdziale 6 rozdziału drugiego. Przykłady i rysunki mają numerację podwójną ciągłą w danym rozdziale, np. rys. 7.3 oznacza trzeci rysunek w rozdziale siódmym. Nowo wprowadzony termin oraz twierdzenia wyróżniono pismem pochyłym. W każdym rozdziale na początku zamieszczono niezbędny materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia – niektóre bez dowodów). Główną część każdego rozdziału stanowią zadania ze szczegółowymi rozwiązaniami lub wyczerpującymi wskazówkami i odpowiedziami, które oswajają studenta z teorią, pomagają lepiej zrozumieć dany wykład i umożliwiają samodzielne studiowanie i rozwiązywanie zadań przeznaczonych do rozwiązania. Dla umożliwienia Czytelnikowi kontrolowania, czy rozwiązuje zadania we właściwy sposób, na końcu każdego rozdziału są podane odpowiedzi do zadań. Znak ■ oznacza koniec dowodu lub koniec przykładu. W Dodatku zamieszczono cztery tablice z zebranymi własnościami przekształceń Laplace'a

i Fouriera oraz ich transformatami. Zakłada się, że student posiada przygotowanie ogólnomatematyczne w zakresie dwóch pierwszych semestrów przedmiotu „Matematyka”, a przede wszystkim dobrze opanował podstawy w zakresie funkcji zmiennej zespolonej.

Celem autora jest dostarczenie studentom takiego podręcznika, z którego mogliby korzystać zarówno wtedy, gdy zechcą opanować podstawowe pojęcia i własności przekształceń całkowych, jak również i wtedy, gdy będą chcieli poznać szerszy zakres ich zastosowań. Podręcznik ten nieznacznie wykracza poza program wykładów i zawiera materiał, który zainteresuje studentów wyższych lat, a także wszystkich zajmujących się zastosowaniami rachunku operatorowego. Nie obejmuje on jednak w całości zagadnień związanych z określonym tematem, dlatego nie należy traktować go za w pełni wyczerpany. Znajomość literatury studiowanego przedmiotu stanowi bardzo ważny rodzaj wiedzy. Nie można poprzestać na jednym tylko podręczniku, gdyż doprowadza to do spleycenia studiów i dlatego na końcu podręcznika podano spis zalecanej literatury. Korzystając z tego podręcznika student powinien wykazywać aktywność i w celu opanowania materiału podanego w skrypcie powinien samodzielnie rozwiązać znaczną liczbę zadań, korzystając z zestawów ćwiczeń zamieszczonych na końcu każdego rozdziału.

Wyrażam nadzieję, że opracowanie niniejsze okaże się bardzo przydatne w praktyce dydaktycznej i będzie znaczącą pomocą w samodzielnym przyswajaniu obowiązującego materiału. Będę wdzięczna zainteresowanym za życzliwe przyjęcie tej formy pomocy, jak również za nadsyłanie uwag krytycznych oraz informacji o zauważonych błędach.

Moim miłym obowiązkiem jest podziękowanie wszystkim, którzy przyczynili się do napisania tego podręcznika.

Składam serdeczne podziękowania recenzentom Panu prof. dr hab. Janowi Kubarskiemu i Pani prof. dr hab. Ewie Łazarow za przejrzenie całego materiału, za wiele cennych, życzliwych uwag krytycznych i merytorycznych oraz wskazówek, które pozwoliły mi wyeliminować wiele błędów i pomyłek a tym samym ulepszyć ten podręcznik. Pragnę podziękować Panu prof. dr hab. Zdzisławowi Hryniewiczowi za pracę nad redakcją tego podręcznika i wnikliwe korekty. Serdecznie dziękuję również dr Annie Sobolewskiej i dr Tomaszowi Kowalskiemu, których uwagi i sugestie umożliwiły precyzyjniejszą prezentację niektórych fragmentów tekstu. Dziękuję z całego serca koleżance mgr inż. Irenie Hajdasz, która była moim „dobrym duchem” i za wielką pomoc, jakiej mi udzieliła przy technicznym opracowaniu tego podręcznika oraz za jej niezwykłą cierpliwość, nieocenione rady i życzliwość.

Grażyna Malatyńska

Koszalin, wrzesień 2001 r.

Wstęp

Dział matematyki zajmujący się wyznaczaniem transformaty dla zadanego oryginału $f(t)$ i na odwrót, znajdowaniem oryginału gdy znana jest jego transformata (obraz) $F(s)$ nazywa się rachunkiem operatorowym. Podstawę rachunku operatorowego stanowią przekształcenia całkowe, z których najważniejsze to przekształcenie Laplace'a i przekształcenie Fouriera.

Rachunek symboliczny, który obecnie nazywamy rachunkiem operatorowym, zapoczątkowali w swoich pracach G.W. Leibniz (1646-1716), L. Euler (1707-1783), J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827), J. Fourier (1768-1830). Do popularyzacji rachunku operatorowego przyczynił się w dużej mierze angielski inżynier elektryk Oliver Heaviside (1850-1925), który proponował oryginalną metodę rozwiązywania równań różniczkowych i zastosował ją do analizy obwodów elektrycznych. Jednakże O. Heaviside nie uzasadnił dostatecznie stosowanych metod i w związku z tym w niektórych przypadkach otrzymywał fałszywe rezultaty. Metoda ta, zwana dzisiaj metodą operatorów Heaviside'a polega na zastąpieniu symbolu różniczkowania d/dt operatorem s , ($s = d/dt$), a symbol całkowania (tzn. operacji odwrotnej do różniczkowania) operatorem $1/s$, co umożliwiło algebraizację równań różniczkowych i całkowych.

Ścisłe podstawy matematyczne metoda ta uzyskała wówczas, gdy w latach dwudziestych powiązano ją z przekształceniem Laplace'a. Dzięki pracom T.J. Bromwicha, J.R. Carsona, G. Doetscha, Van der Pola i innych, w oparciu o proste i odwrotne przekształcenie Laplace'a oraz przekształcenie Laplace'a – Carsona stworzono poprawne podstawy matematyczne rachunku operatorowego. W miejsce operatora różniczkowania s pojawiła się zmienna zespolona $s = \lambda + i\omega$ ($\lambda, \omega \in R$), zaś operacje różniczkowania i całkowania w dziedzinie zmiennej czasu t zostały zastąpione prostymi operacjami algebraicznymi (mnożenia i dzielenia) w płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Stwierdzono przy tym, że przekształcenie Laplace'a przewyższa metodę operatorów Heaviside'a pod

względem ścisłości, elegancji matematycznej, efektywności, jak również w zakresie zastosowań. Przekształcenie Laplace'a jest ściśle związane z przekształceniem Fouriera, a także z wieloma innymi przekształceniami całkowymi.

Nowe ujęcie rachunku operatorowego zawdzięczamy polskiemu matematykowi z Uniwersytetu Wrocławskiego J.G. Mikusińskiemu (1913-1987), który wprowadził nowy typ operatorów zwanych obecnie operatorami Mikusińskiego. Metoda operatorów Mikusińskiego oparta na zupełnie innej podstawie niż przekształcenie Laplace'a okazała się jednak w praktyce równoważna metodzie przekształcenia Laplace'a.

Należy zauważyć, że w ostatnim dziesięcioleciu rozwinęły się nowoczesne narzędzia jakimi są komputery i programy komputerowe, takie jak np. MATHEMATICA [22]. Dzięki temu możliwe stało się zastosowanie przekształceń całkowych do uzyskiwania efektywnych rozwiązań wielu współczesnych problemów w mechanice i matematyce stosowanej, co można zauważyć między innymi w cyklu publikacji [6, 7].

Wprowadzenie pojęcia dystrybucji, będącego uogólnieniem klasycznego pojęcia funkcji oraz rozwinięcie teorii dystrybucji przez francuskiego matematyka L. Schwartza i rosyjskiego matematyka L. Sobolewa, umożliwiło rozszerzenie zastosowań przekształceń całkowych i rachunku operatorowego również na wielkości niefunkcyjne, tzn. na dystrybucje.

Funkcje uogólnione pojawiły się w pracach P. Diraca i innych fizyków w charakterze symbolicznego sposobu opisu określonych zjawisk fizycznych. W celu wykorzystania tych pojęć zaszła konieczność stworzenia teorii funkcji uogólnionych, tj. teorii dystrybucji. Teoria dystrybucji jest bardzo pożytecznym aparatem matematycznym, przy pomocy której udało się rozwiązać wiele zadań nie dających się rozwiązać starymi metodami.

1.

Podstawowe pojęcia i twierdzenia

1.1. Określenie oryginału

Niech (a, b) oznacza otwarty przedział ograniczony oraz niech funkcja $f(t) = u(t) + iv(t)$ zmiennej rzeczywistej t będzie ciągła w przedziale (a, b) z wyjątkiem punktu $t_0 \in (a, b)$.

Definicja 1.1.1. Punkt t_0 nazywamy *punktem nieciągłości pierwszego rodzaju* funkcji $f(t)$, jeżeli istnieją obie skończone granice jednostronne $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$, $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$, przy czym nie wszystkie trzy liczby $f(t_0^-)$, $f(t_0^+)$, $f(t_0)$ są równe.

Punkt t_0 nazywamy *punktem nieciągłości drugiego rodzaju* funkcji $f(t)$, jeżeli przynajmniej jedna z granic jednostronnych w tym punkcie jest niewłaściwa lub nie istnieje.

Definicja 1.1.2. Warunki Dirichleta

Mówimy, że funkcja $f(t)$ spełnia na przedziale (a, b) *pierwszy warunek Dirichleta*, jeżeli jest ona ograniczona na (a, b) i gdy można podzielić ten przedział na skończoną liczbę takich podprzedziałów, wewnątrz których funkcja $f(t)$ jest monotoniczna.

Mówimy, że funkcja $f(t)$ spełnia na przedziale (a, b) *drugi warunek Dirichleta*, jeżeli jest ona ciągła na (a, b) z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, przy czym w każdym takim punkcie spełniony jest warunek

$$f(t_0) = \frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+)).$$

Definicja 1.1.3. *Oryginałem* nazywamy funkcję $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t o wartościach rzeczywistych lub zespolonych, spełniającą następujące warunki:

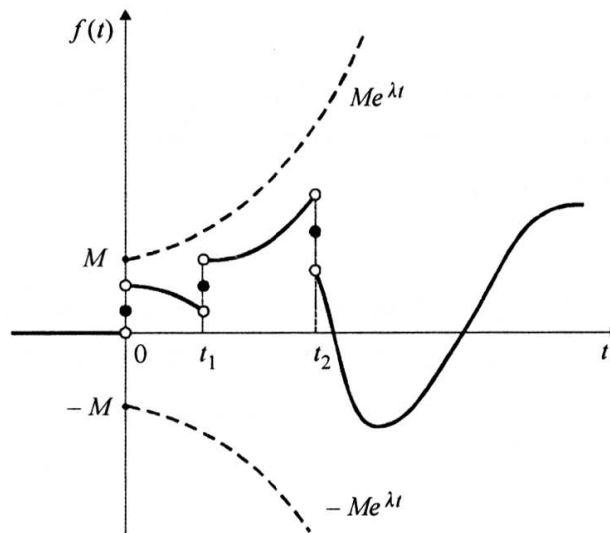
1° $f(t) = 0$ dla $t < 0$;

2° na każdym przedziale (a, b) funkcja $f(t)$ spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta;

3° moduł funkcji $f(t)$ jest ograniczony przez funkcję wykładniczą, tzn. istnieją takie liczby $M > 0$ i $\lambda \geq 0$, że dla każdego $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq Me^{\lambda t} \quad (1.1.1)$$

Ilustrację definicji oryginału przedstawiono na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Ilustracja do definicji oryginału. Wykres funkcji $f(t)$ zawarty jest między wykresami funkcji $Me^{\lambda t}$ i $-Me^{\lambda t}$. W punktach nieciągłości funkcja przyjmuje wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych

Uwaga 1.1.1. O funkcjach spełniających warunek (1.1.1) mówimy, że są *funkcjami rzędu wykładniczego*. Liczbę $\lambda_0 \geq 0$ będącą kresem dolnym tych wartości λ , dla których spełniony jest warunek (1.1.1), nazywamy *wskaznikiem wzrostu* lub *wykładnikiem wzrastania* funkcji $f(t)$, tj.

$$\lambda_0 = \inf \{ \lambda \geq 0 : |f(t)| \leq Me^{\lambda t}, t \geq 0 \} \quad (1.1.2)$$

Uwaga 1.1.2. Warunek (1.1.1) można zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{|f(t)|}{e^{\lambda t}} \leq M \quad \text{lub} \quad |f(t)|e^{-\lambda t} \leq M \quad (1.1.3)$$

i wtedy łatwo porównać zachowanie się funkcji $f(t)$ oraz funkcji $e^{\lambda t}$ gdy $t \rightarrow \infty$.

Mówimy wtedy, że przy $t \rightarrow \infty$ rząd zdążania do nieskończoności funkcji $|f(t)|$ może być najwyżej taki jak funkcji wykładniczej $e^{\lambda t}$ [19].

Uwaga 1.1.3. W szczególności, dla $\lambda = 0$ nierówność (1.1.1) przyjmie postać $|f(t)| \leq M$, a to oznacza, że $f(t)$ jest funkcją ograniczoną. Zatem wszystkie oryginały ograniczone mają wskaźnik wzrostu $\lambda_0 = 0$.

Przykład 1.1. Zbadać, która z podanych funkcji:

$$\text{a) } f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t^2 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}, \quad \text{b) } f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ e^{at} & \text{dla } t > 0 \end{cases}, \quad \text{c) } f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ e^{t^2} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

jest oryginałem. Dla oryginałów wyznaczyć wskaźnik wzrostu λ_0 .

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy najpierw, że każda z wymienionych funkcji jest określona w całym zbiorze liczb rzeczywistych i każda z nich spełnia warunki 1^o i 2^o definicji 1.1.3. Zatem, aby były one oryginałami wystarczy uzasadnić, że są to funkcje rzędu wykładniczego, tzn., że spełniają warunek (1.1.1).

a) Funkcja $f_1(t)$ jest rzędu wykładniczego o wykładniku λ większym od zera, ponieważ spełnia ona warunek (1.1.1), np. dla $\lambda = 2$ oraz $M = 1$. Łatwo to stwierdzić, jeśli rozwiniemy funkcję e^{2t} w szereg Maclaurina. Mamy wtedy

$$e^{2t} = 1 + \frac{2}{1!}t + \frac{2^2}{2!}t^2 + \frac{2^3}{3!}t^3 + \dots > 2t^2 > t^2; \quad \text{tj. } t^2 < e^{2t} \quad \text{dla każdego } t \geq 0.$$

Wykażemy teraz, że wskaźnikiem wzrostu funkcji $f_1(t) = t^2$, $t \geq 0$ jest liczba $\lambda_0 = 0$. W tym celu zgodnie z uwagami 1.1.2 i 1.1.3 pokażemy, że funkcja $g(t) = \left| \frac{f_1(t)}{e^{\lambda t}} \right| = t^2 e^{-\lambda t}$ jest ograniczona, tj. osiąga w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ swe kresy górny i dolny. Sprawdźmy najpierw, czy istnieje granica w nieskończoności funkcji $g(t)$. Przechodzimy więc w wyrażeniu $\left| \frac{f_1(t)}{e^{\lambda t}} \right|$ do granicy przy $t \rightarrow \infty$

i wobec nieoznaczoności typu $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ stosujemy dwukrotnie twierdzenie de L'Hospitala i otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f_1(t)}{e^{\lambda t}} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^{\lambda t}} = \lim_{H t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\lambda e^{\lambda t}} = \lim_{H t \rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda t}} = 0 \quad \text{dla } \lambda > 0 \quad (1)$$

Następnie obliczamy pochodną funkcji $g(t) = t^2 e^{-\lambda t}$ i badamy jej znak. Mamy $g'(t) = (t^2 e^{-\lambda t})' = t e^{-\lambda t} (2 - \lambda t)$ i z warunku koniecznego istnienia ekstremum znajdujemy $t_0 = \frac{2}{\lambda}$. Korzystając z warunku wystarczającego istnienia ekstremów, ponieważ w otoczeniu tego punktu pochodna zmienia znak z „+” na „-”, wnioskujemy, że w punkcie $t_0 = \frac{2}{\lambda}$ jest maksimum lokalne i globalne równe $\frac{4}{\lambda^2 e^2}$. Analizując powyższe wyniki stwierdzamy, że wskaźnikiem wzrostu funkcji $f_1(t)$ jest, zgodnie ze wzorem (1.1.2), liczba $\lambda_0 = 0$, jako kres dolny liczb λ spełniających nierówność (1.1.1).

b) Funkcja $f_2(t)$ jest funkcją typu wykładniczego. Wskaźnikiem wzrostu dla tej funkcji jest liczba $\lambda_0 = a$. Zgodnie z uwagą 1.1.2 warunek (1.1.1) zastępujemy badaniem nierówności (1.1.3), tj. nierówności postaci

$$\frac{|f_2(t)|}{e^{\lambda t}} = \frac{e^{at}}{e^{\lambda t}} = e^{(a-\lambda)t} \leq M \quad (2)$$

która jak łatwo zauważyć jest prawdziwa dla $t \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - \lambda \leq 0$, tj. $\lambda \geq a$ oraz $M \geq 1$. A więc, zgodnie z uwagą 1.1.1, przyjmujemy $\lambda_0 = a$ jako kres dolny wskaźników λ , dla których zachodzi nierówność (1.1.1).

W przypadku gdy stała wykładnicza $a \in \mathbb{C}$, tzn. jest liczbą zespoloną postaci $a = \alpha + \beta i$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\left| \frac{f_2(t)}{e^{\lambda t}} \right| = \left| \frac{e^{(\alpha + \beta i)t}}{e^{\lambda t}} \right| = |e^{\beta i t}| \cdot |e^{(\alpha - \lambda)t}| = e^{(\alpha - \lambda)t} \leq M \quad \text{dla } \alpha - \lambda \leq 0$$

(ponieważ moduł $|e^{\beta i t}| = 1$). Zatem wskaźnik wzrostu $\lambda_0 = \operatorname{Re}(a) = \alpha$.

c) Funkcja $f_3(t)$ nie jest typu wykładniczego, bo nie ma takiej liczby λ , przy której spełniona byłaby nierówność (1.1.1) dla jakiegokolwiek wartości M . Zgodnie z uwagą 1.1.2 mamy, dla każdej wartości λ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f_3(t)| e^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2} \cdot e^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2 - \lambda t} = +\infty.$$

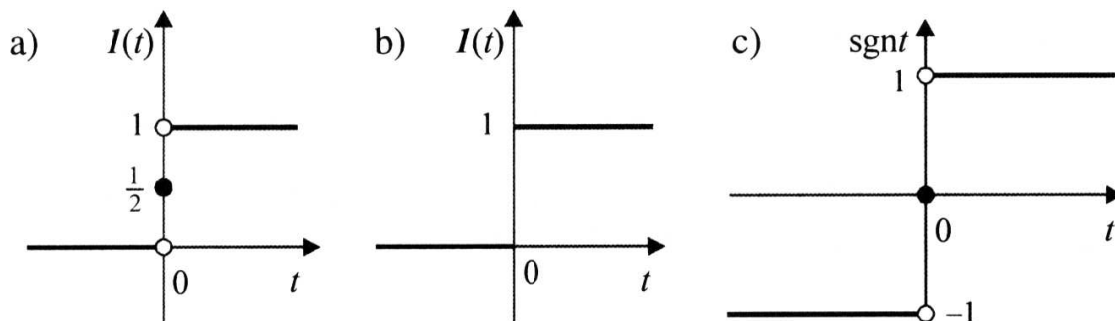
Odpowiedź: Funkcje f_1 i f_2 są oryginałami natomiast funkcja f_3 nie jest oryginałem. ■

Przykład 1.2. Najprostszym oryginałem jest *funkcja jednostkowa* $I(t)$ określona wzorem

$$I(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t), \quad t \in R \quad (1.1.4)$$

zwana też *funkcją skoku jednostkowego*, lub *zmodyfikowaną funkcją Heaviside'a* (rys. 1.2a), gdzie funkcja $\operatorname{sgn} t$ (wymawiaj: *signum t*) (rys. 1.2c)

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1 & \text{dla } t < 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.5)$$



Rys. 1.2. Wykresy funkcji: a) i b) skoku jednostkowego $I(t)$, c) $\operatorname{sgn} t$

Skok w punkcie nieciągłości $t = 0$ funkcji $\operatorname{sgn} t$ jest dodatni i równy 2.

Z określeń (1.1.4) i (1.1.5) wynika, że funkcję $I(t)$ można zapisać wzorem:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Funkcję Heaviside'a albo *skok jednostkowy* (rys. 1.2b) definiuje się najczęściej następująco:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.6')$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja skoku jednostkowego (1.1.6) ma wszystkie własności definicji oryginału i jako funkcja ograniczona ma wskaźnik wzrostu $\lambda_0 = 0$ i stałą $M = 1$ (patrz uwaga 1.1.3).

Funkcja $I(t)$ ma ważne znaczenie w rachunku operatorowym, gdyż przy rozpatrywaniu różnych zagadnień bardzo wygodne jest posługiwanie się pojęciem

skoku jednostkowego i jego przesunięć w argumentcie. Funkcja ta jest bardzo przydatna w przedstawianiu prostych nieciągłości. Każdą funkcję zawierającą skok można rozłożyć na funkcję ciągłą i odpowiednio przesuniętą funkcję jednostkową (patrz podrozdział 2.6).

Przykład 1.3.

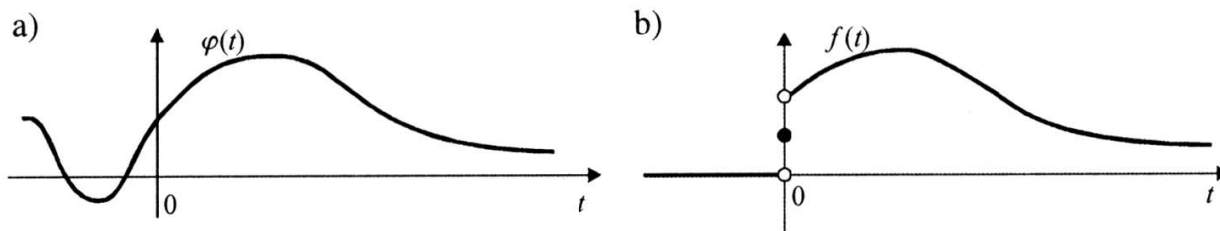
a) Funkcje $\varphi_1(t) = e^{-2t}$, $\varphi_2(t) = t^3$, $\varphi_3(t) = \cos t$, $\varphi_4(t) = \sin 2t$ dla $t \in R$ nie są oryginałami, gdyż nie spełniają warunku 1° def. 1.1.3, pomimo, że spełniają pozostałe warunki tej definicji.

b) Funkcje $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $h(t) = \ln t$ nie są oryginałami, gdyż każda z nich ma punkt osobliwy $t=0$ w którym jest nieograniczona, tj. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$. Z tego powodu nie spełniają one warunku 3° definicji 1.1.3, a ponadto funkcje f i h nie spełniają również warunku 1° tej definicji, bo nie są określone dla $t < 0$.

Wprowadzenie funkcji jednostkowej $I(t)$ (1.1.6) rozszerza klasę oryginałów. Przypuśćmy, że $\varphi(t)$ jest dowolną funkcją określoną w przedziale $(-\infty, +\infty)$, która spełnia warunki 2° i 3° def. 1.1.3, ale nie spełnia warunku 1° tej definicji. W tym przypadku, pomnożenie funkcji $\varphi(t)$ przez funkcję jednostkową (1.1.6) daje w wyniku funkcję będącą oryginałem. Reasumując, funkcja $f(t)$ określona wzorem

$$f(t) = I(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} \varphi(0^+) & \text{dla } t = 0 \\ \varphi(t) & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.7)$$

gdzie $\varphi(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t)$ jest oryginałem (rys. 1.3).



Rys. 1.3. Ilustracja graficzna: a) funkcji $\varphi(t)$, b) oryginału $f(t) = I(t) \varphi(t)$. Pomnożenie funkcji $\varphi(t)$ przez $I(t)$ powoduje „wygaszenie” tej funkcji dla $t < 0$

U w a g a . Używając funkcji $I(t)$, zgodnie ze wzorem (1.1.7), oryginały z przykładu 1.1a i b zapiszemy w postaci: $f_1(t) = I(t) \cdot t^2$ i $f_2(t) = I(t) \cdot e^{at}$.

Uwaga 1.1.4. W przypadku występowania punktów nieciągłości oryginału $f(t)$ dla $t > 0$ można nie podawać wartości $f(t_0)$ w punkcie nieciągłości t_0 , gdyż daje się ona łatwo wyznaczyć jako średnia arytmetyczna granic jednostronnych, tzn. zgodnie z warunkami Dirichleta (def. 1.1.2)

$$f(t_0) = \frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+)) \quad (1.1.8)$$

Zgodnie z powyższym, oryginał (1.1.7) zapisujemy często uproszczonym wzorem

$$I(t)\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \varphi(t) & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.9)$$

Przykład 1.4. W szczególności, zgodnie z wzorem (1.1.7), wszystkie funkcje $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ z przykładu 1.3a pomnożone przez funkcję jednostkową $I(t)$, tzn. funkcje

$f_1(t) = I(t) \cdot e^{-2t}$, $f_2(t) = I(t) \cdot t^3$, $f_3(t) = I(t) \cdot \cos t$, $f_4(t) = I(t) \cdot \sin 2t$ są oryginałami. ■

Przykład 1.5. Sporządzić wykres oryginału

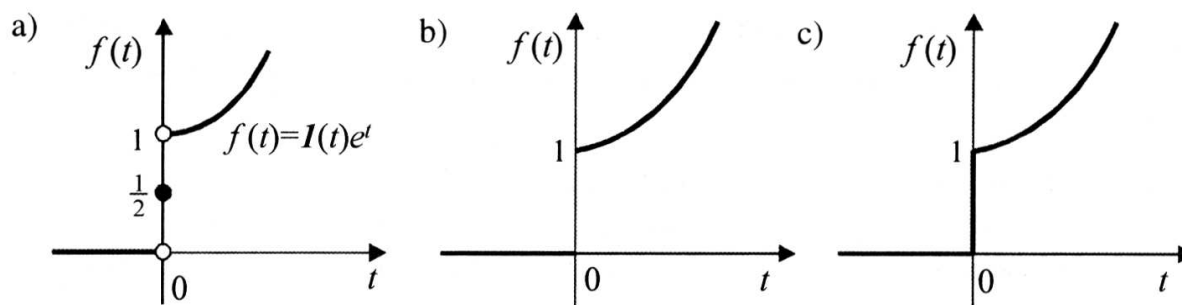
$$f(t) = I(t) \cdot e^t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ e^t & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.10)$$

R o z w i ą z a n i e. Zauważamy, że oryginał ten jest nieciągły w zerze. Zgodnie z (1.1.8) w punkcie nieciągłości wartość funkcji $f(0) = \frac{1}{2}$. Wskaźnikiem

wzrostu tej funkcji jest $\lambda_0 = 1$ (por. przykład 1.1b), a liczbą $M = 1$. Zgodnie z uwagą 1.1.4 i ze wzorem (1.1.9) oryginał ten zapiszemy

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^t & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1.1.10')$$

a jego wykres przedstawiono na rysunku 1.4.



Rys. 1.4. a) wykres oryginału $f(t) = I(t) \cdot e^t$, b) i c) wykresy umowne często stosowane w elektronice

Uwaga 1.1.5. Ponieważ zapis oryginału wzorem $I(t) \cdot \varphi(t)$ w praktycznych rachunkach jest dość uciążliwy, dlatego w dalszym ciągu oryginały $I(t) \cdot \varphi(t)$ będziemy zapisywać krótko $\varphi(t)$ pomijając czynnik $I(t)$ (gdy to nie będzie wymagać specjalnego podkreślenia), to znaczy zamiast na przykład

$$I(t) \sin at, \quad I(t) \cos at, \quad I(t)e^{3t}, \quad I(t) \cdot t^4$$

będziemy pisać

$$\sin at, \quad \cos at, \quad e^{3t}, \quad t^4 \quad (a > 0)$$

przyjmując milcząco, że wszystkie rozpatrywane funkcje są równe zero dla $t < 0$. Czasem jednak wyraźny zapis funkcji $f(t) = I(t)\varphi(t)$ może okazać się potrzebny.

Lemat 1.1.1. Jeśli funkcje $f_1(t)$, $f_2(t)$ są oryginałami, to

a) dowolna kombinacja liniowa

$$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t), \quad \text{gdzie } A_1, A_2 \text{ – dowolne stałe,}$$

b) iloczyn $f_1(t) \cdot f_2(t)$

są również oryginałami.

Lemat 1.1.2. Funkcja zespolona $f(t) = u(t) + iv(t)$ zmiennej rzeczywistej t jest oryginałem wtedy i tylko wtedy, gdy jej część rzeczywista $u(t) = \operatorname{Re}[f(t)]$ i część urojona $v(t) = \operatorname{Im}[f(t)]$ są oryginałami.

Lemat 1.1.3. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, to oryginałami są również funkcje postaci:

a) $f_1(t) = |f(t)|;$

- b) $f_2(t) = f(at)$, dla $a > 0$;
 c) $f_3(t) = t^n \cdot f(t)$, dla $n > 0$;
 d) $f_4(t) = f(t - t_0)$, gdzie $t_0 \in R$;
 e) $f_5(t) = e^{at} f(t)$, gdzie a – liczba rzeczywista lub zespolona;
 f) $f_6(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, gdzie $f(t)$ jest ciągła dla $t > 0$,

przy czym $f_k(t) = 0$ dla $t < 0$ i $f_k: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow C$, $k = 1, \dots, 6$.

Przeprowadzimy dowód dla przypadku własności f). Wykażemy, że funkcja $f_6(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ spełnia warunek 3° definicji 1.1.3, tzn., że jest to funkcja rzędu wykładniczego.

Z założenia $f(t)$ jest oryginałem ciągłym dla $t > 0$, więc możemy zastosować twierdzenie o wartości średniej dla całek oznaczonych na mocy którego istnieje takie $c \in (0, t)$, że

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau = |f(c)| \cdot t.$$

Ponieważ z warunku 3° definicji 1.1.3 istnieją liczby $\lambda \geq 0$ i $M > 0$, dla których $|f(c)| < Me^{\lambda t}$ oraz $t < e^t$, więc uwzględniając to w powyższej nierówności otrzymamy

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq Me^{(\lambda+1)t}, \quad t > 0,$$

a to oznacza, że funkcja $f_6(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ spełnia war. 3°, tj. nierówność (1.1.1)

ze wskaźnikiem $\lambda_0 = \lambda + 1$. Pozostałe warunki 1° i 2° definicji 1.1.3 są również

spełnione. Zatem funkcja $f_6(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ jest oryginałem.

■

1.2. Definicja przekształcenia Laplace'a

Niech $s = \lambda + i\omega$ oznacza zmienną zespoloną

Definicja 1.2.1. *Przekształceniem Laplace'a* nazywamy takie przekształcenie, które funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje funkcję zespoloną $F(s)$ zmiennej zespolonej s według wzoru

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.2.1)$$

gdzie $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$.

Całkę występującą po prawej stronie wzoru (1.2.1) nazywamy *całką Laplace'a funkcji $f(t)$* , a zmienna s odgrywa przy całkowaniu rolę parametru.

Przekształcenie całkowite określone wzorem (1.2.1) oznaczamy symbolem \mathcal{L} i nazywamy również *\mathcal{L} -przekształceniem*, a funkcję $F(s)$ nazywamy *obrazem* lub *transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$* lub *\mathcal{L} -transformatą* i zapisujemy symbolicznie w postaci

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (1.2.2)$$

Transformatę $F(s)$ dla danej funkcji $f(t)$ określa się dla takich wartości parametru s , dla których całka Laplace'a (1.2.1) jest zbieżna i gdy co najmniej jedna taka liczba s istnieje, to wtedy o funkcji $f(t)$ mówimy, że jest *\mathcal{L} -transformowalna* (krótko – *transformowalna*). Jeśli dla każdej wartości parametru s całka Laplace'a jest rozbieżna, to funkcja $f(t)$ nie posiada *\mathcal{L} -transformaty* lub mówimy, że $f(t)$ nie jest transformowalna.

Funkcję e^{-st} występującą pod znakiem całki we wzorze (1.2.1) nazywamy *czynnikiem uzbieżniającym* (lub *jądrem całki Laplace'a*).

Uwaga 1.2.1. Zbieżność całki Laplace'a (1.2.1) wymaga założenia, że $f(t)$ jest funkcją całkowalną w każdym przedziale $\langle 0, T \rangle$, gdzie $T > 0$ [13, 17].

Przykład 1.6. Zgodnie z uwagą (1.2.1) funkcje tgt , ctgt , $\frac{1}{\sin t}$, $\frac{1}{t^n}$ dla $n \geq 1$, itp., nie są \mathcal{L} -transformowalne (tj. nie mają transformat), ponieważ na przykład

funkcje $\operatorname{tg}t$, $\operatorname{ctg}t$ nie są całkowlane, m.in. w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, a funkcja $\frac{1}{t^n}$, $n \geq 1$ nie jest całkowna w przedziale $\langle 0, T \rangle$, $T > 0$, tzn. dla tych funkcji całka Laplace'a (1.2.1) jest rozbieżna.

A zatem, istnienie \mathcal{L} -transformaty dla funkcji $f(t)$ sprowadza się do zagadnienia zbieżności odpowiedniej całki Laplace'a (1.2.1). ■

Twierdzenie 1.2.1. *Jeżeli całka Laplace'a funkcji $f(t)$ jest bezwzględnie zbieżna w punkcie $s_0 = \lambda_0 + i\omega_0$, to jest ona bezwzględnie zbieżna we wszystkich punktach $s = \lambda + i\omega$ dla których $\operatorname{Re} s = \lambda \geq \lambda_0$.*

Dowód.

Dla $s = \lambda + i\omega$ i $\lambda = \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0 = \lambda_0$ oraz z faktu, że $|e^{-i\omega t}| = 1$, dla każdego $t \geq 0$ mamy

$$\left| e^{-st} f(t) \right| = \left| e^{-(\lambda+i\omega)t} f(t) \right| = e^{-\lambda t} |f(t)| \leq e^{-\lambda_0 t} |f(t)| \quad (1)$$

Ponieważ z założenia dla $s_0 = \lambda_0 + i\omega_0$ istnieje całka

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-s_0 t} f(t) \right| dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_0 t} |f(t)| dt,$$

więc uwzględniając nierówność (1) dla $\lambda \geq \lambda_0$ mamy następujące oszacowanie

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-s_0 t} |f(t)| dt.$$

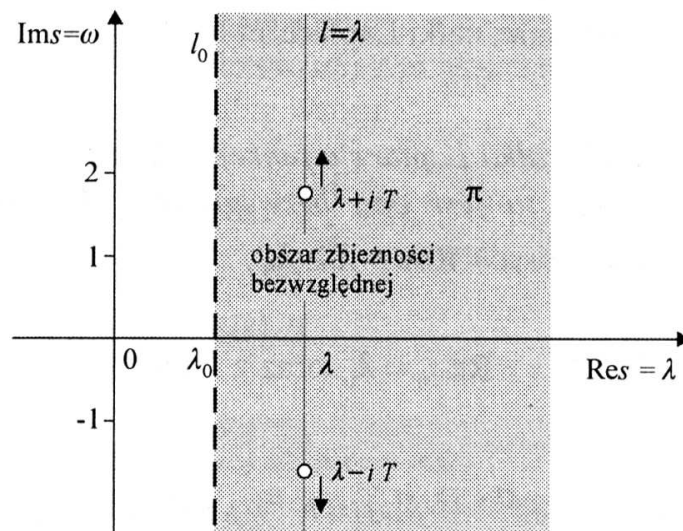
A to oznacza, na mocy kryterium porównawczego, bezwzględną zbieżność całki (1.2.1) dla wszystkich s dla których $\lambda \geq \lambda_0$. ■

Ze zbieżności bezwzględnej wynika zbieżność zwykła, ale nie na odwrót.

Definicja 1.2.2. Funkcję $f(t)$ nazywamy funkcją *bezwzględnie \mathcal{L} -transformowalną*, jeżeli istnieje punkt s , w którym całka Laplace'a $F(s)$ dana wzorem (1.2.1) jest bezwzględnie zbieżna; oznaczmy przez D zbiór wszystkich takich punktów.

Z twierdzenia 1.2.1 wynika, że zbiór D jest sumą mnogościową domkniętych półprzestrzeni, a więc jest domkniętą lub otwartą półpłaszczyzną albo całą płaszczyzną zespoloną.

Twierdzenie 1.2.2. Funkcje – oryginały określone definicją 1.1.3 są bezwzględnie \mathcal{L} -transformowalne, tzn. całka Laplace'a (1.2.1) jest bezwzględnie zbieżna na półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s określonej nierównością $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu funkcji f (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Ilustracja graficzna obszaru bezwzględnej zbieżności całki (1.2.1), gdzie λ_0 – wskaźnik wzrostu funkcji f

D o w ó d. Jeśli $f(t)$ jest oryginałem o wskaźniku wzrostu λ_0 , to przy pewnej stałej $M > 0$, dla każdego $t \geq 0$ spełniona jest nierówność (1.1.1), tj. $|f(t)| \leq M e^{\lambda_0 t}$. Weźmy liczbę zespoloną $s = \lambda + i\omega$, taką, że $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$. Uwzględniając powyższą nierówność szacujemy moduł funkcji podcałkowej we wzorze (1.2.1)

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)e^{-\lambda t}| \cdot |e^{-i\omega t}| = |f(t)| e^{-\lambda t} \leq M e^{\lambda_0 t} \cdot e^{-\lambda t} = M e^{-(\lambda - \lambda_0)t}.$$

Oznacza to, że całka stojąca po prawej stronie wzoru (1.2.1) ma majorantę niezależną od s , zbieżną w półpłaszczyźnie zespolonej π : $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda_0)t} dt = M \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(\lambda - \lambda_0)t} dt = \\ &= -\frac{M}{\lambda - \lambda_0} \lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-(\lambda - \lambda_0)T} - 1] = \frac{M}{\lambda - \lambda_0} \quad \text{dla } \lambda > \lambda_0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że całka $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt$ jest ograniczona dla $\lambda > \lambda_0$, co oznacza bezwzględną zbieżność całki (1.2.1) dla każdego $\lambda > \lambda_0$.

A więc oryginały określone w myśl definicji 1.1.3 są bezwzględnie \mathcal{L} -transformowalne [13, 19].

■

Wniosek 1.2.1.

Z twierdzenia 1.2.2 wynika, że warunki określające funkcję rzędu wykładniczego, są warunkami wystarczającymi transformowalności funkcji.

Ponieważ w zastosowaniach spotykamy się zazwyczaj z funkcjami, które są oryginałami w sensie definicji 1.1.3, dlatego też w dalszym tekście przekształcenie Laplace'a będziemy stosować wyłącznie do oryginałów i tylko w niektórych przypadkach będziemy czynić dodatkowe założenia o funkcjach $f(t)$. W praktyce, funkcje $f(t)$, dla których istnieje całka (1.2.1), nazywamy również oryginałami.

Definicja 1.2.3. *Transformatą Laplace'a oryginału $f(t)$ nazywamy funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = \lambda + i\omega$ daną wzorem*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.2.3)$$

określoną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 określone jest warunkiem (1.1.2).

Zbiór wszystkich funkcji $f(t)$ nazywać będziemy *przestrzenią oryginału*, natomiast zbiór wszystkich funkcji $F(s)$ – *przestrzenią obrazu* [5].

Definicja 1.2.4. Funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s , określoną w pewnym obszarze D nazywamy funkcją *holomorficzną* w tym obszarze, jeżeli w każdym punkcie s obszaru D funkcja $F(s)$ ma pochodną $F'(s)$. Funkcja $F(s)$ jest holomorficzną w punkcie s_0 , jeżeli jest holomorficzną w pewnym otoczeniu tego punktu [12, 15, 25].

Twierdzenie 1.2.3. *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem o wskaźniku wzrostu λ_0 , to [1, 13, 17]:*

1° *całka po prawej stronie wzoru (1.2.3) jest jednostajnie zbieżna w półpłaszczyźnie określonej nierównością $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, (rys. 1.5);*

2° *funkcja zespolona $F(s)$ zmiennej zespolonej s określona wzorem (1.2.3) jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$ (rys. 1.5);*

3° $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ (1.2.4)

Wniosek 1.2.2.

Przekształcenie Laplace'a określone wzorem (1.2.3) jest różnowartościowe, tzn. każdemu oryginałowi $f(t)$ jest przyporządkowana dokładnie jedna \mathcal{L} -transformata $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ według wzoru (1.2.3).

Wniosek 1.2.3.

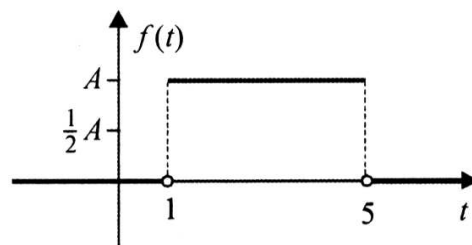
Z zależności (1.2.4) wynika, że transformata $F(s)$ jako obraz oryginału $f(t)$ nie może być postaci $F(s) = \text{const}$ lub $F(s) = s$ ani wielomianem, a jeżeli $F(s)$ jest funkcją wymierną zmiennej s , to stopień licznika musi być niższy od stopnia mianownika.

Przykład 1.7. Przedstawić graficznie funkcję

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{dla } |t-3| < 2 \\ 0 & \text{dla } |t-3| > 2 \end{cases}$$

i korzystając z definicji wyznaczyć jej transformatę Laplace'a.

R o z w i ą z a n i e . Z własności modułu $|t-3| < 2 \Leftrightarrow 1 < t < 5$ i $f(t)$ jest funkcją o wykresie podanym na rys. 1.6.



Rys. 1.6

Jak widać z wykresu, funkcja $f(t)$ jest nieciągłym oryginałem dla $t_1 = 1$ i $t_2 = 5$. W punktach nieciągłości funkcja f przyjmuje wartości określone wzorem (1.1.8)

$$f(1) = \frac{1}{2} [f(1^-) + f(1^+)] = \frac{1}{2} A, \quad f(5) = \frac{1}{2} [f(5^-) + f(5^+)] = \frac{1}{2} A,$$

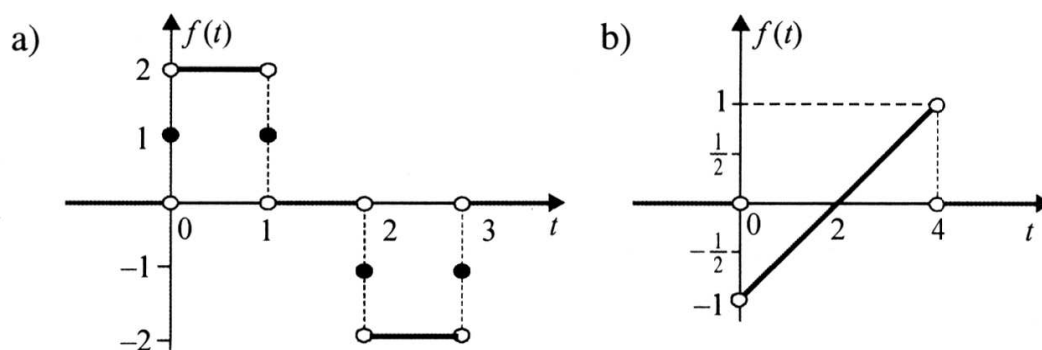
oraz zgodnie z uwagą 1.1.3 wskaźnik jej wzrostu $\lambda_0 = 0$.

Na podstawie definicji transformaty ze wzoru (1.2.3) dla $\text{Re } s > 0$ mamy

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_1^5 A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} e^{-st} \Big|_{t=1}^{t=5} = \frac{A}{s} (e^{-s} - e^{-5s}).$$

■

Przykład 1.8. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji o wykresach podanych na rys. 1.7



Rys. 1.7

R o z w i ą z a n i e . a) Funkcję $f(t)$ o wykresie podanym na rys. 1.7a określamy wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{dla } t = 0, t = 1 \\ -1 & \text{dla } t = 2, t = 3 \\ -2 & \text{dla } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{dla } t < 0, 1 < t < 2, t > 3 \end{cases}$$

Funkcja ta jest nieciągłym oryginałem (spełnia warunki Dirichleta) i zgodnie z uwagą 1.1.3 wskaźnik wzrostu $\lambda_0 = 0$. Na podstawie definicji transformaty Laplace'a ze wzoru (1.2.3) dla $\text{Re } s > 0$ mamy

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^1 2e^{-st} dt + \int_1^2 0 \cdot e^{-st} dt + \int_2^3 (-2)e^{-st} dt = \\ &= -\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{s} e^{-st} \Big|_{t=2}^{t=3} = \frac{2}{s} (1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}). \end{aligned}$$

b) Funkcję $g(t)$ o wykresie podanym na rys. 1.7b określamy wzorem

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > 4 \\ \frac{1}{2}t - 1 & \text{dla } 0 < t < 4 \end{cases}.$$

Funkcja ta jest nieciągłym oryginałem o wskaźniku wzrostu $\lambda_0 = 0$ (patrz uwaga 1.1.3) i w punktach nieciągłości (uwaga 1.1.8) $g(0) = -\frac{1}{2}$, $g(4) = \frac{1}{2}$.

Na podstawie definicji transformaty Laplace'a ze wzoru (1.2.3) mamy

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}t - 1 \right) e^{-st} dt.$$

Całkujemy przez części względem zmiennej t (zmienną s traktujemy jako parametr) i dla $\operatorname{Re} s > 0$ otrzymujemy

$$G(s) = \left[-\frac{1}{2}(t-2) \frac{e^{-st}}{s} - \frac{1}{2s^2} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=4} = \frac{1 - 2s - (1 + 2s)e^{-4s}}{2s^2}.$$

■

1.3. Przykłady transformat funkcji podstawowych

1.3.1. Transformata funkcji jednostkowej $f(t) = I(t)$, $t \in R$

Funkcję skoku jednostkowego $I(t)$ omawialiśmy w przykładzie 1.2 (wzór (1.1.6), rys.1.2). W punkcie $t = 0$ funkcja jest nieciągła. Wskaźnikiem wzrostu tej funkcji jest $\lambda_0 = 0$. Zgodnie z twierdzeniem 1.2.3 istnieje transformata $F(s)$, która jest funkcją holomorficzną na półpłaszczyźnie określonej nierównością $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0 = 0$ i transformatę tę wyznaczamy według wzoru (1.2.3). Mamy więc

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[I(t)] &= \int_0^{+\infty} I(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^T e^{-st} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=\varepsilon}^{t=T} = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{1}{s} (e^{-Ts} - e^{-s\varepsilon}) \right] = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

bo $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-Ts} = 0$ oraz $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-s\varepsilon} = 1$. Zatem

$$\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s = \lambda > 0 \quad (1.3.1)$$

1.3.2. Transformata funkcji wykładniczej $f(t) = e^{at} I(t)$, $a \in R$

(Patrz przykład 1.5, wzór (1.1.10) dla $a = 1$, rys. 1.4).

Funkcja $I(t) \cdot e^{at}$ w punkcie $t = 0$ jest nieciągła, $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{at} = 1$, zatem

zgodnie z (1.1.8) $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{2}$. Wykładnik wzrostu tej funkcji wynosi

$\lambda_0 = \max(0, a)$ (por. przykład 1.1 b). Zatem na podstawie twierdzenia 1.2.3 transformata $F(s)$ tej funkcji jest funkcją holomorficzną na półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > a$ i wyznaczamy ją ze wzoru (1.2.3). Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon}^T e^{-(s-a)t} dt = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=\varepsilon}^{t=T} = -\frac{1}{s-a} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow +\infty}} \left[e^{-(s-a)T} - e^{-(s-a)\varepsilon} \right] = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

(ponieważ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-(s-a)\varepsilon} = 1$ oraz dla $s = \lambda + i\omega$ i $\operatorname{Re} s = \lambda > a$ mamy

$$\left| e^{-(s-a)T} \right| = \left| e^{-(\lambda-a)T} \cdot e^{-i\omega T} \right| = e^{-(\lambda-a)T} \left| e^{-i\omega T} \right| = e^{-(\lambda-a)T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0).$$

Zatem
$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > a \quad (1.3.2)$$

Analogicznie wyznaczymy transformatę funkcji $f(t) = e^{-at} I(t)$, $a \in R$. Funkcja ta jest oryginałem nieciągłym dla $t = 0$, o wykładniku wzrostu $\lambda_0 = -a$. Zatem

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > -a \quad (1.3.3)$$

Uwaga 1.3.1. Jeśli a jest liczbą zespoloną w postaci algebraicznej $a = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$, to wzory (1.3.2) i (1.3.3) są słuszne w obszarze $\operatorname{Re} s = \lambda > \operatorname{Re} a = \alpha$ (por. przykład 1.1b), co łatwo wykazać, jeśli zauważymy, że dla liczb zespolonych $s = \lambda + i\omega$, $a = \alpha + i\beta$:

$$\text{różnica } s - a = (\lambda - \alpha) + i(\omega - \beta), \text{ a moduł } \left| e^{-i(\omega - \beta)} \right| = 1,$$

więc $\left| e^{-(s-a)T} \right| = e^{-(\lambda - \alpha)T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ dla wszystkich wartości s , dla których $\operatorname{Re}(s - a) = \lambda - \alpha > 0$, tj. dla $\operatorname{Re} s = \lambda > \operatorname{Re} a = \alpha$.

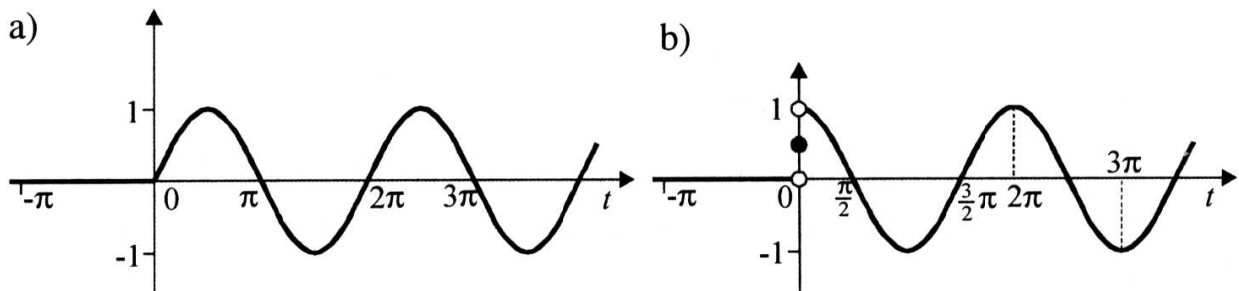
1.3.3. Transformata funkcji sinus $f(t) = \sin t$ $I(t)$

Funkcja $I(t) \cdot \sin t$ (rys. 1.8a) jest ciągłym oryginałem i jako funkcja ograniczona ma wskaźnik $\lambda_0 = 0$ (por. uwaga 1.1.3). Na podstawie twierdzenia 1.2.3 transformata $F(s)$ funkcji $f(t) = \sin t$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > 0$ i wyznaczamy ją ze wzoru (1.2.3) całkując dwukrotnie przez części

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t \cdot dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \sin t \cdot dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{s^2}{s^2 + 1} \left[-\frac{1}{s} \sin t \cdot e^{-st} - \frac{1}{s^2} \cos t \cdot e^{-st} \right]_0^T = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{s^2}{s^2 + 1} \left[-\frac{1}{s} \sin T \cdot e^{-sT} - \frac{1}{s^2} \cos T \cdot e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{T \rightarrow \infty} \sin T \cdot e^{-sT} = 0$ oraz $\lim_{T \rightarrow \infty} \cos T \cdot e^{-sT} = 0$, to ostatecznie otrzymamy

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > 0 \quad (1.3.4)$$



Rys. 1.8. Wykres oryginału: a) $f(t) = I(t) \sin t$, b) $f(t) = I(t) \cos t$

Zgodnie z twierdzeniem 1.2.3 funkcja zespolona $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ zmiennej zespolonej s , która ma dwa bieguny $s_1 = -i$ i $s_2 = i$ na osi urojonej jest funkcją holomorficzną na półpłaszczyźnie zespolonej określonej nierównością $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0 = 0$ oraz spełnia warunek (1.2.4), tj.

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} F(s) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s^2 + 1} = 0.$$

1.3.4. Transformata funkcji cosinus $f(t) = I(t)\cos t$

Funkcja $I(t)\cdot\cos t$ (rys. 1.8b) jest nieciągłym oryginałem dla $t = 0$ i ponieważ $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t = 1$, to $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{2}$ oraz jako funkcja ograniczona ma wskaźnik wzrostu $\lambda_0 = 0$. Na podstawie twierdzenia 1.2.3 transformata $F(s)$ funkcji $f(t) = \cos t$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s = \lambda > 0$ i zgodnie ze wzorem (1.2.3) mamy

$$\mathcal{L}[\cos t] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ T \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^T e^{-st} \cos t \, dt.$$

Całkując dwukrotnie przez części i przechodząc do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0^+$ i $T \rightarrow \infty$, analogicznie jak w przypadku wyznaczania transformaty funkcji sinus, otrzymamy

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{dla } \text{Re } s = \lambda > 0 \quad (1.3.5)$$

Zaprezentujemy drugi sposób dowodu wzoru (1.3.5), w którym korzystamy z faktu, że funkcję $\cos t$ możemy wyrazić jako sumę dwóch funkcji wykładniczych zespolonych (wzór Eulera)

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}).$$

Wtedy z definicji \mathcal{L} -transformaty oraz z własności liniowości całki otrzymamy

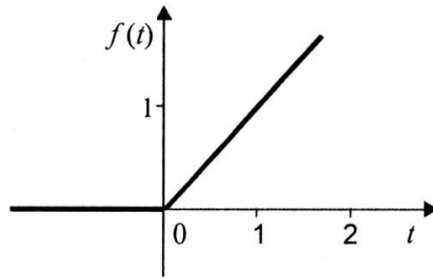
$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{it} + e^{-it}) \, dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s-i)t} \, dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+i)t} \, dt \right].$$

Następnie korzystamy z wyników uzyskanych w podrozdziale 1.3.2 (tj. ze wzorów (1.3.2) i (1.3.3)) i po algebraicznych przekształceniach mamy

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Całka jest zbieżna, gdy jednocześnie $\text{Re } s > \text{Re}(i) = 0$ oraz $\text{Re } s > \text{Re}(-i) = 0$, tzn., gdy $\text{Re } s > 0$.

1.3.5. Transformata funkcji liniowej $f(t) = t \cdot I(t)$



Rys. 1.9. Wykres oryginału $f(t) = t I(t)$

Z definicji \mathcal{L} -transformaty na podstawie wzoru (1.2.3), całkując przez części otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t \cdot e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{T}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \right] = \frac{1}{s^2}, \end{aligned}$$

bo $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = 0$ i stosując regułę de L'Hospitala $\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot e^{-sT} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{e^{sT}} = 0$.

Zatem

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s = \lambda > 0 \quad (1.3.6)$$

Zauważmy, że transformata $F(s) = \frac{1}{s^2}$ ma jeden biegun podwójny dla $s = 0$ i jest ona funkcją holomorficzną w obszarze $D = \{(\lambda, \omega) : \lambda > 0, \omega \in R\}$, oraz spełnia warunek (1.2.4), tj. $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2} = 0$.

1.3.6. Transformata funkcji potęgowej $f(t) = t^n \cdot I(t)$, $n > 1$

Funkcja ta jest oryginałem ciągłym w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i wskaźnik wzrostu tej funkcji $\lambda_0 = 0$. Dla $\operatorname{Re} s = \lambda > 0$ wyprowadzimy wzór rekurencyjny. Z definicji na podstawie wzoru (1.2.3) mamy

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^n dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt.$$

Ponieważ przy $t \rightarrow \infty$ mamy $\frac{t^n}{e^{st}} \rightarrow 0$, więc

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}].$$

Stąd, dla $n=2$ oraz korzystając ze wzoru (1.3.6) otrzymamy,

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s} \mathcal{L}[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} \quad (1.3.7)$$

a następnie dla $n=3$ i wzoru (1.3.7) dostajemy

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3}{s} \mathcal{L}[t^2] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{s^4} = \frac{6}{s^4} \quad (1.3.8)$$

i tak dalej.

Metodą indukcji matematycznej dowodzimy, że dla każdego n naturalnego

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s = \lambda > 0 \quad (1.3.9)$$

Uwaga 1.3.2. Można wykazać, że dla dowolnych $\alpha > -1$ i $\operatorname{Re} s = \lambda > 0$ [1]

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (1.3.10)$$

We wzorze (1.3.10) Γ jest funkcją gamma Eulera, określoną za pomocą całki niewłaściwej

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{dla } 0 < x < +\infty \quad (1.3.11)$$

oraz dla każdego $\alpha > 0$ słuszny jest wzór

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad (1.3.12)$$

W szczególności ze wzoru (1.3.11) mamy $\Gamma(1) = 1$ i wtedy ze wzoru (1.3.12) dla $n \in \mathbb{N}$, wynika wzór

$$\Gamma(n+1) = n! .$$

Przyjmując we wzorze (1.3.11) $x = \frac{1}{2}$ można dowieść, że

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.3.13)$$

U w a g a . Funkcja $\Gamma(x)$ jest jedną z ważniejszych funkcji nieelementarnych. Jest ona uogólnieniem $n!$ na wszystkie wartości zmiennej x .

Przykład 1.9. Wyznaczyć \mathcal{L} -transformatę funkcji $f(t) = 2\sqrt{t}$.

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $f(t) = 2\sqrt{t}$ jest określona dla $t > 0$. Obliczamy granicę funkcji przy $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{t} = 0.$$

Zgodnie ze wzorami (1.3.10), (1.3.12), (1.3.13) dla $\alpha = \frac{1}{2}$ mamy

$$\mathcal{L}[2\sqrt{t}] = 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)}{s^{\frac{3}{2}}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

Zatem

$$\mathcal{L}[2\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (1.3.14)$$

■

1.4. Odwrotne przekształcenie Laplace'a

Dotychczas zajmowaliśmy się zagadnieniami związanymi z obliczaniem transformat (obrazów) $F(s)$, gdy dany jest oryginał $f(t)$, tzn. zajmowaliśmy się *prostym przekształceniem Laplace'a*, które danemu oryginałowi $f(t)$ przyporządkowuje jednoznacznie jego transformatę $F(s)$ określoną wzorem (1.2.3).

W zastosowaniach przekształcenia Laplace'a (np. do rozwiązywania równań różniczkowych) podstawowe znaczenie ma zagadnienie odwrotne: „dana jest funkcja zmiennej zespolonej $F(s)$ i należy wyznaczyć funkcję $f(t)$, dla której $F(s)$ jest jej \mathcal{L} -transformatą”. Zagadnienie to jest związane z istnieniem przekształcenia odwrotnego do przekształcenia Laplace'a.

Aby zapewnić odwracalność transformacji Laplace'a w pewnej klasie funkcji zmiennej zespolonej $F(s)$ będziemy ją zatem stosować wyłącznie do funkcji $f(t)$ będących oryginałami, dla których \mathcal{L} -przekształcenie istnieje i jest różnowartościowe (patrz wniosek 1.2.2).

Definicja 1.4.1. Przekształcenie całkowite, które transformacie $F(s)$ przyporządkowuje oryginał $f(t)$ według wzoru (1.4.2) nazywamy *przekształceniem odwrotnym względem przekształcenia Laplace'a* (1.2.3) i oznaczamy symbolem \mathcal{L}^{-1} . Funkcję $f(t)$ nazywamy *odwrotną transformatą Laplace'a* względem funkcji $F(s)$ i zapisujemy

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (1.4.1)$$

jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Funkcję $f(t)$ występującą w zależności (1.4.1) nazywamy również \mathcal{L}^{-1} -*transformatą funkcji* $F(s)$.

Zachodzą następujące pytania:

- Czy każdej transformacie $F(s)$ odpowiada tylko jeden oryginał $f(t)$?
- Jakie warunki powinna spełniać funkcja $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = \lambda + i\omega$, aby była ona transformatą?

Odpowiedź dają nam twierdzenia 1.4.1÷1.4.3, które podamy bez dowodu [1, 13, 17, 19].

Twierdzenie 1.4.1. *Jeżeli funkcja $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = \lambda + i\omega$ jest transformatą pewnego oryginału $f(t)$ na półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$ (λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu oryginału f), to w każdym punkcie ciągłości funkcji $f(t)$ prawdziwy jest wzór:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\lambda-iT}^{\lambda+iT} F(s) e^{st} ds \quad (1.4.2)$$

gdzie granice całkowania $\lambda - i\infty$ oraz $\lambda + i\infty$ należy rozumieć w ten sposób, że całkowanie względem s odbywa się w płaszczyźnie zmiennej zespolonej wzdłuż dowolnej pionowej prostej l o równaniu $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$ równoległej do osi urojonej $\omega = \operatorname{Im} s$, (patrz rys. 1.5), przy czym pierwszą całkę we wzorze (1.4.2) rozumiemy w sensie wartości głównej, tj. zgodnie z określeniem po prawej stronie wzoru (1.4.2).

Uwaga 1.4.1. Wzór (1.4.2), zwany również *wzorem Riemanna-Mellina*, uzyskujemy z wzoru całkowego Fouriera i przekształcenia Fouriera omawianych w rozdziale 7 oraz ze związków między przekształceniem Fouriera i przekształceniem Laplace'a [13, 25].

Na podstawie definicji 1.4.1 i twierdzenia 1.4.1 transformatę odwrotną Laplace'a możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F(s)e^{st} ds && \text{dla } t > 0 \\
 f(t) &= 0 && \text{dla } t < 0 \\
 f(0) &= \frac{1}{2} f(0^+) && \text{dla } t = 0.
 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Wzór (1.4.3) pozostaje prawdziwy również w punktach nieciągłości t_0 funkcji $f(t)$, w których dla oryginału $f(t)$ przyjmujemy wartość określoną wzorem (1.1.8).

Jednoznaczność transformacji Laplace'a jest konsekwencją twierdzenia 1.4.1. Innymi słowy mamy:

Wniosek 1.4.1.

Jeżeli dwa oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ spełniają założenia tw. 1.4.1 oraz jeśli ich odpowiednie transformaty Laplace'a $F_1(s)$ i $F_2(s)$ są równe, to oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mogą być różne co najwyżej w swoich punktach nieciągłości; poza tymi punktami są identyczne.

Mamy zatem:

Twierdzenie 1.4.2. *Oryginał $f(t)$ jest jednoznacznie określony przez swoją transformatę $F(s)$ we wszystkich punktach poza punktami nieciągłości funkcji $f(t)$.*

Wniosek 1.4.2.

W klasie funkcji \mathcal{L} -transformowalnych i ciągłych dla $t > 0$ przekształcenia całkowe Laplace'a określone wzorami (1.2.3) i (1.4.3) są wzajemnie jednoznaczne, tzn. wzory te są względem siebie odwrotne. Zależności te zapisujemy:

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[f(t)]) = f(t) \quad \text{dla każdego } t > 0 \tag{1.4.4}$$

oraz

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}[F(s)]) = F(s) \quad \text{dla każdego } s, \operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0 \tag{1.4.5}$$

U w a g a . Własności (1.4.4) i (1.4.5) umożliwiają w praktyce posługiwanie się tablicami transformat Laplace'a (patrz Dodatek) zarówno przy obliczaniu transformat jak i przy wyznaczaniu oryginału, gdy znany jest obraz.

Warunki wystarczające na to, aby funkcja zmiennej zespolonej $F(s)$ była transformatą pewnego oryginału podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4.3. Jeżeli funkcja $F(s)$ spełnia warunki:

1^o $F(s)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie

$$\pi = \{s \in C : \operatorname{Re}(s) > \lambda > \lambda_0\};$$

2^o $\lim_{\operatorname{Re}s=\lambda \rightarrow \infty} F(s) = 0;$

3^o Całka $\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F(s)ds$ jest bezwzględnie zbieżna,

to funkcja $F(s)$ jest \mathcal{L} -transformatą oryginału $f(t)$ danego wzorem (1.4.3).

Przykład 1.10. W podrozdziale 1.3 wyznaczyliśmy transformaty funkcji-oryginałów $I(t)$, e^{at} , e^{-at} , $\sin t$, $\cos t$, t , t^2 , t^n . Powołując się na wniosek 1.4.2 i zależność (1.4.4), określając jednoznaczność przekształcenia odwrotnego \mathcal{L}^{-1} względem przekształcenia \mathcal{L} , na podstawie wzorów (1.3.1) – (1.3.9) otrzymamy wzory na transformaty odwrotne dla danych funkcji $F(s)$. Mamy więc

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = I(t) \quad (1.4.6)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} \cdot I(t) \quad (1.4.7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at} \cdot I(t) \quad (1.4.8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = I(t) \cdot \sin t \quad (1.4.9)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = I(t) \cdot \cos t \quad (1.4.10)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = I(t) \cdot t \quad (1.4.11)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = I(t) \cdot t^2 \quad (1.4.12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = I(t) \cdot t^n \quad (1.4.13)$$

U w a g a . Widzimy więc, że na gruncie obu przekształceń Laplace'a (prostego i odwrotnego), można wszystkie relacje między funkcjami $f(t)$ i ich transformatami $F(s)$ rozpatrywać „w obie strony”, tj. np.

$$\sin t \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \end{array} \frac{1}{s^2 + 1}, \quad e^{-at} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \end{array} \frac{1}{s + a}$$

■

Uwaga 1.4.2. Przy stosowaniu przekształceń Laplace'a $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ nie będziemy za każdym razem zapisywać, że $f(t) = 0$ dla $t < 0$, (por. uwaga 1.1.5). Ponadto dokonując transformacji odwrotnej funkcję jednostkową $I(t)$ będziemy zastępować jedynką, gdyż $I(t) = 1$ dla $t > 0$. Podobnie nie będziemy pisać

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a}\right] = I(t) \cdot e^{-at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = I(t) \cdot \sin t$$

ale krótko:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a}\right] = e^{-at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin t.$$

Ponieważ w dalszych ustępach chcemy zwrócić szczególną uwagę na technikę posługiwania się rachunkiem operatorowym, więc niejednokrotnie pomijając będziemy założenia o funkcji f . Generalnie zakładamy, że funkcje $f(t)$ i jej pochodne są w każdym skończonym przedziale ciągłe i rzędu wykładniczego. Przy tych założeniach i wcześniej podanych twierdzeniach mamy zapewnioną jednoznaczność odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Pominiemy również wskazywanie za każdym razem półpłaszczyzny na płaszczyźnie zespolonej s ($s = \lambda + i\omega$) na której są słuszne odpowiednie wzory, przyjmując tak jak dla wcześniej sformułowanych twierdzeń, że taka półpłaszczyzna istnieje i jest określona nierównością $\lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 – wskaźnik wzrostu funkcji f .

Uwaga 1.4.3. Wzór Riemanna-Melina (1.4.2) określa wyrażenie analityczne dla \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia. Jednakże bezpośrednio stosowanie wzoru (1.4.2) do wyznaczania transformat odwrotnych jest zwykle dość trudne i wymaga dobrze opanowania całkowania funkcji zmiennej zespolonej, szacowania całek, itp. [12]. Z tego względu, szczególnie w zastosowaniach unika się bezpośredniego stosowania definicji 1.4.1 i zazwyczaj wyznacza się oryginał $f(t)$ na podstawie jej transformaty $F(s)$ w inny sposób. Metody wyznaczania transformat odwrotnych omówimy w rozdziale 4.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Zbadać, czy podane funkcje są oryginałami:

a) $f(t) = e^{-2t} \cdot I(t),$

b) $f(t) = e^{3t} \cdot I(t),$

c) $f(t) = t^3 \cdot I(t),$

d) $f(t) = \sin 2t \cdot I(t),$

e) $f(t) = I(t) \cdot t^n, n \in N,$

f) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot I(t),$

g) $f(t) = (a - e^{-bt}) \cdot I(t); a, b > 0,$

h) $f(t) = I(t) \cdot E\left(\frac{t}{2}\right),$

i) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\left(t - \frac{n}{2}\right),$

j) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I(t - n),$

k) $f(t) = e^t \cos t \cdot I(t),$

l) $f(t) = I(t) \cdot \ln(1 + t).$

($E(t)$ oznacza funkcję entier, tj. część całkowitą liczby t).

Wyznaczyć (o ile istnieją) odpowiednie liczby M większe od zera i λ spełniające nierówność (1.1.1) definicji 1.1.3. Wyznaczyć wskaźnik wzrostu λ_0 . Naszkicować wykresy tych funkcji.

2. Na podstawie definicji wyznaczyć \mathcal{L} -transformatę funkcji (zakładamy, że $f(t) \equiv I(t) \cdot f(t), t \in R$):

a) $f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 2 \end{cases},$

b) $f(t) = e^{3t},$

c) $f(t) = t^2,$

d) $f(t) = \cos 2t,$

e) $f(t) = \cosh 4t,$

f) $f(t) = \sinh \frac{t}{2},$

g) $f(t) = \sinh \omega t, \omega > 0$

h) $f(t) = \sin 3t,$

i) $f(t) = e^{-4t},$

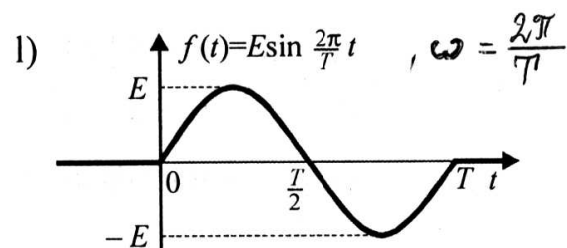
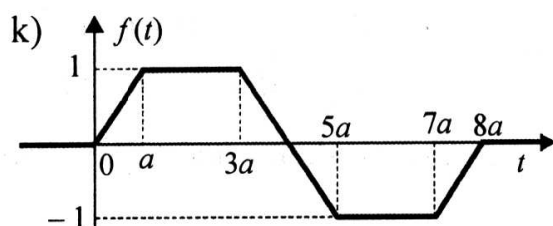
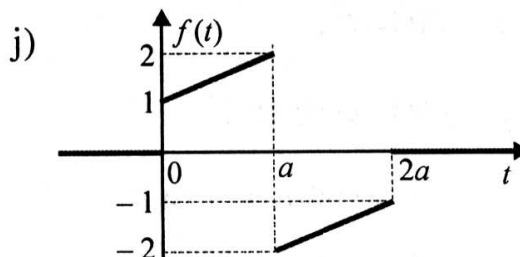
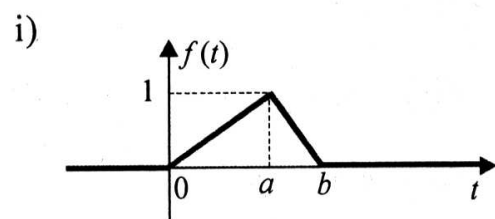
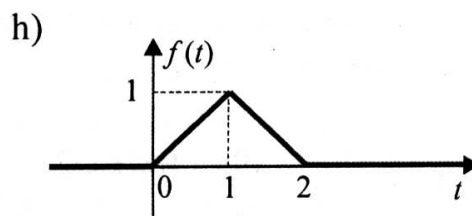
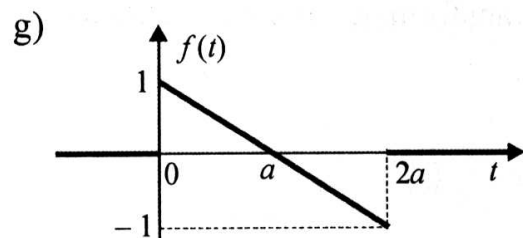
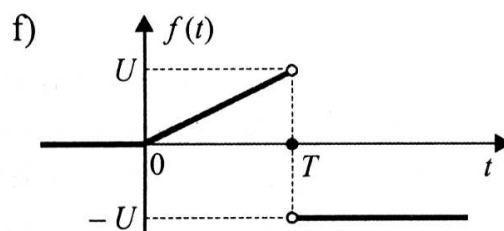
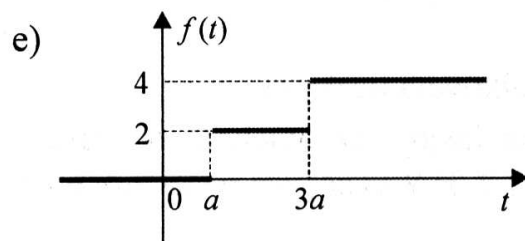
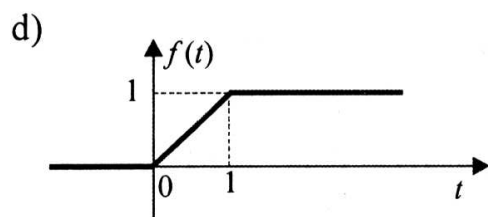
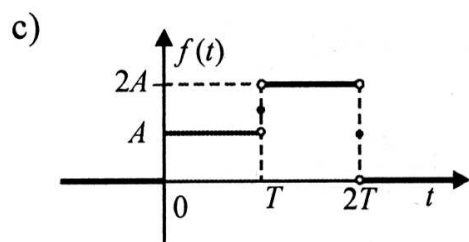
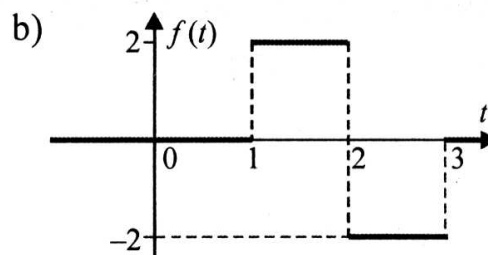
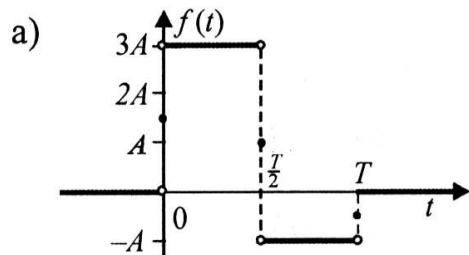
j) $f(t) = te^{-t},$

k) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } |t-3| < 1 \\ 0 & \text{dla } |t-3| > 1 \end{cases},$

l) $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 1 \end{cases}.$

Wskazówka. W przykładach d, e, f, g, h można skorzystać ze wzorów (2.1.6), (2.1.7), (2.1.12).

3. Na podstawie definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji o podanych wykresach – podać wzór opisujący daną funkcję $f(t)$



4. Wykazać, że funkcja $f(t) = e^{t^2}$ nie posiada transformaty Laplace'a.

5. Wiedząc, że $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, wyznaczyć transformatę $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(Wskazówka. Dokonać zmiany zmiennych $u = \sqrt{t}$ we wzorze (1.2.1)).

6. Która z funkcji:

a) $F(s) = \frac{1}{s}$

b) $F(s) = \frac{1}{s-5}$

c) $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

d) $F(s) = \frac{3s}{s+2}$

e) $F(s) = \frac{s+1}{s^3-8}$

f) $F(s) = s^2 + s + 1$

nie może być \mathcal{L} -transformatą oryginału? Sprawdzić założenia twierdzenia 1.4.3 dla funkcji z przykładów b), c), d).

Odpowiedzi:

1. f) nie, pozostałe tak

2. a) $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} \right)$, b) $\frac{1}{s-3}$, c) $\frac{2}{s^3}$, d) $\frac{s}{s^2+4}$,

e) $\frac{s}{s^2-16}$, f) $\frac{2}{4s^2-1}$, g) $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, h) $\frac{3}{s^2+9}$, i) $\frac{1}{s+4}$,

j) $\frac{1}{(s+1)^2}$, k) $\frac{2}{s} (e^{-2s} - e^{-4s})$ l) $\frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s}$

3. a) $\frac{A}{s} \left(3 - 4e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts} \right)$, b) $\frac{2}{s} (e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s}) = \frac{2}{s} \left(e^{-\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{3}{2}s} \right)^2$,

c) $\frac{A}{s} (1 + e^{-Ts} - 2e^{-2Ts})$, d) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$, e) $\frac{2}{s} e^{-as} (1 + e^{-2as})$,

f) $\frac{U}{T} \cdot \frac{1-e^{-sT}}{s^2} - \frac{2U}{s} e^{-sT}$, g) $\frac{1}{s} (1 + e^{-2as}) - \frac{1}{as^2} (1 - e^{-2as})$,

$$\text{h) } \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}, \quad \text{i) } \frac{a}{s^2} \left(\frac{1 - e^{-as}}{a} + \frac{e^{-bs} - e^{-as}}{b - a} \right),$$

$$\text{j) } \frac{1}{as^2} (1 - e^{-2as}) + \frac{1}{s} (1 - 4e^{-as} + e^{-2as}),$$

$$\text{k) } \frac{1}{as^2} (1 - e^{-as})(1 - e^{-3as})(1 - e^{-4as}), \quad \text{l) } \frac{E\omega(1 - e^{-sT})}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

6. Nie są transformatami funkcje z przykładów d) i f).

Własności przekształcenia Laplace'a

Bardzo rzadko oblicza się transformaty Laplace'a z definicji poprzez całkowanie. Znacznie częściej korzysta się z niewielkiej liczby par transformat i twierdzeń określających własności przekształcenia Laplace'a.

Omówimy teraz najważniejsze własności przekształcenia Laplace'a, które umożliwiają i ułatwiają znajdowanie transformat pewnych oryginałów na podstawie znanych już transformat (obrazów) i na odwrót – na podstawie danej transformaty (obrazu) pozwalają wyznaczyć jej oryginał.

Poniżej podajemy twierdzenia opisujące podstawowe własności przekształcenia Laplace'a. Własności te decydują o jego znaczeniu i szerokim zastosowaniu i w pewnym sensie stanowią podstawę rachunku operatorowego. Na uwagę zasługują: twierdzenia o liniowości, a przede wszystkim twierdzenia o transformacie pochodnej i transformacie całki, dzięki którym operacje różniczkowania i całkowania funkcji $f(t)$ po zastosowaniu \mathcal{L} -przekształcenia zostają zastąpione mnożeniem lub dzieleniem przez s , to znaczy, zostają one zastąpione operacjami algebraicznymi.

2.1. Liniowość

Podstawową cechą metody przekształceń całkowych stanowiącą o jej prostocie i efektywności jest własność liniowości, z drugiej jednak strony ogranicza ona zakres zastosowań metody, w zasadzie, do zagadnień liniowych.

Twierdzenie 2.1.1. *Przekształcenia Laplace'a \mathcal{L} i \mathcal{L}^{-1} są liniowe, tzn. jeżeli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są oryginałami, zaś A_1, A_2 dowolnymi liczbami zespolonymi, to*

$$\mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (2.1.1)$$

oraz

$$\mathcal{L}^{-1}[A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)] = A_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + A_2 \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] \quad (2.1.2)$$

gdzie $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$.

Równości (2.1.1) i (2.1.2) wynikają bezpośrednio z własności liniowości całek występujących odpowiednio we wzorach (1.2.1) lub (1.2.3), (1.4.2) lub (1.4.3) definiujących przekształcenia \mathcal{L} i \mathcal{L}^{-1} .

Uwaga 2.1.1. Jeśli wskaźniki wzrostu funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są odpowiednio równe λ_0 i ζ_0 , to transformata wyrażenia $A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$ istnieje w półpłaszczyźnie $\text{Re}(s) > \max \{\lambda_0, \zeta_0\}$.

Uwaga 2.1.2. Własność (2.1.1) może być uogólniona na kombinację liniową n funkcji $f_1(t), \dots, f_n(t)$ \mathcal{L} -transformowalnych, tj.

$$\mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^n A_k f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{L} [f_k(t)] \quad (2.1.3)$$

zaś własność (2.1.2) może być uogólniona na kombinację liniową n funkcji $F_1(s), \dots, F_n(s)$ \mathcal{L}^{-1} -transformowalnych, tj.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{k=1}^n A_k F_k(s) \right] = \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{L}^{-1} [F_k(s)] \quad (2.1.4)$$

gdzie $A_k, k = 1, \dots, n$ dowolne stałe (rzeczywiste lub zespolone).

Przykład 2.1. Wyznaczyć transformatę $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ oryginału

$$f(t) = 2 + e^{-3t} - 6 \sin t \quad (1)$$

R o z w i ą z a n i e .

1. Do obu stron wzoru (1) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie $\mathcal{L} [f(t)] = \mathcal{L} [2 + e^{-3t} - 6 \sin t] =$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia; wzór (2.1.3) $= 2 \cdot \mathcal{L} [1(t)] + \mathcal{L} [e^{-3t}] - 6 \cdot \mathcal{L} [\sin t] =$
3. Korzystamy ze wzorów (1.3.1), (1.3.3), (1.3.4) $= 2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} - 6 \cdot \frac{1}{s^2+1}.$

Po dokonaniu algebraicznych przekształceń szukana transformata wyraża się wzorem

$$F(s) = \frac{3s^3 - 15s + 6}{s(s+3)(s^2+1)}.$$

■

Przykład 2.2. Wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ dla transformaty

$$F(s) = \frac{s-6}{s(s-2)}.$$

R o z w i ą z a n i e .

1. Funkcję $F(s)$ przedstawiamy w postaci sumy ułamków prostych

$$F(s) = \frac{s-6}{s(s-2)} = \frac{3}{s} - \frac{2}{s-2}$$

2. Do obu stron stosujemy przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-6}{s(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s} - \frac{2}{s-2}\right] =$$

3. Korzystamy z liniowości przekształcenia \mathcal{L}^{-1} ; wzór (2.1.2)

$$= 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] =$$

4. Stosujemy wzory (1.4.6), (1.4.7)

$$= 3 \cdot \mathbf{1}(t) - 2e^{2t} \cdot \mathbf{1}(t).$$

Zatem

$$f(t) = 3 \cdot \mathbf{1}(t) - 2e^{2t} \cdot \mathbf{1}(t).$$

Ponieważ funkcja $f(t)$ jest oryginałem, więc czynnik $\mathbf{1}(t)$ można opuścić (patrz uwaga 1.4.2). Stąd następująca odpowiedź:

$$f(t) = 3 - 2e^{2t} \quad \text{dla } t > 0,$$

pamiętając, że $f(t) = 0$ dla $t < 0$ oraz $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{2}$.

■

Przykład 2.3. Pokażemy teraz jak można prościej (nie korzystając z definicji \mathcal{L} -przekształcenia) wyznaczyć transformaty $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych:

a) $f(t) = \sin at$; b) $f(t) = \cos at$; c) $f(t) = \sinh t$; d) $f(t) = \cosh t$

R o z w i ą z a n i e . Przypominamy znane wzory Eulera

$$e^{iat} = \cos at + i \sin at, \quad e^{-iat} = \cos at - i \sin at \quad (2.1.5)$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą lub zespoloną, z których otrzymujemy określenia funkcji $\cos at$ i $\sin at$ za pomocą funkcji wykładniczych

$$\cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}), \quad \sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat}) \quad (2.1.6)$$

Przypominamy również określenia funkcji hiperbolicznych

$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad (2.1.7)$$

a)

1. Niech
$$\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat}) \quad (1)$$

2. Do obu stron tożsamości (1) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie

$$\mathcal{L}[\sin at] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right] =$$

3. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia, wzór (2.1.1)

$$= \frac{1}{2i}(\mathcal{L}[e^{iat}] - \mathcal{L}[e^{-iat}]) =$$

4. Stosujemy wzory (1.3.2), (1.3.3)

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia}\right) =$$

5. Sprowadzamy do wspólnego mianownika i otrzymujemy

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{s + ia - s + ia}{(s - ia)(s + ia)}\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Zatem mamy następujący wzór, dla $\operatorname{Re} s = \lambda > 0$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (2.1.8)$$

W szczególności, jeśli funkcja $f(t) = \sin 3t$, to ze wzoru (2.1.8) dla $a = 3$ mamy

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + (3)^2} = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Zauważmy, że przyjmując we wzorze (2.1.8) $a = 1$ otrzymamy wzór (1.3.4).

b) Analogicznie jak w przypadku funkcji $\sin at$, korzystając z pierwszego wzoru (2.1.6) wyznaczamy transformatę funkcji $\cos at$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > 0 \quad (2.1.9)$$

W szczególności, jeśli funkcja $f(t) = \cos \frac{t}{2}$, to ze wzoru (2.1.9) dla $a = \frac{1}{2}$ otrzymamy

$$F(s) = \mathcal{L} \left[\cos \frac{t}{2} \right] = \frac{s}{s^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4s}{4s^2 + 1}.$$

Zauważmy, że jeśli we wzorze (2.1.9) przyjmiemy $a = 1$, to otrzymamy wzór (1.3.5).

c)

1. Korzystamy ze wzoru (2.1.7) definiującego funkcję $\sinh t$

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad (2)$$

2. Do obu stron równości (2) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie

$$\mathcal{L} [\sinh t] = \mathcal{L} \left[\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \right] =$$

3. Korzystamy z liniowości; wzór (2.1.1)

$$= \frac{1}{2}(\mathcal{L} [e^t] - \mathcal{L} [e^{-t}]) =$$

4. Stosujemy wzory (1.3.2), (1.3.3) dla $a = 1$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) =$$

5. Przekształcamy i otrzymujemy

$$= \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Zatem

$$\mathcal{L} [\sinh t] = \frac{1}{s^2 - 1} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > 1 \quad (2.1.10)$$

d) Korzystając ze wzoru (2.1.7), definiującego funkcję $\cosh t$ i postępując analogicznie jak w przypadku funkcji z przykładu a) i c), otrzymamy wzór na transformację funkcji $\cosh t$. Mamy

$$\mathcal{L} [\cosh t] = \frac{s}{s^2 - 1} \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} s = \lambda > 1 \quad (2.1.11)$$

(patrz uwaga 2.1.1 – $\operatorname{Re}(s) > \max \{ \lambda_0 = -1, \zeta_0 = 1 \} = 1$).

■

Uwaga 2.1.3. Jeśli funkcje sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny dla dowolnego argumentu at przedstawimy wzorami

$$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at}), \quad \cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}) \quad (2.1.12)$$

gdzie a – dowolna liczba rzeczywista (lub zespolona), to otrzymamy następujące wzory:

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (2.1.13)$$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad (2.1.14)$$

Zachęcam Czytelnika do uzasadnienia wzoru (2.1.13) i (2.1.14) wzorując się na przykładzie 2.3.

Przykład 2.4. W szczególności, jeśli oryginał $f(t) = \sinh \frac{t}{3}$, to ze wzoru (2.1.13), dla $a = \frac{1}{3}$, otrzymamy

$$\mathcal{L}\left[\sinh \frac{t}{3}\right] = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{9s^2 - 1}.$$

Natomiast dla oryginału $f(t) = \cosh 2t$ ze wzoru (2.1.14), dla $a = 2$, otrzymamy

$$\mathcal{L}[\cosh 2t] = \frac{s}{s^2 - 4}.$$

■

Wniosek 2.1.1.

Na podstawie wniosku 1.4.2 z wzajemnej jednoznaczności przekształceń \mathcal{L} i \mathcal{L}^{-1} danej zależnością (1.4.4) oraz ze wzorów (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11), (2.1.13) i (2.1.14) otrzymamy wzory na transformaty odwrotne funkcji wymiernych postaci:

$\frac{a}{s^2 + a^2}$, $\frac{s}{s^2 + a^2}$, $\frac{a}{s^2 - a^2}$, itp. Mamy zatem

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2 + a^2}\right] = \sin at \quad (2.1.15)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + a^2}\right] = \cos at \quad (2.1.16)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] = \sinh t \quad (2.1.17)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - 1}\right] = \cosh t \quad (2.1.18)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2 - a^2}\right] = \sinh at, \quad \operatorname{Re} s > |a| \quad (2.1.19)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - a^2}\right] = \cosh at, \quad \operatorname{Re} s > |a| \quad (2.1.20)$$

Zauważmy, że w powyższych wzorach, zgodnie z wcześniejszą umową (uwaga 1.4.2), pominieliśmy czynnik $I(t)$, lecz należy pamiętać, że dla $t > 0$ funkcja jest identyczna z napisaną, zaś $f(t) = 0$ dla $t < 0$, a jej wartość dla $t = 0$ jest równa połowie granicy prawostronnej w punkcie $t = 0$, tj. $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+)$.

Przykład 2.5.

a) Jeśli transformata $F(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$, to bezpośrednio ze wzoru (2.1.16), dla

$a = 4$, wyznaczamy oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 16}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + (4)^2}\right] = I(t) \cos 4t$.

b) Jeśli $F(s) = \frac{3}{s^2 - 9}$, to bezpośrednio ze wzoru (2.1.19), dla $a = 3$, wyznac-

zamy oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2 - 9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2 - (3)^2}\right] = I(t) \sinh 3t$

■

Transformaty funkcji oryginalnych postaci:

$$f(t) = \cos mt \cos nt, \quad f(t) = \sin mt \sin nt, \quad f(t) = \sin mt \cos nt, \quad m > 0, \quad n > 0$$

wyznaczymy, jeśli najpierw przedstawimy te funkcje (będące iloczynami) jako kombinacje liniowe funkcji trygonometrycznych odpowiednich argumentów.

W tym celu zastosujemy odpowiednio następujące tożsamości trygonometryczne

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]\end{aligned}\quad (2.1.21)$$

Przykład 2.6. Wyznaczyć transformaty oryginałów:

a) $f(t) = \sin mt \cos nt$, $m > 0$, $n > 0$, b) $f(t) = \cos 2t \cos 5t$

R o z w i ą z a n i e . a)

1. Na podstawie trzeciego wzoru z (2.1.21) dla $\alpha = mt$, $\beta = nt$ mamy

$$\sin mt \cos nt = \frac{\sin(m-n)t + \sin(m+n)t}{2}$$

2. Stosujemy do obu stron równości \mathcal{L} -przekształcenie

$$\mathcal{L}[\sin mt \cos nt] = \mathcal{L}\left[\frac{\sin(m-n)t + \sin(m+n)t}{2}\right] =$$

3. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia, wzór (2.1.1)

$$= \frac{1}{2} (\mathcal{L}[\sin(m-n)t] + \mathcal{L}[\sin(m+n)t]) =$$

4. Stosujemy wzór (2.1.8) odpowiednio dla $a = m-n$ oraz $a = m+n$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m-n}{s^2 + (m-n)^2} + \frac{m+n}{s^2 + (m+n)^2} \right) =$$

5. Sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$= \frac{m(s^2 + m^2 - n^2)}{[s^2 + (m-n)^2][s^2 + (m+n)^2]}.$$

Zatem
$$F(s) = \mathcal{L}[\sin mt \cos nt] = \frac{m(s^2 + m^2 - n^2)}{[s^2 + (m-n)^2][s^2 + (m+n)^2]}.$$

b)

1. Na podstawie pierwszego ze wzorów (2.1.21) dla $\alpha = 2t$, $\beta = 5t$ mamy

$$\cos 2t \cos 5t = \frac{1}{2} (\cos 3t + \cos 7t)$$

2. Stosujemy do obu stron równości przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}[\cos 2t \cos 5t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} (\cos 3t + \cos 7t)\right] =$$

3. Korzystamy z liniowości, wzór (2.1.1) $= \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\cos 3t] + \mathcal{L}[\cos 7t]) =$
4. Stosujemy wzór (2.1.9) odpowiednio dla $a = 3$ i $a = 7$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{s}{s^2 + 49}\right)$

Po algebraicznych przekształceniach ostatecznie otrzymamy:

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos 2t \cos 5t] = \frac{s^3 + 29s}{(s^2 + 9)(s^2 + 49)}.$$

■

Przykład 2.7. Wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, dla danej transformaty

$$F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4}.$$

R o z w i ą z a n i e .

1. Funkcję $F(s)$ przedstawiamy w postaci sumy ułamków prostych $F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$ (1)
2. Do obu stron (1) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1} $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s + 5}{s^2 + 4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2 + 4} + \frac{5}{s^2 + 4}\right] =$
3. Korzystamy z liniowości przekształcenia \mathcal{L}^{-1} – wzór (2.1.2) $= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 4}\right] =$
4. Stosujemy wzory (2.1.15) (2.1.16) dla $a = 2$ $= 2I(t)\cos 2t + \frac{5}{2}I(t)\sin 2t.$

Szukany oryginał wyraża się wzorem

$$f(t) = 2\cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t \quad \text{dla } t > 0,$$

natomiast $f(t) = 0$ dla $t < 0$ i $f(0) = \frac{1}{2}f(0^+) = 1$ (zobacz, wzór 1.1.8).

■

2.2. Różniczkowanie i całkowanie oryginału

Twierdzenie 2.2.1 (o transformacie pochodnej). *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem i ma w przedziale $(0, +\infty)$ ciągłą pochodną $f'(t)$ i $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, to istnieje transformata tej pochodnej, przy czym*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+) \quad (2.2.1)$$

gdzie $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

D o w ó d . Stosujemy definicję 1.2.3 transformaty Laplace'a do funkcji pochodnej $f'(t)$ i całkujemy przez części. Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{\varepsilon}^T f'(t) e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} e^{-st} f(t) \Big|_{t=\varepsilon}^{t=T} + \lim_{T \rightarrow \infty} s \cdot \int_0^T e^{-st} f(t) dt = -f(0^+) + s \cdot F(s), \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, gdzie λ_0 jest wykładnikiem wzrostu funkcji $f(t)$. ■

Wniosek 2.2.1.

W szczególności, jeśli $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$, to

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] = s \cdot F(s) \quad (2.2.2)$$

tzn. różniczkowanie oryginału sprowadza się do wymnożenia transformaty (obrazu) przez s .

Wniosek 2.2.2.

Na podstawie wniosku 1.4.2, z wzajemnej jednoznaczności przekształceń \mathcal{L} i \mathcal{L}^{-1} określonej zależnością (1.4.4) i ze wzoru (2.2.1) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}[s \cdot F(s) - f(0^+)] = f'(t) \quad (2.2.3)$$

Uwaga 2.2.1. Wzór (2.2.1) pozostaje prawdziwy, jeżeli założymy, że funkcja $f(t)$ jest ciągłym oryginałem w przedziale $(0, +\infty)$, zaś pochodna $f'(t)$ jest

ciągła w tym przedziale z wyjątkiem co najwyżej punktów odosobnionych w których może nie istnieć, lecz ma skończone granice jednostronne. Całkę Laplace'a pochodnej $f'(t)$ rozumiemy wówczas jako sumę (albo sumę szeregu) całek w przedziałach ciągłości tej pochodnej, a na końcach każdego z tych przedziałów oddzielnie nadajemy funkcji podcałkowej wartości w ten sposób, aby otrzymać funkcję ciągłą w rozpatrywanym przedziale. Mianowicie, jeżeli oznaczymy $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ punkty nieciągłości pochodnej f' w przedziale $\langle 0, t \rangle$, to dla każdego $k = 1, \dots, m$ funkcja $g_k(t)$ określona warunkami:

$$g_k(t) = f'(t) \quad \text{dla} \quad t_{k-1} < t < t_k$$

oraz

$$g_k(t_{k-1}) = f'(t_{k-1}^+) = \lim_{t \rightarrow t_{k-1}^+} f'(t), \quad g_k(t_k) = f'(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} f'(t)$$

jest ciągła w przedziale $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ (zob. [10]). Całkujemy przez części w każdym z przedziałów $\langle 0, t_1 \rangle, \langle t_1, t_2 \rangle, \dots, \langle t_m, t \rangle$ i dodajemy tak otrzymane wzory, a następnie przechodzimy do granicy przy $t \rightarrow +\infty$ i otrzymamy wzór (2.2.1) (zob. [13, 19, 25]).

Wniosek 2.2.3.

Jeśli funkcja $f(t)$ dla $t > 0$ jest ciągła i ma prawie wszędzie pochodną $f'(t)$ oraz istnieje transformata $\mathcal{L}[f'(t)]$, to istnieje transformata $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i zależność między tymi transformatami wyrażona jest wzorem (2.2.1) lub (2.2.2).

Własność przekształcenia Laplace'a wyrażona wzorem (2.2.1) przenosi się indukcyjnie na pochodne wyższych rzędów funkcji $f(t)$. Wprowadzamy oznaczenie $f^{(0)}(t) = f(t)$. Stąd mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2.2 (o \mathcal{L} -transformacie pochodnej rzędu n). *Jeżeli funkcja $f(t)$ oraz jej pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie są oryginałami oraz istnieje pochodna $f^{(n)}(t)$ ciągła na przedziale $(0, +\infty)$, to istnieje \mathcal{L} -transformata tej pochodnej i wyraża się ona wzorem*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+) \quad (2.2.4)$$

gdzie

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], \quad \text{a} \quad f^{(k)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.2.5)$$

D o w ó d . Wzór (2.2.4) wynika z twierdzenia 2.2.1 przez indukcję matematyczną (patrz np. [1]). Zachęcam Czytelnika do przeprowadzenia dowodu. ■

W szczególności dla $n = 2$ mamy

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - s \cdot f(0^+) - f'(0^+) \quad (2.2.6)$$

Wzór (2.2.6) łatwo uzyskamy, jeśli skorzystamy dwukrotnie z twierdzenia 2.2.1. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= s \cdot \mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^+) = s \{s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)\} - f'(0^+) = \\ &= s^2 F(s) - s \cdot f(0^+) - f'(0^+) \end{aligned}$$

Wniosek 2.2.4.

Jeżeli oryginał $f(t)$ i jego pochodne są ciągłe w punkcie $t = 0$, to $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ i wzór (2.2.4) przyjmie postać

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \mathcal{L}[f(t)] = s^n \cdot F(s) \quad (2.2.7)$$

tzn. n -krotnemu różniczkowaniu oryginału odpowiada mnożenie transformaty $F(s)$ przez s^n .

Przykład 2.8. Wyznaczyć transformatę funkcji $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu oryginału.

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ jest określona dla $t > 0$, a w punkcie

$t = 0$ jest nieciągła i $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$ (nieciągłość drugiego rodzaju), więc nie jest

to oryginał w myśl definicji 1.1.3. Mimo to, transformatę tej i podobnych funkcji można wyznaczyć m. in. na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu oryginału $f(t)$, znając transformatę funkcji $f(t)$ i zakładając, że pochodna $f'(t)$ istnieje dla $t > 0$, a dla $t = 0$ może nie istnieć.

Zauważmy, że $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ jest pochodną funkcji $g(t) = 2\sqrt{t}$, tzn.

$$g'(t) = (2\sqrt{t})' = \frac{1}{\sqrt{t}} = f(t) \quad (1)$$

oraz

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{t} = 0 \quad (2)$$

Stosując do obu stron (1) przekształcenie Laplace'a i stosując do prawej strony z tw. 2.2.1 – wzór (2.2.1) – mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s \cdot G(s) - g(0^+) \quad (3)$$

W przykładzie 1.9 wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g(t) = 2\sqrt{t}$ daną wzorem (1.3.14), tj.

$$G(s) = \mathcal{L}[2\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

Z powyższych rozważań i wyników uzyskanych w (1), (2), (3) i (4) mamy

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \mathcal{L}\left[(2\sqrt{t})'\right] = s \cdot \mathcal{L}[2\sqrt{t}] = s \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}.$$

Zatem

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (2.2.8)$$

■

Uwaga 2.2.2. Pochodna $f'(t)$ funkcji $f(t)$ \mathcal{L} -transformowalnej nie musi być \mathcal{L} -transformowalna. Na przykład, funkcja $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ dla $t > 0$ jest funkcją transformowalną (w przykładzie 2.8 wyznaczyliśmy jej transformatę – wzór (2.2.8)). Funkcja ta posiada pochodną $f'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t^3}}$ dla $t > 0$, ale $f'(t)$ nie jest transformowalna, ponieważ nie jest całkowna w otoczeniu punktu $t = 0$.

Uwaga 2.2.3. Rozróżnienie między wartością w punkcie $f^{(k)}(0)$ i graniczną wartością $f^{(k)}(0^+)$, $k = 0, 1, \dots, n$ przy zbliżaniu się do punktu $t = 0$ jest szczególnie ważne w rozwiązaniach równań różniczkowych cząstkowych.

Przykład 2.9. W oparciu o twierdzenie 2.2.1 wyznaczyć transformatę $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ funkcji $f(t) = \cos^2 t$.

R o z w i ą z a n i e . Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(t) = \cos^2 t$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia 2.2.1. Funkcja ta na przedziale $(0, +\infty)$ jest ciągłym oryginałem, dla $t = 0$ ma punkt nieciągłości i $f(0^+) = 1$, oraz pochodna $f'(t) = -\sin 2t$ jest ciągła na przedziale $(0, +\infty)$. Zatem na podstawie twierdzenia 2.2.1 i wniosku 2.2.3 zależność między transformatą funkcji i transformatą pochodnej określa wzór (2.2.1). Proces uzyskania rozwiązania można zilustrować następującym schematem:

1. Obliczamy pochodną $f'(t)$ oryginału $\cos^2 t$

$$f'(t) = (\cos^2 t)' = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t$$
2. Do obu stron równości stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie
$$\mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[-\sin 2t] =$$
3. Stosujemy wzór (2.1.8) dla $a = 2$

$$= \frac{-2}{s^2 + 4} \quad (1)$$

4. Piszemy wzór (2.2.1) uwzględniając w nim wartość $f(0^+) = 1$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+) =$$

$$= s \cdot F(s) - 1 \quad (2)$$

5. Z porównania stron równości (1) i (2) mamy
$$s \cdot F(s) - 1 = \frac{-2}{s^2 + 4}$$

6. Uzyskujemy równanie z nie-wiadomą funkcją $F(s)$

$$s \cdot F(s) = \frac{-2}{s^2 + 4} + 1 = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4}$$

7. Dzielimy przez s

$$F(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$$

Zatem szukana transformata wyraża się wzorem

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos^2 t] = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)} \quad (3)$$

U w a g a . Zauważmy, że transformatę ww. oryginału można wyznaczyć również innym sposobem, jeśli skorzystamy z odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej. Rozwiązanie tym sposobem przebiega według następującego schematu:

1. Funkcję $\cos^2 t$ przedstawiamy wzorem
$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \quad (4)$$

2. Do obu stron tożsamości (4) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie
- $$\mathcal{L} [\cos^2 t] = \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right] =$$
3. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia
- $$= \frac{1}{2} (\mathcal{L} [1] + \mathcal{L} [\cos 2t]) =$$
4. Stosujemy wzór (1.3.1) i (2.1.9) dla $a = 2$
- $$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) =$$
5. Po przekształceniach otrzymujemy
- $$= \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)},$$

co jest zgodne z wynikiem (3). ■

Przykład 2.10. Wyznaczyć transformatę $G(s)$ funkcji $g(t) = \frac{d^3}{dt^3} (e^{-2t})$.

R o z w i ą z a n i e .

Zaprezentujemy dwa sposoby uzyskania transformaty $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

P i e r w s z y s p o s ó b . Bezpośrednio wyznaczamy trzecią pochodną funkcji e^{-2t} , a następnie obliczamy jej transformatę. Mamy zatem:

1. Obliczamy kolejne pochodne funkcji e^{-2t}
- $$g(t) = \frac{d^3}{dt^3} (e^{-2t}) = -8e^{-2t}$$
2. Stosujemy do obu stron \mathcal{L} -przekształcenie
- $$\mathcal{L} [g(t)] = \mathcal{L} [-8e^{-2t}] =$$
3. Z jednorodności \mathcal{L} , a następnie ze wzoru (1.3.3)
- $$= -8 \cdot \mathcal{L} [e^{-2t}] = \frac{-8}{s+2}.$$

Zatem

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^3}{dt^3} (e^{-2t}) \right] = \frac{-8}{s+2} \quad (1)$$

D r u g i s p o s ó b . Zaprezentujemy teraz metodę uzyskania transformaty funkcji $g(t)$ w oparciu o twierdzenie 2.2.2 i wzory (2.2.4) i (2.2.5). W tym celu oznaczamy: $f(t) = e^{-2t}$ i wtedy $g(t) = f^{(3)}(t)$, a więc szukana transformata

$$G(s) = \mathcal{L} [g(t)] = \mathcal{L} [f^{(3)}(t)].$$

Wzór (2.2.4) dla $n = 3$ przyjmuje postać

$$\mathcal{L} [f^{(3)}(t)] = s^3 \cdot \mathcal{L} [f(t)] - s^2 f(0^+) - s f'(0^+) - f''(0^+) \quad (2)$$

Obliczamy teraz kolejne pochodne funkcji $f(t) = e^{-2t}$:

$$f'(t) = -2e^{-2t}, \quad f''(t) = 4e^{-2t}, \quad f^{(3)}(t) = -8e^{-2t},$$

a następnie wyznaczamy granice jednostronne tych pochodnych w zerze

$$f(0^+) = 1, \quad f'(0^+) = -2, \quad f''(0^+) = 4 \quad (3)$$

Uwzględniając wyniki (3) w równaniu (2) oraz z faktu, że $F(s) = \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$, po algebraicznych przekształceniach otrzymamy ostatecznie

$$G(s) = \frac{s^3}{s+2} - s^2 + 2s - 4 = \frac{-8}{s+2},$$

co jest zgodne z wynikiem (1). ■

Przykład 2.11. Wyznaczyć transformatę $W(s) = \mathcal{L}[w(t)]$ wyrażenia

$$w(t) = x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) - 4t^2 \quad (1)$$

z warunkami początkowymi

$$x(0^+) = -1, \quad x'(0^+) = 2, \quad x''(0^+) = 0 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . Zakładamy, że transformatą oryginału $x(t)$ jest funkcja $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Następnie do obu stron (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[w(t)] &= \mathcal{L}[x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) - 4t^2] = \\ &= \mathcal{L}[x'''(t)] + 2 \cdot \mathcal{L}[x''(t)] + 5 \cdot \mathcal{L}[x'(t)] - 4 \cdot \mathcal{L}[t^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Następnie na podstawie twierdzenia 2.2.2 oraz wzorów (2.2.1), (2.2.4) i (2.2.5), uwzględniając warunki początkowe (2), otrzymujemy kolejno

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0^+) = sX(s) - 1,$$

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) = s^2X(s) + s - 2,$$

$$\mathcal{L}[x'''(t)] = s^3X(s) - s^2x(0^+) - sx'(0^+) - x''(0^+) = s^3X(s) + s^2 - 2s.$$

Wstawiając powyższe zależności do (3) i korzystając z faktu, że $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$, otrzymamy

$$\mathcal{L}[w(t)] = s^3 X(s) + s^2 - 2s + 2s^2 X(s) + 2s - 4 + 5sX(s) - 5 - \frac{8}{s^3}.$$

Po uporządkowaniu, szukana transformata danego wyrażenia $w(t)$ z podanymi warunkami początkowymi (2) ma postać

$$W(s) = (s^3 + 2s^2 + 5s)X(s) + s^2 - 9 - \frac{8}{s^3}.$$

■

Z powyższego przykładu wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.2.5.

Różniczkowaniu w dziedzinie oryginałów odpowiadają określone działania algebraiczne w dziedzinie transformat. Zatem dzięki twierdzeniom 2.2.1 i 2.2.2 rozwiązywanie równań różniczkowych (układów równań różniczkowych) liniowych o stałych współczynnikach można sprowadzić do rozwiązywania odpowiednich równań (układów równań) algebraicznych względem transformaty. Twierdzenia 2.2.1 i 2.2.2 pozwalają nie tylko na algebraizację danego równania różniczkowego, lecz umożliwiają uzyskanie od razu rozwiązania spełniającego zadane warunki początkowe.

Twierdzenie 2.2.3 (o transformacie całki). *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem o wskaźniku wzrostu λ_0 i $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to istnieje transformata całki $\int_0^t f(\tau)d\tau$ i zależność między nimi dana jest wzorem*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s} \quad \text{dla } \operatorname{Res} = \lambda > \lambda_0 \quad (2.2.9)$$

D o w ó d . Przyjmujemy oznaczenie $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$, gdzie $g(t)$ jest oryginałem (patrz lemat 1.1.3). Mamy zatem

$$g'(t) = f(t) \text{ i } g(0^+) = 0.$$

Uwzględniając twierdzenie 2.2.1 o różniczkowaniu oryginału, zgodnie ze wzorem (2.2.1), otrzymujemy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[g(t)] - g(0^+) = s \cdot \mathcal{L}[g(t)] = s \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right]$$

gdzie
$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t f(\tau) d\tau = 0.$$

A stąd wynika wzór (2.2.9). ■

Wniosek 2.2.6.

Ze wzoru (2.2.9) i na podstawie wniosku 1.4.2 mamy

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} F(s)\right] = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

Wniosek 2.2.7.

Całkowaniu oryginału od 0 do zmiennego t odpowiada dzielenie transformaty (obrazu) przez s , lub inaczej, całkowaniu w dziedzinie oryginałów odpowiada dzielenie w dziedzinie transformat.

Podsumowując, twierdzenia wyrażone wzorami (2.2.1), (2.2.4), (2.2.9) umożliwiają algebraizację kombinacji liniowych zawierających funkcję $f(t)$, jej pochodne $f^{(n)}(t)$ lub całki postaci $\int_0^t f(\tau) d\tau$.

Przykład 2.12. W oparciu o twierdzenie 2.2.3 (o transformacji całki) wyznaczyć transformaty funkcji a) $f(t) = I(t) \cdot t$ oraz b) $f(t) = I(t) \cdot t^2$.

R o z w i ą z a n i e .

a)

1. Funkcję $f(t) = t$ przedstawiamy w postaci całki oznaczonej.

$$t = \int_0^t I(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (1)$$

2. Do obu stron równości (1) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}\left[\int_0^t I(\tau) d\tau\right] =$$

3. Stosujemy tw. 2.2.3 – wzór (2.2.9) – oraz wzór (1.3.1)

$$= \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Zatem
$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (2)$$

(Por. wzór (1.3.6), uzyskany w podrozdziale 1.3.5).

b) Analogicznie jak w przykładzie a) wyznaczamy transformatę funkcji b).

1. Funkcję $f(t) = t^2$ przedstawiamy w postaci całki oznaczonej
$$t^2 = 2 \int_0^t \tau d\tau, \quad t > 0 \quad (3)$$

2. Do obu stron równości (3) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}
$$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}\left[2 \int_0^t \tau d\tau\right] =$$

3. Stosujemy tw. 2.2.3 – wzór (2.2.9)
$$= 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[t] =$$

4. Korzystamy z wyniku (2)
$$= \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

Zatem
$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

(por. wzór (1.3.7) uzyskany w podrozdziale 1.3.6). ■

Przykład 2.13. Korzystając z twierdzenia o transformacie całki wyznaczyć oryginał $g(t)$, znając jego transformatę $G(s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$.

R o z w i ą z a n i e . Poszukujemy oryginału $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$.

1. Transformatę $G(s)$ zapisujemy w postaci iloczynu $\frac{1}{s} \cdot \mathcal{F}(s)$
$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + a^2} =$$

2. Zastosowaliśmy wzór (2.1.8) do wyrażenia $\frac{1}{s^2 + a^2} = \mathcal{F}(s)$
$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[\sin at]$$

3. Stosujemy tw. 2.2.3 do oryginału $f(t) = \sin at$ – „dzieleniu transformaty przez s odpowiada całkowanie oryginału”
$$G(s) = \frac{1}{a} \cdot \mathcal{L}\left[\int_0^t \sin a\tau d\tau\right] \quad (1)$$

4. Do obu stron (1) stosujemy przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} i wniosek 2.2.6 – wzór (2.2.10)
- $$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{1}{a} \cdot \int_0^t \sin a\tau d\tau =$$
5. Całkujemy w granicach od $\tau = 0$ do $\tau = t$ i otrzymujemy
- $$= \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot [\cos a\tau]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$
- $$= \frac{1}{a^2} (1 - \cos at) \cdot I(t)$$

Zatem dla $t \geq 0$

$$g(t) = \frac{1}{a^2} (1 - \cos at).$$

■

2.3. Różniczkowanie i całkowanie transformaty

Podamy teraz własności w pewnym sensie analogiczne do poprzednich (wynikające z twierdzeń o różniczkowaniu i całkowaniu oryginału) lecz polegające na tym, że mnożeniu funkcji $f(t)$ przez t odpowiada różniczkowanie transformaty, a dzieleniu funkcji $f(t)$ przez t odpowiada całkowanie transformaty.

Można udowodnić, że jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, to również funkcje $g(t) = (-t)^n f(t)$ są oryginałami, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ (patrz lemat 1.1.3c).

Twierdzenie 2.3.1 (o różniczkowaniu transformaty). *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem i $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to*

$$\mathcal{L}[-t \cdot f(t)] = \frac{d}{ds} [F(s)] \quad (2.3.1)$$

D o w ó d . Zauważamy, że funkcja $F(s)$ jest funkcją holomorficzną na półpłaszczyźnie określonej nierównością $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$ (patrz twierdzenie 1.2.3), gdzie λ_0 jest wskaźnikiem wzrostu funkcji $f(t)$, a więc funkcja $F(s)$ posiada w tym obszarze pochodną dowolnego rzędu. Z definicji \mathcal{L} -przekształcenia (wzór

1.2.3) wiemy, że $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$. Różniczkując obustronnie to równanie

względem zmiennej s , otrzymamy

$$\frac{d}{ds} [F(s)] = \frac{d}{ds} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right) = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{ds} (e^{-st}) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) (-t) dt = \mathcal{L}[-t \cdot f(t)].$$

■

Wzór (2.3.1) daje się uogólnić na pochodną n -tego rzędu funkcji $F(s)$.

Twierdzenie 2.3.2. *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem i $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n(F(s))}{ds^n} \quad (2.3.2)$$

U w a g a . Pochodną rzędu n funkcji $F(s)$ można obliczyć różniczkując n -krotnie pod znakiem całki (1.2.3), podobnie jak czyniliśmy w przypadku pierwszej pochodnej (por. dowód tw. 2.3.1). Przypominamy również, że funkcja $F(s)$, która jest holomorficzną w półpłaszczyźnie $\text{Re } s > \lambda_0$, ma w tej płaszczyźnie wszystkie pochodne [12].

Wniosek 2.3.1.

Wzór (2.3.1) orzeka, że transformata oryginału $f(t)$ pomnożonego przez $(-t)$ równa się pochodnej transformaty $F(s)$ funkcji $f(t)$. Natomiast wzór (2.3.2) oznacza, że n -krotne różniczkowanie obrazu sprowadza się, po przejściu do przestrzeni oryginału, do pomnożenia oryginału $f(t)$ przez czynnik $(-1)^n t^n$, (2.3.4).

Wniosek 2.3.2.

Ze wzorów (2.3.1) i (2.3.2) oraz wobec jednoznaczności przekształcenia \mathcal{L}^{-1} określonego formułą (1.4.4) mamy następujące wzory

$$\mathcal{L}^{-1}[-F'(s)] = t \cdot f(t) \quad (2.3.3)$$

i odpowiednio

$$t^n \cdot f(t) = (-1)^n \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right], \quad n \geq 2 \quad (2.3.4)$$

Przykład 2.14. Ponieważ $\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s} = F(s)$, to na podstawie twierdzenia 2.3.1 o różniczkowaniu obrazu ze wzoru (2.3.1) otrzymamy

$$\mathcal{L}[t \cdot I(t)] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[I(t)]) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

Analogicznie na podstawie tw. 2.3.2 o różniczkowaniu obrazu ze wzoru (2.3.2) dla $n = 2$ otrzymamy

$$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[t^2 \cdot I(t)] = \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}[I(t)]) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s^3} \text{ itd.}$$

W rezultacie przez n -krotne różniczkowanie transformaty $\mathcal{L}[I(t)]$ otrzymamy

$$\mathcal{L}[t^n] = \mathcal{L}[t^n \cdot I(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \cdot (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Zatem
$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że takie same wyniki uzyskaliśmy w przykładzie 2.12 stosując twierdzenie 2.2.3 o transformacie całki oryginału oraz w paragrafach 1.3.5 i 1.3.6 korzystając z definicji 1.2.3 \mathcal{L} -transformaty. ■

Przykład 2.15. Wyznaczyć transformaty funkcji:

a) $f_1(t) = t \cos t$, b) $f_2(t) = t^2 e^{-t}$, c) $g(t) = \int_0^t \tau \cos \tau d\tau$.

R o z w i ą z a n i e . a) Na podstawie twierdzenia 2.3.1, które mówi „że mnożeniu funkcji oryginalnej przez t odpowiada różniczkowanie jej transformaty” oraz z faktu, że transformata Laplace'a funkcji $\cos t$ jest funkcją zespoloną $\frac{s}{s^2 + 1}$, ze wzoru (2.3.1) otrzymujemy

$$F_1(s) = \mathcal{L}[t \cos t] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[\cos t]) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \quad (1)$$

b) Na podstawie twierdzenia 2.3.2, ze wzoru (2.3.2) dla $n = 2$ transformatę funkcji $t^2 e^{-t}$ wyznaczamy przez dwukrotne zróżniczkowanie względem zmiennej s transformaty $F(s) = \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s + 1}$ funkcji e^{-t} . Mamy zatem

$$\mathcal{L}[t^2 e^{-t}] = \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}[e^{-t}]) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s + 1}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{(s + 1)^2}\right).$$

Ostatecznie szukana transformata ma postać

$$F_2(s) = \mathcal{L}[t^2 e^{-t}] = \frac{2}{(s + 1)^3} \quad (2)$$

c) Na mocy twierdzenia 2.2.3 o transformacie całki oryginału, ze wzoru (2.2.9) zastosowanego do funkcji $f(t) = t \cos t$, a następnie wykorzystując wynik (1) z przykładu a) otrzymamy

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \tau \cos \tau d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[t \cos t] = \frac{s^2 - 1}{s(s^2 + 1)^2} \quad (3)$$

Ten sam rezultat (3) uzyskamy, jeśli najpierw obliczymy całkę $\int_0^t \tau \cos \tau d\tau$, a dopiero potem wyznaczmy transformatę z otrzymanego wyniku. Zachęcam Czytelnika do wykonania odpowiednich rachunków.

U w a g a . Przykłady 2.14 i 2.15 wskazują przydatność wzorów (2.3.1) oraz (2.3.2) do wyznaczania \mathcal{L} -transformat. Poza tym zauważmy, że wszystkie transformaty $F_1(s)$, $F_2(s)$ i $G(s)$ uzyskane w tych przykładach są funkcjami wymiernymi właściwymi. ■

Przykład 2.16. Wyznaczyć oryginały dla transformat danych wzorami:

$$\text{a) } F_1(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}, \quad \text{b) } F_2(s) = \frac{2}{(s + 1)^3}, \quad \text{c) } F_3(s) = \frac{4s}{(s^2 + 1)^2}$$

R o z w i ą z a n i e . a) i b) Korzystając z wyników (1), (2) przykładu 2.15 oraz z jednoznaczności przekształcenia odwrotnego \mathcal{L}^{-1} (wzór (1.4.4)), znajdujemy oryginały $f_1(t)$ i $f_2(t)$ danych transformat wymiernych. Mamy zatem

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}\right] = \mathbf{I}(t)t \cos t,$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^3}\right] = \mathbf{I}(t)t^2 e^{-t}.$$

c) Zauważmy, że $\frac{4s}{(s^2 + 4)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)$ i $\frac{2}{s^2 + 4} = \mathcal{L}[\sin 2t]$. Zatem z tw.

2.3.1 o różniczkowaniu transformaty zastosowanym do funkcji $f(t) = \sin 2t$, oraz z wniosku 2.3.2, na podstawie wzoru (2.3.3) mamy

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s}{(s^2 + 4)^2}\right] = t \cdot \sin 2t. \quad \blacksquare$$

Przykład 2.17. Wyznaczyć oryginał $f(t)$, znając jego transformatę

$$F(s) = \ln \frac{s+a}{s+b} \quad (a, b - \text{dowolne stałe}).$$

R o z w i ą z a n i e . Jeśli ograniczymy w sposób jednoznaczny zakres argumentów liczb $\frac{s+a}{s+b}$ to funkcja $\ln \frac{s+a}{s+b}$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną (zob. [12]) na obszarze jednopójnym $C \setminus \{s \in C : \operatorname{Re} s \leq -a \wedge \operatorname{Re} s \leq -b\}$. Jest to logarytm główny funkcji wieloznacznej $\operatorname{Ln} \left(\frac{s+a}{s+b} \right)$ określonej na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem $s = -a$ i $s = -b$. Do wyznaczenia funkcji $f(t)$ wykorzystamy wzór (2.3.3) na podstawie którego

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -t \cdot f(t) \quad (1)$$

Korzystając z własności logarytmów wyznaczamy pochodną

$$F'(s) = \left(\ln \frac{s+a}{s+b} \right)' = (\ln(s+a) - \ln(s+b))' = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \quad (2)$$

a następnie znajdujemy transformatę odwrotną. Stosując do obu stron zależności (2) odwrotne przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right] = e^{-at} - e^{-bt}, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

Porównując prawe strony wzorów (1) i (3) mamy

$$t \cdot f(t) = e^{-bt} - e^{-at}.$$

Stąd, dzieląc obustronnie przez t , $t > 0$, otrzymamy szukany oryginał

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s+b}\right] = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}.$$

■

Twierdzenie 2.3.3 (o całkowaniu transformaty). *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem*

o wykładniku wzrostu λ_0 , istnieje $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i całka $\int_s^{+\infty} F(p) dp$

jest zbieżna, to jest ona transformatą funkcji $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, tzn.

$$G(s) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(p) dp, \quad \operatorname{Re} p > \lambda_0 \quad (2.3.5)$$

gdzie

$$\int_s^{+\infty} F(p) dp = \lim_{\operatorname{Re} p=T \rightarrow +\infty} \int_s^T F(p) dp \quad (2.3.6)$$

(Dowód twierdzenia 2.3.3 – patrz np. [1, 13]).

Uwaga 2.3.1. Całkowanie we wzorze (2.3.5) odbywa się po dowolnej linii regularnej łączącej punkty $p = s$ oraz $p = +\infty$ ($p = \lambda + i\omega$ – liczba zespolona) i leżącej całkowicie w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} p \geq \lambda > \lambda_0$. W szczególności za linię całkowania przyjmujemy półoś rzeczywistą i wówczas całkowanie odbywa się dla rzeczywistego s ($\operatorname{Im} s = 0$) w przedziale $(s, +\infty)$, co praktycznie bardzo upraszcza obliczenia. I wtedy zgodnie z tw. 1.2.3 spełniony jest warunek (1.2.4) dla transformaty $G(s)$, tzn. $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ (zob. [13]).

Wniosek 2.3.3.

Na podstawie wniosku 1.4.2 z zależności (1.4.4) i bezpośrednio ze wzoru (2.3.5) mamy

$$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty} F(p) dp\right] \quad (2.3.7)$$

a stąd

$$f(t) = t \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^{+\infty} F(p) dp\right] \quad (2.3.8)$$

Wniosek 2.3.4.

Wzór (2.3.5) orzeka, że całkowaniu transformaty $F(s)$ odpowiada w dziedzinie oryginału dzielenie oryginału $f(t)$ przez t .

Twierdzenie 2.3.3, w przeciwieństwie do pozostałych, stosowane jest bardzo rzadko. Wymieniamy je tu dla kompletności wykładu.

Przykład 2.18. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu transformaty wyznaczyć transformatę funkcji: a) $h(t) = \frac{\sinh t}{t}$, b) $g(t) = \int_0^t \frac{\sinh \tau}{\tau} d\tau$.

R o z w i ą z a n i e . a)

1. Dany jest oryginał

$$h(t) = \frac{\sinh t}{t} \quad (1)$$

2. Do obu stron (1) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right] =$$

3. Stosujemy tw.2.3.3 – wzór (2.3.5) dla oryginału $f(t) = \sinh t$ – „dzieleniu oryginału przez t odpowiada całkowanie transformaty $\mathcal{L}[f(t)]$ ”

$$= \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[\sinh t] dp =$$

4. Podstawiamy $\mathcal{L}[\sinh t] = \frac{1}{p^2 - 1}$

$$= \int_s^{+\infty} \frac{1}{p^2 - 1} dp =$$

5. Funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) dp =$$

6. Z definicji całki niewłaściwej

$$= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_s^T \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) dp =$$

7. Całkujemy w granicach od $p = s$ do $p = T$ na osi rzeczywistej

$$= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln(p-1) - \ln(p+1)) \Big|_{p=s}^{p=T} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{T-1}{T+1}\right) - \ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right) \right] =$$

8. Przy przejściu do granicy

$$\text{z } T \rightarrow +\infty, \ln \frac{T-1}{T+1} \rightarrow 0$$

i z własności logarytmów

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}$$

Otrzymaliśmy zatem: $H(s) = \mathcal{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right] = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1}$ (2)

Zauważmy, że transformata $H(s)$ dąży do zera dla $s \rightarrow +\infty$ po osi rzeczywistej, tj. $\lim_{s \rightarrow +\infty} H(s) = 0$ (tw. 1.2.3, wzór 1.2.4).

b) Pokażemy teraz jak łatwo można wyznaczyć transformatę $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ dla

funkcji $g(t) = \int_0^t \frac{\sinh \tau}{\tau} d\tau$, korzystając z wyniku przykładu a. Oznaczając

chwilowo funkcję podcałkową $\frac{\sinh \tau}{\tau}$ przez $h(\tau)$ mamy $g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$. Wtedy

łatwo zauważyć, że do wyznaczenia \mathcal{L} -transformaty funkcji $g(t)$ należy zastosować twierdzenie 2.2.3 o transformacie całki. Twierdzenie to zastosowane do

naszego przykładu mówi, że w wyniku działania \mathcal{L} -przekształcenia, operację całkowania oryginału $h(\tau)$ w przedziale $\langle 0, t \rangle$ należy zastąpić dzieleniem jej transformaty $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ przez s , tzn. zgodnie ze wzorem (2.2.9)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t h(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot H(s).$$

Stąd, po uwzględnieniu wcześniejszych rezultatów oraz korzystając z wyznaczonej w przykładzie a) transformaty $H(s)$ danej wzorem (2) mamy

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\sinh \tau}{\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\sinh t}{t}\right] \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2s} \ln \frac{s+1}{s-1}.$$

■

2.4. Podobieństwo (zmiana skali)

Twierdzenie 2.4.1 (o podobieństwie lub zmianie skali). *Jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,*

$$\text{to} \quad \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.4.1)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$, oraz $\operatorname{Re} s > \max\{\lambda_0, a\lambda_0\}$.

D o w ó d . Korzystając z definicji \mathcal{L} -transformaty, na podstawie wzoru (1.2.3) oraz stosując odpowiednie podstawienie dla dowolnej stałej $a > 0$ mamy:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} at = \tau \\ dt = \frac{1}{a} d\tau \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

■

Wniosek 2.4.1.

Na podstawie wniosku 1.4.2 i wzoru (1.4.4) oraz ze wzoru (2.4.1) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = f(at) \quad (2.4.2)$$

Uwaga 2.4.1. Tezę twierdzenia 2.4.1, tj. wzór (2.4.1), można podać również w następującej postaci

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = F(sa) \quad (2.4.3)$$

Na podstawie twierdzenia 2.4.1 o podobieństwie w oparciu o wzory (1.3.4), (1.3.5) oraz (2.1.10), (2.1.11) na transformaty prostych funkcji trygonometrycznych $\sin t$ i $\cos t$ oraz odpowiednio prostych funkcji hiperbolicznych $\sinh t$, $\cosh t$, można otrzymać ogólne wzory postaci (2.1.8), (2.1.9) oraz (2.1.13) i (2.1.14) określające transformaty funkcji trygonometrycznych $\sin at$, $\cos at$ oraz funkcji hiperbolicznych $\sinh at$, $\cosh at$.

Przykład 2.19. Stosując twierdzenie o podobieństwie wyznaczyć transformaty funkcji: a) $g(t) = \sin at$, b) $g(t) = \cosh 3t$.

R o z w i ą z a n i e . a) Wiemy, że jeśli $f(t) = \sin t$, to

$$F(s) = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (1)$$

1. Niech

$$g(t) = \sin at \quad (2)$$

2. Stosujemy do obu stron (2) przekształcenie \mathcal{L}

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\sin at] =$$

3. Na podstawie tw. 2.4.1 ze wzoru (2.4.1)

$$= \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) =$$

4. W transformacie $F(s)$ (patrz (1)) w miejsce zmiennej s podstawiamy zmienną $\frac{s}{a}$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} =$$

5. Po przekształceniu mamy

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

W ten sposób uzyskaliśmy wzór (2.1.8), tj. $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$.

b) Ze wzoru (2.1.11) wiemy, że jeśli $f(t) = \cosh t$, to

$$F(s) = \mathcal{L}[\cosh t] = \frac{s}{s^2 - 1} \quad (3)$$

1. Niech

$$g(t) = \cosh 3t \quad (4)$$

2. Stosujemy do obu stron (4) przekształcenie \mathcal{L}

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\cosh 3t] =$$

3. Na podstawie tw. 2.4.1 ze wzoru (2.4.1) dla $a = 3$ mamy

$$= \frac{1}{3} \cdot F\left(\frac{s}{3}\right) =$$

4. W transformacie $F(s)$ danej (3) w miejsce zmiennej s podstawiamy zmienną $\frac{s}{3}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{s}{3}}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 - 1} =$$

5. Po przekształceniu otrzymujemy

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{s}{s^2 - 9} = \frac{s}{s^2 - 9}.$$

Jest to zgodne ze wzorem (2.1.14) dla $a = 3$, tj. $\mathcal{L}[\cosh 3t] = \frac{s}{s^2 - 9}$.

■

Czytelnik uzasadni wzory (2.1.9) oraz (2.1.13) korzystając z twierdzenia 2.4.1.

2.5. Przesunięcia zespolone

Podamy obecnie twierdzenie zwane twierdzeniem o przesunięciu w dziedzinie zespolonej lub twierdzeniem o przesunięciu zespolonym.

Twierdzenie 2.5.1 (o przesunięciu zespolonym). *Jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, oraz α jest dowolną liczbą zespoloną, to dla $\operatorname{Re}(s + \alpha) > \lambda_0$ i $g(t) = e^{-\alpha t} \cdot f(t)$*

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = F(s + \alpha) \quad (2.5.1)$$

D o w ó d . Z definicji \mathcal{L} -transformaty na podstawie wzoru (1.2.3)

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cdot f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} f(t) dt = F(s + \alpha)$$

■

Wniosek 2.5.1.

Ze wzoru (2.5.1) oraz z jednoznaczności przekształcenia \mathcal{L}^{-1} mamy

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s + \alpha)] = e^{-\alpha t} \cdot f(t) = g(t) \quad (2.5.2)$$

gdzie

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

Wniosek 2.5.2.

Pomnożeniu oryginału $f(t)$ przez czynnik $e^{-\alpha t}$ odpowiada w transformacie $F(s)$ zmiana zmiennej s na $s + \alpha$, tzn. obraz $F(s)$ funkcji $f(t)$ ulega przesunięciu o $(-\alpha)$.

Uwaga 2.5.1. Twierdzenie o przesunięciu zespolonym stosujemy, między innymi, w zagadnieniach o drganiach zanikających oraz w elektrotechnice, gdzie często występują funkcje tłumione wykładniczo. Stąd również powyższe twierdzenie nosi nazwę *twierdzenia o tłumieniu*. Tłumienie funkcji $f(t)$ zachodzi oczywiście tylko wtedy, gdy α jest dodatnią liczbą rzeczywistą [5, 9, 13].

Przykład 2.20. Wyznaczyć transformaty $G(s)$ funkcji

$$\text{a) } g(t) = e^{-at}, \quad \text{b) } g(t) = e^{-at} \sin \omega t, \quad \text{c) } g(t) = e^{-at} \cosh$$

R o z w i ą z a n i e . Do wyznaczenia transformat ww. funkcji zastosujemy twierdzenie 2.5.1 o przesunięciu zespolonym.

a) Funkcję $g(t) = e^{-at}$ zapisujemy w postaci $g(t) = e^{-at} \cdot I(t)$. Spełnione są założenia twierdzenia 2.5.1 i dla funkcji $f(t) = I(t)$ transformata wynosi

$$F(s) = \frac{1}{s}. \text{ Poniższy schemat przedstawia kolejne etapy uzyskania odpowiedzi:}$$

1. Niech	$g(t) = e^{-at} \cdot I(t)$
2. Stosujemy obustronnie \mathcal{L} -przekształcenie	$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[e^{-at} \cdot I(t)] =$
3. Ze wzoru (2.5.1)	$= F(s+a) =$
4. Na podstawie wniosku 2.5.2 w transformacie $F(s)$ zamieniamy zmienną s na $s+a$	$= \frac{1}{s+a}.$

Zatem ostatecznie (por. wzór 1.3.3) $G(s) = \mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.$

b) Daną funkcję zapiszemy w postaci iloczynu $g(t) = e^{-at} \cdot f(t)$, gdzie funkcja $f(t) = \sin \omega t$ posiada transformatę $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ (patrz wzór (2.1.8)). Postępujemy analogicznie jak w przykładzie a).

1. Do funkcji b) stosujemy obustronnie \mathcal{L} -przekształcenie	$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[e^{-at} \cdot \sin \omega t]$
2. Korzystamy ze wzoru (2.5.1)	$G(s) = F(s+a) =$
3. W transformacie $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ zamieniamy zmienną s na $s+a$	$= \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}.$

Zatem
$$G(s) = \mathcal{L}\left[e^{-at} \cdot \sin \omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.5.3)$$

c) Daną funkcję zapisujemy w postaci $g(t) = e^{-at} \cdot f(t)$, gdzie $f(t) = \cosh \omega t$, a jej transformata, zgodnie ze wzorem (2.1.14), wynosi $F(s) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}$. Postępując według schematu zastosowanego w przykładach a) i b) otrzymamy

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \cdot \cosh \omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2 - \omega^2}. \quad (2.5.4)$$

■

Pozostawiam Czytelnikowi do samodzielnego wyprowadzenia, na podstawie twierdzenia 2.5.1, wzorów

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \cos \omega t\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.5.5)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \sinh \omega t\right] = \frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2} \quad (2.5.6)$$

Uwaga 2.5.2. Na podstawie wniosku 1.4.2 i ze wzoru (1.4.4) zapewniającego jednoznaczność przekształcenia Laplace'a oraz ze wzorów (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) i (2.5.6) otrzymamy wzory na następujące transformaty odwrotne:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = I(t) \cdot e^{-at} \sin \omega t \quad (2.5.7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 - \omega^2}\right] = I(t) \cdot e^{-at} \cosh \omega t \quad (2.5.8)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = I(t) \cdot e^{-at} \cos \omega t \quad (2.5.9)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 - \omega^2}\right] = I(t) \cdot e^{-at} \sinh \omega t \quad (2.5.10)$$

Wniosek 2.5.3.

Transformaty $F(s)$ dane wzorami (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.6) są funkcjami wymiernymi właściwymi. Zaś wzory (2.5.7), (2.5.8), (2.5.9), (2.5.10) pozwalają wyznaczyć oryginały $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ transformat $F(s)$ będących funkcjami wymiernymi (mianownik jest trójmianem kwadratowym w postaci kanonicznej).

Z twierdzenia 2.5.1 będziemy korzystać przy wyznaczaniu transformat odwrotnych (oryginałów) niektórych funkcji zespolonych, a w szczególności przy wyznaczaniu oryginałów ułamków prostych drugiego rodzaju, (4.2.8).

Przykład 2.21. Wyznaczyć transformaty funkcji

$$\text{a) } g_1(t) = e^{-2t} \sin 4t, \quad \text{b) } g_2(t) = e^{3t} \cosh \frac{1}{2}t.$$

R o z w i ą z a n i e . a)

$$1. \text{ Niech} \quad g_1(t) = e^{-2t} \sin 4t \quad (1)$$

$$2. \text{ Do obu stron równości (1) stosujemy } \mathcal{L}\text{-przekształcenie}$$

$$\mathcal{L}[g_1(t)] = \mathcal{L}[e^{-2t} \sin 4t]$$

$$3. \text{ Bezpośrednio ze wzoru (2.5.3) dla } a = 2, \omega = 4$$

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+2)^2 + 4^2} = \frac{4}{s^2 + 4s + 20}$$

$$\text{Zatem} \quad G_1(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 20}.$$

b)

$$1. \text{ Niech} \quad g_2(t) = e^{3t} \cosh \frac{1}{2}t \quad (2)$$

$$2. \text{ Do obu stron równości (2) stosujemy } \mathcal{L}\text{-przekształcenie}$$

$$\mathcal{L}[g_2(t)] = \mathcal{L}\left[e^{3t} \cosh \frac{1}{2}t\right] =$$

$$3. \text{ Stosujemy wzór (2.5.4) dla } a = -3, \omega = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{s-3}{(s-3)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4s-12}{4s^2 - 24s + 35}$$

$$\text{Zatem} \quad G_2(s) = \frac{4s-12}{4s^2 - 24s + 35} \quad (3)$$

U w a g a . Powyższe przykłady a) i b) można również rozwiązać innym sposobem. Jak zauważamy funkcje a) i b) mają postać iloczynu funkcji $f(t)$ przez czynnik $e^{-\alpha t}$, a więc zgodnie z wnioskiem 2.5.2 do wyznaczenia ich

transformaty stosujemy twierdzenie o przesunięciu zespolonym. Porównaj przykład 2.20.

Prześledzimy ten sposób na przykładzie funkcji b). W funkcji $g_2(t)$ przyjmujemy $f(t) = \cosh \frac{1}{2}t$, a czynnik e^{3t} wskazuje, że transformata $F(s)$ ulega przesunięciu o $\alpha = 3$. Ze wzoru (2.1.14) wyznaczamy transformatę $F(s) = \mathcal{L} \left[\cosh \frac{1}{2}t \right] = \frac{4s}{4s^2 - 1}$ i na podstawie tw. o przesunięciu zespolonym ze wzoru (2.5.1) mamy

$$G_2(s) = \mathcal{L} \left[e^{3t} \cdot \cosh \frac{1}{2}t \right] = F(s-3) = \frac{4(s-3)}{4(s-3)^2 - 1} = \frac{4s-12}{4s^2 - 24s + 35},$$

co jest zgodne z wynikiem (3). ■

Przykład 2.22. Wyznaczyć transformatę odwrotną (oryginał) na podstawie znanej transformaty

$$\text{a) } G_1(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}, \quad \text{b) } G_2(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4s - 5}.$$

R o z w i ą z a n i e . Transformaty a) i b) są funkcjami wymiernymi właściwymi, których mianowniki są trójmianami kwadratowymi o wyróżniku $\Delta < 0$. Transformaty odwrotne $g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_1(s)]$, $g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_2(s)]$ funkcji a) i b) wyznaczymy bezpośrednio za wzorów (2.5.7) i (2.5.8) sprowadzając najpierw mianowniki tych funkcji do postaci kanonicznej.

a)

1. Transformatę $G_1(s)$ przedstawiamy w postaci $F(s-1)$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{(s-1)^2 + 4}$$

2. Stosujemy obustronne przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^2 + 4} \right] =$$

3. Równoważnie przekształcamy wyrażenie w nawiasie do postaci wzoru (2.5.7)

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s-1)^2 + 4} \right] =$$

4. Na podstawie wzoru (2.5.7) dla $a = -1$, $\omega = 2$

$$= \frac{1}{2} e^t \sin 2t \cdot I(t)$$

Zatem

$$g_1(t) = \frac{1}{2} e^t \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

b)

1. Transformatę $G_2(s)$ przedstawiamy w postaci

$$G_2(s) = \frac{s+2}{s^2+4s-5} = \frac{s+2}{(s+2)^2-9}$$

2. Stosujemy obustronnie przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[G_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2-3^2}\right] =$$

3. Stosujemy wzór (2.5.8) dla $a=2$, $\omega=3$

$$= e^{-2t} \cdot \cosh 3t \cdot \mathbf{1}(t)$$

Zatem

$$g_2(t) = e^{-2t} \cdot \cosh 3t, \quad t > 0$$

■

Przykład 2.23. Opierając się tylko na znajomości transformaty

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (1)$$

funkcji wykładniczej $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-at}$, gdzie a dowolna liczba zespolona postaci $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\text{Res} > -\text{Re}(a)$, pokażemy jak można łatwo w sposób bezpośredni uzyskać transformaty innych funkcji.

R o z w i ą z a n i e . Przyjmując we wzorze (1) za stałą a określone wartości i po odpowiednich przekształceniach uzyskujemy następujące transformaty:

1° Dla $a=0$ mamy $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$.

2° Dla $a=i\beta$ mamy $\mathcal{L}[e^{-i\beta t}] = \frac{1}{s+i\beta}$, $\text{Res} > 0$.

Dla $a=-i\beta$ mamy $\mathcal{L}[e^{i\beta t}] = \frac{1}{s-i\beta}$, $\text{Res} > 0$.

3° Dodając stronami dwa ostatnie wzory i korzystając z liniowości oraz ze wzorów Eulera (2.1.5) otrzymujemy

$$\mathcal{L}[\cos \beta t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+i\beta} + \frac{1}{s-i\beta} \right) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad \text{Res} > 0,$$

natomiast odejmując stronami otrzymujemy

$$\mathcal{L}[\sin \beta t] = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\beta} - \frac{1}{s+i\beta} \right) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad \text{Res} > 0.$$

4° Z własności liniowości przekształcenia Laplace'a mamy

$$\mathcal{L}[(1 - e^{-at})I(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{1}{s(s+a)}, \quad \text{Res} > \max(0, -\text{Re}a).$$

5° Różniczkując prawą stronę transformaty (1) względem s na podstawie wzoru

$$(2.3.1) \text{ mamy } \mathcal{L}[te^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

6° Przyjmując za $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, a następnie mnożąc przez sprzężenie mianownika i po rozłożeniu na część rzeczywistą i urojoną otrzymamy

$$\mathcal{L}[e^{-(\alpha \pm i\beta)t} I(t)] = \frac{1}{(s+\alpha) \pm i\beta} = \frac{(s+\alpha) \mp i\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \mp \frac{i\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Stąd oraz ze wzorów Eulera $e^{-(\alpha \pm i\beta)t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$, porównując stronami części rzeczywiste i części urojone, dla $\text{Res} > -\alpha$ otrzymamy

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \beta t] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (2.5.11)$$

oraz

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \beta t] = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (2.5.12)$$

(por. wzory 2.5.3 i 2.5.5).

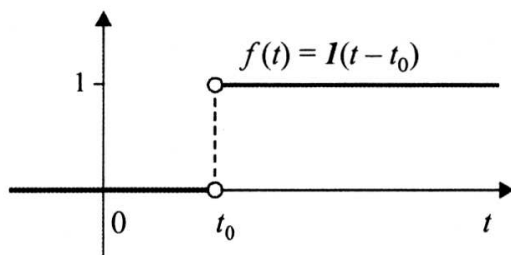
Wniosek. Wśród rodziny funkcji (oryginałów), dla których można w sposób bezpośredni wyznaczyć transformaty Laplace'a opierając się tylko na znajomości jej transformaty, funkcja wykładnicza $f(t) = I(t)e^{-at}$ odgrywa zasadniczą rolę.

2.6. Przesunięcia rzeczywiste

Przesunięcia rzeczywiste są to tzw. przesunięcia w dziedzinie oryginału (lub w dziedzinie czasu). Rozważymy zapis oryginału $f(t)$ w przypadku przesunięcia jego wykresu o pewną wielkość równoległe wzdłuż osi Ot .

Weźmy pod uwagę najpierw przypadek, gdy oryginał jest funkcją $I(t)$ skoku jednostkowego (wzór 1.1.6'). Oznaczmy symbolem $I(t - t_0)$ funkcję jednostkową przesuniętą o wielkość $t_0 > 0$, tj.

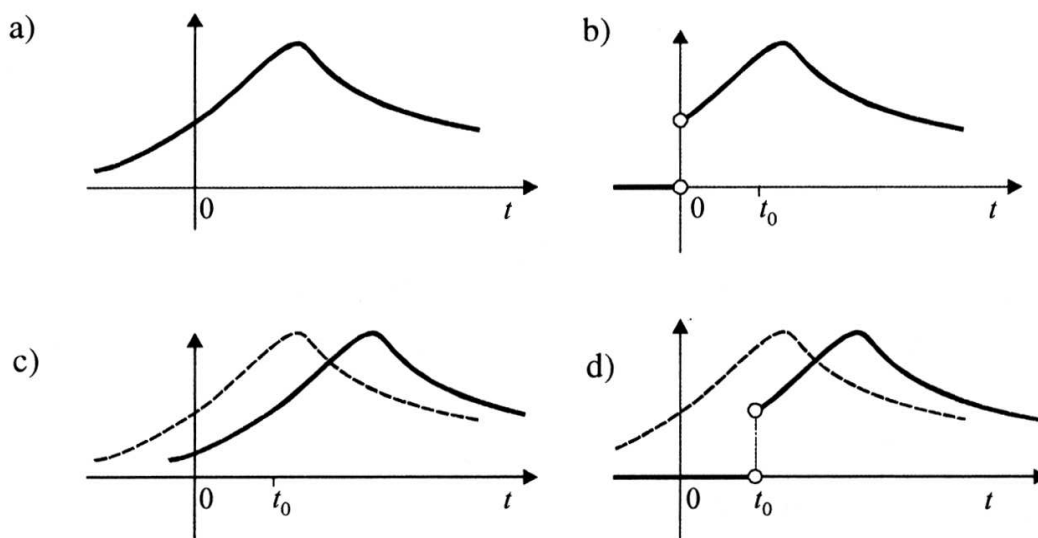
$$I(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ 1 & \text{dla } t > t_0 \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Rys. 2.1. Wykres funkcji jednostkowej (2.6.1) przesuniętej o t_0 jednostek w prawo

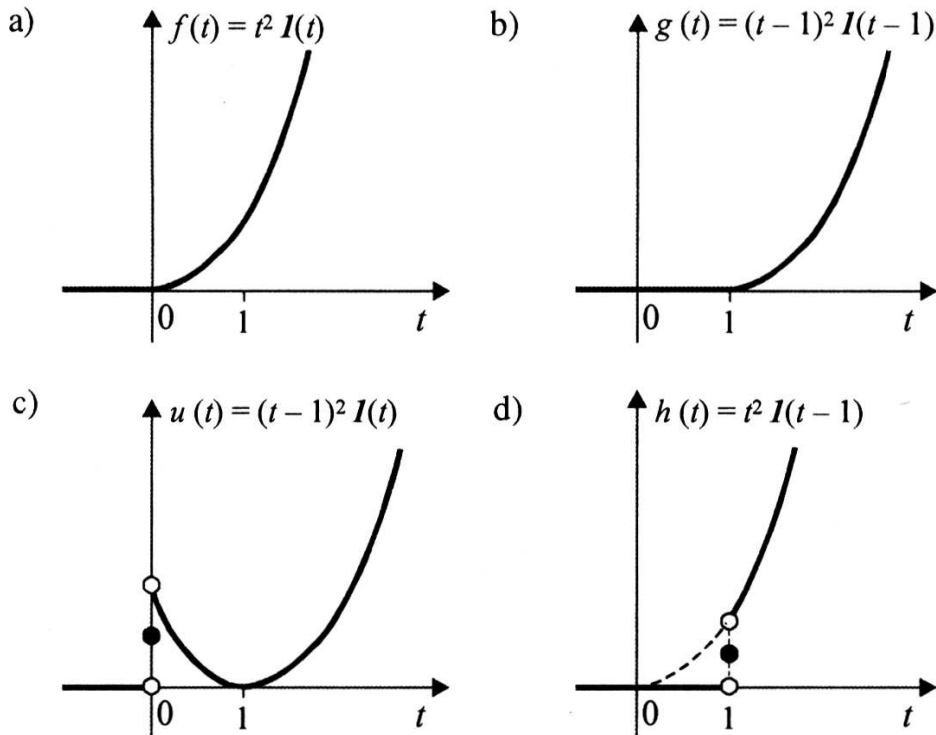
Definicja 2.6.1. Funkcją przesuniętą o wielkość t_0 względem funkcji oryginalnej $f(t)I(t)$ nazywamy funkcję $g(t)$ postaci $f(t - t_0)I(t - t_0)$ zdefiniowaną wzorem

$$g(t) = f(t - t_0)I(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ f(t - t_0) & \text{dla } t > t_0 \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Jest to funkcja, której wykres przesunięto względem funkcji $f(t)$ równoległe wzdłuż osi Ot o t_0 jednostek w prawo i „wygaszono” dla $t < t_0$.

Rys. 2.2. Ilustracja a) pewnej funkcji $f(t)$, b) oryginału $f(t)I(t)$, c) funkcji przesuniętej $f(t - t_0)$ względem funkcji $f(t)$, d) funkcji $f(t - t_0)I(t - t_0)$ przesuniętej względem oryginału $f(t)I(t)$

Uwaga 2.6.1. W praktyce bardzo często w wyrażeniu $f(t)I(t)$ opuszczamy z reguły czynnik $I(t)$, jak również w wyrażeniu $f(t - t_0)I(t - t_0)$ pomijamy czynnik $I(t - t_0)$. Nie wolno jednak opuszczać czynnika $I(t)$ w przypadku funkcji postaci $u(t) = f(t - t_0)I(t)$, jak również w przypadku funkcji postaci $h(t) = f(t)I(t - t_0)$ nie wolno opuszczać czynnika $I(t - t_0)$, co ilustrują wykresy funkcji na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Ilustracja a) oryginału $f(t)=t^2 I(t)$, b) oryginału przesuniętego w myśl wzoru (2.6.2), c) funkcji przesuniętej względem funkcji t^2 o 1 jednostkę w prawo i „wygaszonej” dla $t < 0$, d) funkcji t^2 „wygaszonej” dla $t < 1$

Funkcji zdefiniowanej wzorem (2.6.2) dotyczy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.6.1 (o przesunięciu rzeczywistym). Jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla $t_0 > 0$ i oryginału $g(t) = 1(t-t_0) \cdot f(t-t_0)$ transformata wynosi:

$$G(s) = \mathcal{L}[f(t-t_0)I(t-t_0)] = e^{-st_0} \cdot F(s) \quad (2.6.3)$$

D o w ó d . Z definicji \mathcal{L} -transformaty dla stałej $t_0 > 0$ mamy

$$G(s) = \mathcal{L}[f(t-t_0)I(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t-t_0) dt,$$

bo dla $t < t_0$ funkcja $f(t-t_0)I(t-t_0) = 0$.

Podstawiamy $t-t_0 = u$, stąd $dt = du$ oraz zmieniamy granice całkowania i otrzymujemy

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = \int_0^{\infty} e^{-s(u+t_0)} f(u) du = e^{-st_0} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}[f(t)] = e^{-st_0} F(s).$$

■

Wniosek 2.6.1.

Z jednoznaczności odwrotnego przekształcenia Laplace'a i wzoru (2.6.3) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_0} \cdot F(s)] = f(t-t_0)I(t-t_0) = g(t) \quad (2.6.4)$$

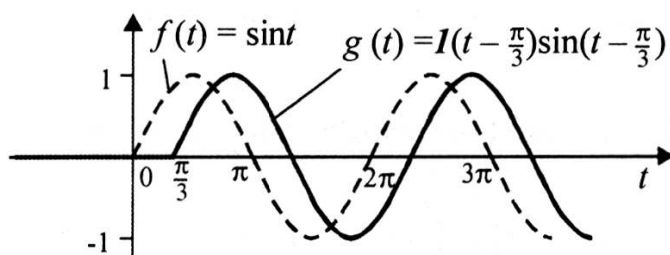
Wniosek 2.6.2.

Przesunięcie funkcji określonej wzorem $f(t)I(t)$ o wielkość $t_0 > 0$ powoduje pomnożenie jej transformaty przez czynnik e^{-t_0s} .

Powyższe twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym nazywamy również *twierdzeniem z opóźnieniem*, ponieważ, jeżeli funkcja $f(t)I(t)$ opisuje pewne prawo zależne od czasu t , to wtedy funkcja $f(t-t_0)I(t-t_0)$ opisuje to samo prawo lecz działające o t_0 później [5, 9, 13].

Uwaga 2.6.2. Zamiast wzoru (2.6.3) piszemy zwykle $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} \cdot F(s)$ pomijając czynnik $I(t-t_0)$. Należy jednak pamiętać, że we wzorze (2.6.4), tj. $\mathcal{L}^{-1}[e^{-st_0} \cdot F(s)] = f(t-t_0)I(t-t_0)$ czynnik $I(t-t_0)$ powinien być obecny, tzn., że funkcja $f(t-t_0)$ dla $t < t_0$ ma przyjmować wartość zero. Na przykład, jeżeli obraz $G(s) = e^{-\frac{\pi}{3}s} \frac{1}{s^2+1}$, to jego oryginałem jest

$g(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$ dla $t \geq \frac{\pi}{3}$ oraz $g(t) = 0$ dla $t < \frac{\pi}{3}$, rys. 2.4.



Rys. 2.4

Uwaga 2.6.3. Wzór (2.6.4) stosowany przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej należy rozumieć następująco: aby znaleźć oryginał funkcji $G(s) = e^{-st_0} \cdot F(s)$ należy najpierw wyznaczyć oryginał $f(t)$ funkcji $F(s)$, a następnie utworzyć funkcję przesuniętą: $g(t) = f(t-t_0)I(t-t_0)$, gdzie $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-st_0} \cdot F(s)]$ jest szukanym oryginałem.

Wniosek 2.6.3. Opierając się na twierdzeniu o podobieństwie i przesunięciu rzeczywistym można wyprowadzić wzór na transformatę funkcji

$$\varphi(t) = f(at - \tau_0) \quad (2.6.5)$$

rozumianej jako przesunięcie funkcji zdefiniowanej wzorem (2.6.2), gdzie $a > 0$, $\tau_0 > 0$. W tym celu funkcję tę zapisujemy w postaci

$$f(at - \tau_0) = f\left(a\left(t - \frac{\tau_0}{a}\right)\right) \cdot \mathbb{1}\left(t - \frac{\tau_0}{a}\right) \quad (2.6.6)$$

i rozumiemy, że wykres tej funkcji powstał z wykresu funkcji $f(at)$ w wyniku przesunięcia o $t_0 = \frac{\tau_0}{a}$ jednostek w prawo i „wygaszony” dla $t < \frac{\tau_0}{a}$.

Zatem mamy następujący wniosek.

Wniosek 2.6.4.

Jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to

$$\mathcal{L}[f(at - \tau_0)] = \mathcal{L}\left[f\left(a\left(t - \frac{\tau_0}{a}\right)\right)\right] = e^{-\frac{\tau_0}{a}s} \cdot \mathcal{L}[f(at)] \quad (2.6.7)$$

lub w równoważnej postaci

$$\mathcal{L}[f(at - \tau_0)] = \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{\tau_0}{a}s} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.6.8)$$

Twierdzenie 2.6.2.

Jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}[f(t + t_0) \mathbf{1}(t)] = e^{t_0 s} \left[F(s) - \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt \right] \quad (2.6.9)$$

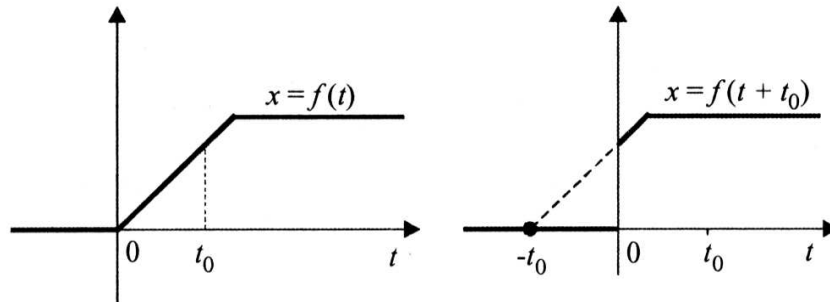
D o w ó d . Stosując podstawienie $t + t_0 = u$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t + t_0)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t + t_0) dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-s(u-t_0)} f(u) du = \\ &= e^{st_0} \int_{t_0}^{+\infty} e^{-su} f(u) du = e^{st_0} \left[\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du - \int_0^{t_0} e^{-su} f(u) du \right], \end{aligned}$$

a stąd otrzymujemy (2.6.9). ■

Uwaga 2.6.4. Wykres oryginału $x = f(t + t_0)$ otrzymujemy przesuwając wykres oryginału $x = f(t)$ w lewo, równoległe do osi Ot o odcinek t_0 (rys. 2.5).

Twierdzenie 2.6.2 nosi również nazwę *twierdzenia o wyprzedzaniu (o przyspieszaniu)*. Stosuje się je przy rozwiązywaniu równań różniczkowych i różnicowych, w których występują funkcje $f(t)$ i $f(t + t_0)$, $f(t + 2t_0)$, ... [1, 5, 13].



Rys. 2.5. Wykres oryginału przesuniętego w lewo o wielkość t_0 względem oryginału $f(t)$ $I(t)$

Przykład 2.24. Wyznaczyć transformaty $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ dla oryginałów:

$$\text{a) } g(t) = I(t - t_0) \quad , \quad t_0 > 0; \quad \text{b) } g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot I\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$

R o z w i ą z a n i e .

a) Funkcja $g(t) = I(t - t_0)$ zdefiniowana jest wzorem (2.6.1) i wykres jej przedstawiono na rys. 2.1.

1. Dany jest oryginał

$$g(t) = I(t - t_0)$$

2. Do obu stron stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[I(t - t_0)] =$$

3. Stosujemy wzór (2.6.3) do $f(t) = I(t)$

$$= e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}[I(t)] =$$

4. Korzystamy z faktu, że $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}$

$$= e^{-st_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} e^{-st_0}.$$

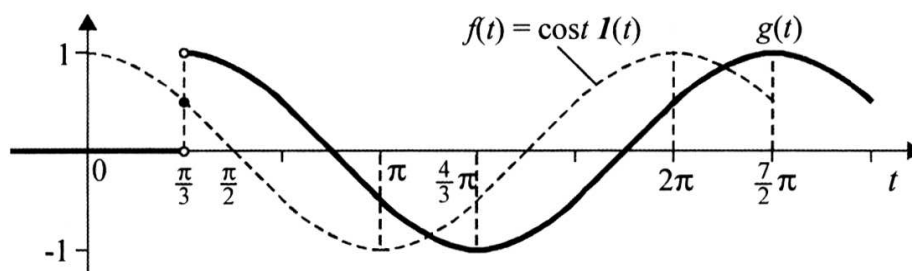
Zatem szukana transformata wyraża się wzorem

$$G(s) = \mathcal{L}[I(t - t_0)] = \frac{1}{s} e^{-st_0} \quad (1)$$

W szczególności, jeśli $g(t) = I(t - 1)$, to ze wzoru (1) dla $t_0 = 1$ mamy:

$$G(s) = \mathcal{L}[I(t - 1)] = \frac{1}{s} e^{-s} \quad (2)$$

b)



Rys. 2.6. Wykres oryginału $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot I\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

1. Dany jest oryginał

$$g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot I\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

2. Do obu stron stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot I\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

3. Stosujemy wzór (2.6.3)

$$\text{dla } t_0 = \frac{\pi}{3} \text{ i } f(t) = \cos t$$

$$= e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \mathcal{L}[\cos t] =$$

4. Z faktu, że $\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$

$$= e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

Szukana transformata wyraża się wzorem

$$G(s) = e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \quad (3)$$

■

Przykład 2.25. Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji

$$\text{a) } g(t) = (t-1)^2 I(t-1), \quad \text{b) } u(t) = (t-1)^2 I(t), \quad \text{c) } h(t) = t^2 I(t-1)$$

których wykresy przedstawiono na rysunku 2.3.

R o z w i ą z a n i e . Przy wyznaczaniu transformat wyżej wymienionych funkcji uwzględnimy uwagę 2.6.1.

a) Wyznaczamy transformatę $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

1. Niech

$$g(t) = (t-1)^2 I(t-1) \quad (1)$$

2. Do obu stron (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[(t-1)^2 I(t-1)] =$$

3. Stosujemy twierdzenie 2.6.1 dla $t_0 = 1$ i $f(t) = t^2$ oraz wzór (1.3.7) $= e^{-s} \cdot \mathcal{L}[t^2] = e^{-s} \cdot \frac{2}{s^3}$

Mamy więc

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{s^3} \quad (2)$$

b) Wyznaczamy transformatę $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$.

1. Funkcję $u(t)$ przedstawiamy w postaci $u(t) = t^2 I(t) - 2t \cdot I(t) + I(t)$ (3)
2. Do obu stron (3) stosujemy przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[t^2 I(t) - 2t \cdot I(t) + I(t)] =$
3. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia (wzór 2.1.3) $= \mathcal{L}[t^2] - 2\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1] =$
4. Stosujemy kolejno wzory (1.3.7), (1.3.6), (1.3.1) i przekształcamy $= \frac{2}{s^3} - 2\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^3}$.

Szukana transformata wyraża się wzorem

$$U(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^3}$$

c) Wyznaczamy transformatę $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$.

Do funkcji $h(t) = t^2 \cdot I(t-1)$ nie można stosować twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym, ponieważ nie jest to funkcja przesunięta w sensie definicji danej wzorem (2.6.2) (por. uwaga 2.6.1). Aby wyznaczyć transformatę tej funkcji możemy na przykład zastosować twierdzenie o różniczkowaniu transformaty (wzór 2.3.2), które zastosowane do naszego przykładu orzeka, że: „transformata oryginału $f(t)$ pomnożonego przez t^2 równa się drugiej pochodnej transformaty tej funkcji”, tj. przyjmując $h(t) = t^2 \cdot f(t)$, gdzie $f(t) = I(t-1)$ otrzymamy:

$$\mathcal{L}[t^2 \cdot f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} (\mathcal{L}[f(t)]) \quad (4)$$

1. Niech $h(t) = t^2 \cdot I(t-1)$
2. Do obu stron stosujemy przekształcenie Laplace'a $\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[t^2 \cdot I(t-1)] =$

3. Stosujemy wzór (4) do funkcji $f(t) = I(t-1)$ $= \frac{d^2}{ds^2} (\mathcal{L}[I(t-1)]) =$
4. Korzystamy z wyniku (2) przykładu 2.24a $= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s} \cdot e^{-s} \right) =$
5. Dwukrotnie różniczkujemy względem zmiennej s $= -\frac{d}{ds} \left(\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \cdot e^{-s} \right) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3} e^{-s}.$

Ostatecznie szukana transformata wyraża się wzorem:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^3} e^{-s} \quad (5)$$

U w a g a . Transformatę funkcji $h(t)$ można wyznaczyć innym sposobem. Zauważmy, że funkcję $h(t)$ można łatwo przekształcić w sposób równoważny do postaci wymaganej przy stosowaniu twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym. W tym celu funkcję kwadratową t^2 przedstawiamy w postaci potęg dwumianu $(t-1)$, tzn.

$$t^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1 \quad (6)$$

(Jest to dobrze znane rozwinięcie Taylora funkcji t^2 w otoczeniu punktu $t_0 = 1$).

Uwzględniając rozwinięcie (6), funkcja $h(t)$ przyjmuje postać

$$h(t) = t^2 \cdot I(t-1) = (t-1)^2 \cdot I(t-1) + 2(t-1) \cdot I(t-1) + I(t-1) \quad (7)$$

Do obu stron tożsamości (7) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h(t)] &= \mathcal{L}[t^2 \cdot I(t-1)] = \mathcal{L}[(t-1)^2 \cdot I(t-1) + 2(t-1) \cdot I(t-1) + I(t-1)] = \\ &= \mathcal{L}[(t-1)^2 \cdot I(t-1)] + 2 \cdot \mathcal{L}[(t-1) \cdot I(t-1)] + \mathcal{L}[I(t-1)]. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym ze wzoru (2.6.3) zastosowanego kolejno do funkcji t^2 , t oraz $I(t)$, a następnie korzystając z faktu, że

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}[t^2 \cdot I(t-1)] = e^{-s} \cdot \mathcal{L}[t^2] + 2e^{-s} \cdot \mathcal{L}[t] + e^{-s} \cdot \mathcal{L}[1] = \\ &= \frac{2}{s^3} e^{-s} + \frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-s}, \end{aligned}$$

co jest zgodne z wynikiem danym wzorem (5).

(W rozwiązaniu można wykorzystać wcześniej uzyskane wyniki z przykładu 2.25 wzór (2) i z przykładu 2.24 wzór (2)).

■

Przykład 2.26. Wyznaczyć transformaty następujących funkcji (oryginałów)

a) $f_1(t) = \sin(t - \alpha)I(t - \alpha)$, $\alpha > 0$ b) $f_2(t) = \sin(t - \alpha)I(t)$, $\alpha > 0$

c) $f_3(t) = \sin t \cdot I(t - \alpha)$, $\alpha > 0$ d) $f_4(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > \pi \end{cases}$

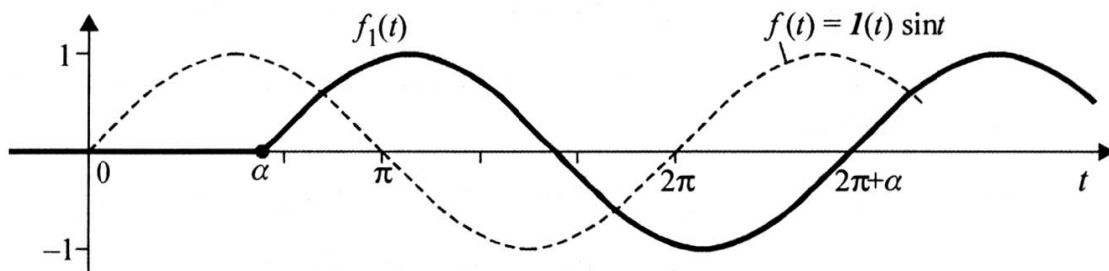
R o z w i ą z a n i e .

a) Wyznaczamy transformatę $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$.

Funkcja $f_1(t)$, której wykres zilustrowano na rysunku 2.7 jest funkcją przesuniętą w sensie definicji 2.6.1 i jest postaci (2.6.2), tzn. jej wykres powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(t) = I(t) \cdot \sin t$ o wielkość $t_0 = \alpha$ ($\alpha > 0$) w prawo wzdłuż osi Ot . Zatem bezpośrednio ze wzoru (2.6.3)

i uwzględniając, że $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$ mamy

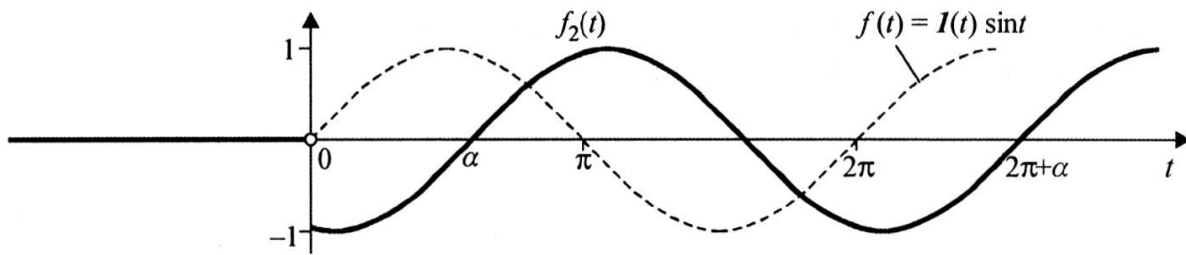
$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[\sin(t - \alpha)I(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} \cdot \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\alpha s} \quad (1)$$



Rys. 2.7. Wykres funkcji $f_1(t) = \sin(t - \alpha)I(t - \alpha)$

b) Wyznaczamy transformatę $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$.

Do funkcji $f_2(t) = \sin(t - \alpha)I(t)$, której wykres zilustrowano na rys. 2.8 nie można stosować twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym. Wykres tej funkcji powstał z wykresu sinusoidy przesuniętej o wielkość $t_0 = \alpha$, a następnie „wygaszony” dla $t < 0$, a więc nie jest to funkcja przesunięta w myśl wzoru (2.6.2).

Rys. 2.8. Wykres funkcji $f_2(t) = \sin(t - \alpha) I(t)$

Aby wyznaczyć transformatę tej funkcji możemy zastosować wzór na sinus różnicy dwóch kątów: $\sin(t - \alpha) = \sin t \cos \alpha - \cos t \sin \alpha$ i wtedy funkcja $f_2(t)$ przyjmuje postać

$$f_2(t) = \sin(t - \alpha) \cdot I(t) = (\cos \alpha \sin t - \sin \alpha \cos t) \cdot I(t) \quad (2)$$

Do obu stron tożsamości (2) stosujemy przekształcenie Laplace'a (czynniki $I(t)$ pomijamy zgodnie z wcześniejszą umową)

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[\sin(t - \alpha)] = \mathcal{L}[(\cos \alpha \sin t - \sin \alpha \cos t)]$$

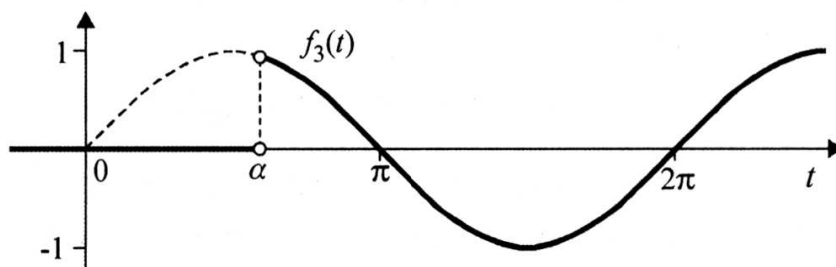
Następnie korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia (wzór 2.1.1) oraz ze wzorów (1.3.4) i (1.3.5) lub z tablic transformat i otrzymujemy

$$F_2(s) = \cos \alpha \cdot \mathcal{L}[\sin t] - \sin \alpha \cdot \mathcal{L}[\cos t] = \frac{1}{s^2 + 1} (\cos \alpha - s \cdot \sin \alpha) \quad (3)$$

c) Szukamy transformaty $F_3(s) = \mathcal{L}[f_3(t)]$ funkcji $f_3(t)$, którą można zapisać w postaci

$$f_3(t) = \sin t \cdot I(t - \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < \alpha \\ \sin t & \text{dla } t > \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Wykresem tej funkcji jest sinusoida $\sin t$ „wygaszona” dla $t < \alpha$ (rys. 2.9).

Rys. 2.9. Wykres funkcji $f_3(t) = \sin t \cdot I(t - \alpha)$

Transformatę tej funkcji możemy wyznaczyć bezpośrednio z definicji 1.2.3 transformaty Laplace'a i wtedy ze wzoru (1.2.3) mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_3(t)] &= \mathcal{L}[\sin t \cdot I(t - \alpha)] = \int_{\alpha}^{\infty} \sin t e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt - \int_0^{\alpha} \sin t e^{-st} dt = \mathcal{L}[\sin t] - \int_0^{\alpha} \sin t e^{-st} dt\end{aligned}\quad (5)$$

Z wyników podrozdziału 1.3.3 mamy $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$ oraz

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha} e^{-st} \sin t dt &= -\frac{1}{s^2 + 1} \left[s e^{-st} \sin t + e^{-st} \cos t \right]_0^{\alpha} = \\ &= \frac{-1}{s^2 + 1} (s e^{-s\alpha} \sin \alpha + e^{-s\alpha} \cos \alpha - 1).\end{aligned}\quad (6)$$

Uwzględniając powyższe wyniki w zależności (5) otrzymamy ostatecznie

$$F_3(s) = \frac{(s \cdot \sin \alpha + \cos \alpha)}{s^2 + 1} \cdot e^{-\alpha s} \quad (7)$$

D r u g i s p o s ó b wyznaczania transformaty funkcji $f_3(t)$:

Funkcję $f_3(t)$ przekształcamy do takiej postaci, aby można było zastosować twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym. W tym celu, korzystając ze wzoru na sinus sumy dwóch kątów, funkcję $\sin t$ zapisujemy w postaci

$$\sin t = \sin((t - \alpha) + \alpha) = \cos \alpha \cdot \sin(t - \alpha) + \sin \alpha \cdot \cos(t - \alpha) \quad (8)$$

Uwzględniając związek (8) funkcja $f_3(t)$ przyjmie postać

$$f_3(t) = \sin t \cdot I(t - \alpha) = \cos \alpha \cdot \sin(t - \alpha) \cdot I(t - \alpha) + \sin \alpha \cdot \cos(t - \alpha) \cdot I(t - \alpha) \quad (9)$$

Stosując do obu stron wzoru (9) przekształcenie Laplace'a oraz korzystając z jego liniowości otrzymujemy

$$\mathcal{L}[f_3(t)] = \cos \alpha \cdot \mathcal{L}[\sin(t - \alpha)] + \sin \alpha \cdot \mathcal{L}[\cos(t - \alpha)]$$

(zgodnie z uwagą 2.6.2 opuściliśmy czynnik $I(t - \alpha)$). Następnie korzystamy z twierdzenia 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym i na mocy wzoru (2.6.3), zastosowanego kolejno do funkcji $\sin t$, a następnie do $\cos t$ oraz ze wzorów (1.3.4) i (1.3.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 F_3(s) &= \cos \alpha \cdot e^{-\alpha s} \cdot \mathcal{L}[\sin t] + \sin \alpha \cdot e^{-\alpha s} \cdot \mathcal{L}[\cos t] = \\
 &= e^{-\alpha s} \cdot \cos \alpha \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\alpha s} \cdot \sin \alpha \frac{s}{s^2 + 1}
 \end{aligned} \tag{10}$$

co jest zgodne z odpowiedzią daną wzorem (7).

U w a g a . Transformatę $\mathcal{L}[\sin(t - \alpha)]$ wyznaczyliśmy w przykładzie a).

d) Wyznaczamy transformatę $F_4(s) = \mathcal{L}[f_4(t)]$.

P i e r w s z y s p o s ó b wyznaczenia transformaty funkcji $f_4(t)$

Bezpośrednio z definicji \mathcal{L} -transformaty ze wzoru (1.2.3) całkując dwukrotnie przez części mamy

$$F_4(s) = \mathcal{L}[f_4(t)] = \int_0^{\infty} f_4(t) e^{-st} dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt = \frac{e^{-st}}{s^2 + 1} [(-s \cdot \sin t - \cos t)]_{t=0}^{t=\pi} .$$

Po podstawieniu granic i przekształceniach ostatecznie otrzymamy

$$F_4(s) = \frac{1}{s^2 + 1} (1 + e^{-\pi s}) \tag{11}$$

U w a g a . Przy obliczaniu powyższej całki można skorzystać z zależności (6) przyjmując $\alpha = \pi$.

D r u g i s p o s ó b wyznaczenia transformaty funkcji $f_4(t)$

Zauważmy, że funkcję $f_4(t)$ można przedstawić w postaci wygodnej do wyznaczenia transformaty tej funkcji wykorzystując twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym. Otóż wykres funkcji $f_4(t)$ jest sumą sinusoidy pierwotnej $f(t) = \sin t \cdot I(t)$ i sinusoidy $g(t) = \sin(t - \pi) \cdot I(t - \pi)$ przesuniętej o $t_0 = \pi$, rys. 2.10.

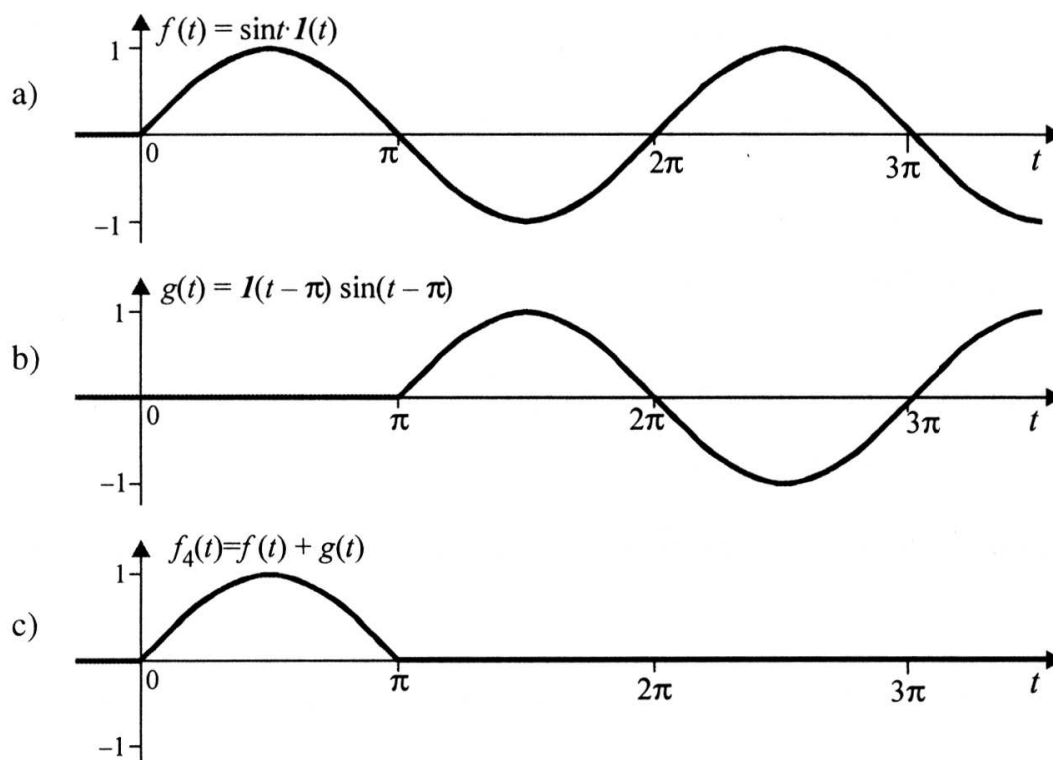
Zatem funkcję $f_4(t)$ można przedstawić wzorem

$$f_4(t) = \sin t \cdot I(t) + \sin(t - \pi) \cdot I(t - \pi) \tag{12}$$

Do obu stron równości (12) stosujemy przekształcenie Laplace'a, a następnie korzystając z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia oraz ze wzoru (2.6.3) otrzymamy:

$$F_4(s) = \mathcal{L}[f_4(t)] = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin(t - \pi)] = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\pi s} ,$$

co jest zgodne z wynikiem (11).



Rys. 2.10. a) wykres oryginału $f(t) = I(t) \sin t$, b) wykres oryginału przesuniętego $g(t) = I(t - \pi) \sin(t - \pi)$, c) wykres $f_4(t) = f(t) + g(t)$

Przykład 2.27. Wyznaczyć transformaty funkcji:

$$\text{a) } f_1(t) = \cos(2t - \pi), \quad \text{b) } f_2(t) = (2t - 3)^3.$$

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że obie funkcje a) i b) są funkcjami przesuniętymi w dziedzinie rzeczywistej postaci określonej wzorem (2.6.5). Zgodnie z wnioskiem 2.6.3 przekształcamy je najpierw do postaci danej wzorem (2.6.6), a dopiero potem zastosujemy przekształcenie Laplace'a w celu wyznaczenia ich transformat.

a) Wyznaczamy transformatę $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$.

Zgodnie z powyższym funkcję $f_1(t)$ przedstawiamy wzorem

$$f_1(t) = \cos(2t - \pi) = \cos 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \cdot 1 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1)$$

1. Do obu stron (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[\cos(2t - \pi)] =$$

2. Stosujemy wzór (2.6.3), dla

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \text{ i funkcji } f(t) = \cos 2t$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \mathcal{L}[\cos 2t] =$$

3. Stosujemy wzór (2.1.9) dla $a=2$
$$= e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

Szukana transformata wyraża się wzorem

$$F_1(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (2)$$

b) Analogicznie jak poprzednio wyznaczamy transformatę $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$. Najpierw funkcję $f_2(t)$ przekształcamy w sposób równoważny do postaci określonej wzorem (2.6.6). W wyniku otrzymamy

$$f_2(t) = (2t - 3)^3 = \left[2 \left(t - \frac{3}{2} \right) \right]^3 = 8 \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^3 \cdot I \left(t - \frac{3}{2} \right) \quad (3)$$

1. Do obu stron (3) stosujemy przekształcenie Laplace'a
$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L} \left[8 \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^3 \right] =$$

2. Korzystamy z jednorodności \mathcal{L} -przekształcenia
$$= 8 \cdot \mathcal{L} \left[\left(t - \frac{3}{2} \right)^3 \right] =$$

3. Stosujemy twierdzenie 2.6.1, dla $t_0 = \frac{3}{2}$ i $f(t) = t^3$ oraz wzór (1.3.8)
$$= 8 \cdot e^{-\frac{3}{2}s} \cdot \mathcal{L}[t^3] = 8 \cdot e^{-\frac{3}{2}s} \cdot \frac{6}{s^4}$$

Ostatecznie szukana transformata wyraża się wzorem

$$F_2(s) = 48 \frac{e^{-\frac{3}{2}s}}{s^4} \quad (4)$$

U w a g a . Jeśli do wyznaczania transformaty funkcji postaci (2.6.5), tj. $\varphi(t) = (at - \tau_0)$ chcemy bezpośrednio zastosować wzór (2.6.8) z wniosku 2.6.2, to należy zwrócić baczną uwagę na umiejętne zastosowanie tego wzoru. Szczególnie jest to ważne, gdy do wyznaczania transformat korzystamy z tablic.

Zaprezentujemy ten sposób wyznaczania transformaty na przykładzie a).

Mamy wyznaczyć $\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[\cos(2t - \pi)]$, gdzie $\tau_0 = \pi$, $a = 2$ i funkcja $f(t) = \cos t$. Bezpośrednio ze wzoru (2.6.8) mamy

$$F_1(s) = \mathcal{L}[\cos(2t - \pi)] = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot F\left(\frac{s}{2}\right) \quad (5)$$

gdzie F oznacza transformatę funkcji $\cos t$, tj.

$$F(p) = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1} \quad (p - \text{zmienna zespolona}) \quad (6)$$

Podstawiamy w transformacie (6) za zmienną p zmienną $\frac{s}{2}$ (por. przykład 2.19), następnie uwzględniamy ten wynik w (5) i otrzymujemy

$$F_1(s) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{s}{s^2 + 4},$$

co jest zgodne z wynikiem (2). ■

Przykład 2.28. Stosując twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym wyznaczyć oryginały $g(t)$ na podstawie znanej transformaty (obrazu)

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\frac{\pi}{4}s}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-3s}.$$

R o z w i ą z a n i e . Zauważamy, że transformata $G(s)$ jest w postaci iloczynu funkcji wymiernej i funkcji wykładniczej, co wskazuje, że jest to transformata pewnej funkcji $f(t)$ przesuniętej o wielkość t_0 i do wyznaczenia transformaty odwrotnej $g(t)$ zastosujemy wniosek 2.6.1 z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym, tj. wzór (2.6.4).

a) Szukamy transformaty odwrotnej $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$. W tym celu transformatę $G(s)$ zapisujemy w postaci iloczynu

$$G(s) = F(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{4}s} \quad \text{i oznaczamy} \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Stosując się do uwagi 2.6.3 wyznaczamy najpierw transformatę odwrotną funkcji $F(s)$, tj.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = I(t) \cdot \sin t \quad (1)$$

Występujący we wzorze transformaty $G(s)$ czynnik $e^{-\frac{\pi}{4}s}$ wskazuje, że należy oryginał $f(t)$ przesunąć o wielkość $t_0 = \frac{\pi}{4}$, tzn. w funkcji pomocniczej (1)

w miejsce zmiennej t podstawiamy $\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$. Zatem na podstawie wzoru (2.6.4)

mamy

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}s}\right] = f\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2)$$

gdzie funkcja f określona jest wzorem (1). Zatem uwzględniając (1) w zależności (2) otrzymamy

$$g(t) = \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Postępując analogicznie jak w przykładzie a) wyznaczamy transformatę odwrotną $g(t)$ dla funkcji b). Najpierw transformatę $G(s)$ zapisujemy w postaci iloczynu

$$G(s) = F(s) \cdot e^{-3s}, \quad \text{gdzie} \quad F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Z przykładu 2.16 wiemy, że transformata odwrotna funkcji $F(s)$ wynosi

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right] = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}(t) \cdot t^2 e^{-t} \quad (3)$$

(jest to funkcja pomocnicza), zaś czynnik e^{-3s} wskazuje przesunięcie oryginału $f(t)$ o wielkość $t_0 = 3$. Zatem wykonując przekształcenie odwrotne Laplace'a do funkcji $G(s)$ i korzystając ze wzoru (2.6.4) otrzymamy

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3} e^{-3s}\right] = f(t-3) \cdot \mathbf{I}(t-3), \quad (4)$$

gdzie funkcja $f(t)$ określona jest wzorem (3). Uwzględniając funkcję (3) w zależności (4) i podstawiając zamiast t zmienną $(t-3)$ otrzymamy wzór szukanej transformaty odwrotnej $g(t)$. Zatem szukany oryginałem dla danej transformaty jest funkcja

$$g(t) = \frac{1}{2} \cdot I(t-3)(t-3)^2 \cdot e^{-(t-3)}, \quad t \in R \quad (5)$$

■

Przykład 2.29. Wyznaczyć transformatę oryginału

$$g(t) = I(t) \sin(t + \alpha), \quad \text{gdzie } \alpha > 0.$$

R o z w i ą z a n i e . Zgodnie z uwagą 2.6.4 wykres oryginału $g(t)$ otrzymamy przesuwając wykres oryginału $f(t) = I(t) \sin t$ o α jednostek w lewo wzdłuż osi Ot i „wygasimy” go dla $t < 0$. Korzystając ze wzoru (2.6.9) mamy

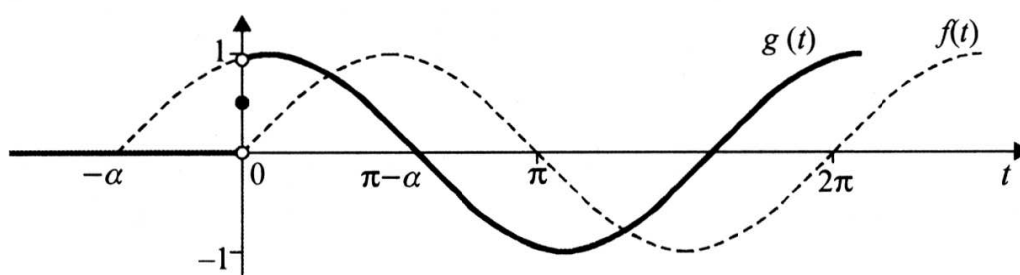
$$\mathcal{L}[\sin(t + \alpha)] = e^{\alpha s} \cdot \left(\mathcal{L}[\sin t] - \int_0^{\alpha} e^{-st} \sin t dt \right).$$

Uwzględniając następnie wartość całki

$$\int_0^{\alpha} e^{-st} \sin t dt = \left[-\frac{se^{-st} \sin t + e^{-st} \cos t}{s^2 + 1} \right]_0^{\alpha} = -\frac{1}{s^2 + 1} (se^{-s\alpha} \sin \alpha + e^{-s\alpha} \cos \alpha - 1)$$

(por. przykład 2.26 c – wzór 6), otrzymujemy

$$\mathcal{L}[\sin(t + \alpha)] = \frac{e^{-\alpha s}}{s^2 + 1} (s \sin \alpha + \cos \alpha).$$



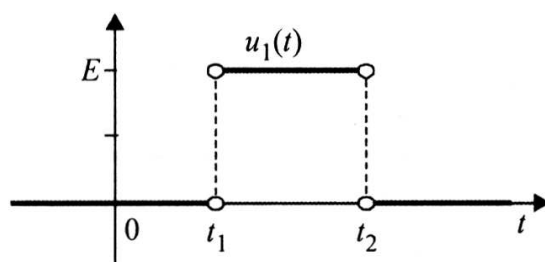
Rys. 2.11. Wykres oryginału $g(t) = I(t) \sin(t + \alpha)$, $\alpha > 0$

U w a g a . Zadanie to można rozwiązać innym sposobem. Otóż do funkcji $\sin(t + \alpha)$ można zastosować wzór na sinus dwóch kątów i do uzyskanej tożsamości zastosować przekształcenie Laplace'a. Proponuję Czytelnikowi rozwiązać to zadanie tym sposobem.

■

Przy pomocy funkcji jednostkowej $I(t)$ i funkcji jednostkowej $I(t - t_0)$ przesuniętej o t_0 możemy w różny sposób określać cały szereg innych funkcji. Stosując następnie twierdzenie 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym w łatwy sposób można wyznaczyć transformaty tych funkcji. Pokażemy na przykładach jak uzyskiwać takie funkcje i wyznaczać ich transformaty.

Przykład 2.30. Wyznaczyć transformatę impulsu prostokątnego $u_1(t)$ o amplitudzie E i czasie trwania w przedziale czasu (t_1, t_2) , (rys. 2.12)



Rys. 2.12. Ilustracja impulsu prostokątnego przedstawiającego napięcie o wartości $u_1(t)$

R o z w i ą z a n i e . Omawiany impuls prostokątny zapisujemy wzorem

$$u_1(t) = \begin{cases} E & \text{dla } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{dla } t < t_1 \text{ lub } t > t_2 \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Funkcja $u_1(t)$ ma dwa punkty nieciągłości w momencie $t = t_1$ i $t = t_2$ (w tych momentach następuje gwałtowna zmiana amplitud).

P i e r w s z y s p o s ó b wyznaczania transformaty. Transformatę tej funkcji wyznaczamy bezpośrednio z definicji 1.2.3 \mathcal{L} -transformaty. Zatem na podstawie wzoru (1.2.3) mamy

$$U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)] = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-st} dt = \int_{t_1}^{t_2} E e^{-st} dt = \frac{E}{s} (e^{-st_1} - e^{-st_2})$$

i ostatecznie

$$U_1(s) = \frac{E}{s} (e^{-st_1} - e^{-st_2}) \quad (2.6.11)$$

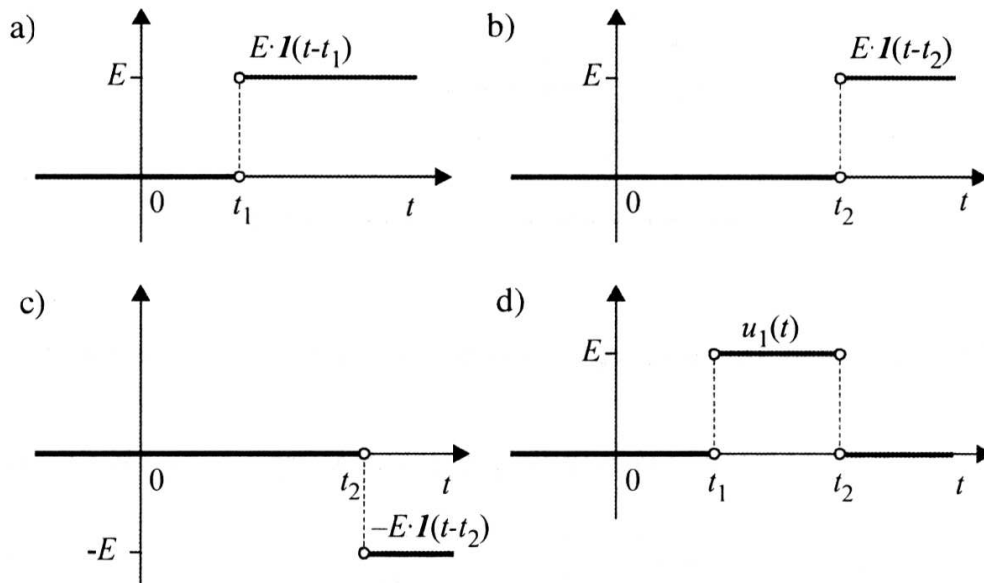
D r u g i s p o s ó b . Korzystając z funkcji jednostkowej i jej przesunięć w dziedzinie czasu funkcję $u_1(t)$ można zapisać w postaci

$$u_1(t) = E \cdot [I(t - t_1) - I(t - t_2)] \quad (2.6.12)$$

Do obu stron równości (2.6.12) stosujemy przekształcenie Laplace'a, a następnie korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia (wzór 2.1.1) oraz ze wzoru (2.6.3) i otrzymujemy

$$U_1(s) = E \cdot (\mathcal{L}[I(t-t_1)] - \mathcal{L}[I(t-t_2)]) = E \left(\frac{1}{s} e^{-t_1 s} - \frac{1}{s} e^{-t_2 s} \right),$$

co jest zgodne z wynikiem określonym wzorem (2.6.11).



Rys. 2.13. Ilustracja kolejnych etapów dochodzenia do postaci (2.6.12) funkcji $u_1(t)$ danej wzorem (2.6.10) mającej wykres podany na rysunku 2.12

Przesunięta funkcja $I(t-t_0)$ skoku jednostkowego $I(t)$ dana wzorem (2.6.2) oraz funkcja postaci (2.6.12) tzw. „funkcja impulsu prostokątnego” mają duże znaczenie w rachunku operatorowym jako tzw. „funkcje wydzielające”, pozwalające usunąć „niepożądane” okresy przebiegu dowolnej funkcji $f(t)$.

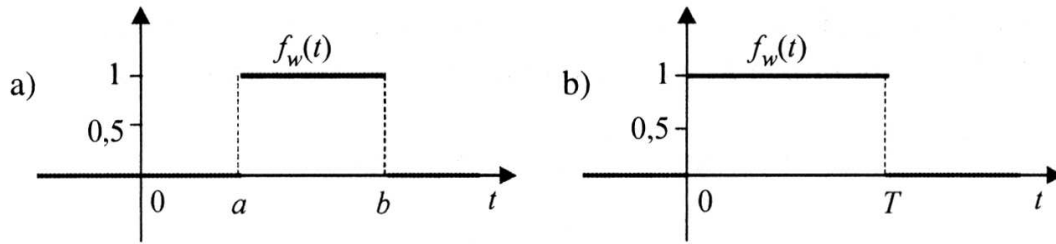
Niech zatem funkcja

$$f_w(t) = I(t-a) - I(t-b), \quad (a < b), \quad (0 \leq a < b) \quad (2.6.13)$$

określa funkcję wydzielającą na przedziale o końcach $t_1 = a$ i $t_2 = b$ oraz amplitudzie $E = 1$, rys. 2.14.

W szczególności, funkcja wydzielająca $f_w(t)$ będąca impulsem prostokątnym o czasie trwania $t \in (0, T)$ ma postać

$$f_w(t) = I(t) - I(t-T) \quad (2.6.14)$$

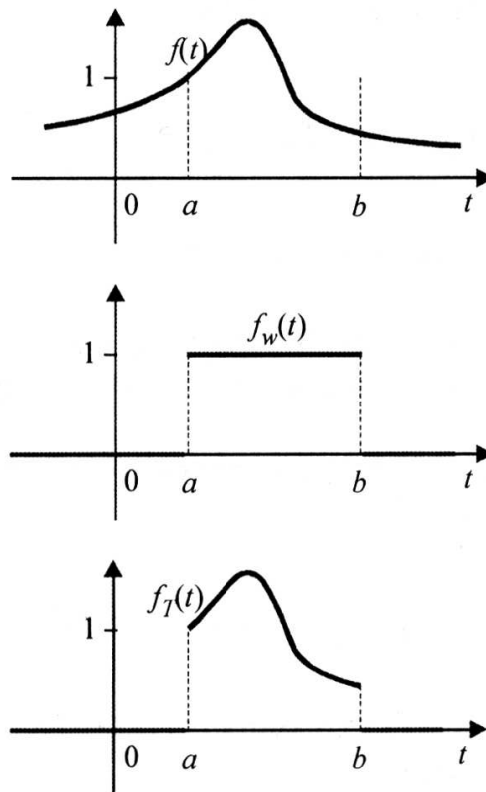


Rys. 2.14. Ilustracja funkcji wydzielających $f_w(t)$: a) postaci (2.6.13), b) postaci (2.6.14)

Mnożąc daną funkcję $f(t)$ przez odpowiednią funkcję wydzielającą $f_w(t)$ otrzymamy żądany przebieg na interesującym nas przedziale $T = \langle a, b \rangle$, który oznaczymy symbolem $f_T(t)$ lub $f_{\langle a, b \rangle}(t)$. (rys. 2.15). Zatem

$$f_T(t) = f(t) \cdot f_w(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dla } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{dla } t < a, t > b \end{cases} \quad (2.6.15)$$

gdzie funkcja $f_w(t)$ określona jest wzorem (2.6.13) lub (2.6.14).



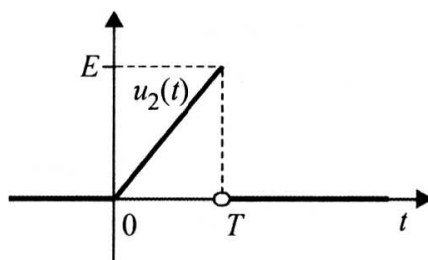
Rys. 2.15. Ilustracja uzyskania żądanego przebiegu $f_T(t)$ funkcji $f(t)$ na przedziale $T = \langle a, b \rangle$

Przykład 2.31. Określić postać przebiegu trójkątnego impulsu napięcia o czasie trwania $\langle 0, T \rangle$ i amplitudzie E , a następnie wyznaczyć jego transformatę.

R o z w i ą z a n i e . Dany impuls opisujemy wzorem

$$u_2(t) = \begin{cases} at & \text{dla } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > T \end{cases} \quad (2.6.16)$$

gdzie $a = \frac{E}{T}$ – współczynnik kierunkowy, rys. 2.16.



Rys. 2.16. Ilustracja do przykładu 2.31. Wykres funkcji $u_2(t)$

Funkcja $u_2(t)$ ma jeden punkt nieciągłości w punkcie $t = T$. Transformatę tej funkcji wyznaczamy bezpośrednio z definicji \mathcal{L} -transformaty. Na podstawie wzoru (1.2.3) mamy

$$U_2(s) = \mathcal{L}[u_2(t)] = \int_0^{+\infty} u_2(t) e^{-st} dt = \frac{E}{T} \int_0^T t e^{-st} dt.$$

Dalsze obliczenia pozostawiam Czytelnikowi.

D r u g i s p o s ó b wyznaczenia transformaty $U_2(s)$.

Zgodnie ze wzorem (2.6.15) funkcję $u_2(t)$ można uzyskać mnożąc funkcję

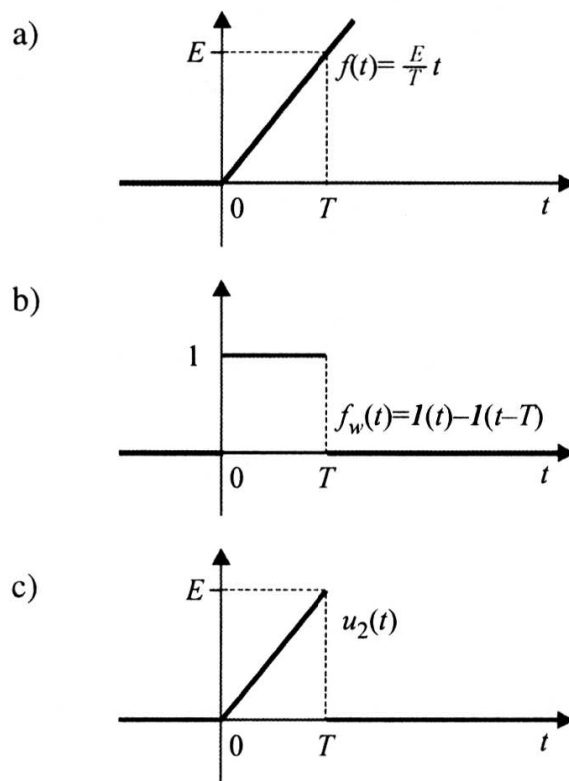
$f(t) = \frac{E}{T}t$ przez funkcję wydzielającą postaci (2.6.14) i wtedy funkcja $u_2(t)$

(rys. 2.16) przyjmuje postać

$$u_2(t) = \frac{E}{T}t \cdot [I(t) - I(t - T)] \quad (2.6.17)$$

Do obu stron równości (2.6.17) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}[u_2(t)] = \frac{E}{T} (\mathcal{L}[t \cdot I(t)] - \mathcal{L}[t \cdot I(t - T)]) \quad (1)$$



Rys. 2.17. Ilustracja procesu otrzymania funkcji $u_2(t)$, tj. żadanego przebiegu impulsu napięcia pojawiającego się w momencie $t = 0$ i kończącego się w momencie $t = T$

Korzystamy z faktu, że $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, natomiast transformatę funkcji $t \cdot I(t-T)$

wyznamy z twierdzenia 2.3.1 o różniczkowaniu transformaty (wzór 2.3.1) oraz z wyniku przykładu 2.24 a). Uwzględniając powyższe mamy

$$\mathcal{L}[t \cdot I(t-T)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[I(t-T)] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} \right) = \frac{1}{s^2} \cdot e^{-Ts} + \frac{T}{s} e^{-Ts}.$$

Wstawiając powyższe obliczenia do (1) uzyskamy transformatę $U_2(s)$ impulsu $u_2(t)$ opisanego wzorem (2.6.16) lub (2.6.17) w następującej postaci

$$U_2(s) = \frac{E}{T} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} \right) \quad (2.6.18)$$

T r z e c i s p o s ó b wyznaczenia transformaty funkcji $u_2(t)$.

Aby można było bezpośrednio zastosować twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym należy przekształcić funkcję $u_2(t)$ do odpowiedniej postaci (porównaj przykład 2.25 c). Jak wiemy, funkcja $t \cdot I(t-T)$ nie jest funkcją przesuniętą w myśl wzoru (2.6.2). Jeżeli t przedstawimy w postaci

$$t = (t - T) + T$$

i podstawimy do wzoru (2.6.17), to po odpowiednich przekształceniach funkcję $u_2(t)$ zapiszemy wzorem

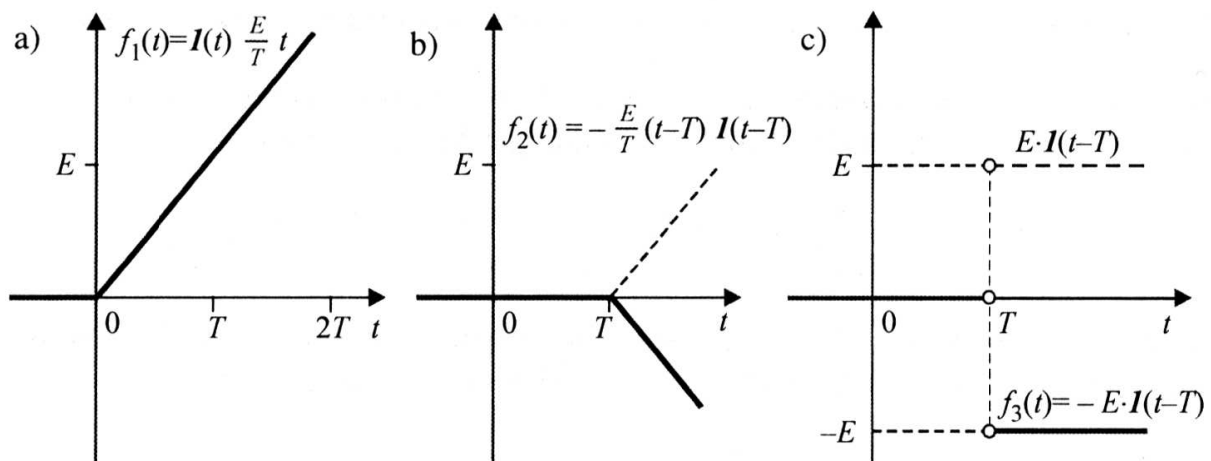
$$u_2(t) = \frac{E}{T} [t \cdot \mathbf{1}(t) - (t - T) \cdot \mathbf{1}(t - T) - T \cdot \mathbf{1}(t - T)] \quad (2.6.19)$$

Stosujemy teraz do obu stron tożsamości (2.6.19) przekształcenie Laplace'a, korzystamy z jego liniowości (wzór 2.1.3) i na podstawie wzoru (2.6.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_2(t)] &= \frac{E}{T} \{ \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[(t - T) \cdot \mathbf{1}(t - T)] - T \cdot \mathcal{L}[\mathbf{1}(t - T)] \} = \\ &= \frac{E}{T} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-Ts} - \frac{T}{s} e^{-Ts} \right). \end{aligned}$$

Wynik ten jest zgodny z odpowiedzią daną wzorem (2.6.18). ■

Uwaga 2.6.5. Zauważmy, że funkcję $u_2(t)$ postaci (2.6.19) można uzyskać w wyniku odpowiednich przekształceń zilustrowanych na rys. 2.18.

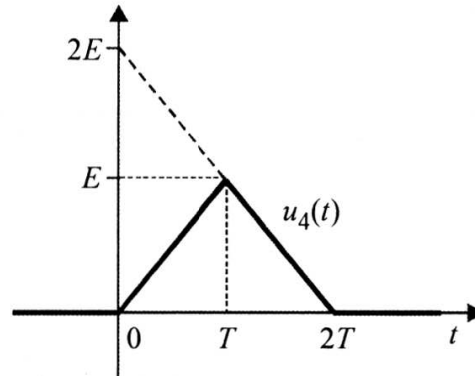


Rys. 2.18. Ilustracja kolejnych etapów uzyskania funkcji $u_2(t)$ określonej wzorem (2.6.19), mającej wykres podany na rysunku 2.17 c. Funkcja $u_2(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$

Przykład 2.32. Określić impuls napięcia, którego wykres podany jest na rysunku 2.19 oraz wyznaczyć jego transformatę.

R o z w i ą z a n i e . Na podstawie wykresu funkcję $u_4(t)$ określamy wzorem

$$u_4(t) = \begin{cases} \frac{E}{T}t & \text{dla } 0 \leq t \leq T \\ -\frac{E}{T}t + 2E & \text{dla } T < t \leq 2T \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 2T \end{cases} \quad (2.6.20)$$



Rys. 2.19. Ilustracja do przykładu 2.32

Zauważmy, że funkcja ta jest ciągła w całym zbiorze R lecz nie jest różniczkowalna w punktach: $t=0$, $t=T$, $t=2T$ (co łatwo sprawdzić). Transformatę $U_4(s) = \mathcal{L}[u_4(t)]$ można wyznaczyć bezpośrednio z definicji \mathcal{L} -przekształcenia stosując wzór (1.2.3).

Podamy prostszy sposób wyznaczenia transformaty $U_4(s)$. W tym celu skorzystamy z funkcji jednostkowej $I(t)$ oraz jej przesunięć rzeczywistych postaci (2.6.1) i wtedy funkcję $u_4(t)$ przedstawimy w postaci

$$u_4(t) = \frac{E}{T} [t \cdot I(t) - 2(t-T)I(t-T) + (t-2T) \cdot I(t-2T)] \quad (2.6.21)$$

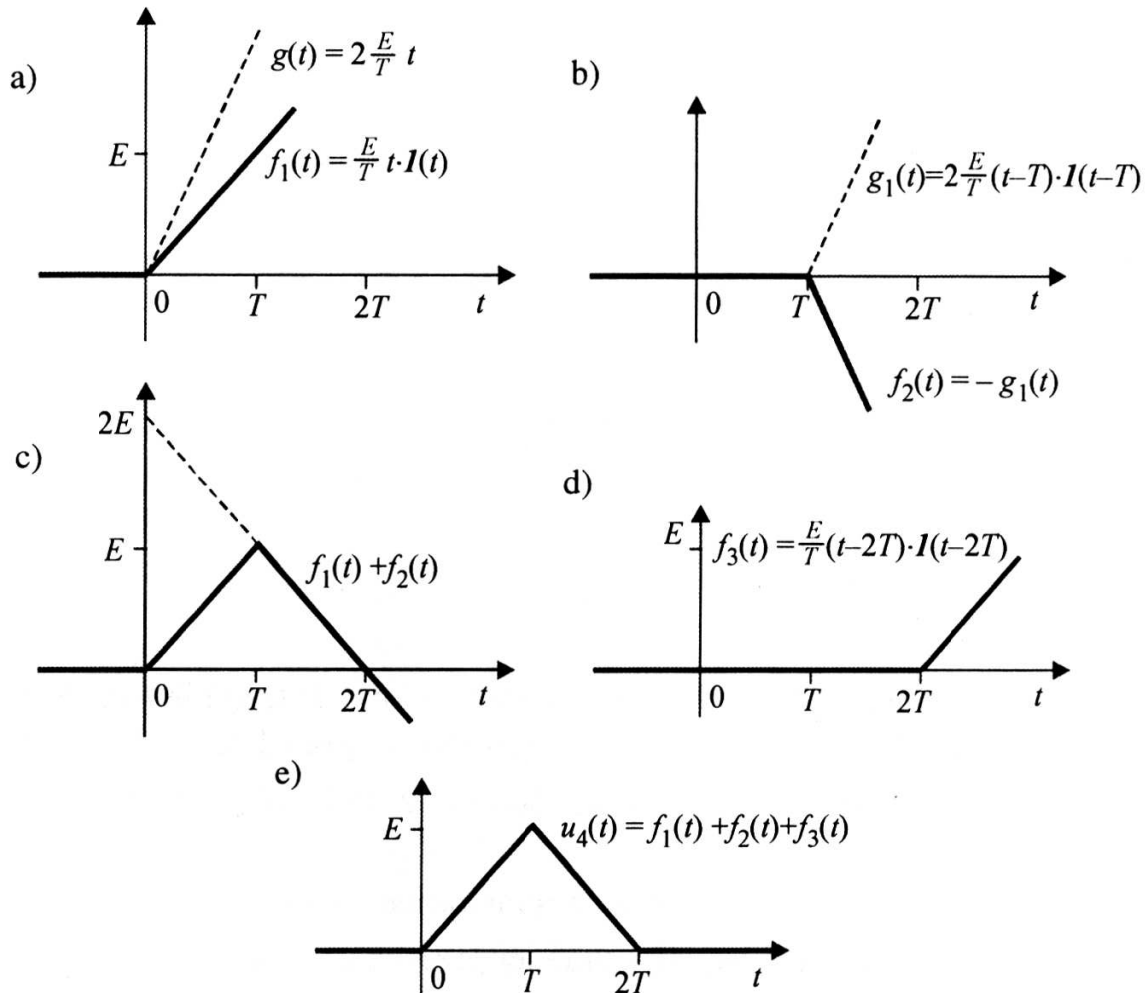
wygodnej do stosowania twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym.

Następnie do obu stron tożsamości (2.6.21) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia, a następnie z twierdzenia 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym i na podstawie wzoru (2.6.3) (lub z wyników uzyskanych w przykładzie 2.31) mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_4(t)] &= \frac{E}{T} (\mathcal{L}[t] - 2\mathcal{L}[(t-T)I(t-T)] + \mathcal{L}[(t-2T) \cdot I(t-2T)]) = \\ &= \frac{E}{T} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} e^{-2sT} \right). \end{aligned}$$

Zatem transformata $U_4(s)$ funkcji $u_4(t)$ wyraża się wzorem

$$U_4(s) = \frac{E}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-sT})^2}{s^2} \quad (2.6.22)$$



Rys. 2.20. Ilustracja kolejnych etapów dochodzenia do postaci (2.6.21) funkcji $u_4(t)$, mającej wykres podany na rysunku 2.19

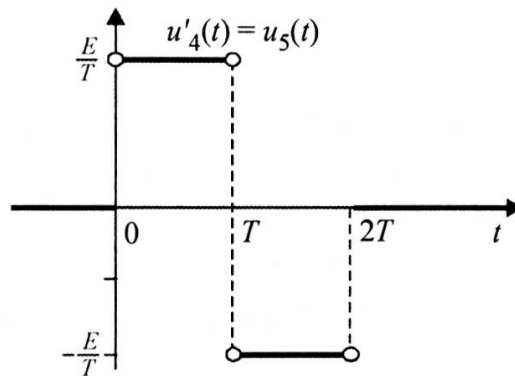
Uwaga 2.6.6. Zauważmy, że pochodną $u_4'(t)$ funkcji $u_4(t)$ jest funkcja $u_5(t)$ dana wzorem

$$u_5(t) = \begin{cases} \frac{E}{T} & \text{dla } 0 < t < T \\ -\frac{E}{T} & \text{dla } T < t < 2T \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 2T \end{cases} \quad (2.6.23)$$

lubo

$$u_5(t) = \frac{E}{T} \left[I(t) - 2 \cdot I(t-T) + I(t-2T) \right]$$

tj. $u_5(t) = u'_4(t)$, a jej wykres podany jest na rys. 2.21. Jak widać z wykresu, funkcja $u_5(t)$ jest nieciągła w punktach $t = 0$, $t = T$ i $t = 2T$ i w tych punktach przyjmuje wartości $u(0) = \frac{E}{2T}$, $u(T) = 0$, $u(2T) = -\frac{E}{2T}$ (wzór 1.1.8).



Rys. 2.21. Ilustracja graficzna funkcji pochodnej $u'_4(t)$. W interpretacji fizycznej są to prostokątne impulsy trwające po T sekund o amplitudzie E/T

Przykład 2.33. Wyznaczyć transformatę $U_5(s) = \mathcal{L}[u_5(t)]$ funkcji $u_5(t)$ określoną wzorem (2.6.23).

R o z w i ą z a n i e . Korzystając z twierdzenia 2.2.1 o różniczkowaniu oryginału, określającego zależność między transformatami oryginału $f(t)$ i jego pochodnej $f'(t)$ oraz z wniosku 2.2.3 można w łatwy sposób wyznaczyć transformatę funkcji $u_5(t)$, (rys. 2.21).

Ponieważ $u_5(t) = u'_4(t)$, to stosując obustronnie przekształcenie Laplace'a mamy

$$\mathcal{L}[u_5(t)] = \mathcal{L}[u'_4(t)] \quad (1)$$

Z ciągłości funkcji $u_4(t)$ w punkcie $t_0 = 0$, (patrz rys. 2.19) mamy $u_4(0) = 0$, więc na podstawie wzoru (2.2.2) obliczamy transformatę pochodnej

$$\mathcal{L}[u'_4(t)] = s \cdot \mathcal{L}[u_4(t)] \quad (2)$$

Podstawiając (2) do (1) otrzymamy

$$\mathcal{L}[u_5(t)] = s \cdot \mathcal{L}[u_4(t)], \quad \text{tj.} \quad U_5(s) = s \cdot U_4(s),$$

a następnie uwzględniając wzór (2.6.22), którym wyraża się transformata $U_4(s)$, otrzymujemy transformatę $U_5(s)$ funkcji $u_5(t)$ w postaci

$$U_5(s) = \frac{E}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-sT})^2}{s} \quad (2.6.24)$$

■

Przykład 2.34. Wyznaczyć transformatę napięcia sinusoidalnego, powstającego w chwili $t = 0$, o częstotliwości kątovej ω , amplitudzie $E = 1$ i czasie trwania równym jednemu okresowi T .

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że funkcja $I(t)$ skoku jednostkowego umożliwia w dogodny sposób przedstawienie czynności włączania, ponieważ pomnożenie danej funkcji przez $I(t)$ wyzerowuje tę funkcję dla $t < 0$, podczas gdy dla $t > 0$ wartości jej nie ulegają zmianie. Zatem funkcja (rys. 2.22 a)

$$u(t) = E \sin \omega t \cdot I(t) \quad (2.6.25)$$

opisuje przebieg napięcia sinusoidalnego włączony w chwili $t = 0$. Natomiast przebieg odpowiadający jednemu okresowi o amplitudzie $E = 1$ określamy odpowiednio funkcją

$$u_T(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ 0 & \text{dla } t \notin \left(0, \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{cases} \quad (2.6.26)$$

gdzie okres T dla danej funkcji wynosi $\frac{2\pi}{\omega}$ (rys. 2.22 c).

Zauważmy, że przy pomocy funkcji $I(t)$ i jej przesunięcia o $t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ funkcję $u_T(t)$ możemy zapisać w postaci

$$u_T(t) = I(t) \cdot \sin \omega t - I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \cdot \sin \omega \left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (2.6.27)$$

Transformatę $U_T(s) = \mathcal{L}[u_T(t)]$ funkcji $u_T(t)$ danej wzorem (2.6.26) możemy wyznaczyć kilkoma sposobami.

P i e r w s z y s p o s ó b . Bezpośrednio z definicji \mathcal{L} -transformaty na podstawie wzoru (1.2.3) zastosowanego do funkcji $u_T(t)$ postaci (2.6.26) mamy

$$U_T(s) = \int_0^{\infty} u_T(t) e^{-st} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt \quad (2.6.28)$$

Dalsze obliczenia pozostawiam Czytelnikowi.

a stąd wyznaczamy graniczne wartości początkowe pochodnych

$$f'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-4t} \right) = 1, \quad f''(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3} e^{-t} - \frac{8}{3} e^{-4t} \right) = -3.$$

■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Korzystając z twierdzenia o liniowości oraz z zależności (2.1.12), (2.1.21) i odpowiednich tożsamości trygonometrycznych lub wzorów Eulera, wyznaczyć transformaty oryginałów:

a) $f(t) = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$

b) $f(t) = 2 - 4 \sin 2t$

c) $f(t) = 1 - e^{2t} + \cos 3t$

d) $f(t) = \frac{e^{-4t} - e^{-6t}}{2}$

e) $f(t) = t^3 - \sin 2t$

f) $f(t) = (t - 2)^3 \cdot \mathbf{1}(t)$

g) $f(t) = \cosh t - \cos t$

h) $f(t) = \sinh t + \sin t$

i) $f(t) = \frac{1}{2} [\sinh at + \sin at]$

j) $f(t) = \frac{1}{2} [\cosh at - \cos at]$

k) $f(t) = \frac{1}{2} [\cosh 3t + \cos 3t]$

l) $f(t) = \frac{1}{2} [\sinh 4t - \sin 4t]$

m) $f(t) = \cos^2 at$

n) $f(t) = \sin^2 at$

o) $f(t) = \cos 3t \cdot \cos 2t$

p) $f(t) = \sin 6t \cdot \sin 4t$

q) $f(t) = \sin 2t \cdot \sin 3t$

r) $f(t) = 4 \sin 5t \cos t$

s) $f(t) = \cosh at \cdot \cosh bt$

t) $f(t) = \sinh 3t \cdot \sinh 2t$

u) $f(t) = 2 \sin \frac{3}{2}t \cdot \sin \frac{1}{2}t$

v) $f(t) = \cos^3 t$

w) $f(t) = \sin^4 t$

z) $f(t) = \cos^6 t$

2. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i całkowaniu oryginału oraz transformaty wyznaczyć obrazy następujących oryginałów:

a) $f(t) = t \cdot \cos at$

b) $f(t) = t \cdot \sin bt$

c) $f(t) = t^2 e^{-4t}$

d) $f(t) = \frac{d^3}{dt^3} \left(\cos \frac{t}{2} \right)$

e) $f(t) = t^2 \cos 3t$

f) $f(t) = t^2 \cdot \sin 5t$

g) $f(t) = t \cdot \sinh 2t$

h) $f(t) = t \cdot \sin t \cdot \sinh t$

i) $f(t) = t^3 \sin at$

j) $f(t) = t^2 \sinh \omega t$

k) $f(t) = t \cosh at \cos at$

l) $f(t) = \frac{e^{-at} \sin t}{t}$

m) $f(t) = t \sinh at \sin at$

n) $f(t) = \frac{\sinh^2 t}{t}$

o) $f(t) = \frac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t}$

p) $f(t) = \frac{\cos 3t \cdot \sin 4t}{t}$

q) $f(t) = \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t}$

r) $g(t) = \frac{\sin \omega t}{t}$

s) $g(t) = \frac{\sinh \omega t}{t}$

t) $g(t) = \frac{\cos 2t - 1}{t}$

u) $g(t) = \frac{\cosh \omega t - 1}{t}$

v) $g(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$

w) $g(t) = \frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t}$

x) $g(t) = \frac{\cos bt - \cos at}{t}$

y) $g(t) = \frac{e^{-at} \sin bt}{t}$

z) $g(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\tau} d\tau$

a₁) $g(t) = \int_0^t \frac{\cosh \omega \tau - 1}{\tau} d\tau$

b₁) $g(t) = \int_0^t \frac{e^{3\tau} - 1}{\tau} d\tau$

c₁) $g(t) = \int_0^t \tau \sin \tau d\tau$

d₁) $g(t) = \int_0^t \tau^2 e^{a\tau} d\tau$

Uwaga. Funkcję określoną w przykładzie z) nazywamy sinusem całkowym i oznaczamy zwykle symbolem $\text{Si}(t)$.

3. Korzystając z twierdzenia o podobieństwie i z wcześniejszych rezultatów, wyznaczyć transformaty oryginałów:

a) $g(t) = \cos at$

b) $g(t) = \cosh at$

c) $g(t) = \sinh at$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad g(t) = \cos \frac{3}{2}t & \text{e)} \quad g(t) = \sinh \frac{5}{3}t & \text{f)} \quad g(t) = \cosh \frac{t}{2} \\ \text{g)} \quad g(t) = \sin \frac{t}{4} & \text{h)} \quad g(t) = \cos 6t & \text{i)} \quad g(t) = \sin \frac{7}{2}t \end{array}$$

4. Wyznaczyć \mathcal{L} -transformaty oryginałów na podstawie twierdzeń o przesunięciu rzeczywistym lub o przesunięciu zespolonym ($\omega > 0$, $t_0 > 0$, $a > 0$):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(t) = I(t) + I(t-1) - 2 \cdot I(t-2) & \text{b)} \quad f(t) = I(t-4) \cdot (t-4)^2 \\ \text{c)} \quad f(t) = I\left(t - \frac{4}{3}\right) \cdot \sin\left(t - \frac{4}{3}\right) & \text{d)} \quad f(t) = \sin(\omega t - t_0) \\ \text{e)} \quad f(t) = (t-3)^3 \cdot I(t-3) & \text{f)} \quad f(t) = \sin(2t - \pi) \\ \text{g)} \quad f(t) = \cos(4t - 5) & \text{h)} \quad f(t) = \sinh(3t - 2) \\ \text{i)} \quad f(t) = (4t - 3)^2 & \text{j)} \quad f(t) = (2t - 1)^4 \\ \text{k)} \quad f(t) = e^{-2t} \sin t & \text{l)} \quad f(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{m)} \quad f(t) = e^{2(t+6)} & \text{n)} \quad f(t) = \sinh a(t+b) \\ \text{o)} \quad f(t) = e^{4t} \sin t & \text{p)} \quad f(t) = e^{-4t} \cos 3t \\ \text{q)} \quad f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cdot \cos 2t & \text{r)} \quad f(t) = e^{3t} \cos 3t \cdot \cos 4t \\ \text{s)} \quad f(t) = e^{-(t-a)} \cos(t-a) & \text{t)} \quad f(t) = e^{b(t-a)} \sin(t-a) \\ \text{u)} \quad f(t) = \cosh t \cdot \sin 2t \cdot \sin 3t & \text{v)} \quad f(t) = \cosh 3t \cdot \sin^2 t \\ \text{w)} \quad f(t) = e^{-3t} \cos\left(2t - \frac{3\pi}{4}\right) & \text{x)} \quad f(t) = e^{-3t} \cdot t^2 \\ \text{y)} \quad f(t) = t^2 \cdot I(t) - (t-1)^2 \cdot I(t-1) & \text{z)} \quad f(t) = I(t) - I(t-1) + I(t-2) - \dots \\ \text{a}_1) \quad f(t) = I(t) + I(t-3) + I(t-6) + \dots & \text{b}_1) \quad f(t) = \sinh t \cdot \cos^2 3t \end{array}$$

5. Korzystając z odpowiednich twierdzeń obliczyć (różnymi sposobami) transformaty oryginałów ($\omega > 0$, $t_0 > 0$, $a > 0$):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad f(t) = t^4 e^{-t} & \text{b)} \quad f(t) = e^{2t} \cdot t^3 & \text{c)} \quad f(t) = t \cdot I(t-5) \\ \text{d)} \quad f(t) = t^2 \cdot I(t-3) & \text{e)} \quad f(t) = e^{3t} \sin^2 t & \text{f)} \quad f(t) = t^2 \cosh \omega t \\ \text{g)} \quad f(t) = t^2 \sinh \omega t & \text{h)} \quad f(t) = e^{-2t} \cos(3t - \pi) & \text{i)} \quad f(t) = \sinh(\omega t - \delta) \end{array}$$

$$\text{j) } f(t) = \cosh(\omega t - \delta) \quad \text{k) } f(t) = (at - b)^n \quad \text{l) } f(t) = (2t - 5)^3$$

$$\text{m) } f(t) = t \cdot \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{n) } f(t) = t^3 \cdot \mathbf{I}(t - 2)$$

$$\text{o) } f(t) = \mathbf{I}(t - 2) \cdot e^t \quad \text{p) } f(t) = t^2 \cdot [\mathbf{I}(t - 2) - \mathbf{I}(t - 4)]$$

$$\text{r) } f(t) = t e^t \cos t \quad \text{s) } g(t) = \int_0^t \cos^2 2\tau \, d\tau$$

6. Przedstawić graficznie funkcje i wyznaczyć ich transformaty:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t - 5| \leq 3 \\ 0 & \text{dla } |t - 5| > 3 \end{cases}, \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ -t + 1 & \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = t \cdot \mathbf{I}(t) - (t - 1) \cdot \mathbf{I}(t - 1) - \mathbf{I}(t - 1),$$

$$\text{d) } f(t) = 1 - e^{-t} - \mathbf{I}(t - 2) + e^{2-t} \mathbf{I}(t - 2),$$

$$\text{e) } f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0 & \text{dla } t \notin \langle 0, \pi \rangle \end{cases}, \quad \text{f) } f(t) = \begin{cases} \cos \omega t & \text{dla } t \in \langle 0, \frac{\pi}{\omega} \rangle \\ 0 & \text{dla } t \notin \langle 0, \frac{\pi}{\omega} \rangle \end{cases}$$

$$\text{g) } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{dla } 0 \leq t \leq a \\ -\frac{1}{2}t + a & \text{dla } a < t \leq 2a, \\ 0 & \text{dla } |t - a| > a \end{cases}, \quad \text{h) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > 1 \\ 1 - e^t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{i) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin \langle 0, 1 \rangle \\ t^2 & \text{dla } 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 1 \end{cases}, \quad \text{j) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0 & \text{dla } t > 2 \end{cases}$$

$$\text{k) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1 \vee t > 2 \\ -t^2 + 3t + 2 & \text{dla } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}, \quad \text{l) } f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \in \langle 0, \frac{\pi}{\omega} \rangle \\ 0 & t \notin \langle 0, \frac{\pi}{\omega} \rangle \end{cases}$$

$$m) f(t) = t \cdot I(t) - I(t-1) - (t-2)I(t-2) - I(t-2),$$

$$n) f(t) = \frac{1}{4}t \cdot I(t) - \frac{1}{2}(t-a)I(t-a) + \frac{1}{4}(t-2a)I(t-2a), \quad a > 0,$$

$$o) f(t) = \cos t \left[I(t) - I\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad p) f(t) = [I(t) - I(t-3)] \cdot t^2$$

7. Narysować wykresy podanych funkcji oraz znaleźć ich transformaty Laplace'a:

$$a) f_1(t) = I(t-2) \cos(t-2)$$

$$f_2(t) = I(t-2) \cos t$$

$$f_3(t) = I(t) \cos(t-2)$$

$$f_4(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } t \in (0,2) \\ 0 & \text{dla } t \notin (0,2) \end{cases}$$

$$b) g_1(t) = I\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$g_2(t) = I\left(t - \frac{3}{2}\pi\right) \sin t$$

$$g_3(t) = \left[I(t) - I\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sin 2t$$

$$g_4(t) = I(t) \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) h_1(t) = e^{-(t-2)} \cdot I(t-2)$$

$$h_2(t) = I(t)e^{-(t-2)}$$

$$h_3(t) = e^{-t} \cdot I(t-2)$$

$$h_4(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{dla } t \in (1,3) \\ 0 & \text{dla } t \notin (1,3) \end{cases}$$

8. Korzystając z funkcji skoku jednostkowego i jej przesunięć rzeczywistych (lub z funkcji wydzielającej 2.6.13) opisać funkcje z zadania 3a, b, c, g, h, rozdziału 1, a następnie wyznaczyć ich transformaty w oparciu o własności przekształcenia Laplace'a.

9. Wykazać, że podane oryginały są okresowe, naszkicować ich wykresy i znaleźć transformaty ($\omega > 0, A > 0, T > 0, a > 0$):

$$a) f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{dla } 2n \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq (2n+1) \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{dla } (2n+1) \frac{\pi}{\omega} < t < (2n+2) \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \quad (n=0,1,\dots),$$

$$b) f(t) = \begin{cases} A & \text{dla } 2nT \leq t < (2n+1)T \\ 0 & \text{dla } (2n+1)T \leq t < (2n+2)T \end{cases} \quad (n=0,1,\dots),$$

$$c) f(t) = \frac{A}{T}t - An \quad \text{dla } nT \leq t < (n+1)T \quad (n=0,1,\dots),$$

$$d) f(t) = \begin{cases} A & \text{dla } 2n\frac{1}{2}T \leq t < (2n+1)\frac{1}{2}T \\ 0 & \text{dla } (2n+1)\frac{1}{2}T \leq t < (2n+2)\frac{1}{2}T \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$e) f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + |\sin t|),$$

$$f) f(t) = \begin{cases} A & \text{dla } 2n\frac{1}{2}T \leq t < (2n+1)\frac{1}{2}T \\ -A & \text{dla } (2n+1)\frac{1}{2}T \leq t < (2n+2)\frac{1}{2}T \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$g) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2n\frac{1}{2}T \leq t < (2n+1)\frac{1}{2}T \\ A & \text{dla } (2n+1)\frac{1}{2}T \leq t < (2n+2)\frac{1}{2}T \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$h) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \frac{2n\pi}{\omega} \leq t < \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \\ \sin \omega t & \text{dla } \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \leq t < \frac{(2n+2)\pi}{\omega} \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$i) f(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}t - 2An & \text{dla } nT \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T \\ -\frac{2A}{T}t + 2A(n+1) & \text{dla } \left(n + \frac{1}{2}\right)T \leq t < (n+1)T \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$j) f(t) = A[1 - e^{-a(t-nT)}] \quad \text{dla } nT \leq t < (n+1)T \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$k) f(t) = \begin{cases} A \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{2\pi}{T}t\right) & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases},$$

$$l) f(t) = \arccos(\cos t)$$

$$m) f(t) = \arctg(\operatorname{tg} t).$$

10. Znaleźć transformaty Laplace'a funkcji okresowej $f(t)$ o okresie T (lub: 2π , $2l$, $2a$), określonej w przedziale $\langle 0, T \rangle$ następująco:

$$a) f_T(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ T-t & \text{dla } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} \quad b) f_T(t) = \begin{cases} At & \text{dla } 0 \leq t < 2l, A > 0 \\ 2l & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t \geq 2l \end{cases}$$

$$c) f_T(t) = \begin{cases} at & \text{dla } 0 \leq t < \pi \\ bt & \text{dla } \pi < t < 2\pi \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \quad d) f_T(t) = \begin{cases} \frac{\pi - 2t}{\pi} & \text{dla } 0 < t < \pi \\ \frac{2t - 3\pi}{\pi} & \text{dla } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$e) f_T(t) = \begin{cases} \frac{3a}{2\pi}t & \text{dla } 0 < t < \frac{2\pi}{3} \\ a & \text{dla } \frac{2\pi}{3} < t < \frac{4\pi}{3} \\ \frac{3a(2\pi - t)}{2\pi} & \text{dla } \frac{4\pi}{3} < t < 2\pi \end{cases} \quad f) f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < a \\ \frac{t}{a} - 1 & \text{dla } a \leq t \leq 2a \end{cases}$$

$$f(t) \equiv 0 \text{ dla } t < 0, f(t) = f(t + T) \text{ dla } t \geq 0, T > 0.$$

11. Określić postać zapisu trapezowego impulsu napięcia $u(t)$, rosnącego liniowo z prędkością $v = \frac{E}{T}$ i występującego w czasie od $t = t_1$ do $t = t_2$ gdzie $T = t_2 - t_1$ oraz znaleźć jego transformatę, tj. $u(t) = v \cdot t = \frac{E}{T} t$

12. Dla danych transformat: a) $F(s) = \frac{2s+1}{s^3 - s^2 + s}$, b) $F(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 - 2s}$ za pomocą twierdzenia o granicy oryginału w zerze obliczyć wartości początkowe $f(0^+)$, $f'(0^+)$ oraz $f''(0^+)$ przy założeniu, że $f(t)$, $f'(t)$ i $f''(t)$ są oryginałami. Wynik sprawdzić znajdując oryginał $f(t)$, a następnie obliczając jego pochodne.

13. W oparciu o znane wzory i własności przekształcenia Laplace'a wyznaczyć transformaty odwrotne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ dla zadanych transformat:

$$\begin{array}{lll} a) F(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{6}{4s+5} & b) F(s) = \frac{3}{s^3} + \frac{4}{s^5} & c) F(s) = \frac{3}{s^2 + 5} \\ d) F(s) = \frac{2s}{s^2 + 4} + \frac{3}{s^2 - 9} & e) F(s) = \frac{s-5}{4s^2 + 25} & f) F(s) = \frac{s^4 + 2s^2 - 3s}{s^5} \\ g) F(s) = \frac{1}{(s-5)^2} & h) F(s) = \frac{4}{(2s+3)^2} & i) F(s) = \frac{3s+20}{s^2 - 16} \\ j) F(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 9} & k) F(s) = \frac{s+10}{s^2 - 4s + 40} & l) F(s) = \frac{s+3}{s^2 + 6s + 10} \end{array}$$

$$\text{m) } F(s) = \frac{s+5}{(s+5)^2 - 1} \quad \text{n) } F(s) = \frac{1}{4s^2 - 9} \quad \text{o) } F(s) = \frac{4s}{2s^2 - 9}$$

$$\text{p) } F(s) = \frac{A}{s} e^{-3s} \quad \text{r) } F(s) = \frac{1}{s-3} e^{-\frac{1}{2}s} \quad \text{s) } F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-\frac{3}{2}s}$$

$$\text{t) } F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} e^{-s} \quad \text{u) } F(s) = \frac{2s+5}{s^2 + 2s}$$

Odpowiedzi:

$$1) \text{ a) } \frac{1}{s(s-4)}, \text{ b) } \frac{2(s-2)^2}{s(s^2+4)}, \text{ c) } \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+9}, \text{ d) } \frac{1}{s^2+10s+24},$$

$$\text{e) } \frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}, \text{ f) } \frac{6-12s+12s^2-8s^3}{s^4}, \text{ g) } \frac{2s}{s^4-1}, \text{ h) } \frac{2s^2}{s^4-1}, \text{ i) } \frac{as^2}{s^4-a^4},$$

$$\text{j) } \frac{a^2s}{s^4-a^4}, \text{ k) } \frac{s^3}{s^4-81}, \text{ l) } \frac{64}{s^4-256}, \text{ m) } \frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}, \text{ n) } \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)},$$

$$\text{o) } \frac{s(s^2+13)}{(s^2+25)(s^2+1)}, \text{ p) } \frac{48s}{(s^2+4)(s^2+100)}, \text{ q) } \frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)},$$

$$\text{r) } \frac{20(s^2+24)}{(s^2+16)(s^2+36)}, \text{ s) } \frac{s(s^2-a^2-b^2)}{[s^2-(a-b)^2][s^2-(a+b)^2]}, \text{ t) } \frac{12s}{(s^2-1)(s^2-25)},$$

$$\text{u) } \frac{3s}{s^4+5s^2+4}, \text{ v) } \frac{s^3+7s}{s^4+10s^2+9}, \text{ w) } \frac{1}{8} \left(\frac{s}{s^2+16} - \frac{4s}{s^2+4} + \frac{3}{s} \right),$$

$$\text{z) } \frac{1}{32} \left(\frac{s}{s^2+36} + \frac{6s}{s^2+16} + \frac{15s}{s^2+4} + \frac{10}{s} \right).$$

$$2. \text{ a) } \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \text{ b) } \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}, \text{ c) } \frac{2}{(s+4)^3}, \text{ d) } \frac{1}{16s^2+4}, \text{ e) } \frac{2s^3-54s}{(s^2+9)^3},$$

$$\text{f) } \frac{10(3s^2-25)}{(s^2+25)^3}, \text{ g) } \frac{4s}{(s^2-4)^2}, \text{ h) } \frac{6s^4-8}{(s^4+4)^2}, \text{ i) } \frac{24as(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^4},$$

$$\text{j) } \frac{2\omega(3s^2+\omega^2)}{(s^2-\omega^2)^3}, \text{ k) } \frac{s^2(s^4-12a^4)}{(s^4-4a^4)^2}, \text{ l) } \text{arc tg} \frac{1}{s+a}, \text{ m) } \frac{2a^2(3s^4-4a^4)}{(s^4+4a^4)^2},$$

$$\text{n) } \frac{1}{4} \ln \frac{s^2}{s^2-4}, \text{ o) } \frac{1}{4} \ln \frac{s^2+100}{s^2+16}, \text{ p) } \frac{1}{2} \left(\text{arc tg} \frac{7}{s} + \text{arc tg} \frac{1}{s} \right), \text{ q) } \frac{1}{4} \ln \frac{s^2+1}{s^2},$$

$$r) \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\omega}, \quad s) \frac{1}{2} \ln \frac{s+\omega}{s-\omega}, \quad t) \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}, \quad u) \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+\omega^2}}, \quad v) \ln \frac{s-b}{s-a},$$

$$w) \frac{1}{4} \ln \frac{(s+a)^2+4b^2}{(s+a)^2}, \quad x) \frac{1}{2} \ln \frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}, \quad y) \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{s+a}, \quad z) \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\omega} \right),$$

$$a_1) \frac{1}{s} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2-\omega^2}}, \quad b_1) \frac{1}{s} \ln \frac{s}{s-3}, \quad c_1) \frac{2}{(s^2+1)^2}, \quad d_1) \frac{2}{s(s-a)^3}.$$

$$3. \quad a) \frac{s}{s^2+a^2}, \quad b) \frac{s}{s^2-a^2}, \quad c) \frac{a}{s^2-a^2}, \quad d) \frac{4s}{4s^2+9}, \quad e) \frac{15}{9s^2-25},$$

$$f) \frac{4s}{4s^2-1}, \quad g) \frac{4}{16s^2+1}, \quad h) \frac{s}{s^2+36}, \quad i) \frac{14}{4s^2+49}.$$

$$4. \quad a) \frac{1}{s} (1 + e^{-s} - 2e^{-2s}), \quad b) \frac{2}{s^3} e^{-4s}, \quad c) \frac{1}{s^2+1} e^{-\frac{4}{3}s}, \quad d) \frac{\omega}{s^2+\omega} e^{-\frac{t_0}{\omega}s},$$

$$e) \frac{6}{s^4} e^{-3s}, \quad f) \frac{2}{s^2+4} e^{-\frac{\pi}{2}s}, \quad g) \frac{s}{s^2+16} e^{-\frac{5}{4}s}, \quad h) \frac{3}{s^2-9} e^{-\frac{2}{3}s}, \quad i) \frac{32}{s^3} e^{-\frac{3}{4}s},$$

$$j) \frac{16 \cdot 24}{s^5} e^{-\frac{1}{2}s}, \quad k) \frac{1}{s^2+4s+5}, \quad l) \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{s-1}{s^2+1}, \quad m) \frac{e^{12}}{s-2}, \quad n) \frac{s-3}{(s-3)^2-4}, \quad \frac{e^{bs} \cdot a}{s^2-a^2}$$

$$o) \frac{1}{s^2-8s+17}, \quad p) \frac{s+4}{s^2+8s+25}, \quad q) \frac{1}{2} \left[\frac{5}{(s+4)^2+25} + \frac{1}{(s+4)^2+1} \right],$$

$$r) \frac{(s^2-6s+34)(s-3)}{[(s-3)^2+49] \cdot [(s-3)^2+1]}, \quad s) \frac{s+1}{s^2+2s+2} \cdot e^{-as}, \quad t) \frac{1}{(s-b)^2+1} e^{-as},$$

$$u) \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{s-1}{(s-1)^2+25} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+25} \right],$$

$$v) \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2s}{s^2-9} - \frac{s-3}{(s-3)^2+4} - \frac{s+3}{(s+3)^2+4} \right], \quad w) \frac{s+3}{s^2+6s+13} \cdot e^{-0,375(s+3)\pi},$$

$$x) \frac{2}{(s+3)^3}, \quad y) \frac{2}{s^3} (1 - e^{-s}), \quad z) \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \quad a_1) \frac{1}{s(1-e^{-3s})},$$

$$b_1) \frac{1}{4} \left[\frac{2}{s^2-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+36} - \frac{s+1}{(s+1)^2+36} \right].$$

5. a) $\frac{24}{(s+1)^5}$, b) $\frac{6}{(s-2)^4}$, c) $\frac{1+5s}{s^2}e^{-5s}$, d) $\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)e^{-3s}$,
 e) $\frac{2}{(s-3)(s^2-6s+13)}$, f) $\frac{2s(s^2+3\omega^2)}{(s^2-\omega^2)^3}$, g) $\frac{2\omega(3s^2+\omega^2)}{(s^2-\omega^2)^3}$,
 h) $\frac{s+2}{s^2+4s+13}e^{-\frac{\pi}{3}(s+2)}$, i) $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}e^{-\frac{\delta}{\omega}s}$, j) $\frac{s}{s^2-\omega^2}e^{-\frac{\delta}{\omega}s}$, k) $\frac{n!a^n}{s^{n+1}}e^{-\frac{b}{a}s}$,
 l) $\frac{48}{s^4}e^{-\frac{5}{2}s}$, m) $\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{s^2+1}\right]e^{-\frac{\pi}{2}s}$, n) $\left(\frac{6}{s^4} + \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{8}{s}\right)e^{-2s}$,
 o) $\frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}$, p) $\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)e^{-2s} - \left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\right)e^{-4s}$, r) $\frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2}$,
 s) $\frac{s^2+8}{s^2(s^2+16)}$.

6. a) $\frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-8s})$, b) $\frac{1}{s^2}(e^{-s} + s - 1)$, c) $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}$,
 d) $\frac{1-e^{-2s}}{s^2+s}$, e) $\frac{s}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})$, f) $\frac{s}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right)$, g) $\frac{(1-e^{-as})^2}{2s^2}$,
 g) $\frac{1}{2s^2}(-4ase^{-2as} + 2ase^{-as} - e^{-2as} + 1)$, h) $\frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s+1}-1}{s-1}$,
 i) $\frac{2}{s^3} - \frac{s^2+2s+2}{s^3}e^{-s}$, j) $\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s}e^{-2s}$,
 k) $e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{1-y}{s^2s}\right) - \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1-y}{s^2s}\right)e^{-s}$, l) $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right)$,
 m) $\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right) \cdot (1+e^{-s})$, n) $\frac{1}{4s^2}(1-2e^{-as}+e^{-2as}) = \frac{(1-e^{-as})^2}{4s^2}$,
 o) $\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$, p) $\frac{2}{s^3} - \left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)e^{-3s}$.

7. a) $\frac{s}{s^2+1}e^{-2s}$, $\frac{e^{-2s}}{s^2+1}(s \cdot \cos 2 - \sin 2)$, $\frac{1}{s^2+1}(s \cdot \cos 2 + \sin 2)$,

$$\frac{1}{s^2+1} \left[s - (s \cdot \cos 2 - \sin 2) e^{-2s} \right]; \text{ b) } \frac{1}{s^2+1} e^{-\frac{3}{2}\pi s}, -\frac{s}{s^2+1} e^{-\frac{3}{2}\pi s}, \frac{2 \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}s} \right)}{s^2+4},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-s}{s^2+1}; \text{ c) } \frac{e^{-2s}}{s+1}, \frac{e^2}{s+1}, \frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}, \frac{1}{s+1} \left[e^{-(s+1)} - e^{-3(s+1)} \right].$$

$$9. \text{ a) } \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \frac{1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\omega}s}}, \text{ b) } \frac{A}{s} \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{1-e^{-2Ts}}, \text{ c) } \frac{A}{Ts^2} \cdot \frac{1-sTe^{-sT} - e^{-sT}}{1-e^{-sT}},$$

$$\text{d) } \frac{A}{s} \cdot \frac{1-e^{-0,5Ts}}{1-e^{-sT}}, \text{ e) } \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-2\pi s}}, \text{ f) } \frac{A}{s} \cdot \frac{(1-e^{-0,5Ts})^2}{1-e^{-Ts}},$$

$$\text{g) } \frac{A}{s} e^{-0,5sT} \frac{(1-e^{-0,5sT})^2}{1-e^{-sT}}, \text{ h) } -\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \cdot \frac{e^{-\frac{2\pi}{\omega}s} + e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\omega}s}}, \text{ i) } \frac{2A}{Ts^2} \cdot \frac{(1-e^{-0,5Ts})^2}{1-e^{-Ts}},$$

$$\text{j) } \frac{1}{1-e^{-Ts}} \cdot \left[\frac{A}{s} (1-e^{-Ts}) - \frac{A}{a+s} (1-e^{-T(a+s)}) \right], \text{ k) } \frac{A}{s} \cdot \frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1+e^{-\frac{T}{2}s}}, \text{ l) } \frac{1}{s^2} \operatorname{tgh} \frac{\pi s}{2},$$

$$\text{m) } \frac{1}{s^2} - \frac{\pi}{2s \sinh \frac{\pi s}{2}}.$$

$$10. \text{ a) } \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1+e^{-\frac{T}{2}s}} = \frac{1}{s^2} \cdot \operatorname{tgh} \frac{sT}{4}, \text{ b) } \frac{A}{2l} \left[\frac{2ls+1}{s^2} - \frac{2l}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-2ls}} \right],$$

$$\text{c) } \frac{(1-e^{-\pi s})(a+be^{-\pi s}) - \pi s e^{-\pi s} (a+2be^{-\pi s} - b)}{s^2(1-e^{-2\pi s})}, \text{ d) } \frac{1}{s} - \frac{2 \operatorname{tgh} \pi s}{\pi s^2}, \text{ e) }$$

$$\frac{3a \left(1 - e^{-\frac{2}{3}\pi s} \right) \left(1 - e^{-\frac{4}{3}\pi s} \right)}{2\pi s^2 (1 - e^{-2\pi s})}, \text{ f) } \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left[\frac{e^{-as}(1 - e^{-as})}{as^2} - \frac{e^{-2as}}{s} \right].$$

$$11. \frac{(st_1+1)\tilde{e}^{st_1} - (st_2+1)\tilde{e}^{st_2}}{s^2}.$$

$$12. \text{ a) } f(0^+) = 0, f'(0^+) = 2, f''(0^+) = 3, \text{ b) } f(0^+) = 1, f'(0^+) = 1, f''(0^+) = 1.$$

13. a) $2t + \frac{3}{2}e^{-\frac{5}{4}t}$, b) $\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^4$, c) $\frac{3}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$, d) $2\cos 2t + \sinh 3t$,
- e) $\frac{1}{4}\cos\frac{5}{2}t - \frac{1}{2}\sin\frac{5}{2}t$, f) $1+t^2 - \frac{1}{2}t^3$, g) te^{5t} , h) $te^{-\frac{3}{2}t}$,
- i) $3\cosh 4t + 5\sinh 4t$, j) $2te^{-3t}$, k) $e^{2t}\cos 6t + 2e^{2t}\sin 6t$, l) $e^{-3t}\cos t$,
- m) $e^{-5t}\cosh t$, n) $\frac{1}{6}\sinh\frac{3}{2}t$, o) $2\cosh\frac{3}{\sqrt{2}}t$, p) $A \cdot I(t-3)$,
- r) $e^{3\left(t-\frac{1}{2}\right)} \cdot I\left(t-\frac{1}{2}\right)$, s) $\left(t-\frac{3}{2}\right) \cdot I\left(t-\frac{3}{2}\right)$, t) $I(t-1) \cdot \sin(t-1)$,
- u) $2e^{-t}\cosh t + 3e^{-t}\sinh t$.

3.

Splot funkcji

Pojęcie splotu dwóch funkcji jest szeroko znane i stosowane w praktyce. Splot jest ważnym pojęciem fizycznym i punktem wyjścia do wielu rozważań teoretycznych. W różnych dziedzinach nauki można spotkać również następujące nazwy określające splot: całka superpozycji, całka Duhamela, średnia ważona (bieżąca), funkcja korelacji wzajemnej, wygładzanie czy też rozmywanie [2].

3.1. Określenie i podstawowe własności splotu

Niech funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ zmiennej rzeczywistej t będą funkcjami całkowanymi w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$

Definicja 3.1.1. *Splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ lub splotem jednostronnym nazywamy funkcję $h(t)$ określoną dla $t \geq 0$ następująca całką*

$$h(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3.1.1)$$

W myśl definicji, splot jest operacją, która parze funkcji z pewnego zbioru funkcji przyporządkowuje funkcję z tego zbioru. Operację tworzenia splotu nazywamy *mnożeniem splotowym* lub *splataniem* funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i oznaczamy symbolem $f_1(t) * f_2(t)$ lub $(f_1 * f_2)(t)$.

Mamy więc

$$f_1(t) * f_2(t) \stackrel{def}{=} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3.1.1')$$

W szczególności, splotem oryginałów $f_1(t)$ i $f_2(t)$ nazywamy funkcję $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$ określoną dla $t \in R$ następująco

$$h(t) = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad (3.1.1'')$$

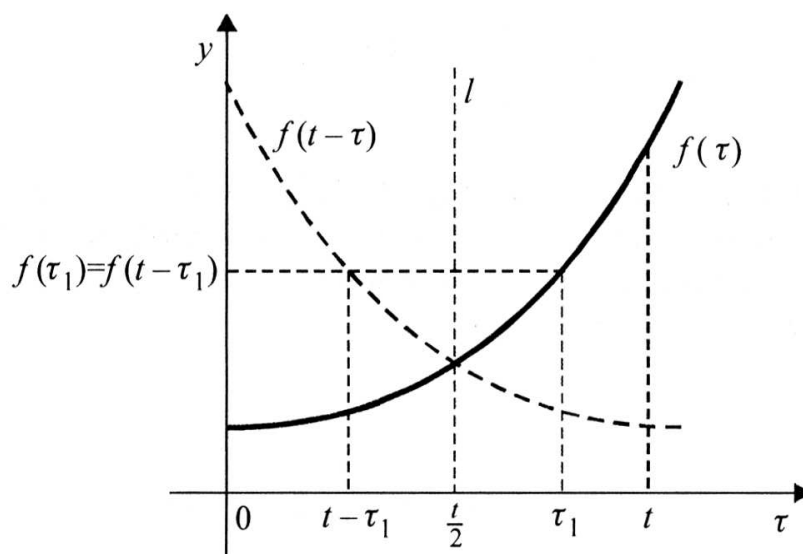
Uwaga 3.1.1. Zwróćmy uwagę, że we wzorze (3.1.1) zmienna t występuje jako górna granica całkowania oraz w funkcji podcałkowej. To powoduje, że funkcja splotu (3.1.1) na ogół nie ma takich własności jak każda całka zależna tylko od górnej granicy całkowania. W szczególności splot nie musi być ciągły dla każdego $t \geq 0$.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie [13]:

Twierdzenie 3.1.1. *Jeżeli chociaż jedna z funkcji $f_1(t)$ lub $f_2(t)$ jest ograniczona w każdym przedziale $\langle 0, T \rangle$, gdzie $T > 0$, to splot $f_1(t) * f_2(t) = h(t)$ istnieje i jest ciągły dla każdego $t \geq 0$, oraz dąży do zera, dla $t \rightarrow 0^+$, tj.*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = 0 \quad (3.1.2)$$

Uwaga 3.1.2. Istnieją różne interpretacje całki splotu. Stosując interpretację geometryczną zauważamy, że funkcje $f(\tau)$ i $f(t-\tau)$ mają w przedziale $\langle 0, t \rangle$ wykresy symetryczne względem prostej l prostopadłej do osi 0τ i przechodzącej przez środek przedziału $\langle 0, t \rangle$, rys. 3.1.



Rys. 3.1. Ilustracje wykresów funkcji $f(\tau)$ i $f(t-\tau)$ w przedziale $\langle 0, t \rangle$.
Wykresy są symetryczne względem prostej l

Z definicji 3.1.1 wynikają następujące własności mnożenia splotowego:

1° Splatanie funkcji jest przemienne, tzn.

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (3.1.3)$$

2° Splatanie funkcji jest łączne, tzn.

$$(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) \quad (3.1.4)$$

3° Splatanie funkcji jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (3.1.5)$$

4° Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są ciągłe w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$, to splot $f_1(t) * f_2(t)$ jest funkcją ciągłą w tym przedziale.

5° Jeżeli $f_1(t) * f_2(t) = 0$ w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$, to $f_1(t) = 0$ lub $f_2(t) = 0$ prawie wszędzie w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$.

6° Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są oryginałami, to splot $f_1(t) * f_2(t) = h(t)$ jest oryginałem.

7° Mnożenie splotowe dowolnego oryginału $f(t)$ przez funkcję jednostkową $I(t)$ jest równoważone z całkowaniem funkcji $f(\tau)$ w przedziale $\langle 0, t \rangle$, tzn.

$$f(t) * I(t) = I(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (3.1.6)$$

Uwaga 3.1.3. W dziedzinie funkcji nie istnieje *moduł mnożenia splotowego*, tj. nie istnieje taka funkcja $g(t)$, dla której $g(t) * f(t) = f(t) * g(t) = f(t)$ dla każdego $t \geq 0$ (tzn. nie istnieje funkcja spełniająca rolę jedynek w zwykłym mnożeniu). W rozdziale 6 wykażemy, że *elementem neutralnym* (lub *modułem*) mnożenia splotowego jest tzw. δ -funkcja (*delta Diraca*), którą oznaczamy symbolem $\delta(t)$, tzn.

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t) \quad (3.1.7)$$

dla każdego oryginału $f(t)$ [13, 23].

Przykład 3.1. Korzystając z definicji 3.1.1 oraz z własności splotu wyznaczyć splot $f_1(t) * f_2(t) = h(t)$ dla następujących oryginałów:

- a) $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sin t$, b) $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + e^{-3t}$,
 c) $f_1(t) = me^{-at}$, $f_2(t) = ne^{-bt}$, $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$, $n > 0$.

R o z w i ą z a n i e . a) Zgodnie z definicją splotu ze wzoru (3.1.1), a następnie całkując przez części otrzymamy

$$t * \sin t = \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau = [\tau \cos(t - \tau) + \sin(t - \tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} = t - \sin t$$

Zatem

$$h(t) = t * \sin t = \begin{cases} t - \sin t & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

b) Korzystając z własności rozdzielności mnożenia splotowego względem dodawania (3.1.5) oraz z własności przemienności (3.1.3), a następnie ze wzoru (3.1.1) wyznaczmy funkcję $h(t)$, która jest splotem funkcji $f_1(t) = t$ i $f_2(t) = t + e^{-3t}$.

Zgodnie z powyższym mamy

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= t * (t + e^{-3t}) = t * t + t * e^{-3t} = t * t + e^{-3t} * t = \\ &= \int_0^t \tau(t - \tau) d\tau + \int_0^t e^{-3\tau}(t - \tau) d\tau = t \int_0^t \tau d\tau - \int_0^t \tau^2 d\tau + t \int_0^t e^{-3\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{-3\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy

$$h(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{9}, \quad t \geq 0.$$

c) Zgodnie z określeniem splotu ze wzoru (3.1.1) oraz z własności funkcji wykładniczej mamy

$$\begin{aligned} h(t) &= me^{-at} * ne^{-bt} = mn \int_0^t e^{-a\tau} e^{-b(t-\tau)} d\tau = mne^{-bt} \int_0^t e^{-(a-b)\tau} d\tau = \\ &= mn \frac{e^{-bt}}{b-a} e^{-(a-b)\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = mn \frac{e^{-bt}}{b-a} [e^{-(a-b)t} - 1] = \frac{mn}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}]. \end{aligned}$$

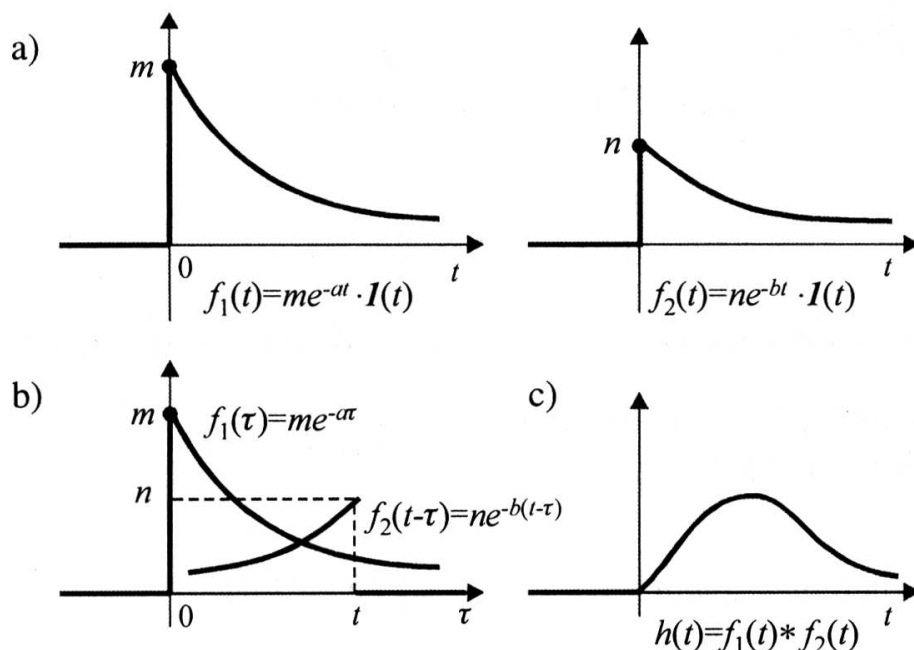
Zatem

$$h(t) = \frac{mn}{b-a} [e^{-at} - e^{-bt}], \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Otrzymany splot $h(t)$ funkcji c) jest różnicą dwóch funkcji wykładniczych o różnych amplitudach "wygaszonych" dla ujemnych t (rys. 3.2). Z funkcją tego typu spotykamy się dość często. Stałe a i b są to tzw. *stałe tłumienia*. Na przykład funkcja ta może opisywać stężenie izotopu radioaktywnego, który rozpada

się ze stałą a i równocześnie powstaje z izotopu macierzystego rozpadającego się ze stałą b . Gdy $t \rightarrow \infty$ wtedy jeden z członów zaniknie i pozostanie pojedyncza funkcja wykładnicza, która znika wolniej. [2]

Z własności przemienności splotu możemy wnioskować, że wynik (1) będzie taki sam, gdy a i b zamienimy miejscami.



Rys. 3.2. Wykresy: a) funkcji $f_1(t)=me^{-at}$, $f_2(t)=ne^{-bt}$, b) funkcji występujących pod znakiem całki splotowej, c) splotu tych funkcji

Rozważmy, jako szczególny przypadek splot $e^{-at} * e^{-at}$. Możemy skorzystać z wyniku (1) i przejść do granicy, gdy $b \rightarrow a$. Otrzymamy wtedy

$$e^{-at} * e^{-at} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} = -\frac{d}{da} (e^{-at}) = te^{-at} \quad (2)$$

Ten sam wynik (2) uzyskamy, jeśli obliczymy ten splot bezpośrednio z definicji 3.1.1, tj.

$$h(t) = e^{-at} * e^{-at} = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_0^t d\tau = te^{-at}.$$

W interpretacji fizycznej funkcja (splot) $h(t) = e^{-at} * e^{-at}$ opisuje odpowiedź układu rezonansowego tłumionego krytycznie na przyłożone wymuszenie impulsowe [2].

Przykład 3.2. Wyznaczyć splot następujących trzech funkcji:

$$I(t) * I(t) * t^2$$

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że definicja splotu określona jest dla dwóch funkcji. Jednakże wyznaczenie splotu trzech funkcji nie przedstawia żadnego problemu, gdyż korzystając z własności łączności splotu (wzór 3.1.4), iloczyn ten można zapisać w postaci

$$I(t) * I(t) * t^2 = (I(t) * I(t)) * t^2 \quad (1)$$

lub

$$I(t) * I(t) * t^2 = I(t) * (I(t) * t^2) \quad (2)$$

- | | |
|---|--|
| 1. Korzystamy z równości (1) | $I(t) * I(t) * t^2 = (I(t) * I(t)) * t^2 =$ |
| 2. Stosujemy definicję 3.1.1 do splotu w nawiasie i całkujemy | $= \left(\int_0^t d\tau \right) * t^2 = t * t^2 =$ |
| 3. Stosujemy definicję splotu 3.1.1 | $= \int_0^t \tau (t - \tau)^2 d\tau =$ |
| 4. Podnosimy do kwadratu i rozpisujemy na sumę całek | $= t^2 \int_0^t \tau d\tau - 2t \int_0^t \tau^2 d\tau + \int_0^t \tau^3 d\tau =$ |
| 5. Całkujemy w granicach od $\tau = 0$ do $\tau = t$ | $= \frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4.$ |

Zatem szukany splot $h(t)$ wyraża się wzorem

$$h(t) = \frac{1}{12}t^4, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

U w a g a 1. Korzystając z własności przemienności (3.1.3) splot $t * t^2$ uzyskany w etapie 2 rozwiązania można wyznaczyć następującą prostszą całką

$$t * t^2 = \int_0^t \tau^2 (t - \tau) d\tau = \int_0^t (\tau^2 t - \tau^3) d\tau = t \int_0^t \tau^2 d\tau - \int_0^t \tau^3 d\tau = \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

dla $t \geq 0$, co jest zgodne z wynikiem (3).

U w a g a 2. Zadanie to można rozwiązać innym sposobem, jeśli skorzystamy z przedstawienia szukanego splotu $h(t) = I(t) * I(t) * t^2$ wzorem (2).

1. Niech
$$h(t) = I(t) * (I(t) * t^2) =$$
2. Ze wzoru (3.1.6) zastosowanego do splotu w nawiasie mamy
$$= I(t) * \int_0^t \tau^2 d\tau =$$
3. Całkujemy po zmiennej τ w granicach od $\tau = 0$ do $\tau = t$
$$= I(t) * \left(\frac{1}{3} t^3 \right) =$$
4. Korzystamy z jednorodności oraz def. splotu 3.1.1 lub ponownie ze wzoru (3.1.6)
$$= \frac{1}{3} I(t) * t^3 = \frac{1}{3} \int_0^t \tau^3 d\tau$$
5. Całkujemy i otrzymujemy
$$h(t) = \frac{1}{12} t^4, \quad t \geq 0.$$

Otrzymaliśmy ten sam wynik (porównaj wzór (3)).

■

Przykład 3.3. Wyznaczyć splot $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$.

R o z w i ą z a n i e . Funkcję $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ rozważaliśmy w rozdziale 2. (por.

przykład 2.8). Jest to funkcja nieokreślona dla $t = 0$, (bo $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$), ale jest

funkcją całkowaną w każdym przedziale $\langle 0, T \rangle$, gdzie $T > 0$, (bo istnieje

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^T \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{T}).$$

Zgodnie z definicją splotu ze wzoru (3.1.1) dla $t > 0$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t\tau - \tau^2}} d\tau \quad (3.1.9)$$

Zauważmy, że całka splotowa jest całką niewłaściwą, ponieważ punkty $\tau = 0$ oraz $\tau = t$ są punktami osobliwymi funkcji podcałkowej $\varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{t\tau - \tau^2}}$.

Najpierw znajdujemy całkę nieoznaczoną funkcji $\varphi(\tau)$, sprowadzając wyrażenie podpierwiastkowe w mianowniku do postaci kanonicznej i po przekształceniach otrzymujemy

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t\tau - \tau^2}} d\tau = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}t^2 - \left(\tau - \frac{1}{2}t\right)^2}} d\tau = \left. \begin{array}{l} \tau - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}tu \\ d\tau = \frac{1}{2}t du \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u = \arcsin \frac{2\tau - t}{t} = \Phi(\tau).$$

Stałą całkowania pominęliśmy.

Ponieważ funkcja pierwotna $\Phi(\tau)$ zachowuje ciągłość na całym przedziale $\langle 0, t \rangle$, to w szczególności prawdziwy jest wzór [10]

$$\int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0^+}} \int_{\varepsilon_1}^{t-\varepsilon_2} \varphi(\tau) d\tau = \Phi(t) - \Phi(0).$$

Uwzględniając powyższe wyniki w (3.1.9) otrzymamy

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t\tau - \tau^2}} d\tau = \arcsin \frac{2\tau - t}{t} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

Zatem dla $t > 0$ rozważany splot jest funkcją stałą i wynosi

$$\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \pi \quad (3.1.10)$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = \pi \neq 0.$$

■

Uwaga 3.1.4. Jak pokazuje powyższy przykład, splot funkcji nie musi dążyć do zera, dla $t \rightarrow 0^+$ (jest to źródło popularnych błędów). Porównaj twierdzenie 3.1.1 oraz uwaga 3.1.1.

3.2. Transformata splotu

Podamy teraz, przydatne w teorii oraz w zastosowaniach, twierdzenie dotyczące wyznaczania transformaty Laplace'a splotu zwane twierdzeniem Borela.

Twierdzenie 3.2.1 (twierdzenie Borela o splocie). *Jeżeli $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są oryginałami i $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, to istnieje transformata ich splotu, przy czym*

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.2.1)$$

(Dowód, patrz np. [3, 13, 19, 25]).

Wzór (3.2.1) odczytujemy: „transformata splotu dwóch oryginałów jest równa iloczynowi ich transformat”. Oznacza to, że splot funkcji w dziedzinie oryginału staje się po zastosowaniu \mathcal{L} -przekształcenia działaniem mnożenia w dziedzinie obrazu.

Wzór (3.2.1) zapisany w postaci $F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$ odczytujemy: „iloczyn obrazów funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ równa się obrazowi splotu tych funkcji”.

Uwaga 3.2.1. Twierdzenie 3.2.1 pozostaje prawdziwe, jeżeli o funkcjach $f_1(t)$ i $f_2(t)$ założymy, że całki Laplace'a (1.2.1) tych funkcji są bezwzględnie zbieżne w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$. W szczególności twierdzenie 3.2.1 pozostaje prawdziwe, jeśli założymy istnienie splotu $f_1(t) * f_2(t)$ dla każdego $t > 0$.

Wniosek 3.2.1.

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3.2.1, to prawdziwy jest wzór

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) \quad (3.2.2)$$

Wzór (3.2.2) oznacza, że odwrotne przekształcenie Laplace'a z iloczynu dwóch transformat jest równe splotowi ich oryginałów.

Uwaga 3.2.2. a) Twierdzenie Borela w postaci (3.2.2) bywa z reguły stosowane do wyznaczania transformat odwrotnych w przypadkach gdy transformatę $F(s)$ poszukiwanego oryginału $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ można przedstawić w postaci iloczynu dwóch (lub kilku) transformat $F_1(s)$ i $F_2(s)$ funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ znanych lub łatwiejszych do wyznaczenia, których splot łatwo można obliczyć.

Reasumując, mamy wtedy

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] * \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] \quad (3.2.2')$$

b) Wzorem (3.2.2) zapisanym w postaci

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] \quad (3.2.2'')$$

posługujemy się przy wyznaczaniu splotu dwóch funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$, co jest w wielu przypadkach metodą prostszą niż wyznaczanie splotu z definicji 3.1.1 [8, 24].

Przykład 3.4. Zilustrować twierdzenie Borela dla splotu $t * \sin t$.

R o z w i ą z a n i e . Przyjmujemy $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sin t$. Zgodnie z tw. 3.2.1 Borela o splotcie mamy sprawdzić, że transformata splotu $f_1(t) * f_2(t)$ równa się iloczynowi transformat tych funkcji, tzn. w naszym przypadku mamy wykazać, że

$$\mathcal{L}[t * \sin t] = \mathcal{L}[t] \cdot \mathcal{L}[\sin t] \quad (1)$$

Rozpatrujemy najpierw lewą stronę zależności (1).

1. Z przykładu 3.1a i wzoru (3.1.8) mamy $t * \sin t = t - \sin t$ $\mathcal{L}[t * \sin t] = \mathcal{L}[t - \sin t] =$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia (wzór 2.1.1) $= \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[\sin t] =$
3. Korzystamy ze wzorów (1.3.6), (1.3.4) lub odczytujemy z tablic, przekształcamy i otrzymujemy $= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$.

Przechodzimy do obliczenia prawej strony zależności (1). Wyznaczamy transformaty korzystając ze wzorów (1.3.6), (1.3.4) i obliczamy iloczyn

$$\mathcal{L}[t] \cdot \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}.$$

Otrzymaliśmy, że lewa strona (1) równa się prawej stronie wzoru (1), co jest zgodne z tezą twierdzenia Borela, tzn. zależność określona wzorem (3.2.1) jest prawdziwa. ■

Przykład 3.5. Korzystając z twierdzenia 3.2.1 obliczyć transformaty funkcji

$$\text{a) } h(t) = e^{at} * e^{bt}, \quad \text{b) } g(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \sin 2\tau \, d\tau, \quad \text{c) } h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

R o z w i ą z a n i e . a) Mamy wyznaczyć $\mathcal{L}[e^{at} * e^{bt}]$. Zauważmy, że zgodnie z własnością 6^o funkcja $h(t)$ jest oryginałem jako splot oryginałów $f_1(t) = I(t)e^{at}$ i $f_2(t) = I(t)e^{bt}$, a więc jest funkcją \mathcal{L} -transformowalną, tzn. istnieje transformata funkcji $h(t)$. Dla danych oryginałów znajdujemy ich transformaty. Mamy

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[e^{bt}] = \frac{1}{s-b}.$$

Na podstawie twierdzenia Borela, zgodnie ze wzorem (3.2.1) transformata splotu równa się iloczynowi transformat tych funkcji. Zatem

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[e^{at} * e^{bt}] = \mathcal{L}[e^{at}] \cdot \mathcal{L}[e^{bt}] = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b}.$$

Stąd, szukana transformata dana jest wzorem

$$H(s) = \mathcal{L}[e^{at} * e^{bt}] = \frac{1}{(s-a)(s-b)}.$$

b) Zauważmy, że całka określająca funkcję $g(t)$ jest całką typu splotowego tzn. z definicji splotu (3.1.1) mamy

$$g(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \sin 2\tau d\tau = t^2 * \sin 2t.$$

Ponieważ funkcje $g_1(t) = t^2$, $g_2(t) = \sin 2t$ są oryginałami, to ich splot $g(t)$ jest również oryginałem. Stosując do obu stron powyższej zależności przekształcenie Laplace'a otrzymamy

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t (t-\tau)^2 \sin 2\tau d\tau\right] = \mathcal{L}[t^2 * \sin 2t].$$

Następnie korzystając z tzw. twierdzenia Borela – wzór (3.2.1) oraz z faktu, że

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3} \text{ i } \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4} \text{ otrzymamy}$$

$$\mathcal{L}[t^2 * \sin 2t] = \mathcal{L}[t^2] \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Ostatecznie mamy

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{4}{s^3(s^2 + 4)}.$$

c) Funkcja $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$ jest splotem funkcji $f_1(t) = f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, która nie jest oryginałem (por. przykład 2.8). Ale zgodnie z uwagą 3.2.1, twierdzenie Borela jest również prawdziwe przy założeniu, że istnieje splot $f_1(t) * f_2(t)$ dla $t > 0$. Korzystając z wyniku przykładu 3.3 wiemy, że splot $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$ istnieje i jest funkcją stałą, równą π dla każdego $t > 0$ (zobacz wzór 3.1.10).

Zatem, transformatę splotu $h(t)$ można wyznaczyć bezpośrednio, korzystając ze wzoru (3.1.10) oraz z faktu, że $\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s}$. Mamy więc

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \mathcal{L}[\pi] = \pi \cdot \mathcal{L}[I(t)] = \frac{\pi}{s}.$$

Zatem transformata danego splotu c) wyraża się wzorem:

$$H(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\pi}{s} \quad (3.2.3)$$

U w a g a . Rozwiążemy teraz to zadanie innym sposobem. Zastosujemy twierdzenie Borela do splotu $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$ oraz uwzględnimy wynik z przykładu 2.8, na

podstawie którego wiadomo, że transformata $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Mamy zatem

$$H(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] \cdot \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{\pi}{s},$$

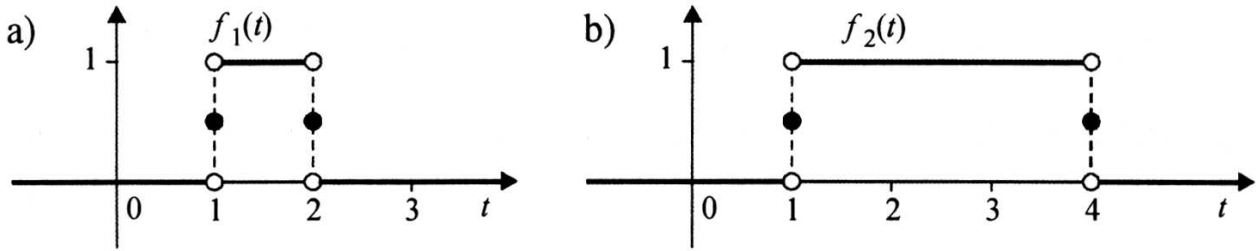
co jest zgodne ze wzorem (3.2.3). ■

Przykład 3.6. Sporządzić wykres oryginałów:

$$f_1(t) = I(t-1) - I(t-2), \quad f_2(t) = I(t-1) - I(t-4),$$

a następnie wyznaczyć i narysować ich splot $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$.

R o z w i ą z a n i e . Na rysunku 3.3 przedstawiono wykresy oryginałów $f_1(t)$ i $f_2(t)$.



Rys. 3.3. a) Wykres oryginału $f_1(t) = I(t-1) - I(t-2)$, b) wykres oryginału $f_2(t) = I(t-1) - I(t-4)$

Zgodnie z uwagą 3.2.2 b szukany splot wyżej wymienionych funkcji znajdziemy na podstawie wniosku 3.2.1 twierdzenia Borela jako odwrotne przekształcenie Laplace'a z iloczynu transformat $F_1(s) \cdot F_2(s)$, tj. ze wzoru (3.2.2)

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] \quad (1)$$

W tym celu dla funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ wyznaczamy ich transformaty $F_1(s)$, $F_2(s)$. Korzystając z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia oraz z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym (wzór 2.6.3) i z faktu, że $\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s}$, otrzymamy

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[I(t-1)] - \mathcal{L}[I(t-2)] = \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-2s}$$

oraz

$$F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[I(t-1)] - \mathcal{L}[I(t-4)] = \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-4s}.$$

Następnie wyznaczamy iloczyn tych transformat i na podstawie tw. Borela ze wzoru (3.2.1) mamy

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-5s} + e^{-6s}).$$

Zgodnie ze wzorem (1) i z liniowości \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} (e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-5s} + e^{-6s}) \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-2s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-3s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-5s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-6s} \right], \end{aligned}$$

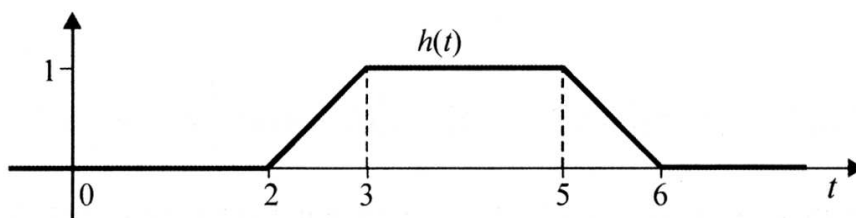
a następnie z faktu, że $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$ i z wniosku 2.6.1 twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym (wzór 2.6.4) otrzymamy, że szukany splot dla $t \in R$ wyraża się wzorem

$$h(t) = f_1(t) * f_2(t) = (t-2) \cdot I(t-2) - (t-3) \cdot I(t-3) + \\ - (t-5) \cdot I(t-5) + (t-6) \cdot I(t-6).$$

Korzystając z definicji 2.1.1 funkcji przesuniętej w dziedzinie rzeczywistej (wzór 2.6.2) wyznaczony splot danych funkcji (tzw. impulsów prostokątnych) zapiszemy następującym wzorem

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 2 \\ t-2 & \text{dla } 2 < t \leq 3 \\ 1 & \text{dla } 3 < t \leq 5 \\ -t+6 & \text{dla } 5 < t \leq 6 \\ 0 & \text{dla } t > 6 \end{cases}$$

Wykres wyznaczonego splotu $h(t)$ przedstawia rysunek 3.4.



Rys. 3.4. Wykres splotu $h(t) = [I(t-1) - I(t-2)] * [I(t-1) - I(t-4)]$

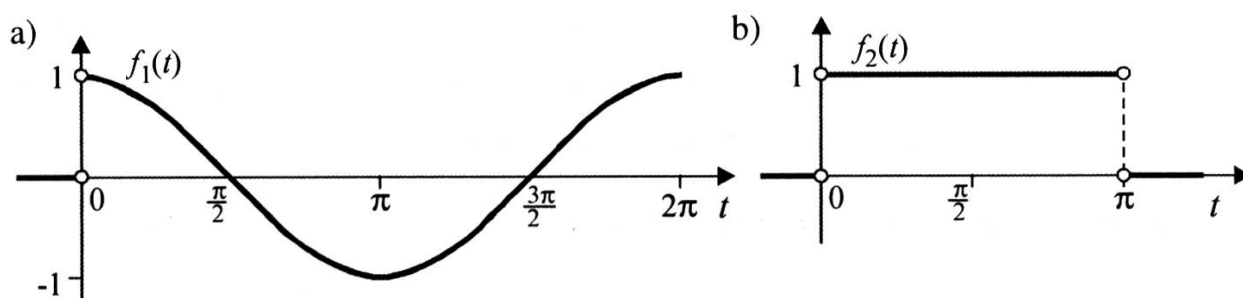
U w a g a . Zauważmy, że funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są nieciągłe odpowiednio w punktach $t=1$, $t=2$ oraz $t=4$, a ich splot $h(t)$ jest funkcją ciągłą w całym zbiorze R .

Przykład 3.7. Wyznaczyć i narysować splot $h(t)$ oryginałów: $f_1(t) = I(t) \cos t$ i $f_2(t) = I(t) - I(t - \pi)$, a następnie obliczyć całkę $I = \int_0^{3\pi} h(t) dt$.

R o z w i ą z a n i e . Przykład rozwiążemy w oparciu o twierdzenie Borela.

Na rysunku 3.5 przedstawiono wykresy funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Jak widać z wykresów oryginał $f_1(t)$ jest nieciągły w punkcie $t = 0$, a oryginał $f_2(t)$ jest nieciągły w punktach $t = 0$ i $t = \pi$. Na podstawie twierdzenia 3.1.1 istnieje spłot $f_1(t) * f_2(t)$ tych funkcji i wyznaczmy go na podstawie twierdzenia Borela o splocie. Ze wzoru (3.2.2") (uwaga 3.2.2) mamy

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] \quad (1)$$



Rys. 3.5. Wykresy oryginałów: a) $f_1(t) = I(t)\cos t$, b) $f_2(t) = I(t) - I(t - \pi)$

Najpierw wyznaczamy transformaty $F_1(s)$ i $F_2(s)$ funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

Mamy więc

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

oraz zgodnie z tw. 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym

$$F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[I(t)] - \mathcal{L}[I(t - \pi)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\pi s}.$$

Następnie wyznaczamy iloczyn tych transformat i na podstawie tw. Borela ze wzoru (3.2.1.) mamy

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{s}{s^2 + 1} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} \right) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\pi s}.$$

Stosując do obu stron powyższej zależności odwrotne przekształcenie Laplace'a zgodnie ze wzorem (1) mamy

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} e^{-\pi s} \right].$$

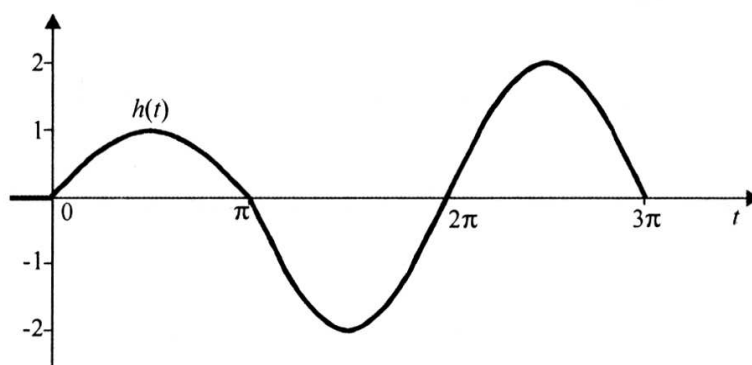
Korzystając kolejno z liniowości \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia, potem ze wzoru $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t \cdot I(t)$ oraz z wniosku 2.6.1 tw. 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym, na podstawie wzoru (2.6.4) otrzymamy ostatecznie

$$h(t) = f_1(t) * f_2(t) = I(t)\sin t - I(t - \pi)\sin(t - \pi) \quad \text{dla } t \in R.$$

Uwzględniając definicję 2.1.1 (wzór 2.6.2) funkcję $h(t)$, będącą splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ przedstawionych na rysunku 3.5, możemy zapisać wzorem

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \sin t & \text{dla } 0 \leq t < \pi \\ 2 \sin t & \text{dla } t \geq \pi \end{cases} \quad (2)$$

Na rysunku 3.6 przedstawiono wykres splotu (2)



Rys. 3.6. Wykres splotu $h(t) = f_1(t) * f_2(t) = I(t) \sin t - I(t - \pi) \sin(t - \pi)$

Obliczamy teraz całkę

$$I = \int_0^{3\pi} h(t) dt = \int_0^{\pi} \sin t dt + 2 \int_{\pi}^{3\pi} \sin t dt = -\cos t \Big|_{t=0}^{t=\pi} - 2 \cos t \Big|_{t=\pi}^{t=3\pi} = 2$$

■

3.3. Całki Duhamela

W wielu zagadnieniach doniosłe znaczenie i zastosowanie ma *pochozna splotu*

$$\frac{d}{dt}(f_1(t) * f_2(t)) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.3.1)$$

zwana *całką Duhamela*, gdzie $f_1(t), f_2(t)$ są oryginałami.

Jeśli założymy, że funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mają dla $t > 0$ ciągle pochodne, to na podstawie twierdzenia Leibniza o różniczkowaniu całki względem parametru (zob. np. [1, 10]) oraz z definicji splotu mamy

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) = f_1(t) f_2(0^+) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) d\tau \quad (3.3.2)$$

Zależność (3.3.2) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} (f_1(t) * f_2(t)) = f_1(t) f_2(0^+) + f_1(t) * f_2'(t) \quad (3.3.2')$$

Analogicznie korzystając z przemienności splotu otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right) = f_1(0^+) f_2(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (3.3.3)$$

Zależność (3.3.3) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} (f_1(t) * f_2(t)) = f_1(0^+) f_2(t) + f_1'(t) * f_2(t) \quad (3.3.3')$$

Zależności (3.3.2) i (3.3.3) określające pochodną splotu nazywamy *całkami Duhamela* [9, 13].

Przykład 3.8. Korzystając z całek Duhamela obliczyć pochodną splotu $f_1(t) * f_2(t)$ dla funkcji $f_1(t) = t$ i $f_2(t) = \cos t$.

R o z w i ą z a n i e . Funkcje $f_1(t) = t$ oraz $f_2(t) = \cos t$ są oryginałami ciągłymi dla $t > 0$, $f_1(0^+) = 0$, $f_2(0^+) = 1$ oraz ich pochodne $f_1'(t) = 1$ i $f_2'(t) = -\sin t$ są funkcjami ciągłymi dla $t > 0$. Zatem słuszny jest wzór (3.3.2') i odpowiednio (3.3.3'). Stosując wzór (3.3.3'), a następnie def. 3.1.1 mamy

$$\frac{d}{dt} (t * \cos t) = 0 \cdot \cos t + I(t) * \cos t = \int_0^t \cos \tau d\tau = \sin t \quad (1)$$

■

U w a g a 1. Ten sam wynik uzyskamy, jeśli zastosujemy wzór (3.3.2') oraz uwzględnimy wynik z przykładu 3.1 (wzór 3.1.8). Otrzymamy wtedy

$$\frac{d}{dt} (t * \cos t) = t \cdot 1 - t * \sin t = t - (t - \sin t) = \sin t \quad (2)$$

U w a g a 2. Zadanie to można rozwiązać bezpośrednio nie korzystając ze wzorów (3.3.2) i (3.3.3), tzn. najpierw wyznaczamy splot $h(t) = t * \cos t$, a potem obliczamy jego pochodną. Ponieważ $t * \cos t = 1 - \cos t$ (patrz przykład 3.9), to $\frac{d}{dt}(t * \cos t) = \frac{d}{dt}(1 - \cos t) = \sin t$, co jest zgodne z wynikami otrzymanymi w (1) i (2).

Twierdzenie Borela w połączeniu z twierdzeniem 2.2.1 o transformacie pochodnej pozwala wyznaczyć transformatę pochodnej splotu (całki Duhamela) danej wzorem (3.3.2) lub (3.3.3).

Twierdzenie 3.3.1 (Duhamela). *Jeżeli funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są oryginalami i przynajmniej jedna z nich jest różniczkowalna oraz spełnione są założenia twierdzenie Borela, to całka Duhamela (3.3.2) jest \mathcal{L} -transformowalna i jej transformata wyraża się wzorem*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f_1(t) * f_2(t))\right] = s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.3.4)$$

Stąd oraz z jednoznaczności odwrotnego przekształcenia Laplace'a – wzór (1.4.4), zgodnie ze wzorami (3.3.2) lub (3.3.3), mamy następujący wniosek [13]:

Wniosek 3.3.1.

$$\frac{d}{dt}(f_1(t) * f_2(t)) = \mathcal{L}^{-1}[s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)] \quad (3.3.5)$$

tzn.

$$\mathcal{L}^{-1}[s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(0^+)f_2(t) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t - \tau) d\tau \quad (3.3.6)$$

lub

$$\mathcal{L}^{-1}[s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t)f_2(0^+) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t - \tau) d\tau \quad (3.3.7)$$

Uwaga 3.3.1. Zależność (3.3.4) jest prawdziwa, jeśli splot spełnia warunek (3.1.2) tw. 3.1.1, tj. $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_1(t) * f_2(t) = 0$, co zachodzi np. w przypadku gdy funkcje $f_1(t)$, $f_2(t)$ są ograniczone w sąsiedztwie zera. Przykładem funkcji,

których splot nie spełnia tego warunku, są funkcje $f_1(t) = f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (zobacz przykład 3.3 oraz uwaga 3.1.4). Zatem dla pochodnej $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ nie jest spełniona równość (3.3.4), co łatwo sprawdzić korzystając ze wzorów (2.2.8) i (3.1.10).

Splot umożliwia wyznaczenie w dziedzinie czasu zależności między sygnałem wyjściowym a sygnałem wejściowym za pośrednictwem odpowiedzi impulsowej układu. Podobną rolę, ale w odniesieniu do odpowiedzi jednostkowej odgrywa pochodna splotu.

Uwaga 3.3.2. Twierdzenia 3.2.1 oraz 3.3.1 znajdują zastosowania przy rozwiązywaniu wielu zagadnień fizycznych. Na przykład, stosując twierdzenie Borela o splotcie do obwodów elektrycznych, można otrzymać związek między prądem $A(t)$, wywołanym w pewnym punkcie układu przez napięcie stałe, a prądem $i(t)$ wywołanym w tym samym punkcie układu przez napięcie $u(t)$. Zagadnienie to prowadzi do uzyskania równania

$$i(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t u(\tau) A(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.3.7)$$

z którego za pomocą jednego ze wzorów (3.3.6) lub (3.3.7) można obliczyć prąd $i(t)$ [9, 21].

Przykład 3.9. Sprawdzić słuszność wzoru (3.3.4) na przykładzie splotu $t * \cos t$ z przykładu 3.8.

R o z w i ą z a n i e. Korzystając z wyników przykładu 3.8 mamy

$$\frac{d}{dt} (t * \cos t) = \sin t \quad (1)$$

Stosując do obu stron (1) przekształcenie Laplace'a mamy, że lewa strona wzoru (3.3.4) równa się

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} (t * \cos t) \right] = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (2)$$

Oznaczamy przez $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \cos t$ i obliczamy ich transformaty

$$F_1(s) = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad F_2(s) = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1},$$

a następnie podstawiamy do prawej strony wzoru (3.3.4) i otrzymujemy

$$s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s) = s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (3)$$

Zatem, jeśli prawe strony zależności (2) i (3) są sobie równe, to i lewe strony są sobie równe, co potwierdza prawdziwość wzoru (3.3.4). ■

Przykład 3.10. Wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ funkcji $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$

korzystając: a) z twierdzenia Borela, b) z całki Duhamela.

R o z w i ą z a n i e .

a) W oparciu o twierdzenie Borela. Zgodnie z uwagą 3.2.2 transformatę $F(s)$ należy przedstawić w postaci iloczynu $F_1(s) \cdot F_2(s)$ odpowiednio dobranych funkcji $F_1(s) = \frac{1}{s}$ i $F_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$.

1. Niech
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$
2. Stosujemy obustronnie odwrotne przekształcenie Laplace'a
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}\right] =$$
3. Stosujemy twierdzenie Borela – wzór (3.2.2')
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right]$$
4. Korzystamy ze wzorów (1.4.6), (1.4.9) lub odczytujemy z tablic transformaty odwrotne
$$f(t) = I(t) * \sin t \quad (1)$$
5. Stosujemy definicję splotu (3.1.1) i całkujemy względem zmiennej τ
$$f(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = 1 - \cos t .$$

Zatem szukany oryginał wyraża się wzorem

$$f(t) = 1 - \cos t, \quad t > 0 \quad (2)$$

U w a g a 1. Przedstawimy teraz drugi sposób rozwiązania tego zadania. Zauważmy, że transformatę $F(s)$ można przedstawić w postaci iloczynu

$G_1(s) \cdot G_2(s)$ następujących funkcji $G_1(s) = \frac{1}{s^2}$ i $G_2(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$.

1. Niech
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$
2. Stosujemy obustronnie odwrotne przekształcenie Laplace'a
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}\right] =$$
3. Stosujemy twierdzenie Borela – wzór (3.2.2)
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] = g_1(t) * g_2(t)$$
4. Wyznaczamy transformaty odwrotne $g_1(t) = t$, $g_2(t) = \cos t$
$$f(t) = t * \cos t = \tag{3}$$
5. Stosujemy definicję splotu (3.1.1) i całkujemy przez części względem zmiennej τ
$$= \int_0^t \tau \cos(t - \tau) d\tau = 1 - \cos t.$$

Jest to zgodne z wynikiem (2).

Wniosek. Porównując prawe strony wzorów (1) i (3) mamy następujący związek między splotami

$$I(t) * \sin t = t * \cos t \tag{4}$$

który odczytujemy: pierwszy czynnik drugiego splotu jest całką, a drugi czynnik jest pochodną odpowiedniego czynnika pierwszego splotu (por. wzory 3.3.2' i 3.3.3'), tj.

$$f_1(t) * f_2(t) = g_1(t) * g_2(t) \quad \text{gdzie} \quad g_1'(t) = f_1(t), \quad \text{a} \quad g_2(t) = f_2'(t).$$

b) Na podstawie całki Duhamela. Aby wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ korzystamy ze wzoru (3.3.4') i transformatę $F(s)$ przedstawiamy w postaci iloczynu $F(s) = s \cdot F_1(s) \cdot F_2(s)$ odpowiednio dobranych funkcji $F_1(s)$ i $F_2(s)$. Niech zatem

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1},$$

gdzie
$$F_1(s) = \frac{1}{s^2}, \quad F_2(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a wyznaczamy oryginały

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \quad \text{oraz} \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \sin t$$

i obliczamy $f_2(0^+) = 0$ oraz $f_2'(t) = \cos t$.

Następnie korzystając ze wzorów (3.3.5) i (3.3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right] = \frac{d}{dt} (t * \sin t) = \\ &= 0 \cdot \cos t + \int_0^t (t - \tau) \cos \tau d\tau = [(t - \tau) \sin \tau - \cos \tau]_{\tau=0}^{\tau=t} = 1 - \cos t \end{aligned}$$

■

Czytelnika chcącego poszerzyć wiadomości z zakresu tego rozdziału odsyłam do literatury [2, 13, 21, 24].

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wykazać, że splot funkcji jest a) przemienne – wzór (3.1.3), b) łączny – wzór (3.1.4).

2. Wykazać, że splot ma następującą własność

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) * f_3 = c_1 f_1 * f_3 + c_2 f_2 * f_3, \text{ gdzie } c_1, c_2 \text{ stałe.}$$

3. Wyznaczyć splot $h(t) = \sin^2 at * t^3 + t^3 * \cos^2 at$ korzystając z własności podanej w zadaniu 1 i 2.

4. Wykazać, że jeżeli funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są oryginałami, to ich splot $(f_1 * f_2)(t)$ jest także oryginałem.

5. Obliczyć splot $f_1(t) * f_2(t)$ dla danych oryginałów:

a) $f_1(t) = \mathbf{I}(t)$ $f_2(t) = \sin t$ b) $f_1(t) = t$ $f_2(t) = \cos 3t$

c) $f_1(t) = t$ $f_2(t) = e^{2t}$ d) $f_1(t) = t^2$ $f_2(t) = e^t$

e) $f_1(t) = \sin t$ $f_2(t) = \sin t$ f) $f_1(t) = \mathbf{I}(t)$ $f_2(t) = \sqrt{1+t}$

g) $f_1(t) = 1 - at$ $f_2(t) = e^{at}$ h) $f_1(t) = e^{ct}$ $f_2(t) = at + b$

i) $f_1(t) = \sin t$ $f_2(t) = \cos t$ j) $f_1(t) = t$ $f_2(t) = \arctg t$

k) $f_1(t) = e^t$ $f_2(t) = e^{2t}$ l) $f_1(t) = \cos 3t$ $f_2(t) = \cos t$

m) $f_1(t) = t$ $f_2(t) = e^{-t}$ n) $f_1(t) = t^2$ $f_2(t) = \sin t$.

6. Dla danych splotów zilustrować twierdzenie Borela o splotcie:

a) $t * t^2$

b) $t^2 * \cos t$

c) $e^t * e^t$

d) $t * \sin 2t$

e) $\sin t * e^t$

f) $\cos t * e^{2t}$.

7. Obliczyć \mathcal{L} -transformatę funkcji $f(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right]$ stosując twierdzenie Borela do

splotu $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$.

8. Wyznaczyć \mathcal{L} -transformatę oryginału stosując twierdzenie Borela o splotcie:

a) $h(t) = t * \cos 4t$

b) $h(t) = e^{3t} * e^{4t}$

c) $h(t) = t^3 * e^{-4t}$

d) $g(t) = \int_0^t (t - \tau) e^{2\tau} d\tau$

e) $g(t) = \int_0^t (t - \tau) \sinh 3\tau d\tau$

f) $g(t) = \int_0^t \frac{\sin(t - \tau)}{\sqrt{\pi\tau}} d\tau$.

9. Na podstawie twierdzenia Borela o splotcie wyznaczyć transformatę odwrotną (oryginał) dla danej transformaty $F(s)$:

a) $F(s) = \frac{1}{(s+7)(s+4)}$

b) $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + a^2)}$

c) $F(s) = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$

d) $F(s) = \frac{5s}{(s^2 + 1)(s-1)}$

e) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$

f) $F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$

g) $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + 4)}$

h) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}$

i) $F(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\arctg t]$

j) $F(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[\ln(1+t)]$

k) $F(s) = \frac{b^2}{(s^2 + b^2)^2}$

l) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + b^2)^2}$

$$\text{m) } F(s) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$

$$\text{n) } F(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$$

$$\text{o) } F(s) = \frac{s^2}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

$$\text{p) } F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$\text{r) } F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)} .$$

10. Na podstawie twierdzenia Borela o splocie funkcji dowieść, że

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f(t)]$$

(wzór (2.2.9) tw. 2.2.3 o transformacie całki).

11. Sporządzić wykres oryginałów $f_1(t)$ i $f_2(t)$, a następnie wyznaczyć i narysować splot $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$:

$$\text{a) } f_1(t) = f_2(t) = \mathbf{I}(t-1) - \mathbf{I}(t-3)$$

$$\text{b) } f_1(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-2)$$

$$\text{oraz } f_2(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-1),$$

$$\text{c) } f_1(t) = [\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-\pi)] \cdot \sin t$$

$$\text{oraz } f_2(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-3\pi),$$

$$\text{d) } f_1(t) = [\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-\pi)] \cdot \sin t$$

$$\text{oraz } f_2(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-\pi),$$

$$\text{e) } f_1(t) = [\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-1)] \cdot (1-t)$$

$$\text{oraz } f_2(t) = 2 \cdot [\mathbf{I}(t-1) - \mathbf{I}(t-2)],$$

$$\text{f) } f_1(t) = \mathbf{I}(t) \cos t$$

$$\text{oraz } f_2(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{g) } f_1(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-1)$$

$$\text{oraz } f_2(t) = [\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-2)] \cdot t,$$

$$\text{h) } f_1(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-2)$$

$$\text{oraz } f_2(t) = \mathbf{I}(t) \cdot e^{-t},$$

12. Dana jest \mathcal{L} -transformata $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$ oryginału $f(t)$

a) wyznaczyć oryginał $f(t)$,

b) wyznaczyć pochodną $f'(t)$,

c) wyznaczyć zbiór $W = \{t \in \mathbb{R} : f'(t) = 0\}$,

d) wyznaczyć ekstrema właściwe oryginału $f(t)$ oraz sumę szeregu, którego wyrazami są wartości (wszystkie) tych ekstremów.

13. Korzystając z tw. 3.3.1 i całki Duhamela obliczyć oryginały następujących transformacji:

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{s(s-3)}, \quad \text{b) } F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)},$$

$$\text{c) } F(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)}, \quad \text{d) } F(s) = \frac{2}{s^3(s^2+1)}.$$

14. Wykazać, że dla całki Duhamela $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ nie jest spełniony wzór (3.3.4) tw. 3.3.1.

Odpowiedzi:

$$3. h(t) = \frac{1}{4} t^4$$

$$5. \text{ a) } 1 - \cos t, \quad \text{b) } \frac{1}{9}(1 - \cos 3t), \quad \text{c) } \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{4},$$

$$\text{d) } 2e^t - t^2 - 2t - 2, \quad \text{e) } \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t), \quad \text{f) } \frac{2}{3} \left[\sqrt{(1+t)^3} - 1 \right],$$

$$\text{g) } t, \quad \text{h) } \frac{1}{c^2} [(bc - a)(1 - e^{ct}) - act], \quad \text{i) } -\frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t,$$

$$\text{j) } \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} (t^2 - 1) \operatorname{arctg} t + -\frac{1}{2} t \ln(1 + t^2), \quad \text{k) } e^{2t} - e^t,$$

$$\text{l) } \frac{1}{8} (3 \sin 3t - \sin t), \quad \text{m) } t - 1 + e^{-t}, \quad \text{n) } 2 \cos t + t^2 - 2$$

$$8. \text{ a) } \frac{1}{s \cdot (s^2 + 16)}, \quad \text{b) } \frac{1}{s^2 - 7s + 12}, \quad \text{c) } \frac{6}{s^4 (s + 4)}, \quad \text{d) } \frac{1}{s^2 (s - 2)},$$

$$\text{e) } \frac{3}{s^2 (s^2 - 9)}, \quad \text{f) } \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$9. \text{ a) } f(t) = \frac{1}{3} (e^{-4t} - e^{-7t}), \quad \text{b) } f(t) = \frac{1}{a^2} t - \frac{1}{a^3} \sin at, \quad \text{c) } f(t) = t \cdot \sin 2t,$$

$$\text{d) } f(t) = \frac{5}{2} (\sin t - \cos t + e^t), \quad \text{e) } t - \sin t, \quad \text{f) } f(t) = e^t - t - 1,$$

$$\text{g) } f(t) = \frac{1}{10}(\sin 2t - 2 \cos 2t + 2e^{-t}), \quad \text{h) } f(t) = \frac{1}{2}(\sin t + t \cos t),$$

$$\text{i) } \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(t^2 - 1) \operatorname{arctg} t + -\frac{1}{2}t \ln(1 + t^2), \quad \text{j) } f(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}(t+1)^2 \ln(t+1)$$

$$\text{k) } \frac{1}{2b}(\sin bt - bt \cos bt), \quad \text{l) } \frac{1}{2b}(\sin bt + bt \cos bt) \quad \text{m) } t \cos bt,$$

$$\text{n) } t * e^{-2t} = \frac{1}{4}(2t - 1) + \frac{1}{4}e^{-2t}, \quad \text{o) } \cos t * \cos t = \frac{1}{2}(t \cos t + \sin t),$$

$$\text{p) } \cos t * \sin t = \frac{1}{2}t \sin t, \quad \text{r) } e^{-2t} * te^t = \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t)$$

$$11. \text{a) } h(t) = (t - 2) \cdot I(t - 2) - 2(t - 4) \cdot I(t - 4) + (t - 6) \cdot I(t - 6), \quad t \in R,$$

$$\text{b) } h(t) = t \cdot I(t) - (t - 1) \cdot I(t - 1) - (t - 2) \cdot I(t - 2) + (t - 3) \cdot I(t - 3),$$

$$\text{c) } h(t) = I(t) - I(t) \cos t + I(t - \pi) - I(t - \pi) \cos(t - \pi) - I(t - 3\pi) + \\ + I(t - 3\pi) \cos(t - 3\pi) - I(t - 4\pi) + I(t - 4\pi) \cos(t - 4\pi),$$

$$\text{czyli } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ 1 - \cos t & \text{dla } 0 < t \leq \pi \\ 2 & \text{dla } \pi < t \leq 3\pi \\ 1 - \cos t & \text{dla } 3\pi < t \leq 4\pi \\ 0 & \text{dla } t > 4\pi \end{cases},$$

$$\text{d) } h(t) = (1 - \cos t)[I(t) - I(t - 2\pi)],$$

$$\text{e) } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 1 \\ -t^2 + 4t - 3 & \text{dla } 1 < t \leq 2 \\ t^2 - 6t + 9 & \text{dla } 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{dla } t > 3 \end{cases}$$

lub w postaci

$$h(t) = 2(t - 1) \cdot I(t - 1) - (t - 1)^2 \cdot I(t - 1) - 2(t - 2) \cdot I(t - 2) + \\ + 2(t - 1)^2 \cdot I(t - 2) - (t - 3)^2 \cdot I(t - 3), \quad t \in R,$$

$$\text{f) } h(t) = I(t) \sin t - I\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = I(t) \sin t + I\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t,$$

$$\text{czyli } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ \sin t & \text{dla } 0 < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin t + \cos t & \text{dla } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{g) } h(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \mathbf{I}(t) - \frac{1}{2} (t-1)^2 \cdot \mathbf{I}(t-1) - 2(t-2) \cdot \mathbf{I}(t-2) + \\ - \frac{1}{2} (t-2)^2 \cdot \mathbf{I}(t-2) + \frac{1}{2} (t-3)^2 \cdot \mathbf{I}(t-3) + 2(t-3) \cdot \mathbf{I}(t-3),$$

$$\text{h) } h(t) = \mathbf{I}(t-1) - e^{-(t-1)} \cdot \mathbf{I}(t-1) - \mathbf{I}(t-2) + e^{-(t-2)} \cdot \mathbf{I}(t-2).$$

$$12.\text{a) } f(t) = \mathbf{I}(t) e^{-t} \sin t \quad \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

$$\text{b) } f'(t) = 0 \quad \text{dla każdego } t < 0; \quad f'(t) = e^{-t} (\cos t - \sin t) \quad \text{dla każdego } t > 0.$$

Pochodna $f'(0)$ nie istnieje, przy czym $f'(0^-) = 0$ oraz $f'(0^+) = 1$.

$$\text{c) } W = (-\infty; 0) \cup \left\{ t : t = \frac{\pi}{4} + \pi k \wedge k = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

$$\text{d) Oryginał } f \text{ ma ekstrema właściwe w punktach } t_k = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, maksima dla $k = 0, 2, 4, \dots$ oraz minima dla $k = 1, 3, 5, \dots$,

$$f(t_k) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{2} \pi k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{\pi} + 1} \quad (\approx 0,31).$$

$$13.\text{a) } \frac{1}{3}(e^{3t} - 1), \quad \text{b) } t - \sin t, \quad \text{c) } \sinh t - t, \quad \text{d) } t^2 + 2 \cos t - 2.$$

4.

Metody wyznaczania transformaty odwrotnej (oryginału)

Jak już wspominaliśmy w podrozdziale 1.4 jednym z zasadniczych zagadnień w zastosowaniach jest wyznaczanie oryginału $f(t)$ gdy znana jest pewna funkcja zespolona $F(s)$ zmiennej zespolonej s , o której wiemy, że jest ona \mathcal{L} -transformatą. Ogólne rozwiązanie powyższego zagadnienia daje nam twierdzenie 1.4.1 (patrz podrozdział 1.4), a wzór Riemanna-Mellina (1.4.2) określa jednoznacznie operację jaką należy wykonać nad transformatą $F(s)$, aby wyznaczyć oryginał $f(t)$. Jednakże bezpośrednie stosowanie wzoru (1.4.2) dla wyznaczenia funkcji $f(t)$ jest na ogół dość trudne i rachunkowo uciążliwe, gdyż wymaga dobrej znajomości teorii funkcji zmiennej zespolonej, a przede wszystkim dobrego opanowania całkowania w płaszczyźnie zmiennej zespolonej [12]. Z tego względu, szczególnie w zastosowaniach praktycznych, wzór (1.4.2) jest stosowany bardzo rzadko, a problem efektywnego wykonania \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia (do pewnych szczególnych typów \mathcal{L} -transformat $F(s)$) można znacznie uprościć poprzez stosowanie odpowiednich metod.

W tym rozdziale omówimy, w zależności od postaci transformaty $F(s)$, najczęściej spotykane metody wyznaczania oryginału gdy znana jest jego transformata Laplace'a (obraz) $F(s)$.

4.1. Metoda bezpośrednia

Metoda bezpośrednia jest najprostszą metodą wyznaczania transformaty odwrotnej i polega na odczytaniu oryginału $f(t)$ z tablic transformat Laplace'a najczęściej spotykanych funkcji, do których sprowadzamy (jeśli to jest konieczne) daną transformatę $F(s)$. Metoda ta jest efektywna jedynie wtedy, gdy dysponujemy odpowiednio obszernymi tablicami. Na ogół, w tablicach można znaleźć tylko najbardziej typowe i najczęściej spotykane w zastosowaniach funkcje elementarne. W Dodatku umieszczono tablice zawierające podstawowe transformaty funkcji.

W podrozdziale 1.3 wyznaczyliśmy transformaty funkcji elementarnych, a w rozdziale 2, omawiając podstawowe własności przekształceń Laplace'a, otrzymaliśmy szereg transformat najczęściej występujących w zastosowaniach funkcji, a następnie korzystając z jednoznaczności odwrotnego przekształcenia Laplace'a \mathcal{L}^{-1} względem prostego przekształcenia Laplace'a \mathcal{L} w sposób bezpośredni otrzymaliśmy wzory na transformaty odwrotne ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju, takich jak np.:

$$F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad F(s) = \frac{1}{(s-a)^k}, \quad F(s) = \frac{1}{s^2+a^2}, \quad F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \quad \text{itp.}$$

oraz innych funkcji wymiernych (por. wzory 1.4.6 ÷ 1.4.13 – patrz przykład 1.10 oraz wzory 2.1.15 ÷ 2.1.20, 2.5.7 ÷ 2.5.10).

Zgodnie z wcześniejszą umową (uwaga 1.4.2) należy zwrócić uwagę na to, że dokonując transformacji odwrotnej \mathcal{L}^{-1} funkcję jednostkową $g(t) = I(t)$ będziemy zastępować funkcją $g(t) = 1$, ponieważ jak wiemy, dla $t > 0$ $I(t) \equiv 1$ (por. wzór 1.1.6).

Przykład 4.1. Wyznaczyć transformaty odwrotne dla funkcji:

$$\text{a) } F_1(s) = \frac{5}{s^4}, \quad \text{b) } F_2(s) = \frac{3}{s+4}, \quad \text{c) } F_3(s) = \frac{2s}{s^2+5}, \quad \text{d) } F_4(s) = \frac{1}{s^2-6s+9}.$$

R o z w i ą z a n i e . Z tablic transformat Laplace'a zamieszczonych w Dodatku odczytujemy bezpośrednio transformaty odwrotne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

$$\text{a) } f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s^4}\right] = 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = 5 \cdot \frac{1}{3!} t^3 \cdot I(t) = \frac{5}{6} t^3 \cdot I(t), \quad t \in R$$

(por. wzór 1.4.13 dla $n = 4$).

$$\text{Zatem } f_1(t) = \frac{5}{6} t^3 \quad \text{dla } t \geq 0 \quad \text{oraz } f_1(t) = 0 \quad \text{dla } t < 0.$$

$$\text{b) } f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+4}\right] = 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] = 3e^{-4t} \cdot I(t), \quad t \in R$$

(por. wzór 1.4.8).

$$\text{Zatem } f_2(t) = 3e^{-4t} \quad \text{dla } t > 0 \quad \text{oraz } f_2(t) = 0 \quad \text{dla } t < 0 \quad \text{i } f_2(0) = \frac{1}{2} f_2(0^+) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+5}\right] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right] = 2 \cos \sqrt{5}t \cdot I(t), \quad t \in R$$

(por. wzór 2.1.16 dla $a = \sqrt{5}$).

Zatem $f_3(t) = 2\cos\sqrt{5}t$, $t > 0$.

$$d) \quad f_4(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_4(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 6s + 9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = t \cdot e^{3t} \cdot I(t), \quad t \in R.$$

Zatem $f_4(t) = te^{3t}$, $t \geq 0$. (Dodatek tab. 2, poz. 7).

U w a g a . W dalszym ciągu zgodnie z wcześniejszą umową będziemy opuszczali czynnik $I(t)$ (uwaga 1.4.2). ■

4.2. Rozkład na ułamki proste

Znana z algebry metoda rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste jest niezwykle użyteczna i często stosowana w praktyce jako najprostsza metoda dokonywania odwrotnego przekształcenia Laplace'a transformat wymiernych.

Jeżeli \mathcal{L} -transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą zmiennej zespolonej s , to możemy rozłożyć ją na sumę ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Wobec tego, szukana transformata odwrotna $f(t)$ jest sumą transformat odwrotnych odpowiednich ułamków prostych. Transformaty odwrotne otrzymanych ułamków prostych odczytujemy najczęściej z tablicy transformat (tab. 2) zamieszczonej w Dodatku lub też wykorzystujemy (w razie potrzeby) niektóre podstawowe właściwości przekształcenia Laplace'a (np. liniowość, podobieństwo, przesunięcia zespolone, różniczkowanie transformaty itp.).

Założmy, że transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą postaci

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (4.2.1)$$

gdzie funkcje $P(s)$, $Q(s)$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, stopień m wielomianu $P(s)$ jest mniejszy od stopnia n wielomianu $Q(s)$, tj. $m < n$ oraz zakładamy, że licznik i mianownik nie mają wspólnych czynników, tzn., że postać (4.2.1) jest nieskracalna. Przedstawimy teraz tę funkcję w postaci sumy ułamków prostych. W tym celu najpierw znajdziemy pierwiastki mianownika $Q(s)$, które są jednocześnie biegunami zespolonej funkcji wymiernej (4.2.1). Ponieważ mianownik $Q(s)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to można go rozłożyć na czynniki będące wielomianami stopnia co najwyżej drugiego o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$Q(s) = (s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_j)(s^2 + p_1s + q_1) \dots (s^2 + p_l s + q_l) \quad (4.2.2)$$

przy czym $j + 2l = n$ oraz wszystkie trójmiany kwadratowe mają ujemne wyróżniki.

I. Jeśli a_1, a_2, \dots, a_j są różnymi i jednokrotnymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $Q(s)$, to w rozkładzie na czynniki liniowe ilorazu $\frac{P(s)}{Q(s)}$ na sumę ułamków prostych wystąpią ułamki postaci

$$\frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \dots + \frac{A_j}{s-a_j} = F_1(s) \quad (4.2.3)$$

gdzie A_1, \dots, A_j pewne stałe.

W przypadku ułamków prostych postaci (4.2.3) transformata odwrotna wyraża się wzorem

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a_k}\right] = e^{a_k t} \cdot I(t) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, j \quad (4.2.4)$$

(por. wzór 1.4.7).

II. Jeżeli a jest pierwiastkiem rzeczywistym k -krotnym wielomianu $Q(s)$, to w rozkładzie ilorazu $\frac{P(s)}{Q(s)}$ na ułamki proste wystąpi (oprócz ewentualnych ułamków postaci 4.2.3) suma ułamków postaci:

$$\frac{B_1}{s-a} + \frac{B_2}{(s-a)^2} + \dots + \frac{B_k}{(s-a)^k} = F_2(s) \quad (4.2.5)$$

gdzie B_1, \dots, B_k pewne stałe.

W przypadku ułamków prostych postaci (4.2.5) przy wyznaczaniu ich transformat odwrotnych $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$ korzystamy ze wzoru

$$\mathcal{L}[t^j \cdot e^{at}] = \frac{j!}{(s-a)^{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.2.6)$$

na podstawie którego, korzystając z jednoznaczności przekształcenia \mathcal{L}^{-1} (wzór 1.4.4), mamy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{j+1}}\right] = \frac{t^j}{j!} \cdot e^{at} \cdot I(t), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.2.7)$$

Wzór (4.2.7) uzyskamy stosując wn. 2.3.2 z twierdzenia o różniczkowaniu transformaty – wzory (2.3.3), (2.3.4) zastosowane do transformaty $F(s) = \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ lub wn. 2.5.1 z twierdzenia o przesunięciu zespolonym –

wzór (2.5.2) zastosowany do transformaty $F(s) = \mathcal{L}[t^j] = \frac{j!}{s^{j+1}}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

III. Jeżeli liczby zespolone $\delta = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in R$ są jednokrotnymi pierwiastkami sprzężonymi wielomianu $Q(s)$, to w rozkładzie funkcji $\frac{P(s)}{Q(s)}$ na ułamki proste (oprócz ewentualnych ułamków postaci 4.2.3 i 4.2.5) wystąpią ułamki proste drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{Cs + D}{s^2 + ps + q} = \frac{Cs + D}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = F_3(s), \quad (4.2.8)$$

gdzie C, D – pewne stałe, oraz wyróżnik $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

W przypadku ułamków prostych drugiego rodzaju postaci (4.2.8) przy wyznaczaniu ich transformat odwrotnych

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Cs + D}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}\right] \quad (4.2.9)$$

a) jeśli $\alpha = 0$, to korzystamy ze wzorów

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}\right] = I(t)\sin \beta t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \beta^2}\right] = I(t)\cos \beta t \quad (4.2.10)$$

b) jeśli $\alpha \neq 0$, to korzystamy ze wzorów

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}\right] &= I(t)e^{-\alpha t}\sin \beta t \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}\right] &= I(t)e^{-\alpha t}\cos \beta t \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

(por. tw. 2.5.1 o przesunięciu zespolonym oraz wzory 2.5.7, 2.5.9). W tym przypadku należy uprzednio licznik $Cs + D$ w (4.2.8) przedstawić w postaci rozkładu

$$Cs + D = A_1(s + \alpha) + A_2 \cdot \beta \quad (4.2.12)$$

gdzie A_1, A_2 – pewne stałe, które odpowiednio dobieramy.

IV. Rozważmy teraz przypadek, że wśród pierwiastków mianownika $Q(s)$ para pierwiastków zespolonych sprzężonych $s = \alpha \pm i\beta$ jest k -krotna. Wówczas w rozkładzie (4.2.2) wystąpi czynnik

$$(s^2 + ps + q)^k = [(s + \alpha)^2 + \beta^2]^k \quad (4.2.13)$$

a w rozkładzie funkcji (4.2.1) na ułamki proste wystąpi suma ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{C_1s + D_1}{s^2 + ps + q} + \frac{C_2s + D_2}{(s^2 + ps + q)^2} + \dots + \frac{C_ks + D_k}{(s^2 + ps + q)^k} = F_4(s) \quad (4.2.14)$$

gdzie $C_i, D_i, i = 1, \dots, k$ – pewne stałe oraz $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

W przypadku ułamków prostych drugiego rodzaju postaci (4.2.14) wyznaczenie transformaty odwrotnej $f_4(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_4(s)]$ sprowadza się do wyznaczenia transformat odwrotnych postaci

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_j s + D_j}{(s^2 + ps + q)^j}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_j s + D_j}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^j}\right], \quad j = 2, 3, \dots, k \quad (4.2.15)$$

Stosując twierdzenie o różniczkowaniu transformaty i o przesunięciu zespolonym (po żmudnych i uciążliwych rachunkach) można wykazać, że

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_j s + D_j}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^j}\right] = t^{j-1} e^{-\alpha t} (A_{1j} \cos \beta t + A_{2j} \sin \beta t), \quad j = 2, 3, \dots, k \quad (4.2.16)$$

gdzie $A_{1j}, A_{2j}, j = 2, \dots, k$ pewne stałe uzależnione od współczynników rozkładu (4.2.14) oraz od współczynników rozkładu (4.2.12). Jest to przypadek, któremu poświęcimy mało uwagi, ze względu na żmudne obliczenia i rzadkie występowanie w praktyce.

U w a g a . W przypadkach transformat odwrotnych postaci

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Cs + D}{(s^2 + \beta^2)^j}\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Cs + D}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^j}\right]$$

najwygodniej obliczać oryginały korzystając z tw. 4.3.1 o residuach, tj. ze wzoru (4.3.1) oraz z uwagi 4.3.2 i wzoru (4.3.3).

Niech funkcja wymierna (4.2.1) jest sumą ułamków prostych postaci (4.2.3), (4.2.5), (4.2.8), (4.2.14), tzn. mamy następujący rozkład:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) \quad (4.2.17)$$

wówczas poszukiwana transformata odwrotna $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, wobec liniowości przekształcenia \mathcal{L}^{-1} , jest równa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_4(s)] \quad (4.2.18)$$

Uwaga 4.2.1. Metoda polegająca na rozkładzie transformaty na ułamki proste jest w wielu przypadkach dość żmudna rachunkowo, jednakże po jej zastosowaniu wystarczy umiejętnie skorzystać z tablicy transformat.

Przykład 4.2. Wyznaczyć oryginały dla następujących transformat stosując metodę rozkładu na sumę ułamków prostych

$$\text{a) } F(s) = \frac{3s-4}{s^2-3s+2}, \quad \text{b) } F(s) = \frac{s^2-3s+8}{s^3+4s}, \quad \text{c) } F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+4}.$$

R o z w i ą z a n i e . Ponieważ transformaty a ÷ c są funkcjami wymiernymi właściwymi, to najprościej jest rozłożyć transformatę $F(s)$ na sumę ułamków prostych, a następnie, w celu znalezienia transformaty odwrotnej, skorzystać z tablic lub z wcześniej podanych wzorów i twierdzeń w rozdziale 1 i 2.

a) Ponieważ wyróżnik mianownika (trójmianu kwadratowego) jest dodatni, to najpierw mianownik przedstawiamy w postaci iloczynowej, a następnie funkcję $F(s)$ rozkładamy na ułamki proste. Mamy więc

$$\frac{3s-4}{s^2-3s+2} = \frac{3s-4}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} \quad (1)$$

(por. wzór 4.2.3).

Mnożymy obustronnie powyższą równość przez wspólny mianownik i otrzymujemy następującą tożsamość

$$3s-4 \equiv A(s-2) + B(s-1).$$

Nieznane współczynniki A i B wyznaczamy tzw. *metodą wartości dowolnych*, przyjmując w powyższej tożsamości po obu stronach za s kolejno

$$\begin{array}{l} s=2 \\ s=1 \end{array} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} 2=B \\ -1=-A \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=2 \end{array}.$$

Uwzględniając otrzymane wyniki w równości (1) otrzymamy następujący rozkład

$$F(s) = \frac{3s-4}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2} \quad (2)$$

Następnie wyznaczmy oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

1. Do obu stron równości (2) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2}\right] =$$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L}^{-1} – wzór (2.1.2)

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] =$$
3. Korzystamy ze wzoru (4.2.4) lub odczytujemy z tablicy 2

$$= \mathbf{1}(t)e^t + 2 \cdot \mathbf{1}(t)e^{2t}$$

Zatem szukany oryginał wyraża się wzorem

$$f(t) = e^t + 2e^{2t}, \quad t > 0.$$

b) Mianownik funkcji $F(s) = \frac{s^2-3s+8}{s^3+4s}$ przedstawiamy w postaci iloczynowej $s^3+4s = s(s^2+4)$, a następnie transformatę $F(s)$ rozkładamy na sumę ułamków prostych postaci

$$\frac{s^2-3s+8}{s^3+4s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \quad (3)$$

(por. wzór 4.2.3 oraz wzór 4.2.8).

Mnożąc obie strony równości (3) przez wspólny mianownik otrzymujemy następującą tożsamość

$$s^2 - 3s + 8 \equiv A(s^2 + 4) + s(Bs + C)$$

lub po uporządkowaniu według potęg s

$$s^2 - 3s + 8 \equiv (A+B)s^2 + Cs + 4A.$$

Aby znaleźć nieznanne współczynniki A , B , C porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach s , a po prawej stronie każdej z nich wypisujemy odpowiednie równanie dla współczynników. Mamy więc

$$\begin{array}{l|l} s^2 & A+B=1 \\ s^1 & C=-3 \\ s^0 & 4A=8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \\ C=-3 \end{array}.$$

Podstawiając otrzymane współczynniki do wzoru (3) mamy następujący rozkład

$$\frac{s^2 - 3s + 8}{s^2 + 4s} = \frac{2}{s} - \frac{s + 3}{s^2 + 4} \quad (4)$$

Następnie drugi ułamek po prawej stronie wzoru (4) przedstawiamy w postaci z której łatwo jest wyznaczyć (lub odczytać z tablic) transformaty odwrotne

$$\frac{s + 3}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Uwzględniając ten rozkład we wzorze (4) mamy

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 8}{s(s^2 + 4)} = \frac{2}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \quad (5)$$

Przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej postępujemy według schematu zastosowanego w przykładzie a)

1. Do obu stron równości (5) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}\right] =$$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L}^{-1} – wzór (2.1.4)
$$= 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] - \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 4}\right] =$$
3. Odczytujemy transformaty odwrotne – (4.2.10)
$$= 2 \cdot \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t) \cos 2t - \frac{3}{2} \mathbf{1}(t) \sin 2t$$

Szukany oryginał wyraża się wzorem:

$$f(t) = 2 - \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t, \quad t > 0$$

przy czym $f(t) = 0$ dla $t < 0$, oraz $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+) = \frac{1}{2}$.

c) Ponieważ wyróżnik mianownika danej transformaty jest równy zeru zatem zapiszemy go w postaci

$$s^2 + 4s + 4 = (s + 2)^2.$$

Następnie funkcję $F(s)$ rozkładamy na ułamki proste postaci (por. wzór 4.2.5):

$$\frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 4} = \frac{2s + 5}{(s + 2)^2} = \frac{B}{s + 2} + \frac{A}{(s + 2)^2}. \quad (6)$$

Mnożymy obie strony równości przez wspólny mianownik i otrzymujemy następującą tożsamość

$$2s + 5 \equiv A + B(s + 2)$$

lub po uporządkowaniu według potęg zmiennej s

$$2s + 5 = Bs + A + 2B \quad (7)$$

Porównując współczynniki obu stron tożsamości (7) przy zmiennej s otrzymamy układ z którego wyznaczamy A i B . Mamy zatem

$$\begin{array}{l|l} s^1 & B = 2 \\ s^0 & A + 2B = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 2 \end{array}.$$

Uwzględniając otrzymane współczynniki we wzorze (6) otrzymamy następujący rozkład

$$F(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 4} = \frac{2}{s + 2} + \frac{1}{(s + 2)^2} \quad (8)$$

1. Do obu stron równości (8) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s + 2} + \frac{1}{(s + 2)^2}\right] =$$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L}^{-1} – wzór (2.1.2)
$$2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 2)^2}\right] =$$
3. Obliczamy transformaty odwrotne ze wzorów (4.2.4) i (4.2.7) dla $a = -2, j = 1$ lub z tablicy 2
$$= 2 \cdot I(t)e^{-2t} - I(t) \cdot te^{-2t}.$$

Zatem
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 4}\right] = 2e^{-2t} - te^{-2t}, \quad t > 0.$$

U w a g a . Zauważmy, że jeśli licznik $P(s) = 2s + 5$ zapiszemy w postaci $2s + 5 = 2(s + 2) + 1$, to w łatwy sposób otrzymamy rozkład (8). Mamy wtedy

$$\frac{2s + 5}{(s + 2)^2} = \frac{2(s + 2) + 1}{(s + 2)^2} = \frac{2}{s + 2} + \frac{1}{(s + 2)^2}.$$

Przykład 4.3. Wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli znamy

$$F(s) = \frac{4s^2 - 8s + 10}{s^3 - 3s^2 - 10s}.$$

Rozwiązanie. Transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą, której mianownik można przedstawić w postaci iloczynu

$$s^3 - 3s^2 - 10s = s(s+2)(s-5)$$

i zgodnie z (4.2.3) mamy następujący rozkład transformaty na ułamki proste

$$\frac{4s^2 - 8s + 10}{s(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-5} \quad (1)$$

Mnożąc (1) obustronnie przez wspólny mianownik otrzymujemy następującą tożsamość

$$4s^2 - 8s + 10 \equiv A(s+2)(s-5) + B s(s-5) + C s(s+2) \quad (2)$$

prawdziwą dla każdego s .

Aby wyznaczyć nieznane współczynniki A , B , C stosujemy *metodę wartości dowolnych*. W tym celu do obu stron tożsamości (2) podstawiamy za s kolejno: 0, -2, 5 i otrzymujemy układ

$$\begin{array}{l|l} s=0 & 10 = -10A \\ s=-2 & 42 = 14B \\ s=5 & 70 = 35C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{array}$$

Po podstawieniu tych wartości do wzoru (1) otrzymamy

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s-5} \quad (3)$$

Dalej postępujemy według schematu z poprzednich przykładów.

1. Do obu stron (3) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1}

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s-5}\right] =$$
2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L}^{-1} (wzór 2.1.4)
$$= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right] =$$
3. Odczytujemy transformaty odwrotne
$$= -\mathbf{1}(t) + 3e^{-2t} \cdot \mathbf{1}(t) + 2e^{5t} \cdot \mathbf{1}(t)$$

Szukany oryginał wyraża się wzorem

$$f(t) = -1 + 3e^{-2t} + 2e^{5t}, \quad t > 0,$$

oraz $f(t) = 0$ dla $t < 0$, $f(0) = \frac{1}{2} f(0^+) = 2$.

■

Przykład 4.4. Wiedząc, że $F(s) = \frac{2s+7}{(s-1)(s^2+4s+13)}$ wyznaczyć oryginał.

R o z w i ą z a n i e . Transformatę $F(s)$ rozkładamy na ułamki proste postaci

$$\frac{2s+7}{(s-1)(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13} \quad (1)$$

(por. wzór 4.2.3 oraz wzór 4.2.8).

Mnożymy (1) obustronnie przez wspólny mianownik i otrzymujemy następującą tożsamość

$$2s+7 \equiv A(s^2+4s+13) + (Bs+C)(s-1)$$

Nieznane współczynniki A, B, C znajdujemy stosując łącznie *metodę wartości dowolnych* i *metodę przyrównywania współczynników*:

$$\begin{array}{l|l} s=1 & 9=18A \\ s^2 & 0=A+B \\ s^0 & 7=13A-C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \end{array} .$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości współczynników do rozkładu (1) mamy

$$F(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+4s+13} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+4s+13} \right) \quad (2)$$

Ponieważ drugi ułamek po prawej stronie wzoru (2) jest postaci (4.2.8), więc doprowadzamy go do postaci, z której łatwo jest wyznaczyć (odczytać z tablic) transformaty odwrotne postaci (4.2.9). W tym celu mianownik ułamka sprowadzamy do postaci kanonicznej (por. przykład 2.22)

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2+9,$$

a jego licznik zgodnie ze wzorem (4.2.12) przedstawiamy w postaci

$$s+1 = (s+2) - 1 = (s+2) - \frac{1}{3} \cdot 3$$

i wtedy ułamek ten przyjmie postać sumy dwóch ułamków prostych

$$\frac{s+1}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+9} \quad (3)$$

Uwzględniając związki (3) po prawej stronie wzoru (2) otrzymujemy następujący rozkład:

$$F(s) = \frac{2s+7}{(s^2+4s+13)(s-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+9} \quad (4)$$

Dalej postępujemy analogicznie jak w przykładach wcześniejszych, tj. stosujemy do obu stron wzoru (4) odwrotne przekształcenie Laplace'a oraz korzystamy z jego liniowości i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+7}{(s^2+4s+13)(s-1)}\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right] + \frac{1}{6} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+9}\right]. \end{aligned}$$

Następnie korzystamy z tablic transformacji Laplace'a lub ze wzorów (4.2.11) dla $\alpha = 2$ i $\beta = 3$ i otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{6}e^{-2t} \sin 3t, \quad t > 0.$$

■

Przykład 4.5. Stosując metodę rozkładu transformaty na sumę ułamków prostych wyznaczyć oryginał dla danych transformat:

$$\text{a) } F(s) = \frac{s^2+7}{(s-1)^4}, \quad \text{b) } G(s) = \frac{s^3-3s^2-3}{(s^2+1)^2}.$$

R o z w i ą z a n i e . a) Ponieważ liczba $s = 1$ jest czterokrotnym pierwiastkiem wielomianu $Q(s) = (s-1)^4$, to zgodnie ze wzorem (4.2.5) rozkład transformaty na ułamki proste przyjmuje postać:

$$\frac{s^2+7}{(s-1)^4} = \frac{B_1}{s-1} + \frac{B_2}{(s-1)^2} + \frac{B_3}{(s-1)^3} + \frac{B_4}{(s-1)^4} \quad (1)$$

gdzie B_1, B_2, B_3, B_4 pewne stałe.

Ze względu na szczególną postać transformaty (w mianowniku występuje tylko czwarta potęga dwumianu $(s-1)$) możemy sobie ułatwić wyznaczenie współczynników B_1, B_2, B_3, B_4 , dokonując rozkładu licznika $P(s) = s^2 + 7$ na potęgi dwumianu $(s-1)$. Mamy więc następujący wzór

$$s^2 + 7 = (s-1)^2 + 2(s-1) + 8 \quad (2)$$

Uwzględniając powyższy wynik po prawej stronie transformaty $F(s)$ otrzymamy

$$\frac{s^2 + 7}{(s-1)^4} = \frac{(s-1)^2 + 2(s-1) + 8}{(s-1)^4},$$

a stąd mamy

$$F(s) = \frac{s^2 + 7}{(s-1)^4} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{8}{(s-1)^4} \quad (3)$$

Dalej postępujemy według schematu podanego w poprzednim zadaniu.

Stosując do obu stron równości (3) przekształcenie \mathcal{L}^{-1} i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{8}{(s-1)^4}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] + 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right] + 8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]. \end{aligned}$$

Następnie stosujemy wzór (4.2.7) kolejno dla $j = 1, 2, 3$ (lub korzystamy z tabelicy 2 umieszczonej w Dodatku) i po przekształceniach otrzymamy ostatecznie

$$f(t) = \mathbf{I}(t) \left[te^t + t^2 e^t + \frac{4}{3} t^3 e^t \right], \quad t \in \mathbf{R} \quad (4)$$

lub piszemy w postaci

$$f(t) = te^t + t^2 e^t + \frac{4}{3} t^3 e^t, \quad t \geq 0.$$

U w a g a . Proponuję Czytelnikowi wyznaczenie współczynników B_i , $i=1,2,3,4$ w rozkładzie (1) metodą współczynników nieoznaczonych (lub metodą wartości dowolnych) w celu potwierdzenia prawdziwości rozkładu (3).

b)

1. Zauważmy, że transformata $G(s)$ jest funkcją wymierną właściwą, której mianownik ma podwójne pierwiastki zespolone sprzężone (przypadek $\Delta < 0$).
2. Dokonując rozkładu tej funkcji na sumę ułamków prostych drugiego rodzaju, tj. zgodnie ze wzorem (4.2.14) mamy

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3}{(s^2 + 1)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 1)^2} \quad (5)$$

gdzie A, B, C, D współczynniki, które należy wyznaczyć.

3. Mnożymy obustronnie (5) przez wspólny mianownik i otrzymujemy tożsamość

$$s^3 - 3s^2 - 3 \equiv (As + B)(s^2 + 1) + Cs + D \quad (6)$$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach s i wyznaczamy:

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = -1, \quad D = 0 \quad (7)$$

4. Uwzględniając wynik (7) w rozkładzie (5) mamy

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s - 3}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$$

i ostatecznie

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \quad (8)$$

5. Do obu stron (8) wykonujemy transformację odwrotną i korzystamy z jej liniowości

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 1} - \frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + 1)^2}\right] \end{aligned}$$

6. Z tablicy 2 zamieszczonej w Dodatku odczytujemy transformaty odwrotne i otrzymujemy

$$g(t) = \left(\cos t - 3 \sin t - \frac{1}{2} t \sin t \right) \cdot I(t), \quad t \in R.$$

■

4.3. Metoda reszduów

Obecnie omówimy metodę wyznaczania oryginału opartą na twierdzeniu o reszduach zastosowanym do obliczania całki funkcji zmiennej zespolonej danej wzorem (1.4.3), określającą odwrotną transformatę Laplace'a. Stąd metoda ta nazwana jest *metodą reszduów*. Jest to najbardziej ogólna metoda oparta na znanym z teorii funkcji analitycznych twierdzeniu Jordana (zob. [12]) i ma zastosowanie do szerszej klasy transformat obejmującej oprócz funkcji wymiernych, także niektóre inne typy funkcji. Metodę reszduów omówimy tylko dla szczególnego przypadku, gdy transformata $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą.

Twierdzenie 4.3.1. Jeżeli funkcja wymierna $F(s)$ zmiennej zespolonej s jest transformatą oryginału $f(t)$, przy czym $F(s)$ jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej s z wyjątkiem punktów s_k , $k = 1, 2, \dots, n$, które są biegunami funkcji $F(s)$ oraz jej jedynymi punktami osobliwymi, to oryginał funkcji $f(t)$ dany jest wzorem

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} [F(s) \cdot e^{st}], \quad t > 0 \quad (4.3.1)$$

Symbol $\operatorname{res}_{s=s_k} G(s)$ oznacza residuum funkcji zespolonej $G(s)$ zmiennej zespolonej s w punkcie osobliwym s_k .

Uwaga 4.3.1. Jeżeli funkcja $F(s)$ ma nieskończenie wiele biegunów odosobnionych, tj. takich, że w otoczeniu każdego bieguna nie ma innych biegunów oraz funkcja $F(s)$ nie ma punktów istotnie osobliwych, to wzór (4.3.1) przyjmuje postać szeregu nieskończonego

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{s=s_k} [F(s) \cdot e^{st}] \quad (4.3.2)$$

Można wykazać, że szereg ten jest zbieżny [1, 13].

Uwaga 4.3.2. Jeżeli funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą o współczynnikach rzeczywistych i liczba zespolona s_k jest biegunem funkcji $F(s)$, to również liczba sprzężona \bar{s}_k jest biegunem funkcji $F(s)$. Wtedy prawdziwy jest następujący wzór:

$$\operatorname{res}_{s=s_k} [F(s) \cdot e^{st}] + \operatorname{res}_{s=\bar{s}_k} [F(s) \cdot e^{st}] = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=s_k} F(s) \cdot e^{st} \right] \quad (4.3.3)$$

gdzie $\operatorname{Re}[G(s)]$ – oznacza część rzeczywistą pewnego wyrażenia zespolonego $G(s) = F(s) \cdot e^{st}$.

Wzór (4.3.3) ma duże znaczenie praktyczne, gdyż skraca obliczenia. Jak zauważamy, aby znaleźć sumę residuów w punktach osobliwych s_k i \bar{s}_k , wystarczy wyznaczyć część rzeczywistą residuum $F(s) \cdot e^{st}$ w jednym z tych punktów, a następnie pomnożyć ją przez 2.

Uwaga 4.3.3. Przypominamy wzory na obliczanie residuum funkcji zespolonej w punktach osobliwych:

1° Jeżeli s_0 jest biegunem jednokrotnym funkcji zespolonej $G(s)$, to

$$\operatorname{res}_{s=s_0} G(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} [(s - s_0) \cdot G(s)] \quad (4.3.4)$$

2° Jeżeli s_0 jest biegunem k -krotnym funkcji zespolonej $G(s)$, to

$$\operatorname{res}_{s=s_0} G(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[(s-s_0)^k \cdot G(s) \right] \quad (4.3.5)$$

Przykład 4.6. Stosując wzór (4.3.1) wyznaczyć transformaty odwrotne funkcji

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{b) } F(s) = \frac{1}{s^2+9}.$$

Rozwiązanie.

a) Ponieważ $s=a$ jest biegunem pojedynczym funkcji $F(s) = \frac{1}{s-a}$, to na podstawie wzoru (4.3.1) i (4.3.4) mamy

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] = \operatorname{res}_{s=a} \left(\frac{1}{s-a} \cdot e^{st} \right) = \lim_{s \rightarrow a} \left[(s-a) \frac{1}{s-a} \cdot e^{st} \right] = e^{at}.$$

b) Ponieważ $s_1 = -3i$, $s_2 = +3i$ są biegunami pojedynczymi funkcji

$$F(s) = \frac{1}{s^2+9}, \text{ to na podstawie wzoru (4.3.1) i (4.3.4) mamy}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+9} \right] = \operatorname{res}_{s=-3i} \left(\frac{1}{s^2+9} e^{st} \right) + \operatorname{res}_{s=3i} \left(\frac{1}{s^2+9} e^{st} \right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3i} \left[(s+3i) \frac{1}{(s-3i)(s+3i)} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 3i} \left[(s-3i) \frac{1}{(s-3i)(s+3i)} e^{st} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3i} \frac{e^{st}}{s-3i} + \lim_{s \rightarrow 3i} \frac{e^{st}}{s+3i} = \frac{1}{-6i} e^{-3ti} + \frac{1}{6i} e^{3ti} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3ti} - e^{-3ti}}{2i} = \frac{1}{3} \sin 3t \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy ze wzoru 2.1.6).

$$\text{Zatem} \quad f(t) = \frac{1}{3} \sin 3t \quad \text{dla } t \geq 0 \quad (1)$$

U w a g a . Zauważmy, że jeśli skorzystamy z uwagi 4.3.2, to zadanie nasze znacznie się uprości. Ponieważ $s_1 = -3i$ i $s_2 = 3i$ są biegunami sprzężonymi

i zarazem jedynymi punktami osobliwymi funkcji $F(s) = \frac{1}{s^2+9}$, to zgodnie ze wzorem (4.3.1) i (4.3.3)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 9} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=3i} \left(\frac{1}{s^2 + 9} e^{st} \right) \right] \quad (2)$$

Korzystając z wcześniejszych obliczeń oraz ze wzoru Eulera mamy

$$\operatorname{res}_{s=3i} \left(\frac{1}{s^2 + 9} e^{st} \right) = \frac{1}{6i} e^{3ti} = \frac{1}{6i} (\cos 3t + i \sin 3t) = \frac{1}{6} (\sin 3t - i \cos 3t).$$

Uwzględniając otrzymany wynik we wzorze (2) otrzymamy

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{6} (\sin 3t - i \cos 3t) \right] = 2 \cdot \frac{1}{6} \sin 3t = \frac{1}{3} \sin 3t,$$

co jest zgodne z wynikiem (1). ■

Przykład 4.7. Metodą residuów wyznaczyć oryginał dla funkcji

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s}.$$

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą i holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej s z wyjątkiem punktów $s_1 = 0$, $s_2 = -2i$, $s_3 = 2i$ w których ma bieguny jednokrotne. Zatem transformatę odwrotną można wyznaczyć na podstawie wzoru (4.3.1). Mamy więc

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} \right] = \operatorname{res}_{s=0} F(s) e^{st} + \operatorname{res}_{s=-2i} F(s) e^{st} + \operatorname{res}_{s=2i} F(s) e^{st},$$

a po uwzględnieniu uwagi 4.3.2 i wzoru (4.3.3)

$$f(t) = \operatorname{res}_{s=0} \left(\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st} \right) + 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=2i} \left(\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st} \right) \right] \quad (1)$$

Obliczamy residua funkcji $\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st}$ kolejno w punktach osobliwych

$s_1 = 0$, $s_3 = 2i$. Korzystając ze wzoru (4.3.4) obliczamy kolejno

$$\operatorname{res}_{s=0} \left(\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 3s + 8}{s^2 + 4} e^{st} = \frac{8}{4} e^0 = 2 \quad (2)$$

oraz

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=2i} \left(\frac{s^2 - 3s + 8}{s^3 + 4s} e^{st} \right) &= \lim_{s \rightarrow 2i} (s - 2i) \frac{s^2 - 3s + 8}{s(s - 2i)(s + 2i)} e^{st} = \lim_{s \rightarrow 2i} \frac{s^2 - 3s + 8}{s(s + 2i)} e^{st} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \right) e^{2ti} \end{aligned} \quad (3)$$

Następnie wyznaczamy część rzeczywistą wyrażenia (3). W tym celu wyrażenie (3) doprowadzamy do postaci $x(t) + iy(t)$. Korzystając ze wzoru Eulera (2.1.5) mamy

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \right) e^{2ti} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \right) (\cos 2t + i \sin 2t) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cos 2t - \frac{3}{4} \sin 2t \right) + i \left(\frac{3}{4} \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Uwzględniając (2) i (4) we wzorze (1) otrzymamy ostatecznie

$$f(t) = 2 - \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t, \quad t > 0.$$

■

U w a g a . Zadanie to było omawiane w przykładzie 4.2 b. Powtórzono je ze względu na porównanie metod.

Przykład 4.8. Metodą reszduów wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli

$$F(s) = \frac{s + 1}{(s + 3)(s + 2)^3}.$$

R o z w i ą z a n i e . Ponieważ $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą oraz holomorficzną w całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktów $s_1 = -3$ (biegun pojedynczy) i $s_2 = -2$ (biegun potrójny), które są jej jedynymi punktami osobliwymi, to można stosować twierdzenie 4.3.1 o reszduach. Zgodnie ze wzorem (4.3.1) transformatę odwrotną $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ dla zadanej transformaty $F(s)$ wyznaczmy jako sumę reszduów funkcji $F(s)e^{st}$ w wyżej wymienionych biegunach, tj.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 1}{(s + 3)(s + 2)^3} \right] = \operatorname{res}_{s=-3} [F(s) \cdot e^{st}] + \operatorname{res}_{s=-2} [F(s) \cdot e^{st}] \quad (1)$$

Obliczamy residuum funkcji $F(s)e^{st}$ w biegunie pojedynczym $s_1 = -3$. Zgodnie ze wzorem (4.3.4) mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=-3} \left[\frac{s+1}{(s+3)(s+2)^3} \cdot e^{st} \right] &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \frac{s+1}{(s+3)(s+2)^3} \cdot e^{st} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+1}{(s+2)^3} \cdot e^{st} = 2e^{-3t} \end{aligned} \quad (2)$$

Obliczamy residuum funkcji $F(s)e^{st}$ w biegunie potrójnym $s_2 = -2$. Zgodnie ze wzorem (4.3.5) dla $k = 3$ mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=-2} \left[\frac{s+1}{(s+3)(s+2)^3} \cdot e^{st} \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+2)^3 \frac{s+1}{(s+3)(s+2)^3} \cdot e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s+1}{s+3} \cdot e^{st} \right) = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[e^{st} \cdot \left(\frac{2}{(s+3)^2} + t \cdot \frac{s+1}{s+3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow -2} \left[e^{st} \cdot \left(\frac{-4}{(s+3)^3} + \frac{4t}{(s+3)^2} + t^2 \cdot \frac{s+1}{s+3} \right) \right] = \frac{1}{2} e^{-2t} (-4 + 4t - t^2) = \\ &= e^{-2t} \left(-2 + 2t - \frac{1}{2} t^2 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Podstawiając wyniki (2) i (3) do wzoru (1) otrzymamy

$$f(t) = 2e^{-3t} - \left(2 - 2t + \frac{1}{2} t^2 \right) e^{-2t}, \quad t > 0.$$

■

4.4. Twierdzenie o rozkładzie

Jedną z najbardziej efektywnych metod wyznaczania transformaty odwrotnej polega na zastosowaniu tak zwanego twierdzenia o rozkładzie.

Twierdzenie 4.4.1. Jeżeli funkcja $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ gdzie $P(s), Q(s)$ są wielomianami

zmienną zespoloną s , przy czym:

1° stopień wielomianu $P(s)$ jest niższy od stopnia wielomianu $Q(s)$,

2° ułamek $\frac{P(s)}{Q(s)}$ jest nieskracalny,

3^o wielomian $Q(s)$ rozkłada się na czynniki liniowe, tzn.

$$Q(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

gdzie s_1, s_2, \dots, s_n są jednokrotnymi miejscami zerowymi mianownika, to transformata odwrotna $f(t)$ wyraża się wzorem:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}, \quad t > 0 \quad (4.4.1)$$

Przykład 4.9. Na podstawie twierdzenia 4.4.1 wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji

$$F(s) = \frac{s^2 - s + 3}{s^3 - 2s^2 - 5s + 6} \quad (1)$$

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą. Mianownik ma trzy miejsca zerowe $s_1 = -2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 3$, które są jednocześnie biegunami jednokrotnymi funkcji zespolonej $F(s)$. Zatem na mocy twierdzenia 4.4.1 funkcja (1) jest transformatą oryginału $f(t)$, który wyznaczymy ze wzoru (4.4.1).

Oznaczamy $P(s) = s^2 - s + 3$, $Q(s) = s^3 - 2s^2 - 5s + 6$.

Obliczamy pochodną $Q'(s) = (s^3 - 2s^2 - 5s + 6)' = 3s^2 - 4s - 5$, a następnie kolejno wyznaczamy wartości

$$P(-2) = 9, \quad P(1) = 3, \quad P(3) = 9$$

oraz

$$Q'(-2) = 15, \quad Q'(1) = -6, \quad Q'(3) = 10. \quad (2)$$

Korzystamy ze wzoru (4.4.1) i uwzględniając w nim wartości (2) obliczmy oryginał:

$$f(t) = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} e^{-2t} + \frac{P(1)}{Q'(1)} e^t + \frac{P(3)}{Q'(3)} e^{3t} = \frac{9}{15} e^{-2t} + \frac{3}{-6} e^t + \frac{9}{10} e^{3t}.$$

Zatem szukany oryginał wyraża się wzorem:

$$f(t) = \frac{3}{5} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{9}{10} e^{3t}, \quad t > 0$$

■

Uwaga 4.4.1. W zastosowaniach często jeden z biegunów funkcji $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

jest zerem. Jeśli przyjmiemy wtedy, że $F(s) = \frac{P(s)}{s \cdot Q_1(s)}$ to na mocy tw. 4.4.1

oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ można wyrazić wzorem

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s \cdot Q_1(s)}\right] = \frac{P(0)}{Q_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{s_k \cdot Q_1'(s_k)} e^{s_k t} \quad (4.4.2)$$

Przykład 4.10. Korzystając z uwagi 4.4.1. i wzoru (4.4.2) wyznaczyć transformatę odwrotną $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli $F(s) = \frac{4s^2 - 8s + 10}{s^3 - 3s^2 - 10s}$.

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $F(s)$ jest funkcją wymierną właściwą, przy czym jeden z biegunów jednokrotnych jest zerem, tzn. $s_0 = 0$, a pozostałe bieguny jednokrotne to $s_1 = -2$, $s_2 = 5$. Stosując się do uwagi 4.4.1 funkcję $F(s)$ przedstawiamy w postaci

$$F(s) = \frac{4s^2 - 8s + 10}{s(s^2 - 3s - 10)}$$

i oznaczamy odpowiednio

$$P(s) = 4s^2 - 8s + 10, \quad Q_1(s) = s^2 - 3s - 10.$$

Następnie obliczamy pochodną $Q_1'(s) = (s^2 - 3s - 10)' = 2s - 3$ i wartości

$$\begin{aligned} P(0) &= 10, & P(-2) &= 42, & P(5) &= 70, \\ Q_1(0) &= -10, & Q_1'(-2) &= -7, & Q_1'(5) &= 7. \end{aligned} \quad (1)$$

Zgodnie ze wzorem (4.4.2)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s^2 - 8s + 10}{s(s^2 - 3s - 10)}\right] = \frac{P(0)}{Q_1(0)} + \frac{P(-2)}{-2 \cdot Q_1'(-2)} e^{-2t} + \frac{P(5)}{5 \cdot Q_1'(5)} e^{5t}$$

i po podstawieniu wcześniej wyznaczonych wartości (1) mamy

$$f(t) = -1 + 3e^{-2t} + 2e^{5t}, \quad t > 0.$$

■

U w a g a . Powyższy przykład rozwiązyaliśmy w przykładzie 4.3, a teraz powtórzyliśmy ze względu na porównanie metod.

4.5. Metoda oparta na twierdzeniu Borela

Jak wspominaliśmy wcześniej w rozdziale 3, twierdzenie 3.2.1 Borela o splocie funkcji wykorzystywane jest często do wyznaczania transformaty odwrotnej, jeżeli transformata $F(s)$ jest dana w postaci iloczynu transformat $F_1(s)$ i $F_2(s)$. W tym przypadku zadanie wyznaczenia oryginału $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ sprowadza się najpierw do znalezienia transformat odwrotnych $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$ i $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$, a następnie do wyznaczenia splotu otrzymanych oryginałów, tj.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \equiv \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] * \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] \quad (4.5.1)$$

(por. uwaga 3.2.2, rozdz. 3, wzór 3.2.2').

U w a g a . Metoda ta została zaprezentowana w podrozdziale 3.3 w przykładzie 3.10. Dla przypomnienia wyznaczania transformat odwrotnych tą metodą rozwiążemy przykład 4.11.

Przykład 4.11. Stosując twierdzenie Borela o splocie wyznaczyć oryginał $f(t)$,

jeśli $F(s) = \frac{1}{s^2 - 9}$.

R o z w i ą z a n i e . Transformatę $F(s) = \frac{1}{s^2 - 9}$ przedstawiamy w postaci

iloczynu $\frac{1}{s-3} \cdot \frac{1}{s+3}$ i oznaczamy $F_1(s) = \frac{1}{s-3}$, $F_2(s) = \frac{1}{s+3}$.

Ponieważ spełnione są założenia tw. Borela, to zgodnie z uwagą 3.2.2 i wzorem 4.5.1 w rozważanym przypadku mamy

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} \cdot \frac{1}{s+3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{3t} * e^{-3t} \quad (1)$$

Z tablic transformat Laplace'a odczytujemy oryginały

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = e^{3t}, \quad f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t} \quad (2)$$

Uwzględniając związki (2) w prawej stronie wzoru (1) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} \cdot \frac{1}{s+3}\right] = e^{3t} * e^{-3t}.$$

Następnie z definicji splotu funkcji ze wzoru (3.1.1) obliczamy

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{3t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{3\tau} \cdot e^{-3(t-\tau)} d\tau = e^{-3t} \int_0^t e^{6\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{6} e^{-3t} \left[e^{6\tau} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{6} e^{-3t} \left[e^{6t} - 1 \right] = \frac{1}{6} (e^{3t} - e^{-3t}). \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy, że $\frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-3t}) = \sinh 3t$, to szukany oryginał przyjmie postać

$$f(t) = \frac{1}{3} \sinh 3t, \quad t \geq 0.$$

■

4.6. Rozwinięcie transformaty (obrazu) w szereg Laurenta

Twierdzenie 4.6.1. Jeżeli funkcja zespolona $F(s)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $s = +\infty$ i w otoczeniu tego punktu, tj. dla $|s| > R$, rozwija się w szereg Laurenta postaci

$$F(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{s^k} \quad (4.6.1)$$

to $F(s)$ jest \mathcal{L} -transformatą oryginału postaci $\varphi(t) = \mathbf{1}(t) \cdot f(t)$, gdzie

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (4.6.2)$$

(dowód pomijamy) [1, 13].

Uwaga 4.6.1. Twierdzenie 4.6.1 pozwala otrzymać oryginał (transformatę odwrotną) $f(t)$ w postaci zbieżnego szeregu potęgowego gdy znane jest rozwinięcie funkcji zespolonej $F(s)$ w szereg Laurenta (4.6.1).

Uwaga 4.6.2. Wzór (4.6.2) otrzymaliśmy formalnie, stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a do obu stron równości (4.6.1), przy czym po prawej stronie tej równości, tj. do wyrazów szeregu bierzemy przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} wyraz po wyrazie.

Przykład 4.12. Na podstawie twierdzenia 4.6.1 wyznaczmy oryginał $f(t)$ odpowiadający transformacie $F(s) = \frac{1}{s} \cos \frac{1}{s}$.

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że $F(s)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $s = +\infty$, tj. punkt $s = 0$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji $F(s)$ oraz $F(\infty) = 0$. Funkcję tę rozwijamy w szereg Laurenta w otoczeniu punktu $s = +\infty$ i na podstawie wzoru (4.6.2) wyznaczmy jej transformatę odwrotną.

1. Korzystamy z rozwinięcia funkcji $\cos x$ w szereg potęgowy o środku w punkcie $x_0 = 0$ i promieniu r

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad |x| < r \quad (1)$$

2. W zależności (1) zmienną x zastępujemy przez $\frac{1}{s}$ i otrzymujemy rozwinięcie dla $|s| > R$, gdzie $R = \frac{1}{r}$. Mamy więc

$$\cos \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{s^4} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{s^6} + \dots, \quad |s| > \frac{1}{r} \quad (2)$$

3. Obie strony (2) mnożymy przez $\frac{1}{s}$ i otrzymujemy rozwinięcie danej transformaty w szereg Laurenta postaci:

$$\frac{1}{s} \cos \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{s^5} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{s^7} + \dots, \quad |s| > R \quad (3)$$

4. Do obu stron (3) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1} i korzystając z jego liniowości (uwaga 4.6.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cos \frac{1}{s} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{s^5} - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{s^7} + \dots \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{1}{2!} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3} \right] + \frac{1}{4!} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^5} \right] - \frac{1}{6!} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^7} \right] + \dots \end{aligned}$$

Następnie stosujemy wzór $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{k+1}} \right] = \frac{t^k}{k!}$ (por. wzór 1.4.13) i ostatecznie otrzymujemy

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4!} t^4 - \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{6!} t^6 + \dots$$

Szukany oryginał przedstawia się jako suma szeregu potęgowego zbieżnego dla $t \geq 0$, tj.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{[(2n)!]^2} \cdot t^{2n} \quad \text{dla } t \geq 0.$$

■

Przykład 4.13. Na podstawie twierdzenia 4.6.1 wyznaczyć oryginał $f(t)$ odpowiadający transformacie $F(s) = \frac{e^s}{\sqrt{s}}$.

$$F(s) = \frac{e^s}{\sqrt{s}}$$

R o z w i ą z a n i e . Zauważmy, że funkcja $F(s)$ ma dla $s=0$ punkt istotnie osobliwy oraz jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $s = +\infty$ i $F(\infty) = 0$. Zatem funkcję tę możemy rozwinąć w szereg Laurenta w otoczeniu punktu $s = +\infty$, a jej transformatę odwrotną wyznaczymy na podstawie tw. 4.6.1 ze wzoru (4.6.2). Stosujemy schemat rozwiązania przyjęty w przykładzie 4.12.

1. Piszemy rozwinięcie Maclaurina funkcji e^x w otoczeniu $x_0 = 0$ i promieniu r

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad |x| < r \quad (1)$$

2. W zależności (1) zmienną x zastępujemy przez $\frac{1}{s}$ i otrzymujemy rozwinięcie dla $|s| > R$, gdzie $R = \frac{1}{r}$. Mamy więc

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{s} + \dots, \quad |s| > R \quad (2)$$

3. Obie strony (2) mnożymy przez $\frac{1}{\sqrt{s}}$, tj. przez $s^{-\frac{1}{2}}$ i otrzymujemy rozwinięcie danej transformaty w szereg Laurenta postaci

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}} = \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{s^{\frac{7}{2}}} + \dots, \quad |s| > R \quad (3)$$

4. Do obu stron (3) stosujemy \mathcal{L}^{-1} -przekształcenie i korzystając z jego liniowości (patrz uwaga 4.6.2) mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{s^{\frac{7}{2}}} + \dots\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{1}{2!} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\right] + \frac{1}{3!} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{7}{2}}}\right] + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}\right] \end{aligned} \quad (4)$$

5. Do wyrazów prawej strony (4) stosujemy wzór (1.3.10)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha+1}}\right] = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (4.6.3)$$

który dla $\alpha = n - \frac{1}{2}$ przyjmuje postać

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}\right] = \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{gdzie} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \sqrt{\pi} \quad (4.6.4)$$

Uwzględniając powyższe wyniki w (4) otrzymamy

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{4^n \cdot n! \cdot t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n} \cdot (2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{(2\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} \quad (5)$$

Zatem szukany oryginał jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego dla $t > 0$, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!}, \quad t > 0 \quad (6)$$

Zauważmy, że powyższy szereg można rozpisać na sumę dwóch szeregów, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\sqrt{t})^n}{n!} \right) \quad (7)$$

Podstawiając za $2\sqrt{t}$ nową zmienną x zauważamy, że szeregi te przedstawiają rozwinięcie funkcji e^x i odpowiednio e^{-x} w szeregi potęgowe, tzn.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^n}{n!} = e^{2\sqrt{t}} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\sqrt{t})^n}{n!} = e^{-2\sqrt{t}}, \quad t > 0 \quad (8)$$

Ponieważ $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$, to stąd wynika, że

$$\frac{1}{2}(e^{2\sqrt{t}} + e^{-2\sqrt{t}}) = \cosh 2\sqrt{t} \quad (9)$$

Uwzględniając związki (7), (8), (9) w odpowiedzi (6) otrzymamy szukany oryginał w postaci

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh 2\sqrt{t}, \quad t > 0. \quad (4.6.5)$$

■

4.7. Inne metody wyznaczania oryginału

Poza opisanymi metodami, w szczególnych przypadkach, stosuje się metody oparte na twierdzeniach podanych wcześniej w rozdziale 2 przy omawianiu własności przekształcenia Laplace'a. W podrozdziale tym na wybranych przykładach przypomnimy i zaprezentujemy wyznaczanie transformat odwrotnych w oparciu o niektóre ze znanych twierdzeń.

- I. Zastosowanie twierdzenia 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym do wyznaczenia transformaty odwrotnej funkcji będącej iloczynem funkcji wymiernej i funkcji wykładniczej

Niech będzie dana transformata postaci

$$G(s) = F(s) \cdot e^{-st_0} \quad (4.7.1)$$

i niech

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)].$$

Wtedy na podstawie wn. 2.6.1 z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym ze wzoru (2.6.4) mamy

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot e^{-st_0}] = f(t - t_0) \cdot \mathbf{I}(t - t_0) \quad (4.7.2)$$

Zgodnie z uwagą 2.6.3, aby znaleźć transformatę odwrotną funkcji danej w postaci iloczynu $F(s) \cdot e^{-st_0}$ należy najpierw znaleźć transformatę odwrotną funkcji $F(s)$, czyli funkcję $f(t) \cdot \mathbf{I}(t)$, a następnie utworzyć funkcję przesuniętą $f(t - t_0) \cdot \mathbf{I}(t - t_0)$.

Uwaga 4.7.1. W poprzednich zadaniach zgodnie z wcześniejszą umową nie mnożyliśmy otrzymanego oryginału przez funkcję jednostkową, gdyż zakładaliśmy, że $f(t) = 0$ dla $t < 0$. W przypadku stosowania twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym (w dziedzinie oryginału) mnożenie przez funkcję jednostkową przesuniętą $I(t - t_0)$ jest bezwzględnie konieczne, ponieważ w tym przypadku dla $t < t_0$ funkcja $I(t - t_0) = 0$ (por. uwagi 2.6.1, 2.6.2).

U w a g a . W tym przypadku nie można stosować do funkcji $G(s)$ twierdzenia o residuach.

Przykład 4.14. Wyznamy transformatę odwrotną funkcji

$$\text{a) } G_1(s) = \frac{3s - 4}{s^2 - 3s + 2} \cdot e^{-2s}, \quad \text{b) } G_2(s) = \frac{s}{s^2 + 9} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}s}$$

R o z w i ą z a n i e . Por. przykład 2.28 w podrozdziale 2.6.

a) Szukamy transformaty odwrotnej $g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[G_1(s)]$. Transformata $G_1(s)$ jest postaci (4.7.1), tzn. jest iloczynem funkcji $F(s) = \frac{3s - 4}{s^2 - 3s + 2}$ i funkcji wykład-

niczej e^{-2s} , której obecność wskazuje, że po wyznaczeniu oryginału $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ należy dokonać przesunięcia tego oryginału o $t_0 = 2$ jednostek w prawo. Korzystamy z przykładu 4.2 a, w którym wyznaczyliśmy transformatę funkcji $F(s)$. Mamy

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s - 4}{s^2 - 3s + 2}\right] = (e^t + e^{2t}) \cdot I(t) \quad (1)$$

Zatem zgodnie ze wzorem (4.7.2)

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s - 4}{s^2 - 3s + 2} \cdot e^{-2s}\right] = f(t - 2) \cdot I(t - 2) \quad (2)$$

Następnie uwzględniamy (1) w zależności (2), tj. zamiast t podstawiamy zmienną $t - 2$ i ostatecznie otrzymujemy

$$g_1(t) = e^{t-2} \cdot I(t - 2) + e^{2(t-2)} \cdot I(t - 2) \quad (3)$$

b) transformatę $G_2(s)$ zapisujemy w postaci iloczynu $G_2(s) = F(s) \cdot e^{-\frac{\pi}{4}s}$ gdzie

$F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$, a czynnik wykładniczy $e^{-\frac{\pi}{4}s}$ wskazuje na przesunięcie rzeczywiste oryginału o $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Wyznamy najpierw transformatę odwrotną

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 9}\right] = \cos 3t \cdot \mathbf{I}(t) \quad (4)$$

a następnie na podstawie wzoru (4.7.2) dla $t_0 = \frac{\pi}{4}$ tworzymy funkcję przesuniętą

$$g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 9} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}s}\right] = f\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5)$$

Uwzględniając funkcję pomocniczą (4) w zależności (5) (zamiast t wstawiamy wielkość $t - \frac{\pi}{4}$) otrzymujemy

$$g_2(t) = \cos 3\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{I}\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

■

II. Wyznaczanie oryginału gdy $F(s)$ jest transformatą funkcji okresowej.

Niech transformata $F(s)$ ma postać określającą transformatę funkcji okresowej (por. wzory 2.7.1 ÷ 2.7.3), tj.

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (4.7.3)$$

gdzie $F_T(s) = \mathcal{L}[f_T(t)]$, a $f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \langle 0, T \rangle \\ 0, & t \notin \langle 0, T \rangle \end{cases}$.

Uwaga 4.7.2. Jeżeli funkcja zespolona zmiennej zespolonej $F(s)$ ma postać (4.7.3) oraz istnieje $f_T(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_T(s)]$ i $\mathcal{L}^{-1}[F_T(s)] = 0$ dla $t < 0$ oraz $t > T$, to funkcja $F_T(s)$ jest transformatą funkcji okresowej $f_T(t)$, która w przedziale $\langle 0, T \rangle$ jest równa

$$f_T(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_T(s)],$$

tzn.

$$f_T(t) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[F_T(s)], & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0 \vee t > T \end{cases} \quad (4.7.4)$$

Przykład 4.15. Sprawdzić, czy funkcja

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left[\frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2} \right] \quad (1)$$

jest transformatą funkcji okresowej $f(t)$, a następnie znaleźć tę funkcję i sporządzić jej wykres.

R o z w i ą z a n i e . Porównując postać (1) transformaty $F(s)$ ze wzorem (4.7.3) wnioskujemy, że oryginał $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie $T = 1$, zaś funkcja, którą oznaczamy przez

$$F_T(s) = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2} \quad (2)$$

powinna przedstawiać transformatę pierwszego okresu $f_T(t)$ funkcji okresowej $f(t)$. Z jednoznaczności przekształcenia \mathcal{L}^{-1} (wzór 1.4.4) istnieje transformata odwrotna $f_T(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_T(s)]$ dana wzorem (4.7.4).

Do obu stron (2) stosujemy odwrotne przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}^{-1}[F_T(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s} \right],$$

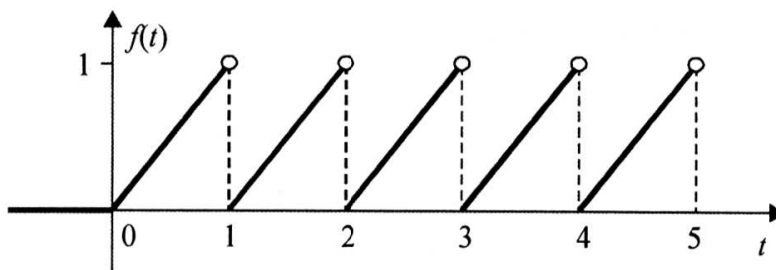
a następnie korzystając z liniowości \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia oraz z wniosku 2.6.1 twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym – wzór (2.6.4) oraz z faktu, że $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t$ otrzymamy

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \cdot e^{-s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-s} \right] = \\ &= t \cdot \mathbf{I}(t) - (t-1) \cdot \mathbf{I}(t-1) - \mathbf{I}(t-1). \end{aligned}$$

Zatem na mocy wzorów (2.6.1) oraz (2.6.2) mamy

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > 1 \\ t, & 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

A więc, funkcja $F(s)$ jest transformatą oryginału okresowego o okresie $T = 1$, przy czym $f(t) = (t-n) \cdot \mathbf{I}(t-n)$ dla $n \leq t < n+1$, rys. 4.1.

Rys. 4.1. Wykres oryginału okresowego $f(t) = (t - n) \cdot I(t - n)$ dla $n \leq t < n + 1$

III. Zastosowanie twierdzenia o całkowaniu oryginału.

Mając transformatę $G(s)$ w postaci iloczynu $\frac{1}{s} \cdot F(s)$ możemy znaleźć odpowiadający jej oryginał $g(t)$ wykonując transformację odwrotną funkcji $F(s)$, tj. znajdując $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, a następnie scałkować otrzymaną funkcję $f(t)$ zmiennej rzeczywistej. W podrozdziale 2.2 w przykładzie 2.13 omówiono wyznaczanie oryginału na podstawie znanej transformaty w oparciu o twierdzenie 2.2.3 (o transformacji całki). Teraz na kolejnym przykładzie przypomnimy tę metodę.

Przykład 4.16. Stosując twierdzenie o transformacji całki wyznaczyć oryginał

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \text{ jeśli } G(s) = \frac{2}{s(s-6)}.$$

R o z w i ą z a n i e . Przypominamy wzór (2.2.9)

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L} [f(t)] \quad (1)$$

Stąd i z jednoznaczności przekształcenia \mathcal{L}^{-1} na podstawie wzoru (2.2.10) mamy

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot F(s) \right] = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2)$$

Aby wyznaczyć oryginał $g(t)$ transformatę $G(s)$ przedstawiamy w postaci prawej strony wzoru (1)

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s-6} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (3)$$

gdzie

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{2}{s-6} \quad (4)$$

Wyznaczamy najpierw transformatę odwrotną funkcji (4)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-6}\right] = 2e^{6t}, \quad t \geq 0.$$

Stosując obustronnie przekształcenie \mathcal{L}^{-1} do równości (3) na mocy wzoru (2) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s-6}\right] = 2 \int_0^t e^{6\tau} d\tau = \frac{1}{3} [e^{6\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{3} (e^{6t} - 1).$$

Zatem ostatecznie $g(t) = \frac{1}{3} (e^{6t} - 1)$ dla $t > 0$.

■

Uwaga 4.7.3. W niektórych przypadkach niemożliwe jest odnalezienie transformaty odwrotnej Laplace'a metodami przedstawionymi w tym rozdziale. Do tych przypadków należy zastosować całą przekształcenia odwrotnego

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

(por. wzór 1.4.3).

Powyższa całka, jak wspominaliśmy wcześniej, obejmuje obszarem całkowania płaszczyznę zespoloną. Nie jest jednak zamiarem autorki dokładne zagłębianie się w studiowanie teorii funkcji zmiennej zespolonej. Zainteresowany Czytelnik będzie mógł znaleźć liczne źródła, w których temat ten jest omówiony dokładnie, np. [8, 12, 15, 20, 25].

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznaczyć oryginały $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ odpowiadające danym transformatom stosując metodę rozkładu na sumę ułamków prostych:

a) $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$

b) $F(s) = \frac{3s-5}{s^2+4s+3},$

c)
$$F(s) = \frac{5s^2 - 2s + 1}{s(s^2 - 1)},$$

d)
$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)},$$

e)
$$F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2},$$

f)
$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 25)},$$

g)
$$F(s) = \frac{4s - 6}{(s+1)(s^2 + 9)},$$

h)
$$F(s) = \frac{3 + 3s + s^2}{s^3 + 2s^2 + s},$$

i)
$$F(s) = \frac{s^3 - s - 5}{(s+1)^2(s^2 + 4)},$$

j)
$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s},$$

k)
$$F(s) = \frac{-s + 1}{(s+1)(s^2 + 4s + 13)},$$

l)
$$F(s) = \frac{s}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)},$$

m)
$$F(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2(s-1)(s^2 + 4)},$$

n)
$$F(s) = \frac{-s^3 + s^2 - s + 4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)},$$

o)
$$F(s) = \frac{s + 5}{s(s^2 + 10s + 29)},$$

p)
$$F(s) = \frac{1}{s^3(s^2 + 16)},$$

r)
$$F(s) = \frac{s^2 + 12s + 14}{(s+3)^2(s^2 + 4)},$$

s)
$$F(s) = \frac{4s^2 + 20s + 26}{s^3 + 6s^2 + 13s},$$

t)
$$F(s) = \frac{3s + 2}{(s^2 - s)(s^2 + 2s + 2)},$$

u)
$$F(s) = \frac{1}{s^3 - 2s^2 + 5s},$$

w)
$$F(s) = \frac{2s^3 - 5s^2 + 7}{(s+2)^5},$$

x)
$$F(s) = \frac{s^4 - 6s^3 + 13s^2 - 10s + 12}{(s-1)^3(s^2 + 9)},$$

y)
$$F(s) = \frac{4s^3 + 9s^2 + 8s + 2}{s(s+2)(s^2 + 1)},$$

z)
$$F(s) = \frac{-2s}{(s^2 + 4s + 5)(s^2 + 2s + 5)}.$$

2. Stosując metodę opartą na twierdzeniu o rozkładzie (wzór – 4.4.1 lub 4.4.2) wyznaczyć oryginał odpowiadający zadanej transformacji:

a)
$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^2 - 3s + 2},$$

b)
$$F(s) = \frac{9s - 2}{6s^2 - 7s - 5},$$

c)
$$F(s) = \frac{s^2 + 3s}{(s+5)(s^2 - 1)},$$

d)
$$F(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s^3 - s^2 - 6s},$$

e)
$$F(s) = \frac{s^2 + s - 1}{(s+2)(s^2 - s - 20)},$$

f)
$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^3 - 3s^2 + 2s},$$

$$g) F(s) = \frac{s^2 + 12}{(s^2 + s)(s + 2)(s + 3)}, \quad h) F(s) = \frac{-2s^2 - 4}{s^4 - 5s^2 + 4}.$$

3. Stosując metodę opartą na zastosowaniu twierdzenia o residuach wyznaczyć oryginał:

$$a) F(s) = \frac{1}{s^2 - a^2},$$

$$b) F(s) = \frac{1}{s(s^2 - a^2)},$$

$$c) F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - a^2)},$$

$$d) F(s) = \frac{2s + 1}{s^2(s + 4)},$$

$$e) F(s) = \frac{1}{(s + 1)^3(s + 3)},$$

$$f) F(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

$$g) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)},$$

$$h) F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2(s + 2)},$$

$$i) F(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2},$$

$$j) F(s) = \frac{16}{(s^2 + 4)^2},$$

$$k) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2},$$

$$l) F(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)^3},$$

$$m) F(s) = \frac{s^2 - 4}{(s^2 + 4)^2},$$

$$n) F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s - 1)^2},$$

$$o) F(s) = \frac{1}{(s + 2)^3(s - 1)^2},$$

$$p) F(s) = \frac{1}{s^5 - s^3},$$

$$r) F(s) = \frac{4s - 5}{(s - 3)^2(s^2 + 1)}$$

$$s) F(s) = \frac{s}{(s + 1)(s^2 + 1)^2},$$

$$t) F(s) = \frac{s}{(s^2 + 2s + 2)^2},$$

$$u) F(s) = \frac{s - 1}{(s^2 + 2s + 5)^2}.$$

4. Wyznaczyć transformaty odwrotne funkcji, korzystając z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym:

$$a) F(s) = \frac{e^{-\frac{3}{2}s}}{s + a},$$

$$b) F(s) = \frac{s + 9}{s(s^2 + 9)} e^{-\frac{\pi}{4}s},$$

c)
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)} e^{-s},$$

d)
$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 15}{(s+2)(s^2 + 9)} e^{-2s},$$

e)
$$F(s) = \frac{s+2}{s(s^2 + 2s + 2)} e^{-4s},$$

f)
$$F(s) = \frac{4}{(2s+1)^2} e^{-s},$$

g)
$$F(s) = \frac{4s-6}{(s+1)^2(s^2 + 4)} e^{-5s},$$

h)
$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{s}{s^2 + 1} e^{-2s},$$

i)
$$F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-s}}{s^2 + 1},$$

j)
$$F(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{s+2},$$

k)
$$F(s) = \frac{2s-3}{(s+1)^2} e^{-3s},$$

l)
$$F(s) = \frac{4 - e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 4},$$

m)
$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2 + s},$$

n)
$$F(s) = \frac{1-2s}{s^2(s-1)^2} e^{-2s},$$

o)
$$F(s) = \frac{\omega(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})}{s^2 + \omega^2},$$

p)
$$F(s) = \frac{e^{-s} - se^{-3s}}{s(s-1)}.$$

5. Znaleźć oryginały następujących funkcji i przedstawić je graficznie:

a)
$$F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}),$$

b)
$$F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})^2,$$

c)
$$F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-6s}),$$

d)
$$F(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-5s} - 5se^{-5s}),$$

e)
$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 1} e^{-\pi s},$$

f)
$$G(s) = \frac{3}{s+2} e^{-4s},$$

g)
$$G(s) = \frac{1}{s+2}(1 - e^{-3s}),$$

h)
$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 4} e^{-\frac{\pi}{3}s},$$

i)
$$G(s) = \frac{8s}{4s^2 + 1} e^{-\frac{\pi}{2}s},$$

j)
$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 1}(1 + e^{-\pi s}).$$

6. Korzystając z podstawowych własności przekształcenia Laplace'a (z twierdzeń: o różniczkowaniu transformaty, o przesunięciu w dziedzinie obrazu, o transformacji całki, całkowaniu transformaty itp.) wyznaczyć oryginały, których transformaty dane są wzorami:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } G(s) = \frac{1}{(s+a)^2}, & \text{b) } G(s) = \frac{1}{(s+a)^3}, & \text{c) } G(s) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{2}\right), \\
 \text{d) } G(s) = \frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}, & \text{e) } G(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, & \text{f) } G(s) = \ln \frac{s+5}{s+2}, \\
 \text{g) } H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+10}, & \text{h) } H(s) = \frac{1}{s^2-4s+9}, & \text{i) } H(s) = \frac{3s+2}{s^2+4s-21}, \\
 \text{j) } H(s) = \frac{s+7}{s^2+14s+43}, & \text{k) } H(s) = \frac{2s}{s^2+3s+9}, & \text{l) } P(s) = \frac{1}{s^2-4s}, \\
 \text{m) } P(s) = \frac{1}{s(s-2)^2}, & \text{n) } P(s) = \frac{3}{s(s^2-s-2)}, & \text{o) } P(s) = \frac{1}{s(s+a)^3}, \\
 \text{p) } P(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}, & \text{r) } P(s) = \frac{s}{(s^2-a^2)^2}, & \text{s) } P(s) = \frac{3s^2}{(s^3-1)^2}.
 \end{array}$$

7. Stosując twierdzenie Borela o splocie wyznaczyć transformaty odwrotne:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } F(s) = \frac{1}{s(s-4)}, & \text{b) } F(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}, & \text{c) } F(s) = \frac{5s}{(s^2+1)(s-1)}, \\
 \text{d) } F(s) = \frac{1}{s(s^2+16)}, & \text{e) } F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, & \text{f) } F(s) = \frac{2}{9s^2-1}.
 \end{array}$$

8. Obliczyć różnymi metodami oryginały podanych funkcji. Porównać efektywność tych metod.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } F(s) = \frac{1}{s(s+2)}, & \text{b) } F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)}, & \text{c) } F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}, \\
 \text{d) } F(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}, & \text{e) } F(s) = \frac{2}{s(4s^2+9)}, & \text{f) } F(s) = \frac{5s^2+16s+9}{s^3+4s^2+3s}.
 \end{array}$$

9. Metodą rozwinięcia obrazu $F(s)$ w szereg Laurenta wyznaczyć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$:

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{s} \sin \frac{1}{s}, \quad \text{b) } F(s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}}, \quad a > 0, \quad \text{c) } F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} e^{-\frac{1}{s}},$$

$$\text{d) } F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad \text{e) } F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cos \frac{1}{s}, \quad \text{f) } F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \frac{1}{s}.$$

Uwaga. W przykładach e), f) przyjąć: $\Gamma\left(2k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(4k)! \sqrt{\pi}}{(2k)! 2^{4k}}$.

10. Sprawdzić, czy funkcja $F(s)$ jest transformatą oryginału okresowego. Znaleźć ten oryginał i naszkicować jego wykres.

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{2}{s} e^{-2s} \right), \quad \text{b) } F(s) = \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}},$$

$$\text{c) } F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s+1} \right), \quad \text{d) } F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2s}},$$

$$\text{e) } F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-ls}}, \quad l > 0, \quad \text{f) } F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{2}s} \right).$$

11. Dowolną metodą wyznaczyć oryginał dla zadanej transformaty:

$$\text{a) } F(s) = \frac{3s+1}{9s^2+6s+5}, \quad \text{b) } F(s) = \frac{1}{4s^2-9}, \quad \text{c) } F(s) = \frac{1}{s(s-2)^2},$$

$$\text{d) } F(s) = \frac{s^2-6s+3}{s^6}, \quad \text{e) } F(s) = \frac{10s-1}{4s^3-3s+1}, \quad \text{f) } F(s) = \frac{s^2+3s+3}{s(s+1)^2},$$

$$\text{g) } F(s) = \frac{s+2}{(s^2+4)(s^2-s-2)}, \quad \text{h) } F(s) = \frac{15s+8}{10s^3-11s^2-6s},$$

$$\text{i) } F(s) = \frac{1}{s^3(s^2+4)}, \quad \text{j) } F(s) = \frac{10s}{s^4-s^2-6}, \quad \text{k) } F(s) = \frac{s+1}{s^4+s^3-2s^2},$$

$$\text{l) } F(s) = \frac{1}{s^4+8s}, \quad \text{m) } F(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+7)}, \quad \text{n) } F(s) = \frac{1}{s(4s^2+\pi^2)},$$

$$\text{o) } F(s) = \frac{1}{s(s^2+\pi^2)} e^{-s}, \quad \text{p) } F(s) = \frac{2s^2+4}{s^4-5s^2+4}, \quad \text{r) } F(s) = \frac{s^2-2s+4}{(s+1)^4},$$

$$\text{s) } F(s) = \frac{2s+5}{(s+3)^2} e^{-2s}, \quad \text{t) } F(s) = \frac{3s+1}{s^3-2s^2+3s-6}, \quad \text{u) } F(s) = \frac{1}{s^3(s^2-1)},$$

$$\text{v) } F(s) = \frac{s-1}{s(s^2+2s+5)^2}.$$

Odpowiedzi:

1. a) $e^{-t} - e^{-2t}$, b) $7e^{-3t} - 4e^{-t}$, c) $4e^{-t} + 2e^t - 1$, d) $t - \sin t$, e) $t - 1 + e^{-t}$,
 f) $\frac{1}{125} \sinh 5t - \frac{1}{25} t$, g) $\cos 3t + \sin 3t - e^{-t}$, h) $-e^{-t}(t+2) + 3$,
 i) $-t \cdot e^{-t} + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t$, j) $1 + \sin t$, k) $\frac{1}{5} e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-2t} (2 \sin 3t + \cos 3t)$,
 l) $\frac{1}{8} e^t - \frac{1}{8} e^{-t} (\cos 2t + 3 \sin 2t)$, m) $t + 1 - \frac{3}{5} e^t - \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t$,
 n) $\sin t - \cos 2t$, o) $\frac{1}{29} [e^{-5t} (2 \sin 2t - 5 \cos 2t) + 5]$,
 p) $\frac{1}{32} t^2 + \frac{1}{256} (\cos 4t - 1)$, r) $\sin 2t - t e^{-3t}$, s) $2 + e^{-3t} (\sin 2t + 2 \cos 2t)$,
 t) $e^t - 1 - e^{-t} \sin t$, u) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} e^t (\sin 2t - 2 \cos 2t)$,
 w) $\left(-\frac{29}{24} t^4 + \frac{22}{3} t^3 - \frac{17}{2} t^2 + 2t \right) e^{-2t}$, x) $\frac{1}{2} t^2 e^{-t} + \cos 3t - \sin 3t$,
 y) $1 + e^{-2t} + 2 \cos t + 3 \sin t$, z) $e^{-2t} \sin t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$.
2. a) $-3e^t + 5e^{2t}$, b) $e^{\frac{5}{3}t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$, c) $\frac{1}{3} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{-5t}$,
 d) $\frac{1}{15} (8e^{3t} + 12e^{-2t} - 5)$, e) $\frac{29}{63} e^{5t} + \frac{11}{18} e^{-4t} - \frac{1}{14} e^{-2t}$, f) $7e^{2t} - 8e^t + 2$,
 g) $2 - \frac{13}{2} e^{-t} + 8e^{-2t} - \frac{7}{2} e^{-3t}$, h) $e^t - e^{-t} + e^{-2t} - e^{2t}$.
3. a) $\frac{1}{a} \sinh at$, b) $\frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)$, c) $\frac{1}{a^3} (\sinh at - at)$,
 d) $-\frac{7}{16} e^{-4t} + \frac{1}{4} t + \frac{7}{16}$, e) $\frac{1}{8} (2t^2 - 2t + 1) e^{-t} - \frac{1}{8} e^{-3t}$,
 f) $\frac{1}{2\omega^2} t \cos \omega t + \frac{1}{2\omega^3} \sin \omega t$, g) $\frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t)$, h) $\frac{1}{9} (3te^t - e^t + e^{-2t})$,
 i) $\frac{1}{2} (\sin t + t \cos t)$, j) $-2t \cos 2t + \sin 2t$, k) $\frac{1}{2} t \sin t$,
 l) $\frac{1}{128} t^2 \cos 2t - \frac{1}{64} t \sin 2t - \frac{5}{256} \cos 2t$, m) $t \cos 2t$, n) $2te^t - 2e^t + t + 2$,

- o) $\frac{1}{54} [e^t(2t-1) + e^{-2t}(3t^2 + 4t + 2)]$, p) $\cosh t - 1 - \frac{1}{2}t^2$,
- r) $\left(\frac{7}{10}t - \frac{1}{50}\right)e^{3t} + \frac{1}{50}\cos t - \frac{16}{25}\sin t$, s) $\frac{1}{4}(t \sin t - t \cos t + \cos t) - \frac{1}{4}e^{-t}$,
- t) $\frac{1}{2}e^{-t}(t \sin t + t \cos t - \sin t)$, u) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{25}e^{-t}[(2t+4)\sin 2t - (t-3)\cos 2t]$.
4. a) $e^{-a\left(t-\frac{3}{2}\right)} \cdot I\left(t-\frac{3}{2}\right)$, b) $I\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[1 - \cos 3\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3}\sin 3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,
- c) $\frac{1}{4}[1 - \cos 2(t-1)] \cdot I(t-1)$, d) $[e^{-2(t-2)} + \sin 3(t-2)] \cdot I(t-2)$,
- e) $-[1 + \cos(t-4)]e^{-(t-4)} \cdot I(t-4)$, f) $I(t-1) \cdot (t-1)e^{-\frac{1}{2}(t-1)}$,
- g) $[-2(t-5)e^{-(t-5)} + \sin 2(t-5)] \cdot I(t-5)$, h) $\cos(t-2) \cdot I(t-2) + I(t-1)$,
- i) $I(t-2) \cdot \sin(t-2) - I(t-1) \cdot \sin(t-1)$, j) $e^{-2t} - e^{-2(t-10)} \cdot I(t-10)$,
- k) $[2 - 5(t-3)]e^{-(t-3)} \cdot I(t-3)$, l) $2\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \cdot I\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$,
- m) $1 - e^{-t} + I(t-2) \cdot [e^{-(t-2)} - 1]$, n) $I(t-2) \cdot (t-2) \cdot (1 - e^{t-2})$,
- o) $[I(t-\pi) - I(t-2\pi)] \sin \omega t$, p) $I(t-1) \cdot [e^{t-1} - 1] - e^{t-3} \cdot I(t-3)$.
5. a) $f(t) = I(t) - I(t-2)$, b) $f(t) = I(t) - 2 \cdot I(t-1) + I(t-2)$,
- c) $f(t) = I(t-1) - I(t-6)$, d) $f(t) = t \cdot I(t) - I(t-5) \cdot (t-5) - 5 \cdot I(t-5)$,
- e) $g(t) = I(t-\pi) \cdot \cos(t-\pi)$, f) $g(t) = 3e^{-2(t-4)} \cdot I(t-4)$,
- g) $g(t) = e^{-2t} - e^{-2(t-3)} \cdot I(t-3)$, h) $g(t) = \frac{5}{2}\sin 2\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \cdot I\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$,
- i) $g(t) = 2 \cdot I\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.
6. a) te^{-at} , b) $\frac{1}{2}t^2e^{-at}$, c) $\frac{\sin 2t}{t}$, d) $t \sin at$, e) $t \cos at$, f) $\frac{1}{t}(e^{-5t} - e^{-2t})$,
- g) $e^{-3t}(\cos t + 2\sin t)$, h) $\frac{\sqrt{5}}{5}e^{2t} \sin \sqrt{5}t$, i) $e^{-2t}\left(3 \cosh 5t - \frac{4}{5}\sinh 5t\right)$,

$$\text{j) } e^{-7t} \cosh \sqrt{6}t, \text{ k) } e^{-\frac{3}{2}t} \left(2 \cos \frac{3\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2}t \right), \text{ l) } \frac{1}{4} (e^{4t} - 1),$$

$$\text{m) } \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}, \text{ n) } \frac{1}{2}e^{2t} + e^{-t} - \frac{3}{2},$$

$$\text{o) } \frac{1}{a^2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}a^2t^2 + at + 1 \right) e^{-at} \right], \text{ p) } \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^3} \sin \omega t, \text{ r) } \frac{1}{2a} t \sinh at,$$

$$\text{s) } \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{3}te^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

$$7. \text{ a) } \frac{1}{4}(e^{4t} - 1), \text{ b) } -\frac{1}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{1}{25}e^{-5t}, \text{ c) } \frac{5}{2}(\sin t - \cos t + e^t),$$

$$\text{d) } \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \cos 4t, \text{ e) } t \sin t, \text{ f) } \frac{1}{3} \left(e^{\frac{1}{3}t} - e^{-\frac{1}{3}t} \right).$$

$$8. \text{ a) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \text{ b) } \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t}, \text{ c) } \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2} \sin t,$$

$$\text{d) } \frac{1}{9}(e^{-2t} + 3te^t - e^t), \text{ e) } \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \cos \frac{3}{2}t, \text{ f) } 3 + e^{-t} + e^{-3t}.$$

$$9. \text{ a) } 1 - \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^4}{(4!)^2} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{[(2k)!]^2},$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} (at)^k = J_0(2\sqrt{at}), \text{ c) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} t^{n+k},$$

$$\text{d) } 1 - \frac{(at)^2}{2^2} + \frac{(at)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{(at)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots = J_0(at), \text{ e) } \frac{\cosh 2\sqrt{2}t \cdot \cos \sqrt{2}t}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\text{f) } \frac{\sinh \sqrt{2}t \cdot \sin \sqrt{2}t}{\sqrt{\pi t}}, \text{ gdzie } J_0 - \text{ funkcja Bessela pierwszego rodzaju.}$$

$$10. \text{ a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 2n \leq t < 2n+1 \\ 2 & \text{dla } 2n+1 \leq t < 2n+2, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{b) nie, c) } f(t) = 1 - e^{-(t-n)}, \quad n \leq t < n+1,$$

$$\text{d) nie } f(t) = I(t) + I(t-2) + I(t-4) + \dots \text{ (tzw. funkcja schodkowa),}$$

$$e) f(t) = I(t) - I(t-l) + I(t-2l) - I(t-3l) + \dots, T = 2l,$$

$$f) f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } n \leq t < n + \frac{1}{2} \\ t - n - 1 & \text{dla } n + \frac{1}{2} \leq t < n + 1, n \in N, f(t) = 0, t < 0 \end{cases}$$

$$11. a) \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t} \cos \frac{2}{3}t, \quad b) \frac{1}{6} \sinh \frac{3}{2}t, \quad c) \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{2} t e^{2t},$$

$$d) \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{40} t^5, \quad e) -\frac{11}{9} e^{-t} + \frac{11}{9} e^{\frac{1}{2}t} + \frac{2}{3} t e^{\frac{1}{2}t}, \quad f) t e^{-t} + 3 - 2e^{-t},$$

$$g) -\frac{1}{15} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{1}{5} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos 2t, \quad i) \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{16} (\cos 2t - 1),$$

$$h) -\frac{4}{3} + \frac{5}{19} e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{6.4}{57} e^{\frac{3}{5}t}, \quad j) 2 \cosh \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{2}t,$$

$$k) -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}, \quad l) \frac{1}{8} - \frac{1}{24}e^{-2t} - \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{\frac{t}{2}} \cos \sqrt{3}t.$$

$$m) \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{\sqrt{7}}{7} \sin \sqrt{7}t, \quad n) \frac{1}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}t \right),$$

$$o) \frac{1}{\pi^2} [1 - \cos \pi(t-1)] \cdot I(t-1), \quad p) 2(\sinh 2t - \sinh t),$$

$$r) \left(t^2 - 2t^2 + \frac{7}{6}t^3 \right) e^{-t}, \quad s) [2 - (t-2)] e^{-3(t-2)} \cdot I(t-2),$$

$$t) e^{-2t} - \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t, \quad u) \cosh t - 1 - \frac{1}{2}t^2,$$

$$v) -\frac{1}{25} + \frac{1}{200} e^{-t} (10t \sin 2t - 30t \cos 2t + 8 \cos 2t + 19 \sin 2t).$$

5.

Zastosowania przekształcenia Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a stanowi podstawę metody operatorowej, która ma szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu następujących typów równań:

- a) równania różniczkowe zwyczajne liniowe o stałych współczynnikach n -tego rzędu z zadanymi warunkami początkowymi;
- b) niektóre typy równań różniczkowych zwyczajnych liniowych o zmiennych współczynnikach;
- c) równania różnicowe liniowe o stałych współczynnikach;
- d) niektóre typy równań różnicowych liniowych o zmiennych współczynnikach;
- e) niektóre typy równań całkowych liniowych (typu splotowego) oraz równań różniczkowo-całkowych liniowych;
- f) równania różniczkowe cząstkowe liniowe o stałych współczynnikach dwu zmiennych z odpowiednio sformułowanymi warunkami granicznymi;
- g) niektóre typy równań różniczkowych cząstkowych liniowych o zmiennych współczynnikach z warunkami początkowymi i z odpowiednio sformułowanymi warunkami granicznymi;
- h) szczególne przypadki nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych, różnicowych i całkowych;
- i) układy równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach z warunkami początkowymi.

Ponadto metody przekształceń całkowych są stosowane w wielu innych odrębnych zagadnieniach, np. obliczanie całek, sumowanie szeregów, itp.

Wymienione typy równań należą do najważniejszych i najczęściej występujących w zastosowaniach.

Zachowanie się większości układów fizycznych (np. elektrycznych, mechanicznych, hydro – i aerodynamicznych, itp.) opisuje się równaniami któregoś z wymienionych rodzajów, pod warunkiem, że układy te, przynajmniej w pewnym zakresie zmian parametrów, można uważać za liniowe.

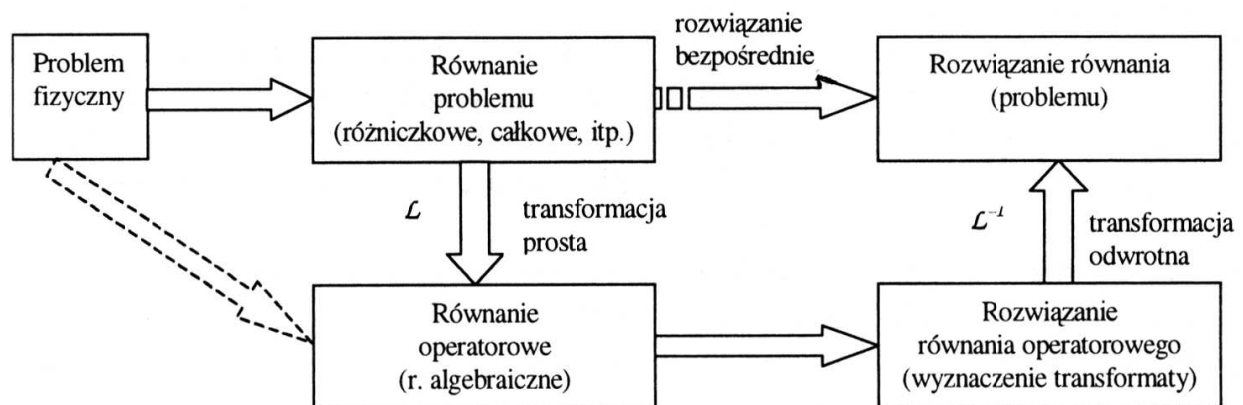
Rachunek operatorowy stał się ogólną metodą badania dynamiki układów liniowych, niezależnie od ich charakteru fizycznego. Wszechstronne i najpełniej-

szere zastosowania rachunek operatorowy znalazł w zakresie analizy obwodów elektrycznych i teorii automatycznej regulacji.

Szerokie zastosowanie przekształceń całkowych w matematyce, fizyce i dziedzinach technicznych wynika z faktu, że pozwalają one sprowadzić rozwiązywanie równań różniczkowych, różnicowych, całkowych i równań im pokrewnych do rozwiązywania równań algebraicznych, w których niewiadomymi są obrazy szukanych funkcji równań wyjściowych. Po rozwiązaniu równania algebraicznego (tzw. równania operatorowego lub równania dla transformaty) i wyznaczeniu obrazu (transformaty) niewiadomej funkcji wykonujemy transformację odwrotną Laplace'a i znajdujemy funkcję (oryginał) będącą szukaniem rozwiązaniem wyjściowego równania.

„Algebraizacja” równania różniczkowego lub całkowego polega na tym, że uzyskane równanie operatorowe nie zawiera żadnych pochodnych i całek, a działania operacji różniczkowania i całkowania zostają zastąpione przez proste działania algebraiczne, tj. przez mnożenie lub dzielenie. Równanie algebraiczne jest łatwiejsze do rozwiązania, chociaż mogą się niekiedy pojawiać trudności przy obliczaniu transformaty odwrotnej.

Na schemacie (rys. 5.1) przedstawiono cykl zastosowania przekształcenia Laplace'a do rozwiązania pewnego równania uzyskanego z badanego problemu fizycznego.



Rys. 5.1. Cykl zastosowania przekształcenia Laplace'a do rozwiązania równania uzyskanego z badanego problemu fizycznego

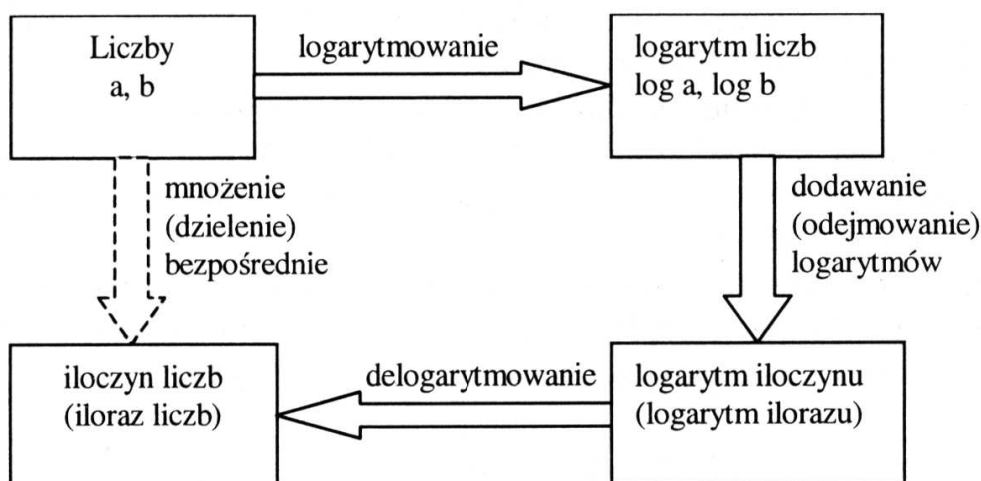
Uwaga 5.1.1. Zastosowanie metody operatorowej tylko wtedy będzie miało znaczenie praktyczne, gdy uzyskanie rozwiązania tą metodą jest prostsze i łatwiejsze do efektywnego wykonania niż bezpośrednie wyznaczenie rozwiązania danego równania metodami klasycznymi bez użycia rachunku operatorowego. Należy zaznaczyć, że zalety metod operatorowych w porównaniu z metodami klasycznymi polegają głównie na uproszczeniu obliczeń algebraicznych, często

bardzo uciążliwych, a także na ich ujednoczeniu. Zalety te występują tym wyraźniej, im bardziej skomplikowane jest rozpatrywane zadanie.

W tym rozdziale omówimy zastosowania przekształcenia Laplace'a do wyznaczania rozwiązań tylko niektórych typów równań.

5.1. Równania różniczkowe liniowe zwyczajne przy danych warunkach początkowych

Rachunek operatorowy odgrywa podobną rolę przy rozwiązywaniu równań różniczkowych jak zastosowanie logarytmów do upraszczania rachunków numerycznych. Działaniem odpowiadającym logarytmowaniu jest \mathcal{L} -przekształcenie Laplace'a, natomiast delogarytmowaniu odpowiada odwrotne przekształcenie Laplace'a \mathcal{L}^{-1} . Analogię między zastosowaniem rachunku logarytmicznego i operatorowego przedstawiono na rysunkach 5.2 i 5.3.



Rys. 5.2. Zastosowanie rachunku logarytmicznego

Omówimy teraz schemat zastosowania transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych liniowych.

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

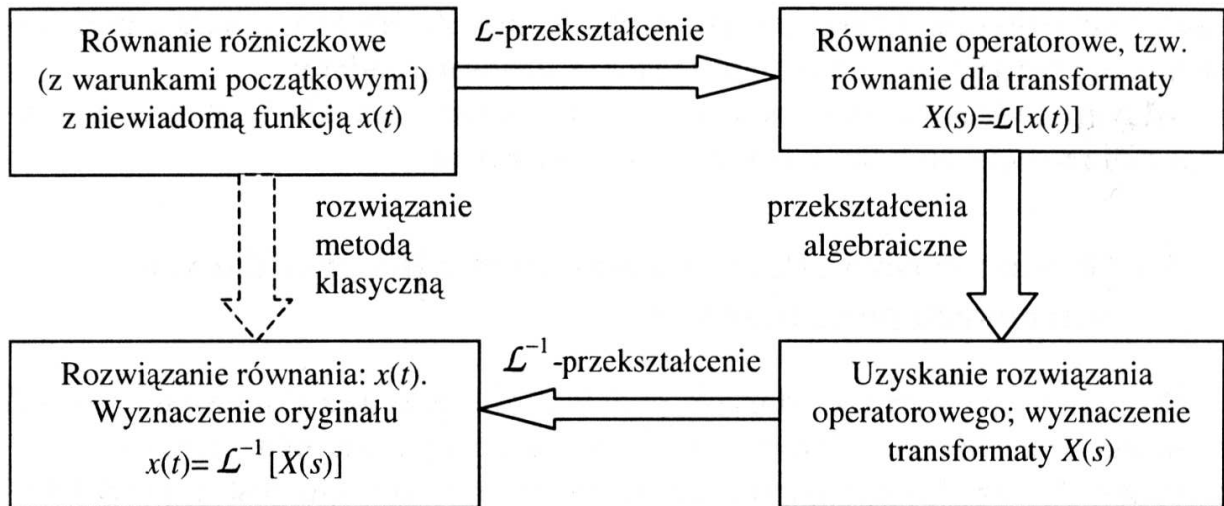
$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)}(t) + a_{n-2} \cdot x^{(n-2)}(t) + \dots + a_1 \cdot x'(t) + a_0 \cdot x(t) = f(t) \quad (5.1.1)$$

gdzie stałe $a_i \in R$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, a $f(t)$ jest oryginałem;

oraz warunki początkowe w postaci:

$$x(0^+) = x_0, \quad x'(0^+) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0^+) = x_{n-1} \quad (5.1.2)$$

gdzie $x^{(k)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.



Rys. 5.3. Zastosowanie rachunku operatorowego do rozwiązywania równania różniczkowego

Równanie (5.1.1) uzupełnione warunkami (5.1.2) nazywa się *zagadnieniem Cauchy'ego* lub *zagadnieniem początkowym*.

Zakładamy, że szukane rozwiązanie $x(t)$ wraz z pochodnymi aż do rzędu n włącznie spełniają warunki istnienia transformaty Laplace'a. Szukamy rozwiązania szczególnego $x(t)$ równania (5.1.1) dla wartości argumentu $t > 0$ spełniającego warunki początkowe (5.1.2).

W celu znalezienia rozwiązania postawionego zadania metodą operatorową dokonujemy transformacji Laplace'a do obu stron równania (5.1.1) oraz korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia (wzór (2.1.3)) i otrzymujemy

$$\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] + a_{n-1}\mathcal{L}[x^{(n-1)}(t)] + \dots + a_1\mathcal{L}[x'(t)] + a_0\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \quad (5.1.3)$$

Oznaczamy obrazy funkcji $x(t)$ i $f(t)$ odpowiednio przez $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ oraz $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Stosując następnie wzory (2.2.1) i (2.2.4) z twierdzeń 2.2.1 i 2.2.2 o różniczkowaniu oryginału oraz uwzględniając warunki początkowe (5.1.2) mamy kolejno

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[x'(t)] &= s \cdot X(s) - x_0 \\
 \mathcal{L}[x''(t)] &= s^2 \cdot X(s) - s \cdot x_0 - x_1 \\
 &\dots \dots \dots \\
 \mathcal{L}[x^{(n-1)}(t)] &= s^{n-1} \cdot X(s) - s^{n-2} \cdot x_0 - \dots - s \cdot x_{n-3} - x_{n-2} \\
 \mathcal{L}[x^{(n)}(t)] &= s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x_0 - s^{n-2} x_1 \dots - s \cdot x_{n-2} - x_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.1.4}$$

Uwzględniamy następnie zależności (5.1.4) po lewej stronie wzoru (5.1.3), a następnie po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymujemy następujące równanie algebraiczne

$$M(s) \cdot X(s) - W(s) = F(s), \quad (5.1.5)$$

gdzie

$$M(s) = s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \quad (5.1.6)$$

jest wielomianem charakterystycznym równania liniowego jednorodnego, a

$$W(s) = s^{n-1} \cdot x_0 + s^{n-2} \cdot (x_1 + a_{n-1} \cdot x_0) + \dots + s(x_{n-2} + a_{n-2} \cdot x_{n-3} + \dots + a_2 \cdot x_0) + \\ + (x_{n-1} + a_{n-1} \cdot x_{n-2} + \dots + a_1 \cdot x_0) \quad (5.1.7)$$

jest wielomianem zmiennej zespolonej s stopnia $n - 1$.

Równanie algebraiczne (5.1.5) jest równaniem pomocniczym dla równania różniczkowego (5.1.1) z układem warunków początkowych (5.1.2) i nazywamy go *równaniem operatorowym* (lub *równaniem tworzącym*). Niewiadomą w równaniu (5.1.5) jest transformata Laplace'a $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ szukanego rozwiązania $x(t)$.

Rozwiązując równanie operatorowe (5.1.5) względem transformaty $X(s)$ otrzymamy *rozwiązanie operatorowe*, które ma postać

$$X(s) = \frac{F(s) + W(s)}{M(s)} \quad (5.1.8)$$

Zauważmy, że przy zerowych warunkach początkowych (5.1.2) mamy $W(s) \equiv 0$ i wtedy lewa strona równania (5.1.5) przyjmuje prostą postać

$$M(s) \cdot X(s) = (s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0) \cdot X(s),$$

do której można łatwo dojść zamieniając w wyrażeniu (5.1.1) operator różniczkowania $\frac{d^n}{dt^n}$ na czynnik s^n i wyłączając funkcję $X(s)$ poza nawias. W tym przypadku rozwiązanie operatorowe (5.1.8) przyjmuje postać

$$X(s) = \frac{F(s)}{M(s)} \quad (5.1.9)$$

Wykonując następnie transformację odwrotną Laplace'a do obu stron (5.1.8) lub (5.1.9) przechodzimy do oryginałów i znajdujemy rozwiązanie szczególne $x(t)$ równania różniczkowego (5.1.1) przy warunkach początkowych (5.1.2).

Funkcja

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (5.1.10)$$

jest jedynym szukanym rozwiązaniem równania (5.1.1), które spełnia warunki początkowe (5.1.2). Prawa strona równania operatorowego (5.1.8) jest zazwyczaj funkcją wymierną właściwą. Aby ułatwić posługiwanie się tablicami obrazów (transformat), należy rozłożyć prawą stronę równania (5.1.8) na ułamki proste. Możemy też stosować inne metody wyznaczania oryginału $x(t)$ omówione w rozdziale 4, np. metodę opartą na twierdzeniu 4.4.1 o rozkładzie (wzór 4.4.1) lub metodę opartą na twierdzeniu 4.3.1 o residuach (wzór 4.3.1).

Uwaga 5.1.2. Oryginał $x(t)$ może nie spełniać równania (5.1.1) w pewnych punktach izolowanych, co nie przeszkadza, że nazywamy go rozwiązaniem tego równania.

Często się zdarza, że oryginał $f(t)$ na przedziale $(0, +\infty)$ jest identyczny z pewną funkcją $g(t)$ będącą sumą szeregu potęgowego zbieżnego na zbiorze R (np. oryginał $f(t) = I(t)\sin at$ i funkcja $g(t) = \sin at$). W tym przypadku rozwiązanie równania (5.1.1) z warunkami (5.1.2) otrzymane metodą operatorową jest identyczne na przedziale $(0, +\infty)$ z rozwiązaniem tego równania uzyskanym metodą klasyczną z prawą stroną $f(t) = g(t)$ i warunkami początkowymi postaci

$$x^{(k)}(0) = x_k \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.1.11)$$

Natomiast na przedziale $(-\infty, 0)$ te dwa rozwiązania są na ogół różne.

Zwróćmy uwagę, że rozwiązując metodą klasyczną równanie (5.1.1), gdy $f = g$ z warunkami (5.1.11) przyjmujemy, że funkcje pochodne

$$x^{(k)}(t) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.1.12)$$

są ciągłe dla $t = 0$ i wówczas warunki (5.1.2) i (5.1.11) są równoważne. W przypadku zaś stosowania metody operatorowej funkcje pochodne (5.1.12) mogą nie być określone w punkcie $t = 0$. Dlatego w zadaniach rozwiązywanych metodą operatorową podaje się warunki początkowe postaci (5.1.2) [5,24].

Praktyczne znaczenie zastosowania przekształcenia Laplace'a przy rozwiązywaniu równania różniczkowego polega na tym, że:

- 1° obojętne jest czy dane równanie różniczkowe jest jednorodne, czy też niejednorodne;
- 2° metoda ta daje od razu rozwiązanie równania różniczkowego przy danych warunkach początkowych;
- 3° obliczenia prowadzimy nie na funkcjach, lecz na ich obrazach o postaci bardziej przejrzystej;
- 4° odwzorowane równania w przestrzeni obrazu mają prostszą postać i są na ogół łatwiejsze do rozwiązania, niż równania wyjściowe z przestrzeni oryginału.

Jak wiemy, klasyczna metoda rozwiązywania równania (5.1.1) przy warunkach początkowych (5.1.2) wymaga najpierw znalezienia całki ogólnej równania jednorodnego, a następnie całki szczególnej równania niejednorodnego, a potem takiego doboru dowolnych stałych C_1, C_2, \dots, C_n występujących w całce ogólnej równania niejednorodnego, aby spełnione były dane warunki początkowe. Dla równań różniczkowych rzędu wyższego niż pierwszy prowadzi to na ogół do uciążliwych rachunków.

Rozpatrzmy kilka przykładów znajdowania rozwiązań szczególnych równań różniczkowych metodą operatorową w oparciu o przekształcenie Laplace'a.

Przykład 5.1. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania różniczkowego:

$$\frac{dx}{dt} - 2x(t) = 5 \cos t, \quad t > 0 \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $x(0^+) = 0$.

R o z w i ą z a n i e . Szukamy oryginału $x(t)$ i zakładamy, że istnieje jego obraz $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

1. Do obu stron (1) stosujemy transformację Laplace'a $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt} - 2x(t)\right] = \mathcal{L}[5 \cos t]$
2. Korzystamy z liniowości przekształcenia Laplace'a $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] - 2\mathcal{L}[x(t)] = 5\mathcal{L}[\cos t]$
3. Ze wzoru (2.2.1), z uwzględnieniem warunku początkowego i ze wzoru na transformatę $\cos t$ $sX(s) - 2X(s) = 5 \frac{s}{s^2 + 1}$
4. Uzyskujemy równanie operatorowe względem transformaty $X(s)$ $(s - 2)X(s) = \frac{5s}{s^2 + 1}$
5. Wyznaczamy rozwiązanie operatorowe $X(s)$ $X(s) = \frac{5s}{(s - 2)(s^2 + 1)}$ (2)
6. Prawą stronę (2) rozkładamy na ułamki proste $X(s) = \frac{2}{s - 2} - 2 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$ (3)
7. Do obu stron (3) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1} $\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s - 2} - 2 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}\right]$

8. Korzystamy z liniowości $\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$
9. Wyznaczamy transformaty odwrotne i otrzymujemy rozwiązanie $x(t) = 2e^{2t} \cdot \mathbf{I}(t) - 2\cos t \cdot \mathbf{I}(t) + \sin t \cdot \mathbf{I}(t), t \in \mathbb{R}$

Rozwiązując równanie metodą operatorową interesuje nas rozwiązanie tylko na przedziale $(0, +\infty)$, zatem szukane rozwiązanie szczególne równania (1) z zadany warunkiem początkowym ma postać

$$x(t) = 2e^{2t} - 2\cos t + \sin t \quad \text{dla } t > 0$$

■

Przykład 5.2. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-3), \quad y(0^+) = 0, \quad y'(0^+) = -2 \quad (1)$$

R o z w i ą z a n i e . Zakładamy, że funkcja $y = y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1), oraz że istnieje $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$.

1. Do obu stron równania (1) stosujemy transformację Laplace'a

$$\mathcal{L}[y'' - y] = \mathcal{L}[\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t-3)]$$

2. Korzystamy z liniowości przekształcenia Laplace'a

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\mathbf{I}(t)] - \mathcal{L}[\mathbf{I}(t-3)] \quad (2)$$

3. Ze wzoru (2.2.6) wyznaczamy transformatę drugiej pochodnej $\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+)$, uwzględniamy warunki początkowe oraz obliczamy pozostałe transformaty

$$s^2 \cdot Y(s) + 2 - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-3s}$$

4. Otrzymujemy równanie operatorowe względem transformaty $Y(s)$

$$(s^2 - 1) \cdot Y(s) = -2 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-3s} \quad (3)$$

5. Rozwiązujemy równanie (3), tj. wyznaczamy transformatę (obraz)

$$Y(s) = -\frac{2}{s^2 - 1} + \frac{1}{s(s^2 - 1)} - \frac{1}{s(s^2 - 1)} e^{-3s} \quad (4)$$

6. Do obu stron (4) wykonujemy odwrotną transformację Laplace'a i z przeszerzenia obrazu wracamy do rozwiązania $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ w przestrzeni oryginału. Korzystamy z liniowości \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia i otrzymujemy

$$y(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}e^{-3s}\right] \quad (5)$$

7. Wyznaczamy kolejno transformaty odwrotne (najczęściej korzystamy z tabelicy 2 zamieszczonej w Dodatku lub z dowolnej znanej nam metody).

Mamy więc, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] = I(t) \cdot \sinh t$. Zauważmy następnie, że wyrażenie

$\frac{1}{s(s^2-1)}$ można zapisać w postaci $\frac{1}{s(s^2-1)} = \frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{s}$, zatem

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = (\cosh t - 1) \cdot I(t).$$

Trzecią transformatę odwrotną we wzorze (5) obliczymy z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym, na co wskazuje obecność czynnika e^{-3s} . Zatem ze wzoru (2.6.3) (patrz uwaga 2.6.3 oraz por. przykład 2.28) mamy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-1)}e^{-3s}\right] = [\cosh(t-3) - 1] \cdot I(t-3)$$

Uwzględniając powyższe wyniki w (5) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia (1)

$$y(t) = (-2 \sinh t + \cosh t - 1) \cdot I(t) - [\cosh(t-3) - 1] \cdot I(t-3), \quad t \in R.$$

■

Przykład 5.3. Metodą operatorową rozwiązać równania różniczkowe liniowe trzeciego rzędu z zadanymi warunkami początkowymi

$$\text{a) } x'''(t) - x'(t) = 0, \quad x(0^+) = 3, \quad x'(0^+) = 2, \quad x''(0^+) = 1 \quad (1)$$

$$\text{b) } x'''(t) - x(t) = 16e^{-3t}, \quad x(0^+) = 0, \quad x'(0^+) = 1, \quad x''(0^+) = -2 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . a) Zakładamy, że funkcja $x(t)$ jest szukanym rozwiązaniem zagadnienia (1) oraz istnieje $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. W celu uzyskania rozwiązania metodą operatorową postępujemy analogicznie jak w przykładzie 5.1.

1. Do obu stron równania (1) stosujemy transformację Laplace'a

$$\mathcal{L}[x'''(t) - x'(t)] = \mathcal{L}[0]$$

2. Korzystamy z liniowości przekształcenia Laplace'a $\mathcal{L}[x'''(t)] - \mathcal{L}[x'(t)] = 0$
3. Stosujemy wzór (2.2.4) oraz uwzględniamy warunki początkowe $s^3 X(s) - 3s^2 - 2s - 1 - sX(s) + 3 = 0$
4. Uzyskujemy równanie operatorowe względem transformaty $X(s)$ $(s^3 - s)X(s) = 3s^2 + 2s - 2$
5. Wyznaczamy rozwiązanie operatorowe $X(s)$ $X(s) = \frac{3s^2 + 2s - 2}{s^3 - s}$ (3)
6. Prawą stronę (3) rozkładamy na ułamki proste (4.2.3) $X(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}$ (4)
7. Do obu stron (4) stosujemy przekształcenie \mathcal{L}^{-1} $\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1}\right]$
8. Korzystamy z liniowości $= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$
9. Wyznaczamy transformaty odwrotne i otrzymujemy oryginał $x(t) = \left(2 + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right) \cdot \mathbf{I}(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Szukane rozwiązanie szczególne równania (1) z zadanymi warunkami początkowymi ma postać

$$x(t) = 2 + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{dla } t > 0.$$

b) Zakładamy, że oryginał $x(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (2) i istnieje jego obraz $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$.

Do obu stron równania (2) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}[x'''(t)] - \mathcal{L}[x(t)] = 16\mathcal{L}[e^{-3t}] \quad (5)$$

W myśl wzoru (2.2.4) wyznaczamy transformatę pochodnej trzeciego rzędu i uwzględniamy podane warunki początkowe

$$\mathcal{L}[x'''(t)] = s^3 \cdot X(s) - s^2 \cdot x(0^+) - s \cdot x'(0^+) - x''(0^+) = s^3 \cdot X(s) - s + 2 \quad (6)$$

Z faktu, że $\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$ oraz uwzględniając wynik (6) w równaniu (5) otrzymamy równanie operatorowe

$$s^3 \cdot X(s) - s + 2 + X(s) = \frac{16}{s+3},$$

które po uporządkowaniu przyjmuje postać

$$(s^3 - 1) \cdot X(s) = \frac{s^2 + s + 10}{s+3} \quad (7)$$

Rozwiązaniem równania operatorowego (7) jest transformata (obraz)

$$X(s) = \frac{s^2 + s + 10}{(s+3)(s^3 - 1)} \quad (8)$$

Wykonując następnie transformację odwrotną do obu stron (8) od obrazu przechodzimy do oryginału $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. Ponieważ $X(s)$ jest funkcją wymierną właściwą, to prawą stronę wzoru (8) rozkładamy na sumę ułamków prostych postaci (por. wzory 4.2.3 i 4.2.8)

$$\frac{s^2 + s + 10}{(s+3)(s^3 - 1)} = \frac{s^2 + s + 10}{(s+3)(s-1)(s^2 + s + 1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs + D}{s^2 + s + 1} \quad (9)$$

Aby wyznaczyć współczynniki A , B , C , D mnożymy obie strony (9) przez wspólny mianownik i otrzymujemy tożsamość

$$s^2 + s + 10 \equiv A(s^3 - 1) + B(s+3)(s^2 + s + 1) + (Cs + D)(s+3)(s-1).$$

Znanym sobie sposobem wyznaczamy współczynniki $A = -\frac{4}{7}$, $B = 1$,

$C = -\frac{3}{7}$, $D = -\frac{15}{7}$ i po uwzględnieniu ich w rozkładzie (9) otrzymamy

$$X(s) = -\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{7} \cdot \frac{3s+15}{s^2 + s + 1} \quad (10)$$

Mianownik trzeciego ułamka po prawej stronie wzoru (10) doprowadzamy do postaci kanonicznej i następnie przekształcamy go do postaci, z której łatwo jest wyznaczyć transformaty odwrotne (por. przykład 4.4). Ostatecznie otrzymamy następujący rozkład transformaty (8)

$$X(s) = -\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-1} - \frac{3}{7} \cdot \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{9\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \quad (11)$$

Do obu stron (11) stosujemy przekształcenie odwrotne Laplace'a i korzystając z jego liniowości mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = & -\frac{4}{7} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{3}{7} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right] + \\ & -\frac{9\sqrt{3}}{7} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right], \end{aligned}$$

a następnie z tablic transformat odczytujemy transformaty odwrotne (lub do trzeciego i czwartego ułamka prawej strony równania (11) stosujemy twierdzenie 2.5.1 – por. wzory (4.2.11) zastosowane dla $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$x(t) = -\frac{4}{7}e^{-3t} + e^t - \frac{3}{7}e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{9\sqrt{3}}{7}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad \text{dla } t > 0.$$

■

Nie należy sądzić, że metody operatorowe pozwalają znaleźć tylko rozwiązania szczególne równań różniczkowych. Metodą operatorową można również posłużyć się do uzyskania rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego. W tym celu należy traktować wartości określone warunkami początkowymi jako dowolne stałe, które wejdą do końcowego rozwiązania. Zilustrujemy to na następującym przykładzie.

Przykład 5.4. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \cdot x(t) = a \cdot \sin kt \quad (1)$$

gdzie k – pewna stała dodatnia, a – dowolna stała.

R o z w i ą z a n i e . Szukamy $x(t)$. Zakładamy, że $x(t)$ jest oryginałem i oznaczamy jego obraz przez $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Aby uzyskać rozwiązanie ogólne równania (1), za warunki początkowe przyjmujemy odpowiednio wartości

$$x(0^+) = C_1, \quad x'(0^+) = C_2 \quad (2)$$

dla dowolnych stałych C_1 i C_2 .

Do równania (1) stosujemy obustronnie przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \cdot x(t)\right] = \mathcal{L}[a \cdot \sin kt],$$

korzystamy z jego liniowości

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + k^2 \cdot \mathcal{L}[x(t)] = a \cdot \mathcal{L}[\sin kt],$$

a następnie stosujemy twierdzenie o różniczkowaniu (wzór 2.2.4), uwzględniamy warunki początkowe (2) oraz odczytujemy z tablic transformatę prawej strony i otrzymujemy równanie algebraiczne z niewiadomą funkcją $X(s)$

$$s^2 X(s) - C_1 s - C_2 + k^2 X(s) = \frac{a \cdot k}{s^2 + k^2}.$$

Po uporządkowaniu równanie operatorowe przyjmie postaci

$$(s^2 + k^2) X(s) = \frac{a \cdot k}{s^2 + k^2} + C_1 s + C_2 \quad (3)$$

a stąd dzieląc obie strony równania (3) przez $s^2 + k^2$, wyznaczamy

$$X(s) = \frac{a \cdot k}{(s^2 + k^2)^2} + C_1 \frac{s}{s^2 + k^2} + C_2 \frac{1}{s^2 + k^2} \quad (4)$$

Aby ułatwić posługiwanie się tablicami transformat, pierwszy ułamek lewej strony (4) przekształcamy do postaci

$$\frac{a \cdot k}{(s^2 + k^2)^2} = \frac{a \cdot k}{2k^2} \cdot \frac{(k^2 - s^2) + (s^2 + k^2)}{(s^2 + k^2)^2} = \frac{a}{2k} \left[\frac{k^2 - s^2}{(s^2 + k^2)^2} + \frac{1}{s^2 + k^2} \right].$$

Uwzględniając ten wynik w (4) otrzymamy

$$X(s) = \frac{a}{2k} \left[\frac{k^2 - s^2}{(s^2 + k^2)^2} + \frac{1}{s^2 + k^2} \right] + C_1 \cdot \frac{s}{s^2 + k^2} + C_2 \cdot \frac{1}{s^2 + k^2} \quad (5)$$

Następnie do obu stron (5) stosujemy odwrotną transformację Laplace'a i uwzględniając jej liniowość z przestrzeni obrazu wracamy ponownie do przestrzeni oryginałów. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \frac{a}{2k} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k^2 - s^2}{(s^2 + k^2)^2}\right] + \frac{a}{2k} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + k^2}\right] + \\ &+ C_1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + k^2}\right] + C_2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + k^2}\right]. \end{aligned}$$

Z tablic odczytujemy transformaty odwrotne i otrzymamy rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (1) wyrażające się wzorem

$$x(t) = \frac{a}{2k} \left(-t \cos kt + \frac{1}{k} \sin kt \right) + C_1 \cos kt + \frac{C_2}{k} \sin kt \quad \text{dla } t > 0. \quad (6)$$

■

U w a g a . Ponieważ C_1 i C_2 są wartościami początkowymi funkcji $x(t)$ i jej pochodnej $x'(t)$, gdy warunki początkowe dane są dla $t = 0$, więc z otrzymanego rozwiązania ogólnego (6) można uzyskać odpowiednie rozwiązania szczególne bez konieczności rozwiązywania układu równań algebraicznych dla uzyskania wartości C_1 i C_2 . W tym celu podstawiamy dane warunki początkowe i mamy

$$x(0^+) = x_0 = C_1 \quad \text{i} \quad x'(0^+) = x_1 = C_2.$$

Często zachodzi potrzeba przyjęcia warunków początkowych w punkcie $t = t_0 \neq 0$. Wówczas konieczne jest rozwiązanie układu równań algebraicznych dla wyznaczenia stałych.

Za pomocą spłotu (3.1.1) lub całki Duhamela (3.3.1) i stosując tw. Borela o splocie można w dogodny sposób przedstawić rozwiązania równań różniczkowych zwłaszcza w tych przypadkach, gdy funkcja $f(t)$ (tzw. funkcja wymuszająca) stojąca po prawej stronie w równaniu (5.1.1) nie jest bliżej określona.

Przykład 5.5. Przedstawić w postaci spłotu rozwiązanie $x(t)$ danego równania różniczkowego, przy założeniu, że $f(t)$ jest dowolnym oryginałem i warunki początkowe są z góry określone

$$\text{a) } x'(t) + 2x(t) = f(t), \quad x(0^+) = 3 \quad (1)$$

$$\text{b) } x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = f(t), \quad x(0^+) = x'(0^+) = 0 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . a) Rozwiązanie równania (1) zależy od funkcji $f(t)$. Z założenia $f(t)$ jest oryginałem, więc na podstawie tw. 1.2.2 oryginały są bezwzględnie transformowalne, tj. istnieje transformata $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Zakładamy również, że istnieje rozwiązanie $x(t)$ bezwzględnie transformowalne, tj. $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Aby rozwiązać równanie metodą operatorową do obu stron równania (1) stosujemy \mathcal{L} -przekształcenie

$$\mathcal{L}[x'(t) + 2x(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \quad (3)$$

Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia, a następnie ze wzoru (2.2.1) obliczamy transformatę pochodnej i uwzględniając warunek początkowy otrzymamy równanie algebraiczne

$$s \cdot X(s) - 3 + 2X(s) = F(s).$$

Po uporządkowaniu $(s + 2) \cdot X(s) = F(s) + 3$,

a stąd wyznaczamy rozwiązanie operatorowe

$$X(s) = \frac{F(s)}{s + 2} + \frac{3}{s + 2} \quad (4)$$

Następnie wyznaczamy rozwiązanie $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. W tym celu do obu stron równania (4) stosujemy przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s) \cdot \frac{1}{s+2}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \quad (5)$$

Ponieważ $\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$ oraz na podstawie tw. Borela – wzór (3.2.1), transformata splotu równa się iloczynowi transformat, tj. $\mathcal{L}[f(t) * e^{-2t}] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[e^{-2t}]$, więc uwzględniając powyższe w zależności (5) otrzymujemy, że rozwiązaniem równania jest funkcja

$$x(t) = f(t) * e^{-2t} + 3e^{-2t} = 3e^{-2t} + \int_0^t e^{-2\tau} f(t-\tau) d\tau, \quad t > 0$$

zależna od funkcji $f(t)$.

b) Zakładamy, że $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Stosujemy do obu stron równania (2) przekształcenie Laplace'a, korzystamy z jego liniowości i otrzymujemy

$$\mathcal{L}[x''(t)] - 4\mathcal{L}[x'(t)] + 13\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[f(t)]$$

Na podstawie wzorów (2.2.6) i (2.2.1) z twierdzenia o różniczkowaniu oryginału, uwzględniając zerowe warunki początkowe oraz przyjmując $\mathcal{L}[f(t)] = \Phi(s)$, otrzymujemy następujące równanie operatorowe względem transformaty $X(s)$

$$s^2 X(s) - 4s \cdot X(s) + 13X(s) = \Phi(s).$$

Stąd, po uporządkowaniu

$$(s^2 - 4s + 13) \cdot X(s) = \Phi(s) \quad (6)$$

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{s^2 - 4s + 13} \quad (7)$$

Mianownik po prawej stronie wzoru (7) sprowadzamy do postaci kanonicznej i rozwiązanie operatorowe $X(s)$ przedstawiamy w postaci następującego iloczynu

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 9} \cdot \Phi(s) \quad (8)$$

Następnie do wzoru (8) stosujemy obustronnie odwrotne przekształcenie Laplace'a oraz twierdzenie Borela o splocie – wzór (3.2.2') (por. uwaga 3.2.1). Mamy zatem

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+9} \cdot \Phi(s)\right] = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-2)^2+9}\right] * \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] \quad (9)$$

Ponieważ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-2)^2+9}\right] = \frac{1}{3}e^{2t} \sin 3t$ i $\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = f(t)$, to uwzględniając te wyniki w (9) otrzymamy rozwiązanie równania (2)

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{2t} \sin 3t * f(t).$$

Stosując teraz definicję spłotu (3.1.1) uzyskamy szukane rozwiązanie równania (2) przy zerowych warunkach początkowych w postaci całki spłotowej

$$x(t) = \frac{1}{3} \int_0^t f(t-\tau) e^{2\tau} \sin 3\tau d\tau, \quad t \geq 0.$$

■

5.2. Układy równań różniczkowych liniowych przy danych warunkach początkowych

Metodą operatorową można rozwiązywać układy n równań różniczkowych liniowych zwyczajnych o stałych współczynnikach o n funkcjach niewiadomych $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, przy danych warunkach początkowych (tak zwane zagadnienie Cauchy'ego lub zagadnienie początkowe dla układów równań różniczkowych). Stosując do takiego układu metodę przekształcenia Laplace'a sprowadzamy dany układ do układu równań algebraicznych liniowych, którego niewiadomymi są transformaty Laplace'a

$$X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)], \dots, X_n(s) = \mathcal{L}[x_n(t)]$$

szukanego rozwiązania $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Stosując wzory Cramera (lub dowolną inną metodą) wyznaczamy $X_1(s), \dots, X_n(s)$. Następnie wykonując transformację odwrotną Laplace'a do obrazów przechodzimy ponownie do oryginałów. Wtedy szukane rozwiązanie układu równań różniczkowych wyraża się wzorami

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)], \dots, x_n(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_n(s)]$$

przy czym transformaty odwrotne $\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)]$, $i = 1, \dots, n$, jest najwygodniej odczytać z tablic transformat Laplace'a.

Schemat postępowania jest taki jak na rysunku 5.1.

Przykład 5.6. Metodą operatorową rozwiązać układ równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x - 2y = e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} - 3x - y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{z warunkami początkowymi } x(0^+) = 0, \quad y(0^+) = -2 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . Szukamy funkcji $x = x(t)$, $y = y(t)$ i zakładamy, że istnieją transformaty $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$.

1. Do obu stron każdego z równań układu (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt} - 2x - 2y\right] = \mathcal{L}[e^{-2t}] \\ \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} - 3x - y\right] = \mathcal{L}[0] \end{cases}$$

2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] - 2\mathcal{L}[x] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-2t}] \\ \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - 3\mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0] \end{cases}$$

3. Ze wzoru (2.2.1) wyznaczamy transformaty pochodnych oraz obliczamy pozostałe transformaty

$$\begin{cases} sX(s) - x(0^+) - 2X(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \\ sY(s) - y(0^+) - 3X(s) - Y(s) = 0 \end{cases}$$

4. Uwzględniamy warunki początkowe (2)

$$\begin{cases} sX(s) - 0 - 2X(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \\ sY(s) + 2 - 3X(s) - Y(s) = 0 \end{cases}$$

5. Porządkujemy i otrzymujemy układ równań algebraicznych względem transformat (obrazów) $X(s)$, $Y(s)$

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s+2} \\ -3X(s) + (s-1)Y(s) = -2 \end{cases} \quad (3)$$

6. Rozwiązujemy układ metodą Cramera (lub metodą przeciwnych współczynników). Obliczamy wyznaczniki

$$W = \begin{vmatrix} s-2 & -2 \\ -3 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 3s - 4, \quad W_x = \begin{vmatrix} \frac{1}{s+2} & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix} = -\left(\frac{3s+9}{s+2}\right),$$

$$W_y = \begin{vmatrix} s-2 & \frac{1}{s+2} \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-2s^2 + 11}{s+2}$$

i znajdujemy rozwiązanie układu (w dziedzinie obrazów)

$$X(s) = \frac{-(3s+9)}{(s+2)(s^2-3s-4)}; \quad Y(s) = \frac{-2s^2+11}{(s+2)(s^2-3s-4)} \quad (4)$$

7. Wykonujemy odwrotne przekształcenie Laplace'a do transformat (4) i od obrazów przechodzimy do rozwiązań $x(t)$ i $y(t)$ w dziedzinie oryginałów, tj.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3s+9}{(s+2)(s^2-3s-4)}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2s^2+11}{(s+2)(s^2-3s-4)}\right] \quad (5)$$

8. Dowolną metodą (np. rozkład na sumę ułamków prostych, lub twierdzenie 4.3.1 o residuach, lub tw. 4.4.1 o rozkładzie) znajdujemy transformaty odwrotne.

Wyznamy $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ metodą residuów. W tym celu zauważmy, że $s_1 = -2$, $s_2 = -1$, $s_3 = 4$ są biegunami pojedynczymi transformat $X(s)$ i $Y(s)$. Zatem na podstawie wzoru (4.3.1) mamy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3s-9}{(s+2)(s+1)(s-4)}\right] = -\sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{s=s_k} \left[\frac{3s+9}{(s+2)(s+1)(s-4)} \cdot e^{st} \right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2s^2 + 11}{(s+2)(s+1)(s-4)} \right] = \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{s=s_k} \left[\frac{-2s^2 + 11}{(s+2)(s+1)(s-4)} \cdot e^{st} \right].$$

9. Ze wzoru (4.3.4) obliczamy residua i otrzymujemy rozwiązanie układu (1) z warunkami początkowymi (2)

$$\begin{cases} x(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{6}{5}e^{-t} - \frac{7}{10}e^{4t} \right) \cdot \mathbf{I}(t) \\ y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{9}{5}e^{-t} - \frac{7}{10}e^{4t} \right) \cdot \mathbf{I}(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Przykład 5.7. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla układu równań

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y(t) = 1 \\ \frac{dy}{dt} - x(t) + 2y(t) = -3 \end{cases}, \quad x(0^+) = 2, \quad y(0^+) = 1 \quad (1)$$

R o z w i ą z a n i e . Niech $x(t)$ i $y(t)$ będą rozwiązaniami rozważanego zagadnienia początkowego. Postępując analogicznie jak w przykładzie 5.6 zakładamy, że $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ są transformatami oryginałów $x(t)$ i $y(t)$.

Do obu stron układu (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymujemy

$$\begin{cases} \mathcal{L} \left[\frac{dx}{dt} \right] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[1] \\ \mathcal{L} \left[\frac{dy}{dt} \right] - \mathcal{L}[x(t)] + 2\mathcal{L}[y(t)] = -3\mathcal{L}[1] \end{cases}.$$

Ze wzoru (2.2.1) na transformatę pierwszej pochodnej, uwzględniając warunki początkowe oraz z faktu, że $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ mamy

$$\begin{cases} s \cdot X(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{s} \\ s \cdot Y(s) - 1 - X(s) + 2Y(s) = -\frac{3}{s} \end{cases} \quad (2)$$

Po algebraicznych przekształceniach i uporządkowaniu otrzymujemy następujący układ równań operatorowych

$$\begin{cases} s \cdot X(s) + Y(s) = \frac{2s+1}{s} \\ -X(s) + (s+2) \cdot Y(s) = \frac{s-3}{s} \end{cases} \quad (3)$$

względem niewiadomych obrazów $X(s)$ i $Y(s)$, którego rozwiązanie otrzymamy stosując wzory Cramera. W tym celu obliczamy wyznaczniki układu (3).

$$W = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} \frac{2s+1}{s} & 1 \\ \frac{s-3}{s} & s+2 \end{vmatrix} = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s}, \quad W_y = \begin{vmatrix} s & \frac{2s+1}{s} \\ -1 & \frac{s-3}{s} \end{vmatrix} = \frac{s^2 - s + 1}{s}.$$

Jedynym rozwiązaniem układu (3) według wzorów Cramera dla $W \neq 0$ są funkcje $X(s) = \frac{W_x}{W}$, $Y(s) = \frac{W_y}{W}$. Zatem

$$X(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s(s+1)^2} \quad \text{i} \quad Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s+1)^2} \quad (4)$$

Następnie rozkładamy otrzymane transformaty na sumę ułamków prostych (por. wzór 4.2.5)

$$\frac{2s^2 + 4s + 5}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \quad \text{i} \quad \frac{s^2 - s + 1}{s(s+1)^2} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s+1} + \frac{F}{(s+1)^2} \quad (5)$$

Znanym sposobem wyznaczamy współczynniki: $A = 5$, $B = -3$, $C = -3$ i odpowiednio $D = 1$, $E = 0$, $F = -3$. Uwzględniając otrzymane współczynniki w rozkładach (5) a następnie we wzorach (4), otrzymamy rozwiązania operatorowe

$$X(s) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2} \quad \text{i} \quad Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{(s+1)^2} \quad (6)$$

Stosując transformację \mathcal{L}^{-1} do obrazów (6) powracamy do przestrzeni oryginału i otrzymujemy rozwiązania $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ i $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ zagadnienia początkowego (1). Zatem

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s} - \frac{3}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2}\right] \\ \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{3}{(s+1)^2}\right] \end{cases}$$

Korzystając z liniowości odwrotnego przekształcenie Laplace'a otrzymujemy

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\ \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \end{cases}$$

Z tablicy 2 zamieszczonej w Dodatku lub stosując odpowiednie wzory wyznaczamy transformaty odwrotne i ostatecznie uzyskamy rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x(t) = (5 - 3e^{-t} - 3te^{-t}) \cdot I(t) \\ y(t) = (1 - 3te^{-t}) \cdot I(t) \end{cases}, t \in R \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x(t) = 5 - 3e^{-t} - 3te^{-t} \\ y(t) = 1 - 3te^{-t} \end{cases} \quad \text{dla } t > 0.$$

UWAGA. ■

Zalety metody przekształcenia Laplace'a można w pełni docenić dopiero przy rozwiązywaniu układów równań różniczkowych, gdyż metoda ta jest przejrzysta i wymaga dużo mniejszego nakładu pracy niż metoda klasyczna.

Istotną korzyść polega także na tym, że każdą niewiadomą funkcję można obliczyć oddzielnie, bez znajomości innych, co w metodzie klasycznej, przy zadanych wartościach początkowych, w zasadzie nie jest możliwe. Jest to ważne wtedy, gdy interesuje nas tylko jedna niewiadoma, natomiast pozostałych niewiadomych danego układu można nie obliczać.

5.3. Równania różniczkowe z przesuniętym argumentem

Definicja 5.3.1. Równanie różniczkowe postaci

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t - t_{n-1}) + \dots + a_1x'(t - t_1) + a_0x(t - t_0) = f(t) \quad (5.3.1)$$

nazywamy *równaniem różniczkowym z przesuniętym argumentem*, gdzie $t > 0$, a_k, t_k – stałe, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $f(t)$ jest oryginałem.

Równania tej postaci występują między innymi w automatyce, gdzie stan urządzenia w danej chwili wpływa na działanie tego urządzenia w chwilach następujących.

Przyjmujemy dla uproszczenia, że warunki początkowe są zerowe, tzn.

$$x(0^+) = x'(0^+) = \dots = x^{(n-1)}(0^+) = 0 \quad (5.3.2)$$

Stosując do obu stron równania (5.3.1) przekształcenie Laplace'a i wykorzystując jego liniowość oraz twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym na podstawie wzoru (2.6.3), otrzymamy równanie operatorowe postaci

$$\left[s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k s^k e^{-t_k s} \right] \cdot X(s) = F(s) \quad (5.3.3)$$

gdzie $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

Stąd wyznaczamy transformatę (rozwiązanie operatorowe)

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k s^k e^{-t_k s}} \quad (5.3.4)$$

a następnie stosując obustronnie przekształcenie odwrotne Laplace'a i wykorzystując jego liniowość wyznaczamy oryginał $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ odpowiadający transformacie (5.3.4), który jest rozwiązaniem równania (5.3.1) przy zerowych warunkach początkowych (5.3.2).

Przykład 5.8. Metodą operatorową wyznaczyć całkę szczególną równania różniczkowego

$$x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t \quad (1)$$

$$\text{z zerowymi warunkami początkowymi } x(0^+) = 0, \quad x'(0^+) = 0 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . Niech $X(s)$ będzie transformatą niewiadomej funkcji $x(t)$, tj. $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Do obu stron równania (1) stosujemy przekształcenie Laplace'a oraz korzystając z jego liniowości otrzymujemy

$$\mathcal{L}[x''(t)] + 2\mathcal{L}[x'(t-2)] + \mathcal{L}[x(t-4)] = \mathcal{L}[t] \quad (3)$$

Następnie, korzystając ze wzorów (2.2.1) i (2.2.6) na transformatę pierwszej i drugiej pochodnej oraz ze wzoru (2.6.3) (twierdzenie 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym) obliczamy kolejno

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x''(t)] &= s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0^+) - x'(0^+) = s^2 \cdot X(s), \\ \mathcal{L}[x'(t)] &= s \cdot X(s) - x(0^+) = s \cdot X(s), \\ \mathcal{L}[x'(t-2)] &= e^{-2s} s \cdot X(s), \quad \mathcal{L}[x(t-4)] = e^{-4s} \cdot X(s). \end{aligned} \quad (4)$$

Uwzględniamy związki (4) w równaniu (3) i po uporządkowaniu otrzymujemy równanie operatorowe

$$(s^2 + 2se^{-2s} + e^{-4s})X(s) = \frac{1}{s^2} \quad (5)$$

z którego wyznaczamy rozwiązanie operatorowe (obraz) $X(s)$ w postaci

$$X(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2se^{-2s} + e^{-4s}} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s + e^{-2s})^2} \quad (6)$$

Funkcję tę, po odpowiednich równoważnych przekształceniach, można przedstawić wzorem

$$X(s) = \frac{1}{s^4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{e^{-2s}}{s}\right)^2} = \frac{1}{s^4} \left(1 + \frac{e^{-2s}}{s}\right)^{-2} \quad (7)$$

Prawą stronę (7) przedstawiamy w postaci szeregu potęgowego, wykorzystując w tym celu szereg dwumienny Newtona. Mamy więc,

$$\left(1 + \frac{e^{-2s}}{s}\right)^{-2} = 1 + \binom{-2}{1} \frac{e^{-2s}}{s} + \binom{-2}{2} \left(\frac{e^{-2s}}{s}\right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1) e^{-2ks}}{s^k} \quad (8)$$

Uwzględniając rozwinięcie (8) po prawej stronie wzoru (7) otrzymamy rozwiązanie operatorowe w postaci sumy szeregu nieskończonego

$$X(s) = \frac{1}{s^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1) e^{-2ks}}{s^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \frac{e^{-2ks}}{s^{k+4}} \quad (9)$$

Wykonując do obu stron (9) odwrotne przekształcenie Laplace'a, a następnie korzystając ze wzoru (2.6.34), z faktu, że $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{k+1}}\right] = \frac{t^k}{k!}$ oraz ze wzoru (2.6.4) (wniosek 2.6.1 twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym) otrzymujemy rozwiązanie (oryginał) $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ w postaci

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \frac{(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!} \cdot I(t-2k), \quad t > 0.$$

■

5.4. Równania całkowe typu splotu oraz równania różniczkowo-całkowe

Definicja 5.4.1. Równaniem całkowym *pierwszego rodzaju typu splotu* nazywamy równanie postaci

$$\int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (5.4.1)$$

gdzie $x(t)$ jest funkcją niewiadomą, a $K(t-\tau)$ i $f(t)$ oznaczają funkcje dane.

Definicja 5.4.2. Równaniem całkowym *drugiego rodzaju typu splotu* nazywamy równanie postaci

$$x(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (5.4.2)$$

gdzie $x(t)$ jest funkcją niewiadomą, a $K(t-\tau)$ i $f(t)$ oznaczają funkcje dane.

Przykład 5.9. Metodą operatorową rozwiązać równanie całkowe

$$x(t) - \frac{8}{3} \int_0^t (t-\tau)^3 x(\tau) d\tau = 2t \quad (1)$$

w zbiorze funkcji ciągłych dla $t \geq 0$.

R o z w i ą z a n i e . Zakładamy, że pewien oryginał $x(t)$ ciągły, zredukowany do przedziału $(0, \infty)$ spełnia równanie (1) i jego obraz oznaczamy przez $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Funkcję potęgową t^3 pod całką możemy traktować jako oryginał, ponieważ $t-\tau \geq 0$ dla każdego $t > 0$. Również funkcja po prawej stronie równania (1) może być traktowana jako oryginał ponieważ $2t = 2t \cdot I(t)$ dla $t > 0$. Całka po lewej stronie równania (1) przedstawia więc splot oryginałów $f_1(t) = t^3$ i $f_2(t) = x(t)$ (por. definicja 3.1.1), zatem równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$x(t) - \frac{8}{3} t^3 * x(t) = 2t \quad (2)$$

Dalej postępujemy według następującego znanego schematu:

1. Do obu stron (2) stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[x(t) - \frac{8}{3} t^3 * x(t)\right] = \mathcal{L}[2t]$$

2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia $\mathcal{L}[x(t)] - \frac{8}{3} \mathcal{L}[t^3 * x(t)] = 2\mathcal{L}[t]$
3. Korzystamy ze wzoru (3.2.1) twierdzenia Borela $\mathcal{L}[x(t)] - \frac{8}{3} \mathcal{L}[t^3] \cdot \mathcal{L}[x(t)] = 2\mathcal{L}[t]$
4. Obliczamy transformaty $X(s) - \frac{8}{3} \cdot \frac{6}{s^4} \cdot X(s) = \frac{2}{s^2}$
5. Otrzymujemy równanie operatorowe względem funkcji $X(s)$ $\left(1 - \frac{16}{s^4}\right) \cdot X(s) = \frac{2}{s^2}$ (3)
7. Wyznaczamy rozwiązanie równania (3) $X(s) = \frac{2s^2}{s^4 - 16}$ (4)

Prawą stronę funkcji wymiernej (4) rozkładamy na sumę dwóch funkcji dokonując następujące równoważne przekształcenie

$$\frac{2s^2}{s^4 - 16} = \frac{2s^2}{(s^2 - 4)(s^2 + 4)} = \frac{(s^2 + 4) + (s^2 - 4)}{(s^2 - 4)(s^2 + 4)}$$

Ostatecznie rozwiązanie operatorowe (4) przyjmie następującą postać, wygodną do korzystania w dalszym etapie z tablic transformat

$$X(s) = \frac{1}{s^2 - 4} + \frac{1}{s^2 + 4} \quad (5)$$

Mając $X(s)$, wykonujemy transformację odwrotną i wyznaczymy oryginał $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. Zatem do obu stron (5) stosujemy odwrotne przekształcenie Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymujemy

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 4} + \frac{1}{s^2 + 4}\right] = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 - 4}\right] - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 4}\right],$$

a następnie wyznaczamy transformaty odwrotne i otrzymujemy rozwiązanie równania (1) w postaci

$$x(t) = \frac{1}{2} \sinh 2t + \frac{1}{2} \sin 2t, \quad t \geq 0.$$

■

Przykład 5.10. Metodą operatorową rozwiązać równanie różniczkowo-całkowe

$$\frac{dx}{dt} + x(t) + \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = 1, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $x(0^+) = 0$ (2)

R o z w i ą z a n i e . Zakładamy, że szukana funkcja $x(t)$ jest oryginałem i jej obraz $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Zauważmy, że całka w równaniu (1) określa splot funkcji e^t i $x(t)$, zatem równanie to można zapisać w postaci

$$x'(t) + x(t) + e^t * x(t) = 1 \quad (3)$$

Do obu stron równania (3) stosujemy przekształcenia Laplace'a i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}[x'(t)] + \mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{L}[e^t * x(t)] = \mathcal{L}[1] \quad (4)$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s \cdot X(s) - x(0^+) = s \cdot X(s) \quad (\text{por. wzór 2.2.1})$$

$$\mathcal{L}[e^t * x(t)] = \mathcal{L}[e^t] \cdot \mathcal{L}[x(t)] \quad (\text{por. tw. Borela – wzór 3.2.1})$$

oraz z faktu, że $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$, to uwzględniając te wyniki w równaniu (4), po przekształceniach otrzymamy równanie operatorowe

$$\left(s + 1 + \frac{1}{s-1} \right) \cdot X(s) = \frac{1}{s},$$

a stąd ostatecznie

$$\frac{s^2}{s-1} \cdot X(s) = \frac{1}{s} \quad (5)$$

Z równania (5) wyznaczamy transformatę (obraz)

$$X(s) = \frac{s-1}{s^3} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \quad (6)$$

Wykonujemy następnie do obu stron (6) odwrotne przekształcenie Laplace'a i od obrazu $X(s)$ przechodzimy do oryginału $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$.

Mamy
$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right].$$

Obliczamy transformaty odwrotne i otrzymujemy szukane rozwiązanie równania (1) w postaci

$$x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 \quad \text{dla } t \geq 0.$$

■

W zagadnieniach elektroniki i mechaniki spotykamy równania różniczkowo-całkowe zawierające całki funkcji niewiadomych. Są to równania postaci

$$x'(t) + a \cdot x(t) + b \int_0^t x(\tau) d\tau = f(t) \quad (5.4.3)$$

gdzie a, b – stałe, $f(t)$ – dana funkcja, $x(t)$ – niewiadoma funkcja.

W przypadku tych równań również możemy posłużyć się metodą operatorową wykorzystując twierdzenie o transformacji całki (por. wzór 2.2.9)

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \cdot F(s).$$

Zakładając, że istnieją transformaty $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ i $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, a następnie stosując obustronnie przekształcenie Laplace'a do równania (5.4.3) i korzystając z jego liniowości otrzymamy

$$\mathcal{L}[x'(t)] + a \cdot \mathcal{L}[x(t)] + b \cdot \mathcal{L} \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}[f(t)].$$

Korzystając ze wzoru (2.2.1) na transformatę pierwszej pochodnej i wzoru (2.2.9) na transformatę całki otrzymamy równanie operatorowe

$$s \cdot X(s) - x(0^+) + a \cdot X(s) + b \cdot \frac{1}{s} X(s) = F(s)$$

i po algebraicznych przekształceniach uzyskamy rozwiązanie

$$X(s) = \frac{s[F(s) - x(0^+)]}{s^2 + as + b} \quad (5.4.4)$$

Jeśli przyjmiemy, że warunki początkowe są zerowe (taką sytuację mamy np. w przypadku układów elektrycznych znajdujących się pod wpływem sił zewnętrznych, jeśli w chwili początkowej prądy w cewkach i ładunki kondensatorów są równe zeru), to opisany powyżej sposób uzyskania rozwiązania znacznie się upraszcza. Otrzymamy wówczas

$$X(s) = \frac{s \cdot F(s)}{s^2 + as + b} \quad (5.4.5)$$

a stąd, dokonując transformacji odwrotnej, wyznaczamy oryginał $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ będący rozwiązaniem równania (5.4.3).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Metodą operatorową znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego spełniającą podane warunki początkowe (zagadnienie Cauchy'ego):

- a) $x' + 2x = te^t$, $x(0^+) = 2$
 b) $x' - 2x = -t^2$, $x(0^+) = 0,25$
 c) $x' + x = 2\sin t$, $x(0^+) = 0$
 d) $y' - y = t$, $y(0^+) = 0$
 e) $y' - 4y = 2e^{4t}$, $y(0^+) = 1$
 f) $y' - 2y = 6\cos 2t$, $y(0^+) = -1$
 g) $y' + 2y = 25t^2e^{3t}$, $y(0^+) = -\frac{3}{5}$
 h) $2y' + y = \sin t \cos t$, $y(0^+) = 1$.

2. Metodą operatorową znaleźć całkę szczególną równania różniczkowego rzędu drugiego spełniającą podane warunki początkowe:

- a) $y'' + 4y = e^{-t}$, $y(0^+) = y'(0^+) = 0$
 b) $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 25 + e^{2t}$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$
 c) $x'' + 4x' + 4x = t^2$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$
 d) $x'' + 25x = 0$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 1$
 e) $x'' + 4x = \sin t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 1$
 f) $x'' - x' - 6x = 2$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 0$
 g) $x'' + 2x' + x = e^t$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = -2$
 h) $x'' - 5x' + 6x = 2e^t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 1$
 i) $x'' - x' = 2(1-t)$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 1$
 j) $x'' + 4x = 2\cos 2t$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 4$
 k) $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0^+) = 3$, $x'(0^+) = -4$

- l) $x'' + 2x' + x = t^2$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 1$
 ł) $x'' + 2x' + x = e^{-t}(\cos t + t)$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = -1$
 m) $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$, $x(0^+) = 2$, $x'(0^+) = 2$
 n) $x'' + k^2x = 0$, $x(0^+) = a$, $x'(0^+) = b$
 o) $x'' + 4x' + 13x = 2e^{-t}$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = -1$
 p) $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \sin t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 1$
 q) $x'' - 2x' + 10x = 10t^2 + 18t + 6$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 3,2$
 r) $x'' - 9x = 2 - t$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 1$
 s) $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 0$
 t) $x'' + 9x = 1 - e^{-t}$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 1$
 u) $x'' + 2x' + 5x = \sin t$, $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 2$
 v) $x'' + 4x' + 13x = te^{-t}$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 2$
 w) $y'' + 2y' - 8y = -256t^3$, $y(0^+) = 15$, $y'(0^+) = 36$
 x) $x'' + 4x = \sinh t$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 1$
 y) $x'' + x' = t^2 + 2t$, $x(0^+) = 4$, $x'(0^+) = -2$
 z) $x'' + 2x' + x = t + 4 \cos^2 \frac{t}{2}$, $x(0^+) = 0$, $x'(0^+) = 2$
 a₁) $y'' + 4y = I(t) - I(t-4)$, $y(0^+) = 3$, $y'(0^+) = -2$

$$b_1) y'' + y = \begin{cases} \cos t & \text{dla } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } t < 0, t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0^+) = 1, y'(0^+) = 0$$

$$c_1) y'' + 2y' + y = \begin{cases} \sin 2t & \text{dla } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } t < 0, t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0^+) = 1, y'(0^+) = 0$$

$$d_1) y'' + y' + 7y = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{dla } t < 0, t \geq 2 \end{cases}, \quad y(0^+) = 0, y'(0^+) = 0$$

$$e_1) \quad y'' + y' = \begin{cases} t^2 & \text{dla } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0, t \geq 1 \end{cases}, \quad y(0^+) = 0, \quad y'(0^+) = 0$$

$$f_1) \quad y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 1, 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{dla } t < 0, 1 \leq t < 2, t \geq 3 \end{cases}, \quad y(0^+) = 0, \quad y'(0^+) = 0.$$

3. Rozwiązać metodą klasyczną i metodą operatorową równanie różniczkowe z podanymi warunkami początkowymi:

$$a) \quad x'' - 2x' + x = 2(1 + \sin t), \quad x(0^+) = 3, \quad x'(0^+) = 0$$

$$b) \quad x'' + x' + x = 1 - 2 \cos t, \quad x(0^+) = 1, \quad x'(0^+) = -2.$$

4. Rozwiązać metodą klasyczną i metodą operatorową równanie różniczkowe:

$$x'' + 5x' + 4x = 4t + 5$$

z podanymi warunkami początkowymi $x(0^+) = 2, x'(0^+) = -1$.

Czy rozwiązanie wyznaczone metodą klasyczną lub operatorową ma ekstremum właściwe?

5. Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe Cauchy'ego dla równań różniczkowych liniowych trzeciego rzędu:

$$a) \quad x''' - x = e^{-t}, \quad x(0^+) = x'(0^+) = 0, \quad x''(0^+) = 1$$

$$b) \quad x''' + x = \cos t, \quad x(0^+) = 0, \quad x'(0^+) = -2, \quad x''(0^+) = 0$$

$$c) \quad x''' - 3x' + 2x = 8te^{-t}, \quad x(0^+) = x'(0^+) = 0, \quad x''(0^+) = 1$$

$$d) \quad x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0, \quad x(0^+) = 1, \quad x'(0^+) = -2, \quad x''(0^+) = 4$$

$$e) \quad x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0$$

$$f) \quad x''' - 3x'' = 0, \quad x(0^+) = 2, \quad x'(0^+) = 0, \quad x''(0^+) = 1$$

$$g) \quad x''' + x'' = t, \quad x(0^+) = -3, \quad x'(0^+) = 1, \quad x''(0^+) = 0$$

$$h) \quad x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^{4t}, \quad x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0$$

$$i) \quad x''' + x' = 10e^{2t}, \quad x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0$$

$$j) \quad x''' - x'' - 4x' + 4x = t^2 - 8, \quad x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0$$

$$k) \quad x''' + x'' - 6x' = 0, \quad x(0^+) = 0, \quad x'(0^+) = x''(0^+) = 1$$

$$l) \quad x''' + x = 0, \quad x(0^+) = 1, \quad x'(0^+) = 3, \quad x''(0^+) = 8$$

$$\begin{array}{ll} \text{m)} x''' + x = \frac{1}{2}t^2 e^t, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0 \\ \text{n)} \frac{1}{2}x''' + 5x'' + x' - x = 0, & x(0^+) = 0, x'(0^+) = 1, x''(0^+) = -1 \\ \text{o)} x''' - x'' - 6x' = 0, & x(0^+) = 15, x'(0^+) = 2, x''(0^+) = 56. \end{array}$$

6. Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienia początkowe Cauchy'ego dla równań różniczkowych wyższych rzędów:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^{(4)} - x'' = 1, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = x'''(0^+) = 0 \\ \text{b)} x^{(4)} - x'' = 4t, & x(0^+) = 1, x'(0^+) = 2, x''(0^+) = 2, x'''(0^+) = 5 \\ \text{c)} x^{(4)} + x'' = \cos t, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0, x'''(0^+) = 5 \\ \text{d)} x^{(4)} + 4x = t^2, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = x'''(0^+) = 0 \\ \text{e)} x^{(4)} + 10x'' + 9x = 0, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0, x'''(0^+) = 1 \\ \text{f)} x^{(4)} + 2x'' + x = \cosh t, & x(0^+) = x'(0^+) = 1, x''(0^+) = -1, x'''(0^+) = -2 \\ \text{g)} x^{(4)} - 16x = 0, & x(0^+) = 7, x'(0^+) = 20, x''(0^+) = -44, x'''(0^+) = 58 \\ \text{h)} x^{(4)} + 2x'' + x = 0, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = 0, x'''(0^+) = 1 \\ \text{i)} x^{(4)} - x = -4\cos t, & x(0^+) = x'(0^+) = 0, x''(0^+) = 2, x'''(0^+) = 0 \\ \text{j)} x^{(4)} + 2x'' + x = e^{2t}, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = x'''(0^+) = 0 \\ \text{k)} x^{(4)} - 2x'' + x = \sin t, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = x'''(0^+) = 0 \\ \text{l)} x^{(4)} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, & x(0^+) = 1, x'(0^+) = 0, x''(0^+) = 6, x'''(0^+) = -14 \\ \text{m)} x^{(5)} - 6x''' + 9x'' = 54t + 18, & \\ & x(0^+) = x'(0^+) = 0, x''(0^+) = 1, x'''(0^+) = 13, x^{(4)}(0^+) = 87 \\ \text{n)} x^{(5)} - x' = 8\sin t, & x(0^+) = x'(0^+) = x''(0^+) = x'''(0^+) = 0, x^{(4)}(0^+) = 1. \end{array}$$

7. Przedstawić w postaci splotu rozwiązanie równania różniczkowego, jeśli $f(t)$ jest dowolnym oryginałem, a warunki początkowe są zerowe:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x'' + 2x' + 2x = f(t), & \text{b)} x'' + 6x' + 5x = f(t) \\ \text{c)} x'' + 9x = f(t), & \text{d)} x'' + x' - 2x = \cos t \\ \text{e)} x'' - 2x' + x = e^t, & \text{f)} x'' + 6x' + 13x = f(t) \\ \text{g)} x'' + 4x' + 4x = f(t), & \text{h)} x'' + x = \ln(t+1) \end{array}$$

8. Metodą operatorową wyznaczyć całkę ogólną równania różniczkowego:

- a) $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}(t^2 + t)$, b) $x'' - 2x' = 3t + 2te^t$,
 c) $x'' - 2x' + x = \sin t + \sinh t$, d) $x'' - 2x' + 10x = \sin 3t + e^t$,
 e) $x'' - 2x' + 5x = e^t \cos 2t$, f) $x''' - x = t^3 - 1$,
 g) $x''' + x'' + x' + x = te^t$, h) $x'' + x = t + 2e^t$,
 i) $x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t}$, j) $x''' - 2x'' + x' = 2e^t$
 k) $x''' - 3x' + 2x = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$, l) $x^{(4)} - 2x'' + x = t^2 - 3$
 m) $x^{(4)} + x''' = \cos t$, n) $x^{(4)} + 3x''' + 3x'' + x' = e^{-t}$.

9. Pokazać, że jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem, to rozwiązanie $x(t)$ zagadnienia początkowego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + q \cdot x(t) = f(t), \quad x(0^+) = x'(0^+) = 0$$

wyraża się wzorem

a) $x(t) = \varphi(t) * f(t)$

gdzie $\varphi(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$x'' + px' + qx = 0, \quad x(0^+) = 0, \quad x'(0^+) = 1$$

b) $x(t) = -\frac{1}{q} [\varphi(t) * f(t)]$

gdzie $q \neq 0$, $\varphi(t)$ rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x'' + px' + qx = 0, \quad x(0^+) = 1, \quad x'(0^+) = 0.$$

10. Metodą operatorową wyznaczyć całkę szczególną równania różniczkowego (z przesuniętym argumentem):

- a) $x'(t) - x(t-1) = 0$, $x(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 0$
 b) $x'(t) - x(t-1) = 1$, $x(0^+) = 0$
 c) $x''(t) - x(t-1) = t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$
 d) $x''(t) - 2x'(t-1) = t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$
 e) $x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) = 1$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$
 f) $x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t$, $x(0^+) = x'(0^+) = 0$.

11. Rozwiązać metodą klasyczną i metodą operatorową układ równań różniczkowych liniowych z podanymi warunkami początkowymi:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y(t) = 0 \\ \frac{dy}{dt} + x(t) = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, y(0^+) = 0$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} - x(t) + y(t) = \frac{3}{2}t^2 \\ \frac{dy}{dt} + 4x(t) + 2y(t) = 4t + 1 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, y(0^+) = 0.$$

12. Metodą operatorową rozwiązać układy równań różniczkowych przy danych warunkach początkowych:

$$\text{a) } \begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - x = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 0, y(0^+) = 1$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 1$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' - x - 5y = 0 \\ y' + x + 3y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, y(0^+) = -1$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' + x - 3y = 0 \\ y' - x - y = e^{-t} \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 1$$

$$\text{e) } \begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - 2y = 2e^t \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 1$$

$$\text{f) } \begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, y(0^+) = 3$$

$$\text{g) } \begin{cases} x' + y' - 4y = 1 \\ y' + x - 3y = t^2 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, y(0^+) = -2$$

$$\text{h) } \begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2y' + x + 2y = \cos t \end{cases} \quad x(0^+) = 0, y(0^+) = 0$$

$$\text{i) } \begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases} \quad x(0^+) = 0, y(0^+) = 0$$

$$\text{j) } \begin{cases} x' - 2y' + 2y = \sin t \\ y' - x - y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 0,3, y(0^+) = 0,3$$

$$\text{k) } \begin{cases} x' + y' + y = e^{-t} \\ y' + 2x' + 2y = \sin t \end{cases} \quad x(0^+) = -2, \quad y(0^+) = 1$$

$$\text{l) } \begin{cases} x' - y = -t^2 + 2 \\ y' - x = 3t + 1 \end{cases} \quad x(0^+) = 1, \quad y(0^+) = 0$$

$$\text{m) } \begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ y' - 2x + y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 1, \quad y(0^+) = 1$$

$$\text{n) } \begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, \quad y(0^+) = 3$$

$$\text{o) } \begin{cases} x' - x - y = 1 \\ y' - 3x + y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 0, \quad y(0^+) = 1$$

$$\text{p) } \begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 3, \quad y(0^+) = 15$$

$$\text{q) } \begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 0, \quad y(0^+) = 0$$

$$\text{r) } \begin{cases} x' = 12x + 5y \\ y' = -6x + y \end{cases} \quad x(0^+) = 0, \quad y(0^+) = 1.$$

13. Metodą operatorową rozwiązać podane zagadnienie Cauchy'ego dla danych układów równań różniczkowych liniowych:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases} \quad x(0^+) = 1, \quad y(0^+) = 0, \quad z(0^+) = 1$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases} \quad x(0^+) = 1, \quad y(0^+) = 2, \quad z(0^+) = 3$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' - y - z = 0 \\ y' - x - z = 0 \\ z' - x - y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 2, \quad y(0^+) = 2, \quad z(0^+) = -1$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' + y + z = 0 \\ y' + x + z = 0 \\ z' + x + y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = -1, \quad y(0^+) = 0, \quad z(0^+) = 1$$

$$e) \begin{cases} x' - y - z = 0 \\ y' - 3x - z = 0 \\ z' - 3x - y = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 0, y(0^+) = 1, z(0^+) = 1$$

$$f) \begin{cases} x' + x - y - z = 0 \\ y' - x + y - z = 0 \\ z' - x - y - z = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 0, z(0^+) = 0$$

$$g) \begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z = 0 \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 1, z(0^+) = 1$$

$$h) \begin{cases} x' + x - y - z = e^t \\ y' - x + y - z = e^{3t} \\ z' - x - y - z = 4 \end{cases} \quad x(0^+) = 0, y(0^+) = 0, z(0^+) = 0$$

$$i) \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - 2x \\ z' = 2x - y \end{cases} \quad x(0^+) = 1, y(0^+) = 0, z(0^+) = 0$$

$$j) \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = x'(0^+) = 0 \\ y(0^+) = y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$k) \begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = 0, x'(0^+) = -1 \\ y(0^+) = 0,5, y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$l) \begin{cases} x' + 2x - y' + y = e^{-t} \\ x'' + x' + y'' - y = e^t \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = \frac{9}{8}, x'(0^+) = -\frac{7}{8} \\ y(0^+) = 0, y'(0^+) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$m) \begin{cases} x'' + 2y = 0 \\ y'' - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = 0, x'(0^+) = 1 \\ y(0^+) = y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$n) \begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0 \\ y'' + x + y - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = x'(0^+) = 0 \\ y(0^+) = y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$o) \begin{cases} x'' + y = 0 \\ y'' + x = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = 1, x'(0^+) = 0 \\ y(0^+) = 1, y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$p) \begin{cases} x'' + y' = 2t \\ x''' - y = -t^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = x'(0^+) = 1, x''(0^+) = -1 \\ y(0^+) = 0 \end{aligned}$$

$$r) \begin{cases} x'' + x - y = 0 \\ y'' - 3x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0^+) = 4, \quad x'(0^+) = 0 \\ y(0^+) = y'(0^+) = 0 \end{aligned}$$

14. Metodą operatorową rozwiązać równania całkowe z niewiadomą funkcją $x(t)$ w zbiorze funkcji ciągłych:

$$a) \quad x(t) = e^t - 2 \int_0^t \cos(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$b) \quad x(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$c) \quad x(t) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^t (t-\tau)^3 x(\tau) d\tau,$$

$$d) \quad \int_0^t e^{2(t-\tau)} x(\tau) d\tau = t^2 e^t$$

$$e) \quad x(t) = 1 + \int_0^t \sin 2(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$f) \quad \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau = t^3$$

$$g) \quad x(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \sinh 3(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$h) \quad \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = t^3 e^t$$

$$i) \quad x(t) = \cos t - 2 \int_0^t \cos(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$j) \quad \int_0^t \sinh(t-\tau) x(\tau) d\tau = 1 - \cos t,$$

$$k) \quad x(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$l) \quad x(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$m) \quad x(t) + \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau = t, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$n) \quad x(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau,$$

$$o) \quad x(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau,$$

$$p) \quad \int_0^t \cos(t-\tau) x(\tau) d\tau = \sinh t,$$

$$q) \quad x(t) = e^t - 5 \int_0^t \cos 2(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

$$r) \quad x'(t) + 2 \int_0^t \sin(t-\tau) x(\tau) d\tau = 1, \quad x(0^+) = 0,$$

$$s) \quad x'(t) - \int_0^t (t-\tau) x(\tau) d\tau = \cos t, \quad x(0^+) = 1.$$

Odpowiedzi:

1. a) $\frac{19}{9}e^{-2t} + \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{9}e^t$, b) $\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$, c) $e^{-t} - \cos t + \sin t$,
 d) $e^t - t - 1$, e) $(2t+1)e^{4t}$, f) $\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}\sin 2t - \frac{3}{2}\cos 2t$,
 g) $-e^{-2t} + \left(5t^2 - 2t + \frac{2}{5}\right)e^{3t}$, h) $\frac{1}{17}\left(19e^{-\frac{t}{2}} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$.
2. a) $\frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}e^{-t}$, b) $12e^t + \frac{38}{3}e^{-t} - 25 + \frac{1}{3}e^{2t}$,
 c) $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}(2t+3)$, d) $\frac{1}{5}\sin 5t$, e) $\cos 2t + \frac{1}{3}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t$,
 f) $-\frac{1}{3} + \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{3t}$, g) $\frac{1}{4}e^t - \frac{5}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t}$, h) e^t , i) $t^2 + e^t$,
 j) $\frac{1}{2}t \sin 2t + 2\sin 2t$, k) $-13te^{3t} + 3e^{3t}$, l) $t^2 - 4t + 6 - te^{-t} - 6e^{-t}$,
 ł) $\frac{1}{6}t^3e^{-t} + 2e^{-t} - e^{-t}\cos t$, m) $e^{2t} - e^t t^2 - te^t + e^t$, n) $\frac{1}{k}b \sin kt + a \cos kt$,
 o) $\frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t}\cos 3t - \frac{2}{5}e^{-2t}\sin 3t$, p) $-e^{-t}t \cos t + 3e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$,
 q) $t^2 + \frac{11}{5}t + \frac{21}{25} + \frac{4}{25}e^t \cos 3t + \frac{7}{25}e^t \sin 3t$, r) $\frac{1}{27}(3t - 6 + 7e^{3t} - e^{-3t})$,
 s) $\frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$, t) $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}e^{-t} - \frac{1}{90}\cos 3t + \frac{11}{30}\sin 3t$,
 u) $e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t + \frac{29}{20}\sin 2t\right) - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$,
 v) $\frac{1}{50}\left[(5t-1)e^{-t} + (\cos 3t + 32\sin 3t)e^{-2t}\right]$, w) $15 + 36t + 32t^3 + 24t^2$,
 x) $\frac{2}{5}\sin 2t + \frac{1}{5}\sinh t$, y) $\frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2$, z) $t + \sin t$,
 a₁) $\left(\frac{1}{4} + \frac{11}{4}\cos 2t - \sin 2t\right) \cdot I(t) + \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t-4)] \cdot I(t-4)$,
 b₁) $\left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}t \sin t\right) \cdot I(t) + \frac{1}{2}\left[\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot I\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$,

$$c_1) \left(\frac{9}{5} + \frac{6}{5}t \right) e^{-t} - \frac{16}{25} \cos 2t - \frac{12}{25} \sin 2t + \frac{1}{5} e^{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left[4 + \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot I\left(t - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{4}{25} \left[4 \cos 2\left(t - \frac{\pi}{2} \right) + 3 \sin\left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot I\left(t - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$e_1) \left(2e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t - 2 \right) \cdot I(t) + \left[1 - (t-1) - \frac{1}{3}(t-1)^2 - e^{-(t-1)} \right] \cdot I(t-1).$$

3. a) $x(t) = 2 + \cos t$ dla $t \in R$, $x(t) = (2 + \cos t) \cdot I(t)$, $t \in R$,
 b) 1°) $x(t) = 1 - 2 \sin t$, $t \in R$. Rozwiązanie $x(t)$ ma okres $T = 2\pi$ i jest funkcją ciągłą i ograniczoną, $-1 \leq x(t) \leq 3$, $t \in R$.
 2°) $x(t) = (1 - 2 \sin t) \cdot I(t)$, $t \in R$ - oryginał okresowy $T = 2\pi$ ciągły na $R \setminus \{0\}$, punkt nieciągłości $t = 0$, $x(0) = \frac{1}{2}x(0^+) = \frac{1}{2}$.

4. 1) $x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t} + t$, $x(t) = t + 2e^{-t}$, $t \in R$, $x_{\min} = x(\ln 2) = \ln 2e$, $x(0) = 2$. 2) $x(t) = (2e^{-t} + t) \cdot I(t)$, $t \in R$, $t = 0$ - punkt nieciągłości, $x(0) = \frac{1}{2}x(0^+) = 1$, $x_{\min} = x(\ln 2) = \ln 2e$. Na przedziale $(-\infty, 0)$ oba rozwiązania nie mają ekstremum właściwego.

5. a) $\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$,
 b) $\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$,
 c) $e^{-2t} + te^t - e^t + 2te^{-t}$, d) e^{-2t} , e) $1 - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}$,
 f) $\frac{7}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{3t}$, g) $\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 4 + e^{-t}$, h) $\frac{1}{6}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{4t}$,
 i) $e^{2t} + 4\cos t - 2\sin t - 5$, j) $\frac{1}{16}(32e^t - 15e^{2t} + 5e^{-2t} + 4t^2 + 8t - 22)$,
 k) $\frac{1}{15}(6e^{2t} - 5 - e^{-3t})$, l) $2e^{-t} - e^{\frac{1}{2}t} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{11}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$,
 m) $\frac{1}{4} \left(t^2 - 3t + \frac{3}{2} \right) e^t - \frac{1}{24} e^{-t} - \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) e^{\frac{t}{2}}$,

- n) $\frac{9}{16}e^{\frac{1}{3}t} + \left(\frac{1}{4}t - \frac{9}{16}\right)e^{-t}$, o) $6 + 5e^{-2t} + 4e^{3t}$
6. a) $-\frac{1}{2}t^2 - 1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$, b) $-\frac{2}{3}t^3 - 7t - 1 + \frac{11}{2}e^t - \frac{7}{2}e^{-t}$,
 c) $\frac{5}{2}t^2 - 4t + 4 - \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$, d) $\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^t \sin t + \frac{1}{8}e^{-t} \sin t$,
 e) $-\frac{1}{24}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t$, f) $\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{4}t \sin t$,
 g) $9\cos 2t + \frac{11}{8}\sin 2t + \frac{53}{16}e^{2t} - \frac{85}{16}e^{-2t}$, h) $\frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$,
 i) $t \sin t$, j) $\frac{1}{25}\left[(5t - 1)\cos t - \left(\frac{5}{2}t + 7\right)\sin t + e^{2t}\right]$,
 k) $\frac{1}{8}\left[e^t(t - 2) + e^{-t}(t + 2) + 2\sin t\right]$, l) $e^t\left(\sin t + \cos t - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-3t}$,
 m) $t^3 + 3t^2 + 13t + \frac{85}{9} + \frac{17}{63}e^{-3t} - \frac{68}{7}e^{\frac{3}{2}t} \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}t + \frac{10}{21\sqrt{3}}e^{\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$,
 n) $-9 + \frac{5}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{13}{2}\cos t + 2t \sin t$,
7. a) $x(t) = f(t) * e^{-t} \sin t$, b) $x(t) = \frac{1}{4}f(t) * (e^{-t} - e^{-5t})$,
 c) $\frac{1}{3}\sin 3t * f(t)$, d) $\frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) * \cos t$, e) $te^t * e^t$, f) $\frac{1}{2}e^{-3t} \sin 2t * f(t)$,
 g) $te^{-2t} * f(t)$, h) $\sin t * \ln(t + 1) = \int_0^t \ln(1 + \tau) \sin(t - \tau) d\tau$.
8. a) $\frac{1}{2}e^{3t}(t^2 - 2t + 2) + C_1e^{2t} + C_2e^t$, b) $C_1 + C_2e^{2t} - 2te^t - 0,75t(t + 1)$,
 c) $(C_1 + C_2t)e^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{8}e^{-t}$,
 d) $(C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t)e^t + \frac{1}{37}(\sin 3t + 6 \cos 3t) + \frac{1}{9}e^t$,
 e) $e^t(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) + 0,25te^t \sin 2t$,
 f) $C_1e^t + e^{-0,5t}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - t^3 - 5$,

- g) $C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \frac{1}{8} e^t (2t - 8)$, h) $C_1 \cos t + C_2 \sin t + t + e^t$,
- i) $C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-2t}$, j) $C_1 + (C_2 + C_3 t + t^2) e^t$,
- k) $C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-2t} + (t^2 + t - 1) e^t$,
- l) $e^t (C_1 + C_2 t) + e^{-t} (C_3 + C_4 t) + t^2 + 1$,
- m) $C_1 t^2 + C_2 t + C_3 + C_4 e^{-t} + \frac{1}{2} (\cos t - \sin t)$,
- n) $C_1 + \left(C_2 + C_3 t + \frac{1}{2} C_4 t^2 \right) e^{-t} - \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$.
- 10.a) $x(t) = \left(\frac{1}{2} t^2 - t \right) \cdot I(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot I(t-k)$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot I(t-k)$,
- c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(3+2k)!} \cdot I(t-k)$, d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \cdot I(t-k)$,
- e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \cdot I(t-k)$, f) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-2k)^{k+3} (k+1)}{(k+3)!} \cdot I(t-2k)$.
- 11.a) $x(t) = 2 \cosh t$, $y(t) = -2 \sinh t$; b) $x(t) = \frac{-1}{2} t^2 + \frac{2}{5} e^{-3t} + \frac{8}{5} e^{2t}$
 $y(t) = t^2 + t + \frac{8}{5} e^{-3t} - \frac{8}{5} e^{2t}$
- 12.a) $x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$, $y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}$; b) $x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t$,
 $y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t$; c) $x(t) = 2e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t$, $y(t) = -e^{-t} \cos t$;
d) $x(t) = -e^t + \frac{7}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{-2t}$, $y(t) = -\frac{2}{3} e^t + \frac{7}{4} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-2t}$; e) $x(t) = e^t$,
 $y(t) = e^t$; f) $x(t) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} \cos 2t - 3 \sin 2t$, $y(t) = \frac{3}{2} t + 3 \cos 2t + \frac{13}{4} \sin 2t$;
g) $x(t) = t^2 + \frac{3}{2} t + \frac{1}{4} - 4t e^{2t} + \frac{7}{4} e^{2t}$, $y(t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} - 4t e^{2t} - \frac{9}{4} e^{2t}$;
h) $x(t) = e^t - \frac{2\sqrt{7}}{7} e^{-\frac{1}{4}t} \sin \frac{\sqrt{7}}{4} t - \cos t$,
 $y(t) = -\frac{1}{4} e^t + \frac{3\sqrt{7}}{28} e^{-\frac{1}{4}t} \sin \frac{\sqrt{7}}{4} t - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \cos \frac{\sqrt{7}}{4} t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$;

$$\text{i) } x(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t, \quad y(t) = -2t + 2\sin t;$$

$$\text{j) } x(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t;$$

$$\text{k) } x(t) = -e^{-t} - 2t - \cos t - \sin t, \quad y(t) = 2 - 2e^{-t} + \cos t;$$

$$\text{l) } x(t) = \left(-1 - t + \frac{5}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right) \cdot I(t), \quad y(t) = \left(-3 + t^2 + \frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\right) \cdot I(t);$$

$$\text{m) } x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)e^{-\sqrt{5}t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)e^{\sqrt{5}t} = \cosh(\sqrt{5}t) + \frac{\sqrt{5}}{5}\sinh t$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)e^{-\sqrt{5}t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)e^{\sqrt{5}t} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sinh(\sqrt{5}t)$$

$$\text{n) } x(t) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t, \quad y(t) = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t;$$

$$\text{o) } x(t) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{3}{8}e^{-2t}, \quad y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{8}e^{2t} + \frac{9}{8}e^{-2t};$$

$$\text{p) } x(t) = -8e^{-2t} + 11e^{-8t}, \quad y(t) = 4e^{-2t} + 11e^{-8t},$$

$$\text{q) } x(t) = \frac{1}{10}\left(5 - 2e^{-t} - 3e^{-\frac{6}{11}t}\right), \quad y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right),$$

$$\text{r) } x(t) = 5e^{7t} - 5e^{6t}, \quad y(t) = -5e^{7t} + 6e^{6t}.$$

$$13.\text{a) } x(t) = e^t\left(1 + \frac{4}{2}t^2\right), \quad y(t) = te^t, \quad z(t) = e^t; \quad \text{b) } x(t) = 2 - e^t,$$

$$y(t) = -2 + 4e^t - te^t, \quad z(t) = -2 + 5e^t - te^t; \quad \text{c) } x(t) = e^{-t} + e^{2t},$$

$$y(t) = e^{-t} + e^{2t}, \quad z(t) = -2e^{-t} + e^{2t}; \quad \text{d) } x(t) = -e^t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = e^t;$$

$$\text{e) } x(t) = 0,4(e^{3t} - e^{-2t}), \quad y(t) = 0,2(3e^{3t} + 2e^{-2t}), \quad z(t) = 0,2(3e^{3t} + 2e^{-2t});$$

$$\text{f) } x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t},$$

$$z(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}; \quad \text{g) } x(t) = 6e^t - e^{2t} - 4e^{3t}, \quad y(t) = 3e^t - 2e^{3t},$$

$$z(t) = -6e^t + e^{2t} + 6e^{3t}; \quad \text{h) } x(t) = \frac{-1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} + \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{3}{20}e^{3t} - 2,$$

$$y(t) = \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{13}{12}e^{-t} - \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{7}{20}e^{3t} - 2,$$

$$z(t) = -\frac{13}{12}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}, \quad \text{i) } x(t) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cos\sqrt{5}t,$$

$$y(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos\sqrt{5}t - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t, \quad z(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos\sqrt{5}t + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t;$$

$$\text{j) } x(t) = 2 - 2e^{-t}(t+1), \quad y(t) = 2 - t - 2e^{-t}(t+1),$$

$$\text{k) } x(t) = -6 - 4t - t^2 + \frac{1}{17} \left(100e^{\frac{1}{2}t} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \right),$$

$$y(t) = -1 - t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{68} \left(100e^{\frac{1}{2}t} + 2\cos 2t + 9\sin 2t \right);$$

$$\text{l) } x(t) = \frac{1}{8}e^t + e^{-t}, \quad y(t) = \frac{3}{8}te^t; \quad \text{m) } x(t) = \frac{1}{2}(\cos t \sinh t + \sin t \cosh t),$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t \cosh t - \cos t \sinh t); \quad \text{n) } x(t) = 17 + 7t \sinh t - 17 \cosh t,$$

$$y(t) = 12 \cosh t - \frac{7}{2}t \sinh t - 12; \quad \text{o) } x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cosh t,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cosh t; \quad \text{p) } x(t) = t + \cos t, \quad y(t) = t^2 + \sin t;$$

$$\text{r) } x(t) = 3 + \cos 2t, \quad y(t) = 3 - 3\cos 2t.$$

$$14. \text{a) } [\cosh t - te^{-t}] \cdot I(t), \quad \text{b) } t + \frac{1}{6}t^3, \quad \text{c) } \frac{1}{2}(\cosh t + \cos t), \quad \text{d) } 2te^t - t^2e^t,$$

$$\text{e) } \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cos\sqrt{3}t, \quad \text{f) } 3, \quad \text{g) } \frac{1}{15}(13\sin 2t - 16\sinh t), \quad \text{h) } 3t^2e^t, \quad \text{i) } \bar{e}^t(1-t),$$

$$\text{j) } 2\cos t - 1, \quad \text{k) } t^3 + \frac{1}{20}t^5, \quad -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos t + 3\sin t),$$

$$\text{m) } \left(\frac{3}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t \right) \cdot I(t), \quad \text{n) } \cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t,$$

$$\text{o) } \frac{1}{6} \left(3\cos t + 3\sin t + e^t - 4e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \quad \text{p) } 2\cosh t - 1,$$

$$\text{r) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}t, \quad \text{l) } \frac{1}{36}(45e^{2t} - 32\cos 3t - 18t - 5),$$

$$\text{s) } \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + e^t), \quad \text{p) } \frac{1}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t}.$$

6.

Funkcje uogólnione

W tym rozdziale rozpatrzymy pewne uogólnienie klasycznego pojęcia funkcji, a mianowicie pojęcie *funkcji uogólnionej* w ścisłym ujęciu zwanej *dystrybucją* na przykładzie tzw. *delta-funkcji*.

Pojęcie to pojawiło się w związku z rozwiązywaniem wielu różnorodnych zagadnień matematyki, fizyki, mechaniki i elektrotechniki teoretycznej, przy opisie których klasyczne pojęcie funkcji i cały aparat analizy matematycznej na tym pojęciu oparty okazał się niewystarczający.

6.1. Wprowadzenie pojęcia delta funkcji Diraca

W badaniach i opisie zjawisk fizycznych przy pomocy aparatu matematycznego nieuniknione jest korzystanie z różnych abstrakcyjnych pojęć matematycznych, m.in. z pojęcia punktu. Mówimy np. o masie skupionej w danym punkcie przestrzeni, o punktowym ładunku elektrycznym, o sile przyłożonej w danym momencie czasu, o punktowym źródle pewnego pola fizycznego, o gęstości punktu materialnego, czy też o wielkich lecz krótkotrwałych siłach elektrodynamicznych, itp. Przy wykorzystaniu aparatu matematycznego jest to wygodne, mimo że oddajemy niezbyt dokładny obraz rzeczywisty, gdyż jak wiadomo, każda masa posiada określoną objętość, każda siła oddziałuje w określonym przedziale czasu, każde źródło pola posiada określone wymiary itd.

O przytoczonych powyżej zjawiskach i im podobnych mówimy w fizyce, że mają charakter impulsu. Impuls można traktować jako zjawisko graniczne ciągu zjawisk tego samego typu, wywołujących ten sam efekt, podczas gdy czas trwania zjawiska dąży do zera. W takich sytuacjach jedyną informacją jaką mamy o funkcji $f(t)$ opisującej dany problem to fakt, że $f(t)$ jest zerem z wyjątkiem bardzo krótkiego przedziału czasu $t_0 \leq t \leq t_1$ i że całka tej funkcji w granicach od $-\infty$ do $+\infty$ jest liczbą $I_0 \neq 0$. Jeżeli I_0 nie jest bardzo małe, wówczas $f(t)$ będzie wystarczająco duże w przedziale $t_0 \leq t \leq t_1$. Takie funkcje nazywamy *funkcjami impulsowymi* (lub *zderzeniowymi*), a wykres charakterystyczny dla takiej funkcji jest dany na rysunku 6.1.

Do opisu zjawisk mających charakter impulsu dogodnie jest wprowadzenie pewnych wielkości zmiennej t , które nie są funkcjami w znaczeniu klasycznej analizy matematycznej. Jedną z nich jest *dystrybucja delta Diraca* lub krócej δ -funkcja.

Nazwa tej niefunkcyjnej wielkości pochodzi od angielskiego fizyka Paula Diraca, który w 1928 roku wprowadził do mechaniki kwantowej nowy element formalizmu matematycznego, oznaczył go symbolem $\delta(t)$ i nazwał funkcją delta (δ -funkcja). Oczywiście $\delta(t)$ nie jest zwykłą funkcją.

Jednakże Dirac w swojej kontrowersyjnej metodzie, rozwiniętej dla funkcji impulsowych, formalnie traktował wielkość $\delta(t)$ jakby rzeczywiście była zwykłą funkcją. Metoda ta była krytykowana przez matematyków, którzy zarzucali: „jak można wierzyć, że $\delta(t)$ jest funkcją, jeśli w sposób oczywisty nią nie jest”, lecz Dirac i jego następcy otrzymywali zawsze poprawne wyniki. Dlatego fizycy (i nie tylko oni) chętnie stosują δ -funkcję, ponieważ jest ona wygodna do przybliżonego, ale wystarczającego opisu wielu zagadnień fizycznych.

W tym rozdziale teoria dotycząca δ -funkcji i jej przekształceń jest utrzymana na pewnym poziomie ścisłości wystarczającym do naszych rozważań.

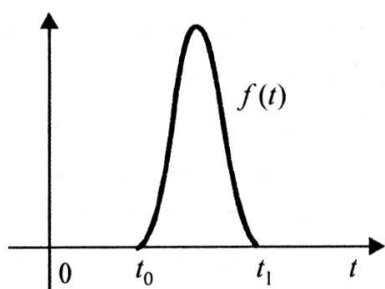
Rozpatrzmy teraz przykład w którym, jak się sami przekonamy, znane nam pojęcie funkcji okaże się niewystarczające do formalnego matematycznego opisu badanego problemu. W sposób naturalny wprowadzimy nową niefunkcyjną wielkość, oznaczymy ją przez $\delta(t)$ i w sposób poglądowy wyjaśnimy sens jej podstawowych własności.

W charakterze przykładu rozważmy działanie siły impulsowej („krótkotrwałej”).

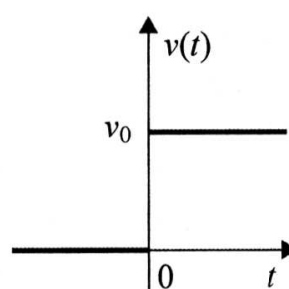
Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ na ciało o masie $m \neq 0$ podziałała siła, nadająca mu stałą prędkość $v_0 \neq 0$, którą określamy zależnością

$$v(t) = v_0 \cdot I(t) = \begin{cases} v_0, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (6.1.1)$$

gdzie $I(t)$ – funkcja jednostkowa określona wzorem (1.1.6'), po czym działanie siły ustało (rys. 6.2).



Rys. 6.1. Wykres charakterystyczny dla funkcji impulsowej $f(t)$



Rys. 6.2

Na przykład można przyjąć, że siła ta „pochodzi” od ścianki, w którą uderza cząstka materialna (przy założeniu idealnie sprężystych zderzeń, które w rzeczywistości nie istnieją lecz są w wielu sytuacjach dobrym przybliżeniem zjawiska). Gdy cząstka uderzy w ściankę wystąpi impuls siły, który spowoduje natychmiastową zmianę jej pędu. Oznaczając przez $f(t)$ siłę, działającą na cząstkę w chwili t , mamy

$$f(t) = 0 \quad \text{dla } t \neq 0 \quad (6.1.2)$$

W chwili zderzenia $t = 0$ (trwa ono bardzo krótko – jest to mały ułamek sekundy) średnia siła impulsowa „pochodząca od ścianki”, zgodnie z naszą intuicją musi być bardzo duża. Do tego wniosku dochodzimy również stosując wzór $\Delta p = f(t) \cdot \Delta t$ określający zmianę pędu p : jeśli czas zderzenia Δt jest dostatecznie krótki, to zmiana pędu jest dostatecznie duża. Można więc przypuszczać, że „ $f(0) = \infty$ ”.

Spróbujmy to uzasadnić, tj. znajdziemy czemu jest równa siła $f(t)$ dla $t = 0$. Przypomnijmy jak to wygląda w przypadku sił opisanych funkcją ciągłą. Jeśli \mathbf{F} oznacza siłę, a – przyspieszenie, p – pęd, to w mechanice klasycznej zależność $\mathbf{F} = m \cdot a$ i $\mathbf{F} = dp/dt$ są dla pojedynczych punktów całkowicie równoważne. Newton w swych słynnych *Principiach* wyraził drugą zasadę dynamiki za pomocą pędu (który nazwał „ilością ruchu”). Zatem, zgodnie z drugim prawem Newtona gdy masa m jest stała, to siła $f(t)$ wyraża się wzorem

$$f(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (6.1.3)$$

Zależność (6.1.3) można zapisać w postaci

$$dp = f(t) dt = m \cdot dv \quad (6.1.3')$$

Zmianę pędu cząsteczki podczas zderzenia znajdujemy całkując wyrażenie (6.1.3'). Funkcja prędkości $v(t)$ jest tu funkcją różniczkowalną. Zakładając, że $f(t) = 0$ dla $t < 0$ mamy dla $t > 0$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = m \cdot v(t) \quad (6.1.4)$$

(Jako dolną granicę całkowania przyjęliśmy $-\infty$; można oczywiście zamiast niej przyjąć dowolną liczbę $a < 0$, ponieważ do chwili $t = 0$ ciało pozostawało w spoczynku).

W tej całkowej wersji drugie prawo Newtona ma szersze zastosowanie niż w postaci (6.1.3) do ruchów opisanych całkowaną funkcją. Ponieważ zgodnie z twierdzeniami rachunku całkowego, funkcja górnej granicy całkowania funkcji całkownej jest ciągła, więc prawo (6.1.4) dotyczy ruchów o ciągłej zmianie

prędkości. Nie opisuje jednak zderzenia sprężystego, którego prędkość jest nieciągła (patrz rys. 6.2).

Zwróćmy też uwagę na to, że z punktu widzenia znanej nam definicji całki, równość (6.1.4) nie zachodzi w przypadku funkcji $f(t)$ równej zero we wszystkich punktach poza punktem $t = 0$, bo stojąca po lewej stronie równości (6.1.4) całka jest równa zero, podczas gdy prawa strona tej równości jest różna od zera. Otrzymaliśmy więc sprzeczność chcąc formalnie poszerzyć stosowanie wzoru (6.1.4) na ruch o nieciągłej prędkości $v(t)$ (por. wzór 6.1.1) pochodzącej od siły impulsowej. Wynika stąd, że „obiekt” opisujący siłę impulsową nie może być funkcją całkowalną ani żadną inną funkcją (bo niecałkowalnej funkcji się nie scałkuje). Zatem niezbędne jest wprowadzenie nowego pojęcia, gdyż znaleźliśmy się poza granicami stosowania znanego aparatu analizy matematycznej.

Załóżmy dla uproszczenia (tzw. warunek normujący), że ilość ruchu (pęd), którą otrzymało ciało jest równa jeden (w jednostkach umownych), tzn., że

$$m v = 1 \quad (6.1.5)$$

zaś szukany „obiekt” opisujący siłę impulsową $f(t)$ działającą na cząstkę oznaczmy przez $\delta(\tau)$. Wtedy wzór (6.1.4) przyjmie postać

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1, \quad t > 0 \quad (6.1.6)$$

Aby znaleźć „obiekt” $\delta(t)$, opisujący siłę impulsową, postępujemy tak, jak to często robią fizycy, tj., najpierw określimy własności jakie obiekt ten powinien posiadać. W tym celu idąc za Diracem popatrzymy na badane zjawisko siły impulsowej jako na zjawisko graniczne polegające na działaniu siły w przedziale czasu od 0 do h ($h > 0$) opisanej funkcją ciągłą którą oznaczamy przez $\delta_h(t)$. Zakładamy przy tym również, że siła ta nadaje badanemu ciału tę samą ilość ruchu (ten sam pęd) co siła impulsowa nadająca mu prędkość v , tj.

$$\int_{-\infty}^h \delta_h(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) dt = m \cdot v.$$

Znajdziemy teraz siłę $\delta_h(t)$. Dogodnie jest tu wybierać, ze względów matematycznych, funkcje $\delta_h(t)$ (aproxymujące $\delta(t)$ „w pewnym sensie”) kształtu krzywej Gaussa. My, ze względów na prostszą ilustrację zagadnienia, będziemy opierać się wyłącznie na impulsach prostokątnych, ponieważ kształt impulsu nie jest taki ważny a wymagane jest, aby czas jego trwania był dostatecznie krótki i impuls miał pole jednostkowe.

Przyjmijmy zatem, że $\delta_h(t)$ jest stałą siłą oddziałującą w przedziale czasu od 0 do h . Ponieważ siła $\delta_h(t)$ jest równa zero poza przedziałem $\langle 0, h \rangle$, zaś na tym

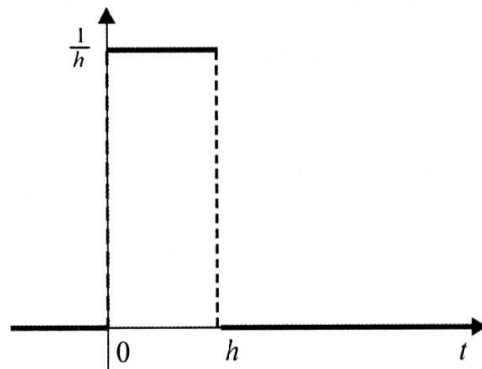
przedziale jest stała, tzn. $\delta_h(t) = \text{const}$, możemy przyjąć, że funkcja $\delta_h(t)$ wyraża się następującym, prostym wzorem

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < t < h \\ 0, & t < 0 \vee t > h \end{cases} \quad (6.1.7)$$

przy czym h może być liczbą dowolnie małą, dodatnią. Ponadto ze wzoru (6.1.7) mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) dt = 1 \quad (6.1.8)$$

Funkcja („rozłożona siła”) $\delta_h(t)$ dla $h > 0$ przedstawia impuls prostokątny o amplitudzie $1/h$, trwający h sekund, rys. 6.3. Jak widać z rysunku, pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $\delta_h(t)$, prostymi $t = 0$, $t = h$ i osią Ot nie zależy od h i jest równe jedności. Gdy h dąży „skokowo” do zera to otrzymujemy ciąg impulsów o jednokowych polach i wzrastających wysokościach.



Rys. 6.3. Ilustracja funkcji $\delta_h(t)$

W oparciu o funkcję $\delta_h(t)$ można wyjaśnić sens podstawowych własności δ -funkcji. Należy przypuszczać, że krótkotrwałą siłę $\delta(t)$ otrzymujemy z „rozłożonej siły” $\delta_h(t)$ w wyniku przejścia granicznego przy $h \rightarrow 0^+$, tj. przyjmujemy

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_h(t) \quad (6.1.9)$$

i wtedy możemy zapisać

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.1.10)$$

Zauważmy jednak, że wzór (6.1.10) nie umożliwia otrzymania wzoru (6.1.6) przy wykorzystaniu znanej definicji całki. Nasuwa to myśl, że ważnym atrybu-

tem wielkości (impulsu siły) $\delta(t)$ jest całka, i że niezbędne jest wprowadzenie odrębnej definicji „całki” $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, t > 0$.

W fizyce uważa się, że pęd nadany ciału przez siłę impulsową $\delta(t)$, stanowi granicę pędu nadanego ciału przez rozłożone w czasie siły $\delta_h(t)$, kiedy czas ich działania dąży do zera, tzn. przy $h \rightarrow 0^+$. Dlatego przyjmiemy, że

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t \delta_h(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (6.1.11)$$

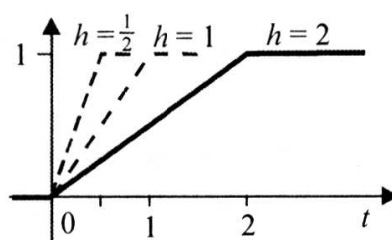
Ponieważ $\delta_h(t)$ jest funkcją całkowlaną, to ze wzoru (6.1.7) funkcja górnej granicy całkowania

$$F_h(t) = \int_{-\infty}^t \delta_h(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ \frac{t}{h} & \text{dla } 0 < t \leq h \\ 1 & \text{dla } t > h \end{cases} \quad (6.1.12)$$

tzn. dla $0 < h < +\infty$ każda z całek jest funkcją ciągłą zmiennej t i w każdym punkcie ciągłości funkcji $\delta_h(t)$ pochodna funkcji $F_h(t)$ istnieje i zachodzi równość

$$F_h'(t) = \delta_h(t) \text{ dla } t \neq 0 \text{ i } t \neq h.$$

Przebieg funkcji (6.1.12) jest pokazany na rysunku 6.4 i ma kształt pochyłego schodka.



Rys. 6.4. Ciąg funkcji $F_h(t)$ otrzymanych przez scałkowanie funkcji prostokątnych $\delta_h(t)$

Ustalmy teraz t i poszukajmy granicy ciągu wartości całek, gdy h maleje do zera. Z (6.1.12) otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t \delta_h(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (6.1.13)$$

Stąd dla $t > 0$ i dla wszystkich $h > 0$ na podstawie (6.1.11) wynika bezpośrednio równanie (6.1.6), tj. $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = 1$. Można pokazać, że w konsekwencji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (6.1.14)$$

Zatem, kiedy mówi się, że całka postaci (6.1.6) lub (6.1.14) funkcji $\delta(t)$ równa się 1, to całkę tę zgodnie z (6.1.11) należy rozumieć jako granicę odpowiednich zwykłych całek funkcji $\delta_h(t)$ przy $h \rightarrow 0^+$. W takim ujęciu wielkość $\delta(t)$ i jej własności są scharakteryzowane własnościami funkcji $\delta_h(t)$, $0 < h < +\infty$, będącymi funkcjami we właściwym znaczeniu.

Pokazaliśmy, że poszukiwany przez nas „obiekt” $\delta(t)$, opisujący siłę impulsową $f(t)$, scharakteryzowany własnościami (6.1.10) i (6.1.14) nie jest funkcją w znaczeniu przyjętym w analizie matematycznej, można go natomiast wyrazić za pomocą pojęcia δ -funkcji.

Przyjmujemy zatem następujące określenie:

δ -funkcją nazywamy wielkość $\delta(t)$ o następujących własnościach:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \neq 0 \quad (6.1.15)$$

i

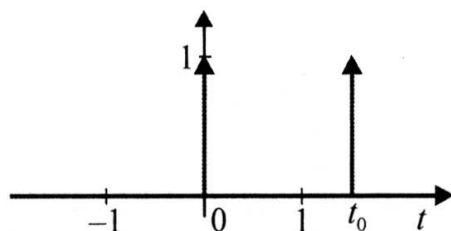
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (6.1.16)$$

Podkreślamy, że sama „funkcja” $\delta(t)$ będąca granicą rodziny funkcji $\delta_h(t)$ nie jest zwykłą funkcją.

U w a g a. „Obiekt” matematyczny poprawnie zdefiniowany posiadający własności (6.1.15), (6.1.16) to tzw. „dystrybucja w sensie Schwartz’a”, która jest pewnym funkcjonałem liniowym, do określenia którego potrzebna jest jeszcze własność filtracji opisana formułą (6.3.3).

Interpretacja fizyczna δ -funkcji. Warunki (6.1.15) i (6.1.16) mają wyraźną interpretację, zatem pojęcie δ -funkcji posiada sens fizyczny. Jeśli mianowicie zmienną t jest czas, to wielkość $\delta(t)$ można wyobrazić sobie jako idealnie wąski impuls nieskończenie wielki o ekstremalnie krótkim czasie trwania, występujący w chwili $t = 0$. Efekt działania tego impulsu jest przy tym różny od zera, o czym świadczy warunek (6.1.16), określający „pole” ograniczone tym impulsem (mierzone wartością całki), które jest skończone i unormowane do wartości 1. W fizyce i mechanice $\delta(t)$ nosi również nazwę *jednostkowej funkcji impulsowej*.

Wielkość $\delta(t)$ jako wielkość niefunkcyjna nie ma wykresu i jest przedstawiona graficznie (rys. 6.5) w postaci strzałki o jednostkowej wysokości.



Rys. 6.5. Graficzne przedstawienie dystrybucji $\delta(t)$ i $\delta(t-t_0)$

Jeżeli w równaniach (6.1.15) i (6.1.16) w miejsce zmiennej niezależnej t podstawimy $t-t_0$, to otrzymamy δ -funkcję przesuniętą, tj. przyjmujemy, że wielkość $\delta(t-t_0)$ ma własności

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq t_0 \\ +\infty & \text{dla } t = t_0 \end{cases} \quad (6.1.17)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (6.1.18)$$

Punkt $t = t_0$, w którym $\delta(t-t_0)$ jest nieokreślona nazywamy punktem osobliwym wielkości $\delta(t-t_0)$. Wielkość $\delta(t-t_0)$ można traktować jako siłę impulsu w chwili $t = t_0$, odpowiadającej masie jednostkowej i prędkości jednostkowej.

Zaprezentowana metoda ma cechy metody opartej na pojęciu funkcji aproksymujących, rozpowszechnionej zwłaszcza w fizyce i dyscyplinach technicznych. Nie ma ona wszystkich cech poprawnej metody matematycznej, ma jednak kilka praktycznych zalet: jest prosta, pogładowa i dobrze odpowiada intuicyjnemu wyobrażeniu o wielkości $\delta(t)$ i jej pochodnych $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ itd. W myśl tej metody wielkość $\delta(t)$ traktujemy jako granicę dobranych funkcji, które w pobliżu zera przyjmują bardzo duże wartości, a we wszystkich innych punktach są równe zero.

Innymi słowy, interpretując wyrażenia zawierające dystrybucje przechodzimy na pewne ciągi $\delta_h(t)$ skończonych impulsów o jednostkowym polu, które są krótkie, ale nie o zerowym czasie trwania i mają pewien szczególny kształt; wykonujemy na nich wskazane operacje, takie jak całkowanie, różniczkowanie, mnożenie itp., a następnie obliczamy granicę, gdy czas trwania impulsu zbliża się do zera. Ten sposób postępowania będziemy stosowali w dalszym tekście do każdego wyrażenia, w którym wystąpi δ -funkcja.

6.2. Związek δ -funkcji z funkcją jednostkową

Z przyjętej definicji całki $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$ na podstawie wzoru (6.1.11) oraz bezpośrednio ze wzoru (6.1.13) i zgodnie z definicją funkcji jednostkowej $I(t)$ mamy

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t \delta_h(\tau) d\tau = I(t) \quad (6.2.1)$$

Własność ta wskazuje na ścisłą zależność dystrybucji $\delta(t)$ z funkcją skoku jednostkowego $I(t)$ (patrz wzór 1.1.6').

Ponieważ dla zwykłych funkcji na podstawie wzoru całkowego Newtona-Leibniza [10] z zależności $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = g(t)$ wynika, że $f(t) = g'(t)$, więc przez analogię z (6.2.1) przyjmujemy

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} [I(t)] \quad (6.2.2)$$

co oznacza, że „pochodną funkcji jednostkowej powinna być dystrybucja $\delta(t)$ ”. Ponieważ funkcja jednostkowa faktycznie nie ma pochodnej w zwykłym sensie, więc twierdzenie to na podstawie (6.2.1) może być interpretowane następująco: jeżeli ciąg różniczkowalnych funkcji w granicy dąży do $I(t)$, to pochodne wyrazów tego ciągu tworzą ciąg określający dystrybucję $\delta(t)$.

Zauważmy, że obliczając pochodną funkcji $I(t)$, na podstawie znanej nam definicji pochodnej, ze wzoru (1.1.6'), definiującym funkcję $I(t)$, otrzymamy

$$I'(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (6.2.3)$$

Porównując wzory (6.1.15) i (6.2.3) niesłusznie na tej podstawie byłoby twierdzić, że pochodna $I'(t)$ jest funkcją $\delta(t)$. Wiemy, że δ -funkcji nie można określić tylko wzorem (6.1.15), ponieważ nawet fizycznie jest jasne, że z samego tego wzoru nie wynika, że rozpatrywana w naszym przykładzie siła impulsowa $\delta(t)$ nadaje badanemu ciału pęd równy dokładnie jedności (wcześniej to założyliśmy – wzór 6.1.5). Jednakże wygodnie jest założyć, że

$$I'(t) = \delta(t) \quad (6.2.4)$$

6.3. Własność filtracji

W zastosowaniach rzadko posługujemy się δ -funkcją w formie bezpośredniej. Zazwyczaj δ -funkcja lub jej pochodne występują pod znakiem całki. Dlatego, przy interpretacji wyrażeń zawierających funkcje uogólnione, pożyteczne jest określenie fizycznego sensu ogólniejszej „całki”, a mianowicie całki postaci

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt \quad (6.3.1)$$

gdzie $g(t)$ jest dowolną funkcją ciągłą.

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami działania na δ -funkcji wykonujemy w ten sposób, że wykonujemy je najpierw na funkcjach $\delta_h(t)$ postaci (6.1.7), a następnie obliczamy granicę otrzymanego wyniku dla $h \rightarrow 0^+$. Zatem, postępując podobnie jak w przypadku formuły (6.1.11) przyjmujemy, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) g(t) dt \quad (6.3.2)$$

Można wykazać (szczegóły pomijamy), że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) g(t) dt = g(0).$$

Uwzględniając ten wynik w (6.3.2) możemy więc napisać

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0) \quad (6.3.3)$$

Zauważmy, że stąd, przy $g(t) \equiv 1$ wynika wzór (6.1.16).

Związek wyrażony wzorem (6.3.3) nazywamy *własnością filtracji δ -funkcji*, ponieważ operacja nad funkcją $g(t)$ wskazana po lewej stronie równości (6.3.3) wyodrębnia pojedynczą wartość funkcji $g(t)$.

W szczególności własność filtracji δ -funkcji możemy uogólnić na δ -funkcje o przesuniętym argumentie i wtedy odpowiednio otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0) \quad (6.3.4)$$

Zależność (6.3.4) można interpretować w ten sposób, że wielkość $\delta(t)$ znajdując się pod znakiem całki powoduje „wyciągnięcie” pozostałej części wyrażenia w punkcie t_0 , tj. $g(t_0)$.

U w a g a . Podobieństwo (6.3.4) do całki (7.7.1) (lub 3.1.1) wyrażającej splot można podkreślić pisząc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) g(\tau) d\tau = g(t)$$

lub używając symbolu splotu w postaci

$$\delta(t) * g(t) = g(t) * \delta(t) = g(t) \quad (6.3.5)$$

Własność $\delta(t)$ opisana równaniem (6.3.5) oznacza, że δ -funkcja jest elementem neutralnym mnożenia splotowego (por. uwaga 3.1.3).

Jakkolwiek sposób wprowadzenia delta funkcji przedstawiony w paragrafach 6.1÷6.3 jest z punktu widzenia fizyki oczywisty, nie można zapomnieć, że δ -funkcję należy stosować z dużą ostrożnością. Korzystając z całki (6.3.1) poruszamy się po niepewnym gruncie, gdzie zwykle twierdzenia matematyczne, np. o całkowaniu przez części, zamianie zmiennych, przejście do granicy (np.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) dt$) itp., nie zawsze są wykonalne. Teoria matema-

tyczna, na gruncie której można wprowadzić pojęcie delty Diraca w sposób nie budzący zastrzeżeń, nazywa się *teorią dystrybucji*. Pierwsze największe sukcesy w tej dziedzinie zawdzięczamy francuskiemu matematykowi L.Schwartzowi. Bardziej przystępne ujęcie tej teorii podali w latach 1955-1957 polscy matematycy Jan Mikusiński oraz Roman Sikorski. Znajomość tej teorii osiągnąć można jedynie na drodze rozszerzonych studiów, których trudno wymagać od techników i inżynierów. Zainteresowanego Czytelnika odsyłam do literatury [2, 3, 13, 14, 23, 25].

Zwróćmy jeszcze w tym miejscu uwagę na pewną analogię. Tak jak kiedyś rozszerzono pojęcie liczby rzeczywistej na liczby zespolone, tak pojęcie funkcji zostało rozszerzone na dystrybucje.

Na przykład, jak wiemy, równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych ma natomiast dwa rozwiązania: $x_1 = -i$, $x_2 = i$ (i – jednostka urojona) w zbiorze liczb zespolonych, które są rozszerzeniem (uogólnieniem) liczb rzeczywistych.

Analogiczna sytuacja pojawia się również w zbiorze funkcji pojmowanych jedynie w myśl klasycznej definicji analizy matematycznej, w której występują przypadki niewykonalności niektórych działań. Na przykład: nie każda funkcja ciągła ma pochodną, nie każdy szereg funkcyjny można różniczkować lub całkować wyraz po wyrazie, nie każda funkcja okresowa lokalnie całkowalna ma szereg Fouriera zbieżny do niej samej, itp. Natomiast wszystkie wymienione tu działania są wykonalne (mają sens) w zbiorze dystrybucji.

W dalszym tekście nasze rozważania ograniczymy jedynie do tych zagadnień dotyczących dystrybucji Diraca, które mają istotne znaczenie dla zastosowań i są związane z metodą przekształcenia Laplace'a.

6.4. Transformata δ -funkcji

Umawiamy się, że transformatą Laplace'a dystrybucji $\delta(t)$ jest granica transformat $\mathcal{L}[\delta_h(t)]$ rodziny funkcji $\delta_h(t)$ wyrażonych wzorem (6.1.7), przy $h \rightarrow 0^+$, tzn.

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[\delta_h(t)] \quad (6.4.1)$$

Weźmy pod uwagę funkcje $\delta_h(t)$ określone wzorem (6.1.7) i zapiszmy je za pomocą funkcji skoku jednostkowego następującym wzorem

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h} [I(t) - I(t-h)] \quad (6.4.2)$$

Następnie utwórzmy transformatę Laplace'a tych funkcji. Z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia oraz z twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym (wzór 2.6.3) otrzymamy

$$\mathcal{L}[\delta_h(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{h}(I(t) - I(t-h))\right] = \frac{1}{sh}(1 - e^{-sh}) \quad (6.4.3)$$

Następnie obliczamy granicę uzyskanych transformat przy $h \rightarrow 0^+$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[\delta_h(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-sh} \overset{[0]}{0}}{sh} = \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{se^{-hs}}{s} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-sh} = 1$$

(do ostatniej granicy zastosowaliśmy regułę de L'Hospitala).

Uwzględniając otrzymany wynik w (6.4.1) przyjmujemy, że transformata dystrybucji $\delta(t)$ jest stała i równa jedności, co zapisujemy wzorem

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (6.4.4)$$

U w a g a . Jeśli funkcję e^{-sh} przedstawimy w postaci szeregu potęgowego

$$e^{-sh} = 1 - sh + \frac{s^2 h^2}{2!} - \frac{s^3 h^3}{3!} + \dots \quad (6.4.5)$$

to wyrażenie (6.4.3) przyjmie postać $\mathcal{L}[\delta_h(t)] = 1 - \frac{1}{2!}sh + \frac{1}{3!}s^2h^2 - \dots$ i w granicy przy $h \rightarrow 0^+$ otrzymamy ten sam wynik, tj. wzór (6.4.4).

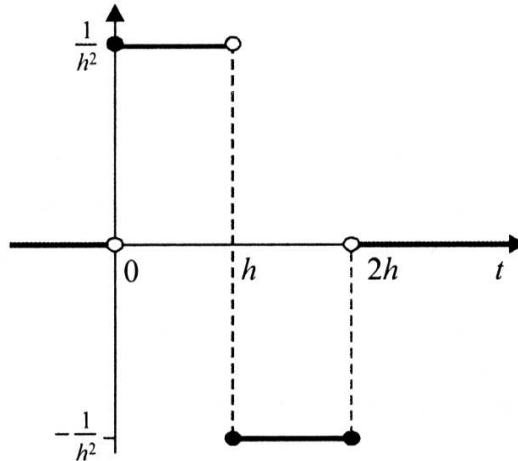
6.5. Pochodne δ -funkcji i ich transformaty

Analogicznie do określenia δ -funkcji wzorem (6.1.9) wprowadza się pochodne δ -funkcji. W tym celu rozpatrujemy rodzinę funkcji $\delta_h^{(1)}(t)$ (rys. 6.6) określonych wzorem:

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{\delta_h(t) - \delta_h(t-h)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & \text{dla } 0 < t < h \\ -\frac{1}{h^2} & \text{dla } h < t < 2h \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 2h \end{cases} \quad (6.5.1)$$

lub używając funkcji jednostkowej $I(t)$ i jej przesunięć rzeczywistych

$$\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2} [I(t) - 2 \cdot I(t-h) + I(t-2h)] \quad (6.5.2)$$



Rys. 6.6. Ilustracja graficzna funkcji $\delta_h^{(1)}(t)$, którą można uważać za dwa kolejne impulsy o przeciwnych kierunkach trwające po h sekund i amplitudzie $\frac{1}{h^2}$

Granice ciągu funkcji $\delta_h^{(1)}(t)$, określonych wzorem (6.5.1) przy $h \rightarrow 0^+$, oznaczamy symbolem $\delta^{(1)}(t)$ i przyjmujemy jako określenie *pierwszej pochodnej δ -funkcji lub nazywamy funkcją Diraca rzędu pierwszego*. Mamy zatem

$$\delta^{(1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_h^{(1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{I(t) - 2 \cdot I(t-h) + I(t-2h)}{h^2} \quad (6.5.3)$$

U w a g a . Wartość $\frac{\delta_h(t) - \delta_h(t-h)}{h}$ możemy interpretować jako średnią szybkość zmian wartości funkcji $\delta_h(t)$ w przedziale $\langle 0, 2h \rangle$, a „podwójny impuls” $\delta_h^{(1)}(t)$ jako grube przybliżenie pierwszej pochodnej δ -funkcji.

Granice (6.5.3) można uważać również za drugą pochodną funkcji jednostkowej $I(t)$ co umownie zapisujemy:

$$I''(t) = \frac{d}{dt}(\delta(t)) = \delta^{(1)}(t) \quad (6.5.4)$$

ozn. pochodna dystrybucyjna rzędu drugiego funkcji $I(t)$ określa pochodną $\delta^{(1)}(t)$ dystrybucji $\delta(t)$.

U w a g a . Aby poprawnie interpretować wyrażenie (6.5.4) określające pochodną $\delta^{(1)}(t)$ należy całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(t) dt$ rozumieć, analogicznie do (6.1.11), jako granicę postaci

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h^{(1)}(t) dt,$$

przy czym $\delta_h^{(1)}(t)$ jest pochodną funkcji aproksymującej $\delta_h(t)$.

Podobnie (szczegóły pomijamy), wyższe pochodne dystrybucyjne funkcji $I(t)$ określają pochodne dystrybucji $\delta(t)$, tj. umownie zapisujemy:

$$I^{(n+1)}(t) = \delta^{(n)}(t), \quad n \in N \quad (6.5.5)$$

przy czym analogicznie do zależności (6.1.15)

$$\delta^{(n)}(t) = 0 \quad \text{dla } t \neq 0 \quad (6.5.6)$$

Oznacza to, że każdą dystrybucję można utożsamić z funkcją stałą równą zero w dowolnym przedziale (t_1, t_2) , takim że: $t_1 < t_2 < 0$ albo $0 < t_1 < t_2$. W punkcie osobliwym $t = 0$ pochodne dystrybucji $\delta^{(n)}(t)$ nie są określone.

Analogicznie, jak w przypadku wcześniejszych rozważań umawiamy się, że transformatą Laplace'a pierwszej pochodnej $\delta^{(1)}(t)$ jest granica transformat rodziny funkcji $\delta_h^{(1)}(t)$ wyrażonych wzorem (6.5.1), gdy $h \rightarrow 0^+$, tj.

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[\delta_h^{(1)}(t)] \quad (6.5.7)$$

Korzystając z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia i twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym – wzór (2.6.3) wyznaczamy transformaty funkcji $\delta_h^{(1)}(t)$ określone wzorem (6.5.1). Mamy zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_h^{(1)}(t)] &= \frac{1}{h^2} (\mathcal{L}[I(t)] - 2 \cdot \mathcal{L}[I(t-h)] + \mathcal{L}[I(t-2h)]) = \\ &= \frac{1}{sh^2} (1 - 2e^{-sh} + e^{-2sh}) = \frac{(1 - e^{-sh})^2}{sh^2}\end{aligned}\quad (6.5.8)$$

Po podstawieniu wyrażenia (6.5.8) do prawej strony wzoru (6.5.7) obliczamy granicę przy $h \rightarrow 0^+$, korzystając dwukrotnie z reguły de L'Hospitala, i otrzymujemy

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[\delta_h^{(1)}(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1 - e^{-sh})^2}{sh^2} = s \quad (6.5.9)$$

Wobec tego – przyjmujemy

$$\mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = s \quad (6.5.10)$$

W podobny sposób rozumiemy transformaty od wyższych pochodnych dystrybucji $\delta^{(n)}(t)$, tj. przyjmujemy

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{L}[\delta_h^{(n)}(t)]. \quad (6.5.11)$$

Na podstawie odpowiednich rozważań otrzymujemy wzór

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.5.12)$$

Na dystrybucje można przenieść twierdzenia rachunku operatorowego, na przykład: twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym, a inne twierdzenia przy odpowiednich dodatkowych założeniach. Na przykład, stosując twierdzenie o transformacji pochodnej (wzór 2.2.1), z faktu, że $\mathcal{L}[I(t)] = \frac{1}{s}$ oraz przy założeniu, że $I(0^+) = 0$, oraz ze wzorów (6.2.2) i (6.5.4) otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t)] &= \mathcal{L}[I'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[I(t)] = s \cdot \frac{1}{s} = 1, \\ \mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] &= \mathcal{L}[I''(t)] = s^2 \cdot \mathcal{L}[I(t)] = s^2 \cdot \frac{1}{s} = s\end{aligned}$$

Zauważmy, że \mathcal{L} -transformaty dystrybucji $\delta(t)$ i jej pochodnych $\delta^{(n)}(t)$ są nieujemnymi, całkowitymi potęgami zmiennej s . Transformaty Laplace'a wyra-

żone wzorami (6.4.4), (6.5.12) nie spełniają warunku koniecznego $\lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, jaki spełniają transformaty wszystkich funkcji, bo nie są to \mathcal{L} -transformaty funkcji. Wymienione jednak wzory rozszerzają zakres zastosowań metody operatorowej na dystrybucję $\delta(t)$ i jej pochodne. Biorąc pod uwagę liniowość \mathcal{L} -przekształcenia otrzymamy, zgodnie ze wzorami (6.4.4), (6.5.12), następującą zależność:

$$\mathcal{L}[a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \dots + a_n\delta^{(n)}(t)] = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n \quad (6.5.13)$$

gdzie $a_k \in R$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Zależność (6.5.13) umożliwia rozważanie w dziedzinie zespolonej s transformat Laplace'a, będących dowolnymi funkcjami wymiernymi.

Założmy, że funkcja wymierna o współczynnikach rzeczywistych ma postać:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \text{ gdzie stopień } P(s) \geq \text{stopnia } Q(s).$$

Dzieląc licznik przez mianownik otrzymujemy:

$$F(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_k s^k + \frac{P_0(s)}{Q(s)} \quad (6.5.14)$$

przy czym stopień $P_0(s)$ jest mniejszy od $Q(s)$, tzn., że funkcja $F_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q(s)}$

jest funkcją wymierną właściwą. Zatem, zgodnie ze wzorem (6.5.14) oraz (6.5.13) transformata odwrotna przyjmie postać:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \dots + a_k\delta^{(k)}(t) + f_0(t) \quad (6.5.15)$$

gdzie $f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_0(s)]$ jest funkcją (oryginałem).

Stosując do dystrybucji $\delta(t)$ twierdzenie rachunku operatorowego o przesunięciu rzeczywistym oraz uwzględniając wzory (6.4.4) i (6.5.12), przy założeniu $t_0 > 0$, otrzymamy transformaty Laplace'a dystrybucji przesuniętej $\delta(t - t_0)$. Mamy więc

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}[\delta(t)] = e^{-st_0}, \quad (6.5.16)$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t - t_0)] = e^{-st_0} \cdot \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n \cdot e^{-st_0}. \quad (6.5.17)$$

Wszystkie zależności jakie w tym rozdziale spotkamy, wyrażające pewne własności δ -funkcji, możemy traktować jako zbiór pewnych reguł postępowania z δ -funkcjami.

Rozdział ten podany został jedynie informacyjnie z zamysłem wprowadzenia Czytelnika w tę ważną problematykę.

6.6. Przykłady zastosowań δ -funkcji

Dystrybucje znajdują szerokie zastosowanie zarówno w naukach stosowanych jak i w wielu dziedzinach matematyki, a w szczególności przy rozwiązywaniu równań fizyki matematycznej, ponieważ funkcje impulsowe są wygodną idealizacją funkcji i stąd wynika celowość ich zastosowania (np. w układach liniowych).

I. Omówimy zastosowanie δ -funkcji przy określaniu warunków początkowych równania różniczkowego.

Z mechanicznej interpretacji δ -funkcji wynika, że obecność δ -funkcji po prawej stronie równania różniczkowego może służyć określeniu warunków początkowych lub odpowiedniej zmianie warunków początkowych tego równania. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Przykład 6.1. Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bf(t) \quad (6.6.1)$$

z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$
oraz równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bf(t) + x_0 \cdot \delta(t - t_0) \quad (6.6.2)$$

z warunkiem początkowym $x(t_0^-) = 0$,
gdzie a, b – dowolne stałe.

Pokażemy, że dla równania (6.6.1) warunek początkowy przy $t \rightarrow t_0^+$ ma postać

$$x(t_0^+) = x_0.$$

Zauważmy, że rozwiązania równań (6.6.1) i (6.6.2) są identyczne dla $t \geq t_0$. Możemy sprawdzić tę równoważność całkując drugie równanie, co daje w wyniku

$$x(t_0^+) - x(t_0^-) = \int_{t_0^-}^{t_0^+} [ax(t) + bf(t)] dt + x_0 \cdot \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt.$$

Pierwsza całka po prawej stronie jest całką zwyczajnych funkcji w nieskończenie małym przedziale, więc ta całka znika, a druga całka na podstawie warunku (6.1.18) jest równa jedności. Stąd otrzymujemy określenie warunku początkowego

$$x(t_0^+) = x_0,$$

jak oczekiwaliśmy. ■

II. Metodą operatorową możemy rozwiązać zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t), \quad y(0^+) = y_0, \quad y'(0^+) = y_1 \quad (6.6.3)$$

przy założeniu, że $f(t)$ jest δ -funkcją (impulsem), tzn. wielkością o własnościach (6.1.15) i (6.1.16) lub (6.1.17), (6.1.18).

W celu rozwiązania problemu początkowego (6.6.3) metodą transformacji Laplace'a będziemy postępowali analogicznie jak w przypadku rozwiązywania równania różniczkowego z przykładu 5.2 w rozdziale 5. Musimy dodatkowo znać tylko transformatę Laplace'a funkcji $\delta(t)$ lub $\delta(t - t_0)$. Transformaty te dane są wzorami (6.4.4), (6.5.16). Zauważmy, że bezpośrednio z definicji 1.2.1 transformaty Laplace'a oraz ze wzoru (6.3.4) uzyskamy

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0,$$

co jest zgodne z wynikiem (6.5.16).

Przykład 6.2. Sprawdzić, że równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \quad (6.6.4)$$

z zerowymi warunkami początkowymi: $x(0^+) = 0$ i $x'(0^+) = 0$ ma takie samo rozwiązanie jak równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t) \quad (6.6.5)$$

z warunkami początkowymi: $x(0^+) = 0$ i $x'(0^+) = 1$.

Rozwiążmy najpierw równanie (6.6.4) metodą operatorową. Zakładamy, że $x(t)$ i $f(t)$ są \mathcal{L} -transformowalne, tzn. istnieją obrazy tych funkcji $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ oraz $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Do obu stron równania (6.6.4) stosujemy przekształcenie Laplace'a i otrzymamy

$$\mathcal{L}[x''(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[\delta(t)]$$

Ze wzoru (2.2.6) wyznaczamy transformatę drugiej pochodnej, uwzględniamy warunki początkowe oraz wzór (6.4.4) i uzyskujemy równanie operatorowe

$$s^2 X(s) = F(s) + 1 \quad (1)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$X(s) = \frac{F(s) + 1}{s^2} = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{1}{s^2}. \quad (2)$$

Poprzez transformację odwrotną Laplace'a przechodzimy od obrazu ponownie do oryginału i korzystając z liniowości przekształcenia \mathcal{L}^{-1} mamy

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \cdot F(s)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right],$$

a stąd po zastosowaniu twierdzenia Borela (wzór 3.2.1) otrzymamy ostatecznie rozwiązanie równania (6.6.4) w postaci

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t - \tau) d\tau + t \quad (3)$$

Podobnie, rozwiązując metodą operatorową równanie (6.6.5) z podanymi warunkami początkowymi otrzymujemy równanie operatorowe postaci

$$s^2 \cdot X(s) - 1 = F(s),$$

które jest równoważne równaniu (1), i którego rozwiązaniem jest również funkcja postaci (2). Zatem i rozwiązaniem równania (6.6.5) jest funkcja dana wzorem (3). ■

W n i o s e k . Podany przykład ilustruje, jak wprowadzenie dystrybucji $\delta(t)$ do prawej strony równania różniczkowego umożliwi dowolną zmianę niezerowych warunków początkowych danego równania na równoważne równanie z zerowymi warunkami początkowymi.

Przykład 6.3. Wyznaczyć rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 3\delta(t-1) + \delta(t-2) \quad (1)$$

$$\text{z warunkami początkowymi } x(0) = 1, x'(0) = 1 \quad (2)$$

R o z w i ą z a n i e . Niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$.

1. Do obu stron równania różniczkowego (1) wykonujemy transformację Laplace'a

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x\right] = \mathcal{L}[3\delta(t-1) + \delta(t-2)]$$

2. Korzystamy z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia

$$\mathcal{L}[x''(t)] - 4\mathcal{L}[x'(t)] + 4\mathcal{L}[x(t)] = 3\mathcal{L}[\delta(t-1)] + \mathcal{L}[\delta(t-2)].$$

3. Korzystamy z twierdzenia o transformacie pochodnej, uwzględniamy warunki początkowe (2), ze wzoru (6.5.16) obliczamy $\mathcal{I}[\delta(t-1)] = e^{-s}$, $\mathcal{I}[\delta(t-2)] = e^{-2s}$ i po przekształceniach otrzymamy równanie operatorowe

$$(s^2 - 4s + 4)X(s) = 3e^{-s} + e^{-2s} + s - 3.$$

4. Wyznaczamy rozwiązanie operatorowe

$$X(s) = \frac{3e^{-s} + e^{-2s} + s - 3}{s^2 - 4s + 4} \quad (3)$$

W konsekwencji, uwzględniając rozkład na sumę ułamków prostych, mamy

$$X(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3}{(s-2)^2} e^{-s} + \frac{3}{(s-2)^2} e^{-2s} \quad (4)$$

5. Stosując transformację odwrotną do obu stron zależności (4) z przestrzeni obrazu przechodzimy z powrotem do przestrzeni oryginału i otrzymujemy

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3}{(s-2)^2} e^{-s} + \frac{3}{(s-2)^2} e^{-2s}\right].$$

6. Korzystając z liniowości \mathcal{L}^{-1} -przekształcenia oraz odczytując transformaty odwrotne z tablicy 2 zamieszczonej w Dodatku otrzymujemy rozwiązanie

$$x(t) = (1-t)e^{2t} \cdot \mathcal{I}(t) + 3 \cdot [\mathcal{I}(t-1) \cdot (t-1)e^{2(t-1)} + \mathcal{I}(t-2) \cdot (t-2)e^{2(t-2)}].$$

■

Pouczające jest otrzymanie rozwiązania dłuższą drogą, tj. znajdując $x(t)$ oddzielnie w każdym przedziale: $0 \leq t < 1$, $1 \leq t < 2$, $2 \leq t < +\infty$. Zachęcam Czytelnika do rozwiązania zagadnienia początkowego (1), (2) tym sposobem.

III. Zastosowania w fizyce i technice

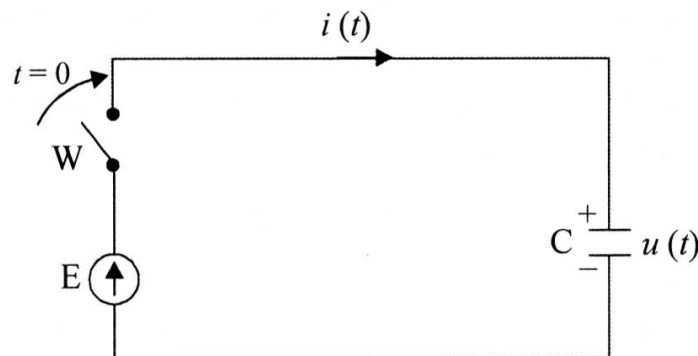
Przytoczymy teraz przykłady charakteryzujące dość dobrze modele matematyczne, dla których próba formalnego opisu matematycznego prowadzi w sposób naturalny do δ -funkcji Diraca. W rozpatrywanych przykładach, jak się sami przekonamy, pojęcie funkcji (jakie dotychczas jest nam znane) okazuje się niewystarczające do opisu przebiegającego zjawiska. Pojawia się więc konieczność wprowadzenia nowej niefunkcyjnej wielkości jaką jest δ -funkcja.

Przykład 6.4. Rozważmy obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 6.7.

Obwód ten zawiera źródło stałego napięcia E , kondensator C oraz wyłącznik W . Przed zamknięciem obwodu kondensator nie był naładowany i prąd w obwodzie nie płynął, tzn. dla $t < 0$, $u(t) = 0$, $i(t) = 0$. W chwili $t = 0$ zamykamy obwód. Z uwagi na brak oporności (pomijamy oporność kontaktów oraz doprowadzeń ze źródła) kondensator o pojemności C zostanie naładowany raptownie (w nieskończenie krótkim czasie) od napięcia równego zero do napięcia stałego $u(t) = E$, a prąd wyraża się zależnością

$$i(t) = C \frac{du}{dt} \quad (6.6.6)$$

która z racji występowania pochodnej wymaga, by napięcie wyrażało się funkcją różniczkowalną. Dla wartości $t > 0$ mamy w obwodzie stan ustalony, tzn. napięcie na kondensatorze $u(t) = E$ i prąd w obwodzie nie płynie, tj. $i(t) = 0$.



Rys. 6.7

Jeżeli napięcie wyrazimy zależnością

$$u(t) = E \cdot I(t),$$

gdzie $I(t)$ jest funkcją jednostkową, określoną wzorem (1.1.6'), rys. 1.2b, to pochodna $\frac{du}{dt}$ istnieje i jest równa zero w każdym punkcie $t \neq 0$, natomiast nie istnieje w punkcie $t = 0$ (bo jest to funkcja nieciągła). Z zależności (6.6.6) otrzymamy

$$i(t) = 0 \text{ dla } t \neq 0,$$

natomiast w chwili zamknięcia obwodu, tj. $t = 0$ w oparciu o przesłanki fizyczne (podpowiada nam to również intuicja) prąd powinien osiągnąć wartość nieskończenie wielką. Zatem całkowity przebieg prądu można określić następująco

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ +\infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (6.6.7)$$

Na skutek przepływu prądu całkowity ładunek

$$Q = E \cdot C \quad (6.6.8)$$

zostaje przeniesiony ze źródła prądu na okładki kondensatora. Ładunek ten może być formalnie policzony z zależności

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) dt \quad (6.6.9)$$

Zwróćmy uwagę, że z punktu widzenia klasycznej matematyki, tj. z definicji całki, równanie (6.6.9) nie ma sensu, gdyż funkcja $i(t)$ jest równa zero we wszystkich punktach oprócz $t = 0$ i dlatego całka, po prawej stronie wzoru (6.6.9) jest równa zero, podczas gdy lewa strona tej równości na podstawie (6.6.8) jest różna od zera.

Wielkość $i(t)$ (w naszym przypadku natężenie) określona przez własność (6.6.7) i (6.6.9), które odpowiadają warunkom (6.1.15) i (6.1.16), nie da się przedstawić za pomocą żadnej funkcji. Warunki te określają jednak wielkość $i(t)$ (tj. natężenie prądu) jako δ -funkcję, tj.

$$i(t) = E \cdot C \cdot \delta(t) \quad (6.6.10)$$

(przyjeliśmy opór $R = 0$).

W szczególności, przyjmując (warunek normujący) $E \cdot C = Q = 1$ (w umownych jednostkach), mamy

$$i(t) = \delta(t).$$

■

Przykład 6.5. Rozważmy w pewnym obszarze przestrzennym V masę m i przyjmijmy, że rozkład przestrzenny tej masy określony jest funkcją gęstości $\mu(x, y, z) = \mu(P)$, gdzie $P = P(x, y, z)$ oznacza punkt przestrzeni, przy czym

$$\mu(P) = 0 \quad \text{jeśli } P \notin V \quad (6.6.11)$$

oraz
$$\int_V \mu(P) dv = m > 0 \quad (6.6.12)$$

Rozważmy teraz przypadek masy punktowej. Załóżmy w tym celu, że w punkcie $P_0(x_0, y_0, z_0)$ obszaru przestrzennego V znajduje się masa punktowa m i poza tym punktem nie ma w tym obszarze innych mas. Wówczas gęstość $\mu(P)$ musiałaby spełniać warunki (6.6.11) oraz (6.6.12) dla $P \neq P_0$, których jednocześnie nie może spełniać żadna funkcja. W oparciu o przesłanki fizyczne należałoby przyjąć, że

$$\mu(P) = \begin{cases} 0 & \text{dla } P \neq P_0 \\ +\infty & \text{dla } P = P_0 \end{cases} \quad (6.6.13)$$

a więc mamy ponownie do czynienia z wielkością o własnościach podobnych do (6.1.17) i (6.1.18). Zatem, w tym przypadku gęstość $\mu(P)$ może być wyrażona jako δ -funkcja

$$\mu(P) = m \cdot \delta(P - P_0) \quad (6.6.14)$$

przy czym
$$\delta(P - P_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } P \neq P_0 \\ +\infty & \text{dla } P = P_0 \end{cases} \quad (6.6.15)$$

oraz
$$\int_V \delta(P - P_0) dv = 1, \quad P_0 \in V \quad (6.6.16)$$

Przyjmując $m = 1$ mamy $\mu(P) = \delta(P - P_0)$. Odpowiada to również interpretacji fizycznej, według której masa o wielkości 1 skupiona w jednym punkcie osiąga nieskończenie wielką gęstość.

Analogicznie można mówić o rozkładach masy – powierzchniowym i liniowym – i o funkcjach gęstości $\mu(P)$ tych rozkładów. ■

W opisanych przykładach, jak i w wielu innych zagadnieniach, mających naturę impulsu, zasadnicze znaczenie ma naszkicowany model fizyczny $\delta(t)$ – jako nieskończenie wielki i krótkotrwały impuls, a wzory (6.1.15), (6.1.16) lub (6.1.17) i (6.1.18) można traktować jako opis tego modelu przyjęty w matematyce stosowanej.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Obliczyć:

$$\text{a) } \mathcal{L}[e^{2t} + 2\delta(t)], \quad \text{b) } \mathcal{L}[t \cdot I(t) - \delta(t)], \quad \text{c) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s^2}{s-1}\right], \quad \text{d) } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-1}{s^2+4}\right].$$

2. Niech a będzie ustaloną stałą. Wykazać, że każde rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + b^2y = 0$ może być zapisane w postaci

$$y(t) = [c_1 + c_2(t-a)]e^{-b(t-a)}, \quad \text{gdzie } C_1, C_2 - \text{dowolne stałe.}$$

3. Rozwiązać problem początkowy $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 5y = f(t), \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$, gdzie $f(t)$ jest impulsem siły, która działa na nieskończenie krótkim przedziale $1 \leq t \leq 1 + \varepsilon$ i $\int_1^{1+\varepsilon} f(t) dt = 2, \quad \varepsilon > 0$.

4. a) Rozwiązać problem początkowy $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = f(t), \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$, gdzie $f(t)$ jest funkcją impulsową, która działa na nieskończenie krótkim przedziale $2 \leq t \leq 2 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$ oraz $\int_2^{2+\varepsilon} f(t) dt = -1$.

b) Rozwiązać problem początkowy $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$ na przedziale $0 \leq t \leq 2$. Wyznaczyć $y_0 = y(2)$ i $y_1 = y'(2)$. Następnie rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(2) = y_0, \quad y'(2) = y_1 - 1, \quad 2 \leq t < +\infty.$$

Porównać to rozwiązanie z rozwiązaniem z części a).

W przykładach 5÷7 rozwiązać zadane zagadnienia początkowe.

$$5. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = \sin t + \delta(t - \pi); \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

$$6. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2); \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

$$7. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} + 3\delta(t-3); \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3$$

Przekształcenie Fouriera

Niektórzy autorzy najpierw omawiają transformację Fouriera, a dopiero następnie, jako jej rozszerzenie, transformację Laplace'a. Można jednak stanąć na innym stanowisku i traktować transformację Fouriera jako szczególny przypadek transformacji Laplace'a, nie wymagający uprzedniego omawiania.

Przekształcenie Laplace'a, na którym oparty jest rachunek operatorowy, jest ściśle związane z przekształceniem Fouriera. Związek ten jest również istotny w zastosowaniach, gdyż metody widmowe stosowane np. w teorii obwodów liniowych i oparte na przekształceniach Fouriera są nierozdzielnie związane z metodami operatorowymi i stanowią w wielu przypadkach jedną całość.

Transformaty Fouriera mają wyraźny sens fizyczny podobnie jak funkcje, z których powstały. Możemy sobie wyobrazić i zmierzyć przebiegi i widma zjawisk elektrycznych, optycznych lub akustycznych. Widma są transformatami Fouriera przebiegów fizycznych i odwrotnie.

Stosując przekształcenia Fouriera można wyjaśnić np. działanie detektora modulacji częstotliwości w układach elektronicznych, czy też zasadę działania mikroskopu o kontraście fazowym [2].

7.1. Wzór całkowy Fouriera

Z rozważań dotyczących szeregów trygonometrycznych Fouriera wiadomo, że każda funkcja okresowa spełniająca warunki Dirichleta ma swoją charakterystykę widmową w postaci widma amplitudy i widma fazy. Ze względu na występowanie tak zwanych prążków na ich wykresach noszą one nazwę widm prążkowych.

Nasuwa się pytanie, czy funkcji nieokresowej, spełniającej pewne określone warunki można również przyporządkować charakterystykę widmową. Jak się przekonamy jest to możliwe lecz wówczas widma w pewnych przedziałach są funkcjami ciągłymi.

Niech będzie dana funkcja $f(t)$ zmiennej rzeczywistej określona w przedziale $(-\infty, +\infty)$:

- 1° spełniająca pierwszy i drugi warunek Dirichleta w każdym ograniczonym przedziale $\langle -l, l \rangle$, $l > 0$ (definicja 1.1.2);
- 2° bezwzględnie całkowna w przedziale $(-\infty, +\infty)$, to znaczy, że całka modułu funkcji w przedziale $(-\infty, +\infty)$ jest zbieżna

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad (7.1.1)$$

Uwaga 7.1.1. Wszystkie występujące w tym rozdziale całki niewłaściwe od $-\infty$ do $+\infty$ należy rozumieć w *sensie wartości głównej*, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (7.1.2)$$

Przy powyższych założeniach, funkcja $f(t)$ jest rozwijalna w szereg Fouriera w każdym przedziale $\langle -l, l \rangle$ przy dowolnym $l > 0$, zbieżnym do niej, tj.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \quad (7.1.3)$$

gdzie współczynniki a_k, b_k dane są wzorami:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) du, \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos k\omega u du, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin k\omega u du, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

przy czym przyjęliśmy, że $\omega = \frac{\pi}{l}$.

Podstawiając wyrażenia dla a_k i b_k dane wzorami (7.1.4) do tożsamości (7.1.3) i wykonując odpowiednie przekształcenia oraz korzystając ze wzorów na cosinus różnicy dwóch kątów otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(u) [\cos k\omega t \cos k\omega u + \sin k\omega t \sin k\omega u] du = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(u) \cos k\omega(t-u) du \end{aligned} \quad (1)$$

Ustalmy teraz wartość t i przejdźmy do granicy przy $l \rightarrow +\infty$. Wobec założenia o bezwzględnej całkowalności funkcji $f(t)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ mamy

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) du = 0,$$

oraz przyjmując oznaczenia $\omega_k = k \cdot \omega$, $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \omega = \frac{\pi}{l}$ możemy prawą stronę (1) zapisać w postaci

$$f(t) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(u) \cos \omega_k (t-u) du \right] \Delta\omega_k \quad (7.1.5)$$

Dla $l \rightarrow +\infty$ mamy, że $\Delta\omega_k \rightarrow 0$ i jednocześnie przedział $\langle -l, l \rangle$ przechodzi w przedział $(-\infty, +\infty)$, a więc przy $l \rightarrow +\infty$ otrzymujemy następujący wzór:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega (t-u) du \quad (7.1.6)$$

U w a g a . Przeprowadzone rachunki mają jedynie charakter wyjaśniający i pokazują genezę wzoru (7.1.6).

Twierdzenie 7.1.1 (twierdzenie Fouriera). *Jeśli funkcja $f(t)$ określona dla $t \in R$ spełnia warunki Dirichleta na każdym przedziale ograniczonym (a, b) oraz całka niewłaściwa (7.1.1) jest zbieżna, to funkcję $f(t)$ można dla każdego $t \in R$, przedstawić za pomocą wzoru*

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega (t-u) du \quad (7.1.6)$$

Wzór (7.1.6) nazywamy *wzorem całkowym Fouriera funkcji $f(t)$* , a całkę występującą po prawej stronie wzoru (7.1.6) nazywamy *całką Fouriera*. W pierwszym całkowaniu zmienną jest u , natomiast t i ω są parametrami. W drugim całkowaniu zmienną jest ω , zaś parametrem t .

Różne postacie wzoru całkowego Fouriera

Przekształcimy teraz wzór (7.1.6) do postaci wygodnej w zastosowaniach. Uwzględniając w całce wewnętrznej prawej strony (7.1.6) wzór na cosinus różnicy dwóch kątów otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega (t-u) du = \cos \omega t \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega u du + \sin \omega t \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega u du .$$

Wniosek 7.1.1.

Przy założeniach twierdzenia Fouriera, dla każdego $t \in R$ wzór całkowy Fouriera (7.1.6) przyjmie w postaci

$$f(t) = \int_0^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (7.1.7)$$

przy czym funkcje $a(\omega)$ i $b(\omega)$ określone są wzorami

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega u \, du, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega u \, du \quad (7.1.8)$$

Całkę po prawej stronie wzoru (7.1.7) nazywamy również *całką Fouriera funkcji $f(t)$* .

Uwaga 7.1.2. Szereg trygonometryczny Fouriera (7.1.3) o współczynnikach rozwinięcia danych wzorami (7.1.4) i całka Fouriera (7.1.7) stanowią klasyczny aparat matematyczny, stosowany do analizy przebiegów elektrycznych. Wzór (7.1.7) spełnia taką samą rolę dla funkcji $f(t)$ nieokresowej jak wzór (7.1.3) dla funkcji okresowej i ma również podobną budowę, z tym że znak sumy zastąpiony jest znakiem całki. Prawa strona wzoru (7.1.7) jest odpowiednikiem szeregu Fouriera (7.1.3) funkcji $f(t)$ w przedziale ograniczonym. Zamiast współczynników Fouriera a_k i b_k , określonych wzorami (7.1.4), zależnych od k całkowitych i tworzących tak zwane *widmo punktowe*, mamy we wzorze (7.1.7) funkcje ciągłe $a(\omega)$ i $b(\omega)$, zależne od argumentu ω .

Definicja 7.1.1. Funkcje $a(\omega)$ i $b(\omega)$ określone wzorami (7.1.8) nazywamy *współczynnikami widma ciągłego* lub *widmem rzeczywistym* funkcji $f(t)$.

Rozwinięcie funkcji $f(t)$ w szereg Fouriera można traktować jako przedstawienie ruchu okresowego w postaci sumy ruchów harmonicznycch o częstotliwościach całkowitych. Całkę Fouriera funkcji $f(t)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ postaci (7.1.6) lub (7.1.7) można traktować jako rozkład procesu opisanego funkcją $f(t)$ na drgania harmoniczne o częstotliwości ω zmieniającej się w sposób ciągły.

Omawiając rozwijanie funkcji okresowych w szereg Fouriera zwraca się uwagę na fakt, że każdej funkcji okresowej i spełniającej warunki Dirichleta przyporządkowane jest w sposób jednoznaczny widmo tej funkcji. W przypadku funkcji nieokresowej i bezwzględnie całkowalnej w przedziale $(-\infty, +\infty)$ sytuacja jest podobna.

Dokonując przekształcenia analogicznego, jak to czyniono w przypadku szeregu Fouriera (zob. [13, 18, 25]), możemy wyrażenie podcałkowe we wzorze (7.1.7) przedstawić w postaci

$$a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t = \frac{1}{\pi} A(\omega) \cos [\omega t + \theta(\omega)],$$

gdzie

$$A(\omega) = \pi \cdot \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (7.1.9)$$

oraz

$$\cos \theta(\omega) = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}}, \quad \sin \theta(\omega) = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}} \quad (7.1.10)$$

i wtedy wzór (7.1.7) przyjmuje postać

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \theta(\omega)) d\omega \quad (7.1.11)$$

Definicja 7.1.2. Funkcję $A: R \rightarrow R$ określoną wzorem (7.1.9) nazywamy *widmem amplitudowym funkcji $f(t)$* .

Funkcja $A(\omega)$ jest funkcją *parzystą*, tj. $A(-\omega) = A(\omega)$.

Definicja 7.1.3. Funkcję

$$\theta : \{\omega \in R : A(\omega) > 0\} \rightarrow \langle -\pi, \pi \rangle \quad (7.1.12)$$

spełniającą układ równań (7.1.10) nazywamy *widmem fazowym funkcji $f(t)$* .

Funkcja $\theta(\omega)$ jest funkcją *nieparzystą*, tj. $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$.

Interpretacja fizyczna wzoru (7.1.11). W wyniku przedstawienia funkcji (pewnego sygnału) $f(t)$ całką Fouriera postaci (7.1.11) zostaje określone pewne odwzorowanie tej funkcji w funkcje $A(\omega)$ i $\theta(\omega)$ reprezentujące $f(t)$, tj. całkowita informacja o funkcji $f(t)$ jest zawarta w odpowiednich funkcjach $A(\omega)$ i $\theta(\omega)$. Wzór (7.1.11) interpretujemy następująco: funkcję nieokreśloną $f(t)$ można przedstawić jako wynik całkowania (sumowania) nieskończenie wielu przebiegów sinusoidalnych (składowych harmonicznnych) postaci

$$\frac{1}{\pi} A(\omega) \cdot \cos [\omega t + \theta(\omega)] \quad (7.1.13)$$

po wartościach ω zmieniających się w sposób ciągły od 0 do $+\infty$, gdzie wyrażenie $\frac{1}{\pi} A(\omega)$ określa *amplitudę*, a funkcja $\theta(\omega)$ jest *fazą* tych przebiegów [2, 13].

Ważną rolę we wzorach całkowych odgrywa również własność symetrii, gdyż na tych własnościach opierają się dowody znikania niektórych całek bez

potrzeby ich efektywnego obliczania. W szczególności, jeżeli $f(t)$ jest funkcją parzystą, to ze wzorów (7.1.8) mamy

$$b(\omega) = 0, \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos \omega u \, du \quad (7.1.14)$$

i wzór całkowy Fouriera (7.1.7) dla funkcji parzystej przyjmuje postać:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad t \in R \quad (7.1.15)$$

Wzór (7.1.15) nazywamy *cosinusowym wzorem całkowym Fouriera* funkcji $f(t)$ na przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$.

Podobnie, jeżeli $f(t)$ jest funkcją nieparzystą, to

$$a(\omega) = 0, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \sin \omega u \, du \quad (7.1.16)$$

i wzór całkowy Fouriera (7.1.7) dla funkcji nieparzystej przyjmie postać

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t \, d\omega, \quad t \in R \quad (7.1.17)$$

Wzór (7.1.17) nazywamy *sinusowym wzorem całkowym Fouriera* funkcji $f(t)$ w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$. Całki stojące po prawej stronie wzorów (7.1.15) i (7.1.17) nazywamy *całkami Fouriera funkcji $f(t)$* w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$.

Przykład 7.1. Dana jest funkcja

$$f(t) = 2 [I(t+1) - I(t)], \quad t \in R \quad (1)$$

a) przedstawić funkcję $f(t)$ za pomocą całki Fouriera i na tej podstawie obliczyć

$$\text{całkę niewłaściwą } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad (2)$$

b) wyznaczyć widmo amplitudowe $A(\omega)$ i wykazać, że jest ono ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych, oraz naszkicować jego wykres,

c) wyznaczyć widmo fazowe $\theta(\omega)$ i naszkicować jego wykres.

R o z w i ą z a n i e . a) Funkcję (1) możemy zapisać w postaci

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \int_{-1}^0 2 dt = 2$, więc jest ona zbieżna.

Funkcja (1) spełnia warunki Dirichleta, więc na podstawie wniosku 7.1.1 funkcję $f(t)$ można przedstawić za pomocą całki Fouriera postaci (7.1.7). Korzystając ze wzorów (7.1.8) wyznaczamy funkcje $a(\omega)$ i $b(\omega)$. Mamy zatem

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \cos \omega u \, du = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega} [\sin \omega u]_{u=-1}^{u=0} = \begin{cases} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} & , \quad \omega \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} & , \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \sin \omega u \, du = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \right) [\cos \omega u]_{u=-1}^{u=0} = \begin{cases} \frac{2 \cos \omega - 1}{\pi \omega} & , \quad \omega \neq 0 \\ 0 & , \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje $a(\omega)$ i $b(\omega)$ są ciągłe w punkcie $\omega = 0$. Stąd, na podstawie wzoru (7.1.7) mamy następujące przedstawienie funkcji $f(t)$ za pomocą całki Fouriera

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos \omega - 1}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega, \quad t \in R \quad (5)$$

Wyznamy teraz całkę niewłaściwą (2). W tym celu do obu stron wzoru (5) podstawiamy wartość $t = 0$ i uwzględniając w punkcie nieciągłości $t = 0$

wartość funkcji $f(0) = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-)) = 1$ otrzymamy

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega,$$

a stąd zamieniając zmienną ω na zmienną x , otrzymujemy wartość całki niewłaściwej (2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

b) Widmo amplitudowe funkcji $f(t)$ wyznaczamy ze wzoru (7.1.9), tj.

$$A(\omega) = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (7)$$

Korzystając z zależności (3) i (4) obliczmy (dla $\omega \neq 0$)

$$a^2(\omega) + b^2(\omega) = \frac{4 \sin^2 \omega}{\pi^2 \omega^2} + \frac{4 (\cos \omega - 1)^2}{\pi^2 \omega^2} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2}.$$

Po podstawieniu powyższego wyniku do (7) mamy

$$A(\omega) = \pi \sqrt{\frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2}} = 4 \left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right|, \quad \text{dla } \omega \neq 0 \quad (8)$$

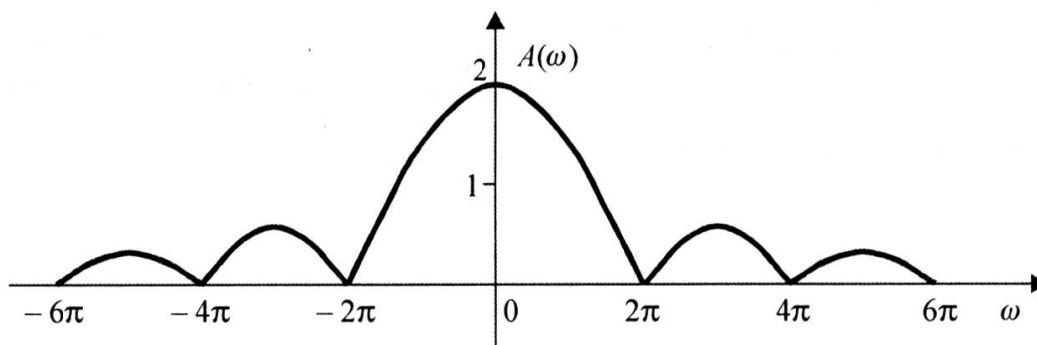
oraz dla $\omega = 0$ wartość funkcji $A(0) = 2$. Aby wykazać, że $A(\omega)$ jest funkcją ciągłą, obliczamy jej granicę w punkcie $\omega = 0$. Mamy więc

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 4 \left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right| = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2 \left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right| = 2.$$

Zatem $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 2 = A(0)$, a to oznacza, że widmo amplitudowe $A(\omega)$ jest funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej. Wyznamy teraz miejsca zerowe widma amplitudowego $A(\omega)$. Mamy więc

$$A(\omega) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\omega}{2} = 0, \quad \text{a stąd } \omega = 2k\pi \text{ dla } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Na rysunku 7.1 przedstawiono wykres widma amplitudowego $A(\omega)$ funkcji (1).



Rys. 7.1. Widmo amplitudowe funkcji $f(t) = 2[I(t+1) - I(t)]$

c) Wyznamy widmo fazowe funkcji $f(t)$. Ze wzorów (7.1.10) dla $\omega = 0$ otrzymujemy:

$$\cos \theta(0) = 1 \quad \text{i} \quad \sin \theta(0) = 0, \quad \text{więc } \theta(0) = 0 \quad (9)$$

Z definicji widma fazowego (patrz wzór 7.1.12) oraz wobec założenia $A(\omega) > 0$ wynika, że dziedziną funkcji $\theta(\omega)$ jest zbiór D_θ :

$$D_\theta = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \neq 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Ponieważ funkcja $\theta(\omega)$ spełnia układ równań (7.1.10), to uwzględniając wzory (3), (4) i (8) oraz znane tożsamości trygonometryczne funkcji kąta podwojonego: $\sin \omega = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}$, $\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \omega)$ otrzymamy

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta(\omega) = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}}{\left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right|} = \cos \frac{\omega}{2} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right) \\ \sin \theta(\omega) = \frac{-\frac{2}{4} \cdot \frac{\cos \omega - 1}{\omega}}{\left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right|} = \sin \frac{\omega}{2} \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} \right) \end{array} \right. \quad (10)$$

gdzie funkcja sgn określona jest wzorem (1.1.5). Z uwagi na nieparzystość widma fazowego $\theta(\omega)$ wystarczy je wyznaczyć dla $\omega > 0$. Z układu (10) mamy

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta(\omega) = \cos \frac{\omega}{2} \\ \sin \theta(\omega) = \sin \frac{\omega}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dla } 4\pi k < \omega < 2\pi + 4\pi k \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (11)$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta(\omega) = -\cos \frac{\omega}{2} \\ \sin \theta(\omega) = -\sin \frac{\omega}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dla } 2\pi + 4\pi k < \omega < 4\pi + 4\pi k \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (12)$$

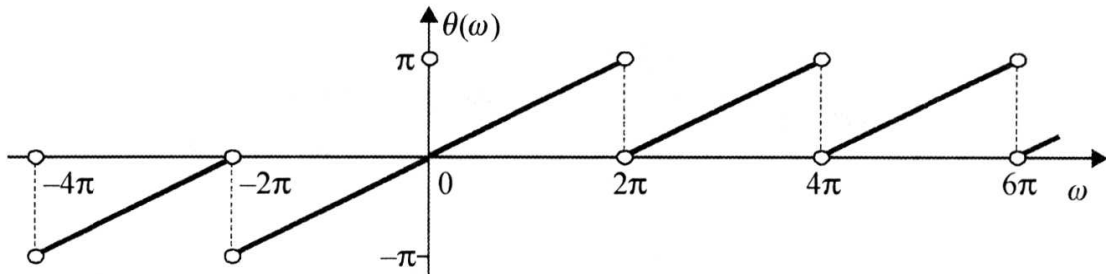
Korzystając ze wzorów redukcyjnych układ (12) zapiszemy w postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta(\omega) = \cos \left(\frac{\omega}{2} - \pi \right) \\ \sin \theta(\omega) = \sin \left(\frac{\omega}{2} - \pi \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dla } 2\pi + 4\pi k < \omega < 4\pi + 4\pi k \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (13)$$

Zatem ze wzorów (11) i (13) oraz z faktu, że $|\theta(\omega)| \leq \pi$ mamy ostatecznie

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\omega) = \frac{\omega}{2} - 2k\pi \quad \text{dla } 4\pi k < \omega < 2\pi + 4\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \theta(\omega) = \frac{\omega}{2} - \pi - 2k\pi \quad \text{dla } 2\pi + 4\pi k < \omega < 4\pi + 4\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (14)$$

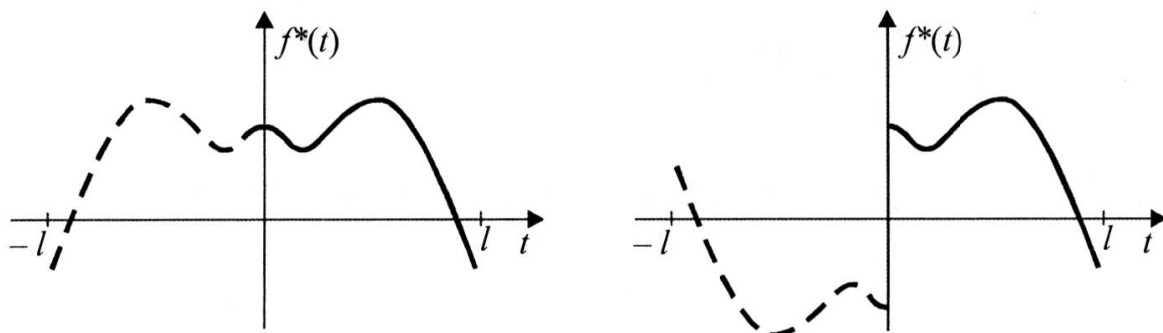
Łatwo sprawdzić, że dla każdego $\omega > 0$ i $\omega \in D_\theta$ funkcja $\theta(\omega) \in (0, \pi)$. Korzystając z nieparzystości widma $\theta(\omega)$ poprzez symetrię wykresu względem punktu $(0, 0)$ otrzymamy wykres widma fazowego (rys. 7.2).



Rys. 7.2. Wykres widma fazowego funkcji $f(t) = 2[I(t+1) - I(t)]$

■

Niekiedy zachodzi potrzeba przedstawienia za pomocą całki Fouriera takiej funkcji, która jest określona tylko dla dodatnich wartości argumentu t . Zakładając, że funkcja $f(t)$ jest bezwzględnie całkowna w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ oraz, że spełnia ona warunki Dirichleta w każdym przedziale (a, b) , $0 \leq a < b$, to można ją w dowolny sposób przedłużyć na sąsiedni przedział $(-\infty, 0)$, a tym samym można ją przedstawić za pomocą różnych całek Fouriera. Zwykle funkcję taką przedstawiamy za pomocą całek Fouriera według wzoru (7.1.15), zawierającym same cosinusy albo według wzoru (7.1.17), zawierającym tylko same sinusy. Wzór całkowy zawierający tylko same cosinusy otrzymujemy przy parzystym przedłużeniu danej funkcji na sąsiadujący z lewej strony przedział $(-\infty, 0)$, a wzór zawierający same sinusy – przy przedłużeniu nieparzystym. W pierwszym przypadku wykres danej funkcji przedłuża się na przedział $(-\infty, 0)$ symetrycznie względem osi rzędnych, a w drugim przypadku – symetrycznie względem początku układu współrzędnych (rys. 7.3).



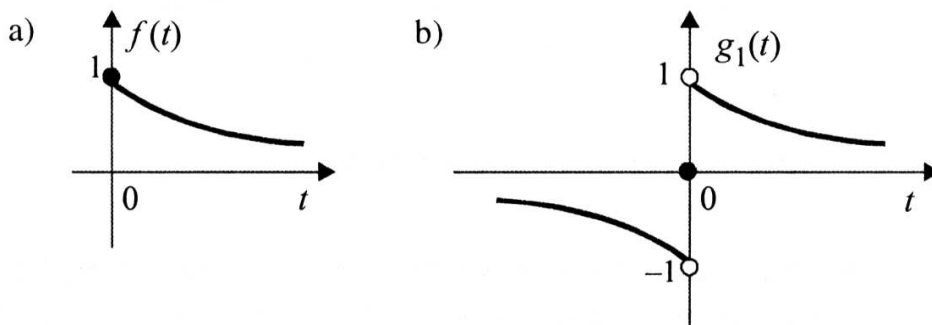
Rys. 7.3. a) Przedłużenie parzyste, b) przedłużenie nieparzyste

Przykład 7.2. Przedstawimy funkcję $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$ za pomocą: a) sinusowego wzoru całkowego Fouriera, b) cosinusowego wzoru całkowego.

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $f(t)$ określona jest na przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ i spełnia na tym przedziale założenia tw. Fouriera. Można więc tę funkcję przedstawić w różny sposób za pomocą całek Fouriera.

a) Funkcję $f(t) = e^{-2t}$, $t \geq 0$ przedłużymy w sposób nieparzysty na przedział $(-\infty, +\infty)$ określając funkcję pomocniczą (rys. 7.4)

$$g_1(t) = \begin{cases} -e^{2t} & \text{dla } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases} .$$



Rys. 7.4. Wykres funkcji a) $f(t) = e^{-2t}$ dla $t \geq 0$, b) przedłużenie nieparzyste funkcji $f(t)$

Funkcja $g_1(t)$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia Fouriera i jest funkcją nieparzystą, zatem $a(\omega) = 0$ i przedstawiamy ją za pomocą całki Fouriera zawierającej same sinusy, tj. ze wzoru (7.1.17)

$$e^{-2t} = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad (1)$$

Ze wzoru (7.1.16) wyznaczamy współczynniki

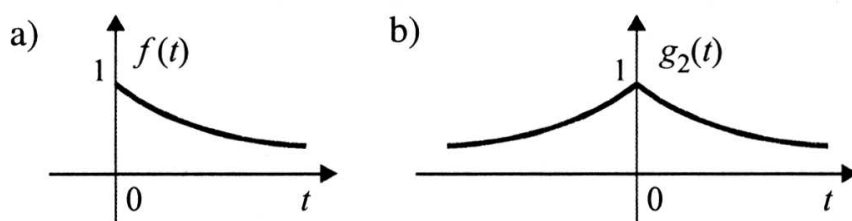
$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g_1(u) \sin \omega u \, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2u} \sin \omega u \, du = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-e^{-2u} (\cos \omega u + 2 \sin \omega u)}{4 + \omega^2} \right]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{4 + \omega^2} . \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane współczynniki $b(\omega)$ do (1) mamy

$$e^{-2t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{4 + \omega^2} d\omega, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

b) Przy parzystym przedłużeniu funkcji $f(t) = e^{-2t}$ na sąsiedni przedział $(-\infty, 0)$ określamy funkcję pomocniczą (rys. 7.5)

$$g_2(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{dla } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}.$$



Rys. 7.5. Przedłużenie parzyste funkcji $f(t)$

Funkcja $g_2(t)$ spełnia założenia twierdzenia Fouriera, jest funkcją parzystą, zatem $b(\omega) = 0$ i otrzymamy przedstawienie funkcji $f(t)$ za pomocą całki Fouriera zawierającej same cosinusy, tj. ze wzoru (7.1.15)

$$e^{-2t} = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (3)$$

Ze wzoru (7.1.14) obliczamy

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2u} \cos \omega u du = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-2u} (\omega \sin \omega u - 2 \cos \omega u)}{4 + \omega^2} \right]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{4 + \omega^2} = \frac{4}{\pi (4 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymany wynik do wzoru (3) ostatecznie otrzymamy

$$e^{-2t} = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{4 + \omega^2} d\omega, \quad t \geq 0.$$

■

7.2. Postać zespolona wzoru całkowego Fouriera

Przekształcając wzór (7.1.6) można wyprowadzić (wygodną w wielu przypadkach) całkę Fouriera funkcji $f(t)$ w postaci zespolonej. Ponieważ wewnętrzna całka niewłaściwa we wzorze (7.1.6) jest funkcją parzystą zmiennej ω , więc możemy zapisać ten wzór w równoważnej postaci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega (t-u) du \quad (7.2.1)$$

Zauważmy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega (t-u) du$ jest funkcją nieparzystą zmiennej ω , zatem następująca całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega (t-u) du \right] d\omega = 0 \quad (7.2.2)$$

Dodając do prawej strony równości (7.2.1) równość (7.2.2) pomnożoną przez czynnik urojony i oraz stosując wzór Eulera do wyrażenia

$$\cos \omega (t-u) + i \sin \omega (t-u) = e^{i\omega(t-u)} \quad (7.2.3)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega (t-u) du + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega (t-u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(t-u)} du, \quad t \in R \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Wzór (7.2.4) piszemy zazwyczaj w równoważnej postaci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du, \quad t \in R \quad (7.2.5)$$

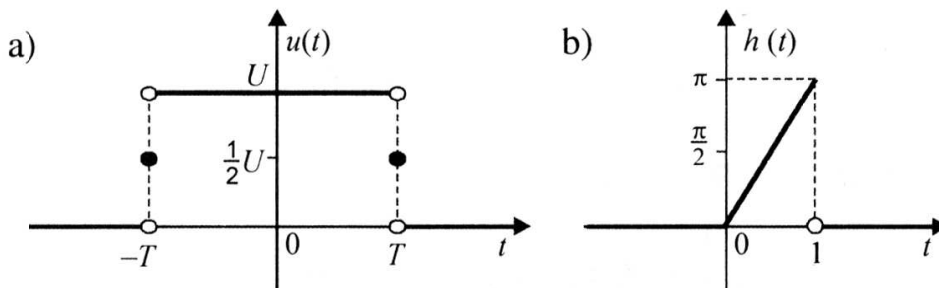
Wzór (7.2.5) nazywamy *wzorem całkowym Fouriera w postaci zespolonej*, a prawą stronę tego wzoru *zespoloną całką Fouriera funkcji $f(t)$* . Wzór (7.2.5) wyraża związek między wartością funkcji $f(t)$ w dowolnie obranym punkcie t , a wartościami tej funkcji we wszystkich punktach przedziału $(-\infty, +\infty)$.

Przykład 7.3. Napisać zespolony wzór całkowy Fouriera dla funkcji

$$\text{a) } u(t) = \begin{cases} U & \text{dla } |t| < T \\ \frac{1}{2}U & \text{dla } |t| = T \\ 0 & \text{dla } |t| > T \end{cases} \quad \text{gdzie } U > 0, T > 0 \quad (\text{rys. 7.6a})$$

(tzw. pojedynczy prostokątny impuls napięcia),

$$\text{b) } h(t) = \begin{cases} \pi t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > 1 \end{cases}, \quad (\text{rys. 7.6b}).$$



Rys. 7.6. Ilustracja a) do przykładu 7.3 a, b) do przykładu 7.3 b

R o z w i ą z a n i e . a) Funkcja $u(t)$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia Fouriera, a więc można ją przedstawić za pomocą wzoru całkowego Fouriera. Na podstawie wzoru (7.2.5), zastosowanego do funkcji $u(t)$ (w całce wewnętrznej wzoru (7.2.5) zmienną całkowania u zamieniamy na zmienną τ) i po odpowiednich obliczeniach otrzymamy

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T}^{+T} U e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{U}{i\omega} e^{-i\omega\tau} \right]_{-T}^{+T} e^{i\omega t} d\omega = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i\omega T} - e^{-i\omega T} \right) \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu wzorów Eulera ostatecznie mamy

$$u(t) = \frac{U}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in R \quad (1)$$

Jeśli podstawimy we wzorze (1) do obu stron wartości $t = 0$ i $T = 1$, to otrzymamy

$$u(0) = \frac{U}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$$

i uwzględniając, że $u(0) = \mathcal{U}$, wyznaczamy wartość całki niewłaściwej

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \pi \quad (2)$$

U w a g a . Wyznaczenie wartości całki niewłaściwej (2) w inny sposób jest znacznie trudniejsze. Z tego przykładu oraz z przykładu 7.1 wynika, że wzory całkowe Fouriera można z powodzeniem stosować do wyznaczania wartości niektórych całek niewłaściwych.

b) Na podstawie wzoru całkowego Fouriera (7.2.5) danego w postaci zespolonej funkcję (b) przedstawimy całką

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\omega u} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_0^1 u e^{-i\omega u} du \quad (3)$$

Całkując przez części względem zmiennej u obliczamy całkę wewnętrzną

$$\int_0^1 u e^{-i\omega u} du = \left[\frac{u e^{-i\omega u}}{\omega} - i + \frac{e^{-i\omega u}}{\omega^2} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{e^{-i\omega} (1 + i\omega) - 1}{\omega^2}$$

i po uwzględnieniu otrzymanego wyniku w zależności (3) otrzymamy

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega} (1 + i\omega) - 1}{\omega^2} e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in R.$$

U w a g a . Funkcję (b) można przedstawić również za pomocą całki Fouriera w zwykłej postaci (7.1.7), gdzie współczynniki $a(\omega)$ i $b(\omega)$ wyznaczymy ze wzorów (7.1.8). Otrzymane postacie różnią się tylko formalnie (co łatwo sprawdzić) i można je przekształcać jedną w drugą, korzystając ze wzorów Eulera.

■

7.3. Proste i odwrotne przekształcenie Fouriera

Zakładamy, że funkcja $f(t)$ spełnia założenia twierdzenia Fouriera. Rozważmy wzór całkowy Fouriera w postaci zespolonej (7.2.5). Całka wewnętrzna określa pewną funkcję zmiennej urojonej $i\omega$. Oznaczając tę funkcję literą F możemy równość (7.2.5) przedstawić w postaci pary wzorów

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du, \quad \omega \in R \quad (7.3.1)$$

oraz
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in R \quad (7.3.2)$$

Wzory (7.3.1) i (7.3.2) określają parę przekształceń Fouriera, a zmienne t i ω są w tych wzorach zmiennymi rzeczywistymi.

Definicja 7.3.1. Przekształcenie dane wzorem (7.3.1), przyporządkowujące funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t funkcję zespoloną $F(i\omega)$ zmiennej rzeczywistej ω nazywamy *prostym przekształceniem Fouriera funkcji $f(t)$* i oznaczamy symbolem \mathcal{F} lub w skrócie nazywamy \mathcal{F} -przekształceniem.

Definicja 7.3.2. Funkcję $F(i\omega)$ związaną z funkcją $f(t)$ wzorem (7.3.1) nazywamy *transformatą* lub *\mathcal{F} -transformatą Fouriera funkcji $f(t)$* i zapisujemy symbolicznie

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega) \quad (7.3.3)$$

Definicja 7.3.3. Przekształcenie dane wzorem (7.3.2), pozwalające wyznaczyć funkcję $f(t)$, gdy znana jest jej \mathcal{F} -transformata $F(i\omega)$, nazywamy *odwrotnym przekształceniem Fouriera* i oznaczamy symbolem \mathcal{F}^{-1} lub nazywamy w skrócie \mathcal{F}^{-1} -przekształceniem.

Definicja 7.3.4. Funkcję $f(t)$ nazywamy *odwrotną transformatą Fouriera* lub *oryginałem* funkcji $F(i\omega)$ i zapisujemy symbolicznie

$$\mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)] = f(t) \quad (7.3.4)$$

Przekształcenia \mathcal{F} i \mathcal{F}^{-1} stanowią parę przekształceń wzajemnie odwrotnych, tzn.:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f(t)]) = f(t) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)]) = F(i\omega) \quad (7.3.5)$$

Funkcja $f(t)$ ma transformatę Fouriera określoną wzorem (7.3.1) gdy całka występująca w tym wzorze jest zbieżna. Mówimy wtedy, że funkcja $f(t)$ jest *\mathcal{F} -transformowalna* (krótko: *transformowalna*).

Uwaga 7.3.1. Funkcjami \mathcal{F} -transformowalnymi są wszystkie funkcje względnie całkowne w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Funkcje okresowe, a więc funkcje, np. $\sin t$, $\cos t$ nie mają transformat Fouriera, ponieważ ich całki niewłaściwe są rozbieżne dla wszystkich ω . Również funkcje: 1 , t , e^t , e^{-t} , wielomiany, funkcje hiperboliczne nie są \mathcal{F} -transformowalne.

Uwaga 7.3.2. Przekształcenie Fouriera można stosować do funkcji określonych w przedziałach ograniczonych albo do funkcji, które w nieskończoności (tzn. przy $t \rightarrow +\infty$) dążą dostatecznie szybko do zera, tak aby całka we wzorze (7.3.1) była zbieżna. W wielu zagadnieniach praktycznych te warunki są spełnione.

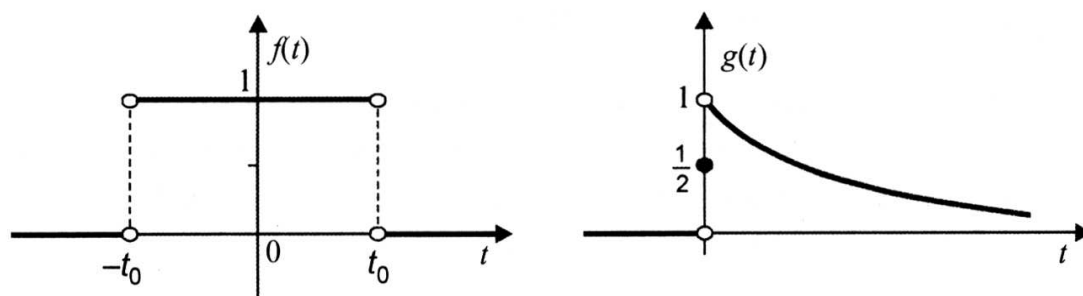
Rozszerzenie zakresu funkcji podlegających \mathcal{F} -przekształceniu można uzyskać przez zastosowanie któregoś ze znanych w matematyce sposobów uzbieżniania rozbieżnej całki, tzn. w naszym przypadku całki (7.3.1) [13,18].

Przykład 7.4. Wyznamy \mathcal{F} -transformatę funkcji

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < t_0 \\ 0 & \text{dla } |t| > t_0 \end{cases}, \quad \text{b) } g(t) = I(t) e^{-at}, \quad a > 0.$$

R o z w i ą z a n i e . a) Funkcja $f(t)$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia 7.1.1, więc na podstawie wzoru (7.3.1) wyznaczymy transformatę funkcji $f(t)$. Uwzględniając postać funkcji (a) we wzorach (7.3.1) i (7.3.3) mamy

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-i\omega t} dt = \frac{-1}{i\omega} \cdot e^{-i\omega t} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega t_0} - e^{i\omega t_0}).$$



Rys. 7.7. Wykresy funkcji z przykładu 7.4

Następnie korzystamy ze wzorów Eulera i po algebraicznych przekształceniach otrzymamy

$$F(i\omega) = 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega}, \quad \omega \in R \quad (7.3.6)$$

b) Funkcja $g(t) = I(t) e^{-at}$, $a > 0$ spełnia wszystkie założenia tw. 7.1.1. Na podstawie wzorów (7.3.1) i (7.3.3) mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{a+i\omega}, \left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| e^{-(a+i\omega)T} \right| = 0, \text{ bo } \left| e^{-i\omega T} \right| = 1 \right). \end{aligned}$$

Zatem
$$G(i\omega) = \mathcal{F}[I(t) e^{-at}] = \frac{1}{a+i\omega}, \quad \omega \in R \quad (7.3.7)$$

U w a g a . Obliczając \mathcal{F} -transformatę według wzoru (7.3.1) w wyrażeniu podcałkowym zamiast zmiennej u przyjęliśmy zmienną t , co nie ma wpływu na wynik. ■

7.4. Widmo funkcji. Widmo amplitudowe i widmo fazowe

Wzór Fouriera (7.3.2) przedstawia funkcję $f(t)$ jako wypadkową nieskończenie wielu *harmonik zespolonych* w postaci funkcji

$$P(i\omega) = F(i\omega) e^{i\omega t}, \quad \omega \in R \quad (7.4.1)$$

(por. wzory 7.1.11 oraz 7.1.13).

Amplituda i faza każdej z tych harmonik są określone przez transformatę $F(i\omega)$.

Definicja 7.4.1. Transformatę Fouriera $F(i\omega)$ określoną wzorem (7.3.1) nazywamy w zastosowaniach *widmem zespolonym funkcji nieokresowej $f(t)$* lub *charakterystyką widmową* albo *gęstością widmową*, a część rzeczywistą i część urojoną tej funkcji składowymi widma $F(i\omega)$.

Aby znaleźć analogię między charakterystyką widmową funkcji nieokresowej a charakterystyką widmową funkcji okresowej przedstawimy funkcję $F(i\omega)$ w zależności od współczynników $a(\omega)$ i $b(\omega)$, które są określone wzorami (7.1.8). Z porównania wzorów (7.3.1) oraz (7.1.8) mamy następującą zależność

$$F(i\omega) = \pi [a(\omega) - ib(\omega)] \quad (7.4.2)$$

z której wynika, że jeśli $f(t)$ jest funkcją rzeczywistą, to funkcja $F(i\omega)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej ω , gdzie

$$\operatorname{Re} [F(i\omega)] = \pi a(\omega), \quad \operatorname{Im} [F(i\omega)] = -\pi b(\omega).$$

Jeżeli funkcję zespoloną $F(i\omega)$ przedstawimy w postaci wykładniczej

$$F(i\omega) = |F(i\omega)| \cdot e^{i\theta(\omega)} \quad (7.4.3)$$

to moduł $|F(i\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}[F(i\omega)])^2 + (\operatorname{Im}[F(i\omega)])^2}$ zgodnie z (7.4.2) określamy wzorem

$$|F(i\omega)| = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (7.4.4)$$

a argument $\arg[F(i\omega)] = \theta(\omega)$ spełnia następujący układ równań

$$\begin{cases} \cos \theta(\omega) = \frac{\operatorname{Re}[F(i\omega)]}{|F(i\omega)|} = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}} \\ \sin \theta(\omega) = \frac{\operatorname{Im}[F(i\omega)]}{|F(i\omega)|} = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}} \end{cases} \quad (7.4.5)$$

Porównując otrzymane wzory (7.4.4), (7.4.5) ze wzorami (7.1.9) i (7.1.10) mamy następujące określenia:

Definicja 7.4.2. *Widmem amplitudowym funkcji $f(t)$ nazywamy funkcję*

$$A(\omega) = |F(i\omega)| \quad (7.4.6)$$

Definicja 7.4.3. *Widmem fazowym funkcji $f(t)$ nazywamy funkcję*

$$\theta(\omega) = \arg[F(i\omega)] \quad (7.4.7)$$

Jeżeli $\cos \theta(\omega) = -1$ i $\sin \theta(\omega) = 0$, to przyjmujemy

$$\theta(\omega) = \pi \cdot \operatorname{sgn} \omega.$$

U w a g a . W teorii obwodów elektrycznych piszemy zwykle j zamiast jednostki urojonej i .

Wniosek 7.4.1.

Widmo amplitudowe i widmo fazowe funkcji nieokresowej wyrażają się wzorami podobnymi do wzorów dla funkcji okresowej. Pamiętać jednak należy, że współczynniki $a(\omega)$ i $b(\omega)$ są funkcjami ciągłymi, a tym samym funkcje $A(\omega)$ i $\theta(\omega)$ są ciągłe w swoich dziedzinach.

Wniosek 7.4.2.

Przekształcenie Fouriera \mathcal{F} polega więc na znalezieniu widma danej funkcji rzeczywistej, natomiast przekształcenie odwrotne \mathcal{F}^{-1} przyporządkowuje widmu $F(i\omega)$ odpowiadającą mu funkcję rzeczywistą – oryginał $f(t)$.

Przykład 7.5. Dla funkcji

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

wyznamy: a) widmo funkcji (transformatę Fouriera), b) widmo amplitudowe, c) widmo fazowe, d) sporządzimy wykresy $A(\omega)$ i $\theta(\omega)$.

R o z w i ą z a n i e . a) Zgodnie z uwagą 1.1.4 oryginał (1) przedstawiony jest wzorem (1.1.9) i w punkcie nieciągłości $t = 0$, według wzoru (1.1.8), przyjmuje wartość $f(0) = \frac{1}{2}$. Korzystając z wyniku przykładu 7.4b i przyjmując we wzorze (7.3.7) $a = 2$ otrzymamy transformatę Fouriera, tj. widmo funkcji $f(t) = I(t)e^{-2t}$ w postaci

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[I(t)e^{-2t}] = \frac{1}{2 + i\omega}, \quad \omega \in R \quad (2)$$

Mnożąc licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika, tj. przez wyrażenie $2 - i\omega$ otrzymamy widmo tej funkcji w postaci

$$F(i\omega) = \frac{2}{4 + \omega^2} - \frac{\omega}{4 + \omega^2} i, \quad \omega \in R \quad (3)$$

b) Zgodnie ze wzorami (7.4.4) i (7.4.6) wyznaczmy widmo amplitudowe

$$A(\omega) = |F(i\omega)| = \left| \frac{2}{4 + \omega^2} - \frac{\omega}{4 + \omega^2} i \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{4 + \omega^2} \right)^2 + \left(-\frac{\omega}{4 + \omega^2} \right)^2}$$

i po przekształceniach mamy

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}, \quad \omega \in R \quad (4)$$

Zauważmy, że dla każdego $\omega \in R$, $A(\omega)$ jest funkcją ciągłą oraz

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} = 0 \quad (5)$$

Badając pierwszą pochodną $A'(\omega) = \frac{-\omega}{(\sqrt{4+\omega^2})^3}$ otrzymujemy, że dla $\omega = 0$

funkcja $A(\omega)$ osiąga ekstremum lokalne $A_{\max} = A(0) = \frac{1}{2}$. Badając drugą po-

chodną $A''(\omega) = \frac{2\omega^2 - 4}{(\sqrt{4+\omega^2})^5}$ wyznaczamy punkty przegięcia $P_1\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,

$P_2\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ wykresu funkcji $A(\omega)$.

c) Korzystając ze wzoru (7.4.5) i (7.4.6) oraz zależności (4) wyznaczamy widmo fazowe funkcji $f(t)$ z następującego układu:

$$\begin{cases} \cos\theta(\omega) = \frac{\operatorname{Re}[F(i\omega)]}{|F(i\omega)|} = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^2}} \\ \sin\theta(\omega) = \frac{\operatorname{Im}[F(i\omega)]}{|F(i\omega)|} = -\frac{\omega}{\sqrt{4+\omega^2}} \end{cases} \quad (6)$$

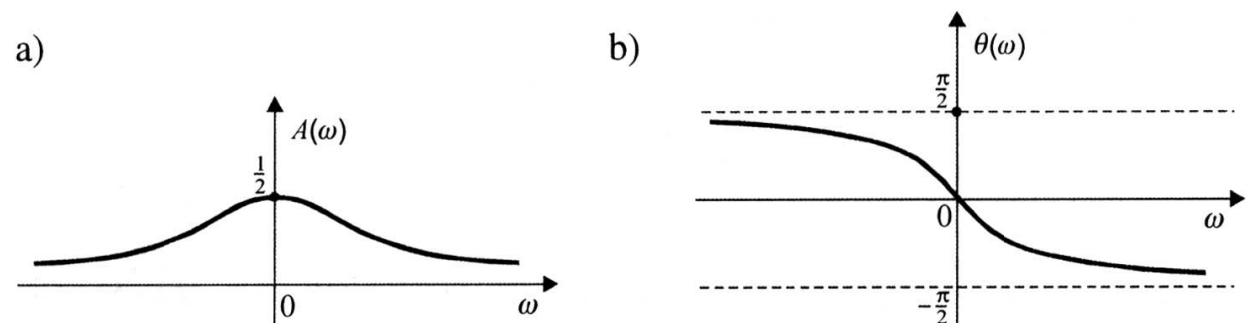
gdzie $|\theta(\omega)| \leq \pi$.

Ponieważ $\cos\theta > 0$ dla $\omega \in R$, to z układu (6) otrzymamy

$$\operatorname{tg}\theta(\omega) = \frac{\sin\theta(\omega)}{\cos\theta(\omega)} = -\frac{\omega}{2},$$

a stąd $\theta(\omega) = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (7)

d) Na rysunku 7.8 przedstawiono wykresy widma amplitudowego i fazowego.



Rys. 7.8. Wykres: a) widma amplitudowego, b) widma fazowego funkcji $f(t) = I(t) e^{-2t}$

Uwaga. Ponieważ, jak łatwo zauważyć $\cos\theta(\omega) > 0$, to $|\theta(\omega)| < \frac{\pi}{2}$ i widmo fazowe można wyznaczyć z drugiego równania (6), a następnie korzystając z nieparzystości funkcji arc sin ostatecznie mamy

$$\theta(\omega) = -\arcsin \frac{\omega}{\sqrt{4 + \omega^2}}.$$

■

Interpretację transformaty (7.3.1) jako widma podamy na przykładzie funkcji $f(t)$ rzeczywistej i parzystej, gdyż wówczas jej widmo $F(i\omega)$ jest rzeczywiste i parzyste. Zilustrujemy to na przykładzie 7.6.

Przykład 7.6. Dla funkcji $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in R$: a) wyznaczyć widmo, b) przedstawić w postaci całki Fouriera, c) podać harmoniki.

R o z w i ą z a n i e . a) Funkcja $f(t) = e^{-|t|}$ jest ciągła dla $t \in R$ i spełnia założenia tw. 7.1.1 Fouriera. Ze wzoru (7.3.1), uwzględniając postać funkcji $e^{-|t|}$, całkę Fouriera rozdzielamy na dwie całki odpowiadające przedziałom $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(1+i\omega)t} dt = \frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)t} \Big|_{t \rightarrow -\infty}^{t=0} + \frac{1}{1+i\omega} e^{(1+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}, \quad \omega \in R. \end{aligned}$$

Zatem widmo funkcji $e^{-|t|}$ wyraża się wzorem

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}, \quad \omega \in R \quad (7.4.8)$$

U w a g a . Zauważmy, że w tym przypadku, tj. dla funkcji $e^{-|t|}$ rzeczywistej i parzystej, jej widmo $F(\omega)$ jest również funkcją rzeczywistą i parzystą.

b) Na podstawie wzoru (7.3.2) funkcję $e^{-|t|}$ przedstawiamy całką Fouriera postaci

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in R \quad (1)$$

Zauważmy, że funkcja podcałkowa w (1) jest równa

$$\frac{1}{1+\omega^2} \cos \omega t + i \frac{1}{1+\omega^2} \sin \omega t,$$

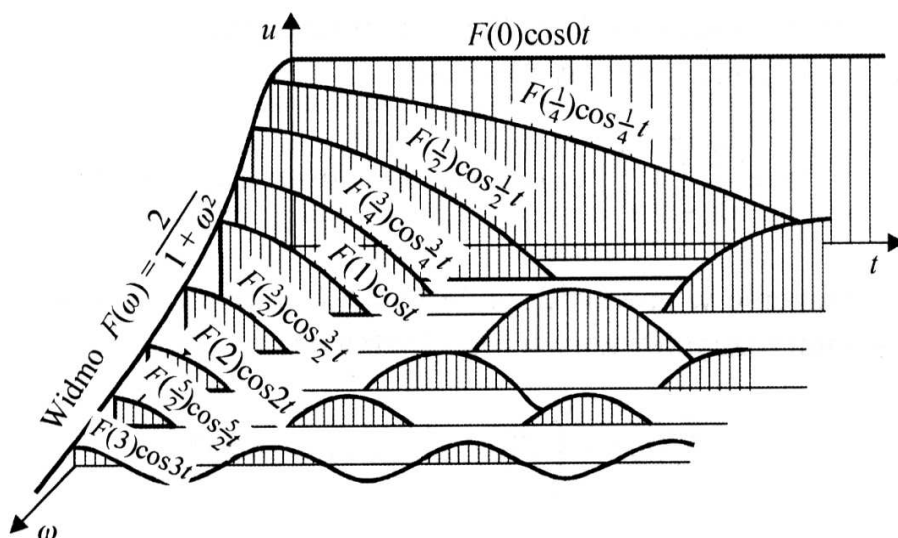
i wyrażenie $\frac{1}{1+\omega^2} \cos \omega t$ jest funkcją parzystą, a $\frac{1}{1+\omega^2} \sin \omega t$ jest funkcją nieparzystą na przedziale symetrycznym $(-\infty, +\infty)$. Zatem całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \sin \omega t d\omega = 0, \quad \text{a całka} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cos \omega t d\omega = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} \cos \omega t d\omega.$$

Uwzględniając wzór (7.4.8) oraz otrzymane wyniki w (1) mamy

$$e^{-|t|} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2} \cos \omega t d\omega \quad (7.4.9)$$

gdzie zgodnie ze wzorem (7.4.1) funkcje $P(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \cos \omega t$ przedstawiają harmoniki rzeczywiste, rys. 7.9 [2, 11].



Rys. 7.9. Widmo i harmoniki składowe funkcji $e^{-|t|}$ [11]

7.5. Cosinusowe i sinusowe przekształcenia Fouriera

Zakładamy, że funkcja $f(t)$ jest określona i bezwzględnie całkowalna w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$ oraz spełnia warunki Dirichleta w każdym ograniczonym przedziale otwartym (a, b) , gdzie $0 \leq a < b$. Wiemy, że w tym przypadku funkcję $f(t)$ można wyrazić za pomocą wzorów (7.1.15) lub (7.1.17). Na mocy cosinusowego wzoru całkowego Fouriera (7.1.15) otrzymujemy równość

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(u) \cos \omega u \, du \right] \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0.$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie symbolem $F_c(\omega)$ można tę równość przedstawić za pomocą pary symetrycznych wzorów (przekształceń):

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(u) \cos \omega u \, du, \quad \omega > 0 \quad (7.5.1)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0 \quad (7.5.2)$$

Definicja 7.5.1. Wzór (7.5.1) nazywamy *prostym cosinusowym przekształceniem Fouriera funkcji $f(t)$* , zaś wzór (7.5.2) *odwrotnym cosinusowym przekształceniem Fouriera* względem przekształcenia (7.5.1).

Analogicznie wyrażając funkcję $f(t)$ za pomocą sinusowego wzoru całkowego Fouriera (7.1.17) otrzymujemy równość:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(u) \sin \omega u \, du \right] \sin \omega t \, d\omega, \quad t > 0.$$

Oznaczając wyrażenie w nawiasie symbolem $F_s(\omega)$, możemy tę równość przedstawić parą symetrycznych wzorów (przekształceń)

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(u) \sin \omega u \, du, \quad \omega > 0 \quad (7.5.3)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega, \quad t > 0 \quad (7.5.4)$$

Definicja 7.5.2. Wzór (7.5.3) nazywamy *prostym sinusowym przekształceniem Fouriera funkcji $f(t)$* , zaś wzór (7.5.4) *odwrotnym sinusowym przekształceniem Fouriera względem przekształcenia (7.5.3)*.

Definicja 7.5.3. Funkcje $F_c(\omega)$ daną wzorem (7.5.1) nazywamy *cosinusową transformatą funkcji $f(t)$* , natomiast funkcję $F_s(\omega)$ daną wzorem (7.5.3) nazywamy *sinusową transformatą funkcji $f(t)$* .

U w a g a. Jeżeli przekształcenia (7.5.1) i (7.5.2) określimy przy założeniu, że $f(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ jest parzysta, natomiast (7.5.3) i (7.5.4) przy założeniu, że $f(t)$ jest nieparzysta, to wyżej wymienione przekształcenia można stosować dla $t \in R$ i $\omega \in R$.

Dla wyżej wymienionych transformat Fouriera zachodzą następujące związki:

- jeśli $f(t) = 0$ dla $t \in (-\infty, 0)$, to

$$F(i\omega) = \frac{1}{2}F_c(\omega) - \frac{1}{2}iF_s(\omega) \quad (7.5.5)$$

- jeśli funkcja f jest parzysta, to

$$F_c(\omega) = \frac{1}{2}F(i\omega) \Rightarrow F(i\omega) = 2F_c(\omega) \quad (7.5.6)$$

- jeśli funkcja f jest nieparzysta, to

$$F_s(\omega) = \frac{i}{2}F(i\omega) \Rightarrow F(i\omega) = -2iF_s(\omega) \quad (7.5.7)$$

gdzie $F(i\omega)$ oznacza transformatę w zespolonym przekształceniu Fouriera (7.3.1).

Cosinusowe i sinusowe przekształcenia Fouriera są stosowane do rozwiązywania równań różniczkowych fizyki matematycznej.

Przykład 7.7. Wyznaczyć transformatę cosinusową i sinusową funkcji

$$f(t) = \begin{cases} (t - \pi)^2 & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t > \pi \end{cases} \quad (1)$$

R o z w i ą z a n i e . Funkcja (1) spełnia wszystkie założenia twierdzenia 7.1.1, więc jest funkcją \mathcal{F} -transformowalną. Na mocy wzoru (7.5.1) oraz całkując dwukrotnie przez części mamy

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos \omega t dt =$$

$$= \left[(t - \pi)^2 \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{2}{\omega} (t - \pi) \frac{\cos \omega t}{\omega} - \frac{2 \sin \omega t}{\omega^3} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2\pi}{\omega^2} - \frac{2 \sin \pi \omega}{\omega^3}.$$

Zatem
$$F_c(\omega) = \frac{2\pi\omega - 2 \sin \pi\omega}{\omega^3} \quad (2)$$

Analogicznie na podstawie wzoru (7.5.3) wyznaczamy transformatę sinusową funkcji (1)

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \sin \omega t dt =$$

$$= \left[-(t - \pi)^2 \frac{\cos \omega t}{\omega} + 2(t - \pi) \frac{\sin \omega t}{\omega^2} + \frac{2 \cos \omega t}{\omega^3} \right]_{t=0}^{t=\pi}.$$

Podstawiamy granice całkowania i po przekształceniach otrzymamy

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\omega^3} \cos \pi\omega + \frac{\pi^2}{\omega} - \frac{2}{\omega^3}.$$

■

Przykład 7.8. Wyznaczyć funkcję $G(\omega)$, jeżeli

$$\int_0^{\infty} G(\omega) \sin \omega t d\omega = f(t), \quad \text{gdzie} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & t = \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}.$$

R o z w i ą z a n i e . Z określenia sinusowego przekształcenia Fouriera wynika, że funkcja $G(\omega)$ jest transformatą sinusową funkcji $g(t) = \frac{2}{\pi} f(t)$. Zatem na podstawie wzoru (7.5.3) mamy

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \int_0^{\pi} \cos t \sin \omega t dt, \quad \omega \in R.$$

Stąd po zastosowaniu odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej (patrz wzór 2.1.15) i scałkowaniu względem zmiennej t otrzymamy

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(\omega+1)t + \sin(\omega-1)t] dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(\omega+1)t}{\omega+1} - \frac{\cos(\omega-1)t}{\omega-1} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega+1} (\cos \pi \omega + 1) - \frac{1}{1-\omega} (\cos \pi \omega + 1) \right] = \frac{\cos \pi \omega + 1}{2} \cdot \frac{-2\omega}{1-\omega^2}. \end{aligned}$$

Stosując wzór na cosinus kąta podwojonego ostatecznie mamy

$$G(\omega) = \frac{-2\omega}{1-\omega^2} \cos^2 \left(\frac{\pi\omega}{2} \right), \quad \omega \neq \pm 1.$$

■

Przykład 7.9. Wyznaczyć całkę $\int_0^{\infty} e^{-ct^2} \cos \omega t dt$ na podstawie transformaty

$$F(i\omega) = \mathcal{F} \left[e^{-ct^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}, \quad c > 0 \quad (7.5.8)$$

R o z w i ą z a n i e . Ponieważ funkcja $f(t) = e^{-ct^2}$ jest funkcją parzystą dla $t \in R$, to na podstawie wzorów (7.5.6) oraz (7.5.1) mamy

$$F(i\omega) = 2F_c(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

Stąd, dla funkcji $f(t) = e^{-ct^2}$ mamy $\int_0^{\infty} e^{-ct^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} F(i\omega)$,

i po uwzględnieniu zależności (7.5.8) otrzymujemy szukaną całkę

$$\int_0^{\infty} e^{-ct^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}.$$

■

Związek \mathcal{F} -przekształcenia z \mathcal{L} -przekształceniem

Wyznaczanie transformat Fouriera w niektórych przypadkach znacznie ułatwia zależność między przekształceniem Laplace'a i przekształceniem Fouriera. Jeżeli założymy, że funkcja $f(t)$ \mathcal{F} -transformowalna spełnia również warunek

$$f(t) = 0 \quad \text{dla } t < 0 \quad (7.5.9)$$

to na podstawie wzoru (7.3.1) otrzymamy

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{L}[f(t)]|_{s=i\omega} = F(s)|_{s=i\omega}$$

Zatem mamy

$$\mathcal{F}(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]|_{s=i\omega} \quad (7.5.10)$$

gdzie $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ jest \mathcal{L} -transformatą określoną wzorem (1.2.3).

Wzór (7.5.10) rozumiemy w ten sposób, że jeżeli funkcja $f(t)$ transformowalna w sensie Fouriera zeruje się dla $t < 0$ (tj. spełnia war. 7.5.9) to, aby znaleźć jej transformatę Fouriera wystarczy wyznaczyć transformatę Laplace'a i podstawić za zmienną zespoloną s zmienną $i\omega$, tj. przyjąć $s = i\omega$.

Przykład 7.10. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = I(t) e^{-2t}$, $t \in R$.

R o z w i ą z a n i e . Ponieważ $f(t) = 0$ dla $t < 0$, to zamiast przekształcenia Fouriera stosujemy do danej funkcji przekształcenie Laplace'a. Mamy więc transformatę Laplace'a określoną wzorem (por. wzór 1.3.3)

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

Uwzględniamy wzór (7.5.10) i podstawiając za zmienną zespoloną s zmienną $i\omega$ mamy

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{i\omega+2},$$

co jest zgodne z wynikiem (2) uzyskanym dla tej funkcji w przykładach 7.5 oraz 7.4 (por. wzór (7.3.7) dla $a = 2$).

■

Uwaga 7.5. Wzór (7.5.10) może być czasami źródłem popularnych błędów. Wprawdzie podstawienie $s = i\omega$ jest możliwe w każdym wzorze $F(s)$ określającym transformatę Laplace'a pewnej funkcji $f(t)$, lecz nie zawsze w wyniku takiego podstawienia otrzymujemy transformatę Fouriera $F(i\omega)$. Jeśli funkcja jest \mathcal{L} -transformowalna lecz nie spełnia warunku bezwzględnej całkowalności, to jej \mathcal{F} -transformata może nie istnieć w zwykłym sensie definicji.

7.6. Własności przekształcenia Fouriera

Podstawową rolę w zrozumieniu przekształcenia Fouriera odgrywa niewielka liczba twierdzeń. Twierdzenia te stanowią również pożyteczne narzędzie w zastosowaniach do zagadnień fizycznych.

Podamy bez dowodów podstawowe twierdzenia dotyczące przekształcenia Fouriera.

Twierdzenie 7.6.1 (zachowanie się \mathcal{F} -transformaty w nieskończoności). *Jeśli funkcja $f(t)$ jest bezwzględnie całkowna w przedziale $(-\infty, +\infty)$, to jej \mathcal{F} -transformata (7.3.1) jest funkcją ciągłą dla $\omega \in (-\infty, +\infty)$ i przy tym*

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} F(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(i\omega) = 0 \quad (7.6.1)$$

Wniosek 7.6.1.

Własność (7.6.1) oznacza, że również

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = 0 \quad (7.6.1')$$

tzn., że widmo amplitudowe dąży do zera przy nieograniczonym wzroście częstości ω .

Twierdzenie 7.6.2 (liniowość \mathcal{F} -przekształcenia). *Jeśli funkcje $f_1(t)$, $f_2(t)$ spełniają założenia twierdzenia Fouriera (tzn. jeśli istnieją transformaty $\mathcal{F}[f_1(t)]$, $\mathcal{F}[f_2(t)]$), to*

$$\mathcal{F}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \cdot \mathcal{F}[f_1(t)] + A_2 \cdot \mathcal{F}[f_2(t)] \quad (7.6.2)$$

gdzie A_1 , A_2 – dowolne stałe.

Twierdzenie 7.6.3 (pochodna \mathcal{F} -transformaty). *Jeśli funkcja $t^k f(t)$, $k \in \mathbb{N}$ spełnia założenia twierdzenia Fouriera oraz $\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$, to funkcja $F(i\omega)$ ma k ciągłych pochodnych wyrażonych wzorem*

$$\frac{d^k F(i\omega)}{d\omega^k} = (-i)^k \cdot \mathcal{F}[t^k \cdot f(t)] \quad (7.6.3)$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Wzór (7.6.3) oznacza, że funkcję (7.3.1) można k -krotnie różniczkować pod znakiem całki. Wzór ten można zapisać również w postaci:

$$\mathcal{F}[t^k \cdot f(t)] = \frac{1}{(-i)^k} \cdot \frac{d^k F(i\omega)}{d\omega^k} \quad (7.6.3')$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$.

W szczególności dla $k = 1$

$$\mathcal{F}[t \cdot f(t)] = i \cdot \frac{dF(i\omega)}{d\omega} \quad (7.6.4)$$

Przykład 7.10. Korzystając z twierdzenia o pochodnej \mathcal{F} -transformaty obliczyć \mathcal{F} -transformaty następujących funkcji

$$\text{a) } g_1(t) = t e^{-2t} \cdot I(t), \quad \text{b) } g_2(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla } |t| < 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e . a)

1. Do obu stron (a) stosujemy przekształcenie Fouriera

$$\mathcal{F}[g_1(t)] = \mathcal{F}[t \cdot e^{-2t}] =$$

2. Stosujemy twierdzenie 7.6.3 – wzór (7.6.4)

$$= -\frac{1}{i} \frac{d}{d\omega} (\mathcal{F}[e^{-2t}]) =$$

3. Uwzględniamy wynik (3) z przykładu 7.5

$$= i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2}{4 + \omega^2} - \frac{\omega}{4 + \omega^2} i \right) =$$

4. Różniczkujemy względem ω

$$= i \left(\frac{-4\omega}{(4 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2 - 4}{(4 + \omega^2)^2} i \right) \quad (2)$$

Ostatecznie, po uporządkowaniu z wyniku (2) otrzymamy szukaną transformatę

$$G_1(i\omega) = \frac{4 - \omega^2}{(4 + \omega^2)^2} - \frac{4\omega}{(4 + \omega^2)^2} i, \quad \omega \in R \quad (3)$$

b) Zauważmy, że funkcję $g_2(t)$ można przedstawić w postaci iloczynu $t \cdot (2f(t))$, gdzie $f(t)$ jest funkcją z przykładu 7.4a dla $t_0 = 1$, której \mathcal{F} -transformata na podstawie wzoru (7.3.6) dla $t_0 = 1$ ma postać

$$F[2 \cdot f(t)] = 2 \cdot F[f(t)] = 2 \cdot F(i\omega) = 4 \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (4)$$

Następnie stosujemy twierdzenie 7.6.3 i na podstawie wzoru (7.6.4), uwzględniając zależność (4), mamy

$$\mathcal{F}[g_2(t)] = i \frac{d}{d\omega} \left(4 \frac{\sin \omega}{\omega} \right) = \frac{4i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega) \quad (5)$$

U w a g a . \mathcal{F} -transformatę funkcji b) można wyznaczyć bezpośrednio z definicji stosując wzór (7.3.1), a następnie skorzystać z nieparzystości funkcji $g_2(t)$ i z zależności $F(i\omega) = -2iF_s(\omega)$ (wzór 7.5.7). Wtedy mamy

$$G_2(i\omega) = \mathcal{F}[g_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t) e^{-i\omega t} dt = 2 \int_{-1}^1 t e^{-i\omega t} dt = -4i \int_0^1 t \sin \omega t dt .$$

Następnie całkując przez części, otrzymamy wynik zgodny z (5). Szczegółowe obliczenia pozostawia się Czytelnikowi. ■

Twierdzenie 7.6.4 (o przesunięciu zespolonym). *Jeżeli $\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$, to*

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} \cdot f(t)] = F(i(\omega - \omega_0)) \quad (7.6.5)$$

W n i o s e k . Pomnożenie funkcji $f(t)$ przez czynnik wykładniczy $e^{i\omega_0 t}$ przesuwa o ω_0 na osi częstości zarówno widmo amplitudowe $A(\omega)$ jak i widmo fazowe $\theta(\omega)$ funkcji $f(t)$, co łatwo zauważyć, jeżeli przedstawimy prawą stronę wzoru (7.6.5) w postaci wykładniczej

$$F(i(\omega - \omega_0)) = |F(i(\omega - \omega_0))| \cdot e^{i\theta(\omega - \omega_0)} .$$

Wtedy

$$|F(i(\omega - \omega_0))| = A(\omega - \omega_0) \quad \text{i} \quad \arg F(i(\omega - \omega_0)) = \theta(\omega - \omega_0) .$$

Analogicznie, na podstawie wzoru (7.6.5)

$$\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 t} \cdot f(t)] = F(i(\omega + \omega_0)) \quad (7.6.6)$$

Ze wzorów (7.6.5) i (7.6.6) oraz ze wzorów Eulera, korzystając z liniowości \mathcal{F} -przekształcenia można otrzymać następujące wzory:

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(i(\omega - \omega_0)) + F(i(\omega + \omega_0))] \quad (7.6.7)$$

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2i} [F(i(\omega - \omega_0)) - F(i(\omega + \omega_0))] \quad (7.6.8)$$

Zależności (7.6.7) i (7.6.8) wskazują, że widmo funkcji $g(t)=f(t) \cdot \cos \omega_0 t$ lub funkcji $h(t)=f(t) \cdot \sin \omega_0 t$ można rozłożyć na dwa składniki przesunięte odpowiednio o wielkości $+\omega_0$ i $-\omega_0$ [2, 13, 14].

Twierdzenie 7.6.5 (o przesunięciu rzeczywistym). *Jeżeli funkcja $f(t)$ ma transformatę Fouriera $\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$, to funkcja $f(t - t_0)$ ma transformatę Fouriera daną wzorem*

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \cdot F(i\omega), \quad t_0 \in R \quad (7.6.9)$$

Wniosek. Ponieważ moduł $|\mathcal{F}[f(t - t_0)]| = |\mathcal{F}[f(t)]|$ (bo $|e^{-i\omega t_0}| = 1$), to mówimy, że przesunięcie funkcji $f(t)$ w dodatnim kierunku osi o wielkość t_0 zmienia jedynie widmo fazowe $\theta(\omega)$ o składnik liniowy $-\omega t_0$ nie zmieniając widma amplitudowego $A(\omega)$, tzn. $|e^{-i\omega_0 t} F(i\omega)| = A(\omega)$, $\arg[e^{-i\omega_0 t} F(i\omega)] = \theta(\omega) - \omega_0 t$.

Na mocy tego twierdzenia każda składowa transformaty Fouriera jest opóźniona w fazie o wartość proporcjonalną do ω_0 . Szybkość zmian fazy w funkcji częstotliwości jest tym większa im większą wartość przyjmuje t_0 [2, 13, 14].

Przykład 7.11. Wyznaczyć \mathcal{F} -transformatę funkcji określonej wzorem

$$\text{a) } g_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t - 2| < 2 \\ 0 & \text{dla } |t - 2| > 2 \end{cases}, \quad \text{b) } g_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -2t_0 < t < 0 \\ -1 & \text{dla } 0 < t < 2t_0 \\ 0 & \text{dla } 2t_0 < |t| \end{cases},$$

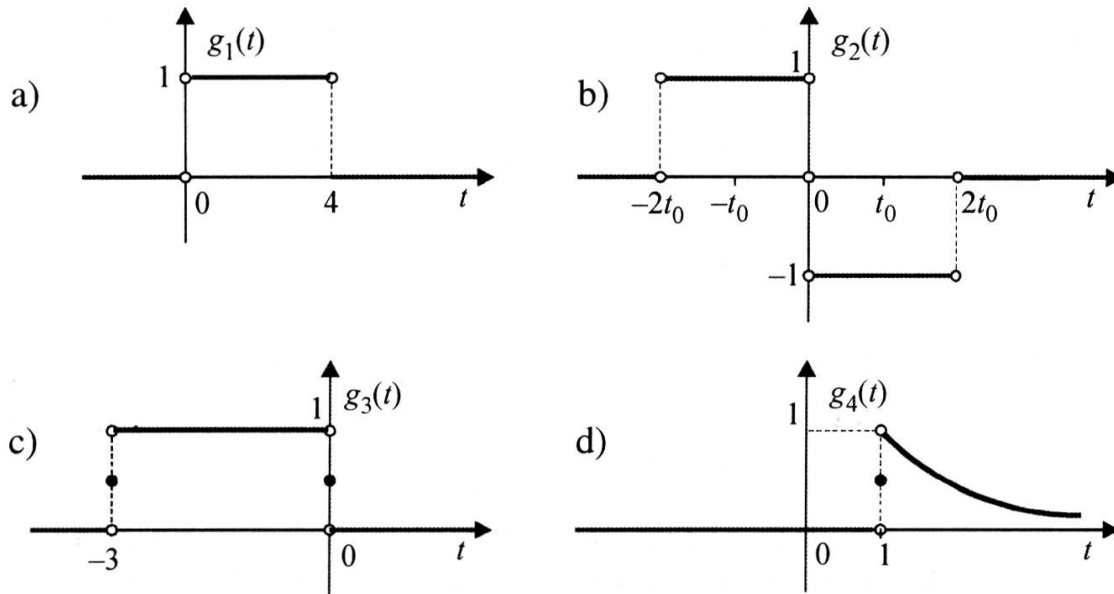
$$\text{c) } g_3(t) = I(t + 3) - I(t) \quad \text{d) } g_4(t) = I(t - 1) e^{-2(t-1)}$$

posługując się twierdzeniem 7.6.5 i znaną transformatą Fouriera.

Rozwiązanie. a) Funkcja $g_1(t)$ (rys. 7.10 a) jest przesunięta w prawo o $t_0 = 2$ jednostki względem funkcji $f(t)$ z przykładu 7.4a, dla której transformata

$$F(i\omega) = 2 \frac{\sin 2\omega}{\omega} \quad (1)$$

(por. wzór 7.3.6 dla $t_0 = 2$).

Rys. 7.10. Wykresy funkcji $g_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ z przykładu 7.11

Korzystając z tw. 7.6.5 o przesunięciu rzeczywistym – wzór (7.6.9) i uwzględniając zależność (1) otrzymamy

$$G_1(i\omega) = \mathcal{F}[g_1(t)] = e^{-2i\omega} \cdot F(i\omega) = \frac{2e^{-2i\omega} \sin 2\omega}{\omega}.$$

b) Posłużymy się wynikami przykładu 7.4 a, w którym rozpatrywaliśmy funkcję

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < t_0 \\ 0 & \text{dla } |t| > t_0 \end{cases} \quad (2)$$

dla której transformata na podstawie wzoru (7.3.6) jest równa

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \quad (3)$$

Zauważmy, że funkcję $g_2(t)$ można wyrazić przez funkcję $f(t)$ jako kombinację następujących przesunięć rzeczywistych:

$$g_2(t) = f(t+t_0) - f(t-t_0) \quad (4)$$

Stosujemy do obu stron równości (4) przekształcenie Fouriera i korzystamy z jego liniowości

$$\mathcal{F}[g_2(t)] = \mathcal{F}[f(t+t_0)] - \mathcal{F}[f(t-t_0)],$$

a następnie korzystamy z twierdzenia 7.6.5 – wzór (7.6.9) i uwzględniając zależność (3) otrzymamy

$$\begin{aligned} G_2(i\omega) &= e^{i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] - e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] = 2e^{i\omega t_0} \frac{\sin \omega t_0}{\omega} - 2e^{-i\omega t_0} \frac{\sin \omega t_0}{\omega} = \\ &= 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega} (e^{i\omega t_0} - e^{-i\omega t_0}). \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów Eulera i po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$G_2(i\omega) = 4i \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega} \quad (5)$$

Następne dwa przykłady c) i d) rozwiążemy według schematu zaprezentowanego dla przekształcenia Laplace'a we wcześniejszych rozdziałach.

c)

1. Niech $g_3(t) = I(t+3) - I(t)$ (6)

2. Do obu stron (6) stosujemy przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}[g_3(t)] = \mathcal{F}[I(t+3) - I(t)] =$

3. Korzystamy z liniowości – wzór (7.6.2) $= \mathcal{F}[I(t+3)] - \mathcal{F}[I(t)] =$

4. Do pierwszego składnika stosujemy tw. 7.6.5 o przesunięciu rzeczywistym, wzór (7.6.9) dla $t_0 = -3$ $= e^{3i\omega} \mathcal{F}[I(t)] - \mathcal{F}[I(t)] =$

5. Wyłączamy wspólny czynnik $= \mathcal{F}[I(t)] \cdot (e^{3i\omega} - 1) =$

6. Korzystamy z faktu, że $\mathcal{F}[I(t)] = \frac{1}{i\omega}$ $= \frac{1}{i\omega} \cdot (e^{3i\omega} - 1)$ (7)

Wykorzystując wzory Eulera w rozwiązaniu (7) po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$G_3(i\omega) = \frac{\sin 3\omega}{\omega} + \frac{1 - \cos 3\omega}{\omega} i, \quad \omega \neq 0 \quad (8)$$

U w a g a . Przykład ten można rozwiązać również innym sposobem, jeśli zauważymy, że funkcja $g_3(t) = I(t+3) - I(t)$ jest przesunięciem rzeczywistym o $t_0 = -\frac{3}{2}$ jednostek w lewo funkcji (2), której transformata (3) na podstawie wzoru (7.3.6) ma postać

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2 \frac{\sin \frac{3}{2} \omega}{\omega} \quad (9)$$

Zatem, jeśli $g_3(t) = f\left(t + \frac{3}{2}\right)$, to na podstawie jednoznaczności \mathcal{F} -przekształce-
nia równe są ich obrazy, tzn. $\mathcal{F}[g_3(t)] = \mathcal{F}\left[f\left(t + \frac{3}{2}\right)\right]$.

Stosując tw. 7.6.5 o przesunięciu rzeczywistym (wzór 7.6.9 dla $t_0 = -\frac{3}{2}$)
i uwzględniając zależność (9) otrzymamy

$$G_3(i\omega) = e^{\frac{3}{2}i\omega} \cdot \mathcal{F}[f(t)] = 2 \frac{e^{\frac{3}{2}i\omega} \sin \frac{3}{2} \omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0.$$

Po zastosowaniu wzorów Eulera i odpowiednich wzorów trygonometrycznych
funkcji kąta podwójnego, można sprawdzić, że wynik ten jest zgodny z rozwią-
zaniem (8).

d)

1. Niech $g_4(t) = \mathbf{I}(t-1) e^{-2(t-1)}$ (10)
2. Do obu stron (10) stosujemy
przekształcenie Fouriera $\mathcal{F}[g_4(t)] = \mathcal{F}[\mathbf{I}(t-1)e^{-2(t-1)}] =$
3. Stosujemy tw. 7.6.5 o przesunięciu
rzeczywistym, wzór (7.6.9) dla $t_0=1$ $= e^{-i\omega} \mathcal{F}[e^{-2t}]$
6. Korzystamy z wyniku przykładu
7.4b, wzór (7.3.7) dla $a = 2$ $= e^{-i\omega} \cdot \frac{1}{2+i\omega}.$

Zatem ostatecznie

$$G_4(i\omega) = \frac{e^{-i\omega}}{2+i\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Jeśli pomnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika, tj. przez
wyrażenie $(2-i\omega)$, to otrzymamy \mathcal{F} -transformatę funkcji $g_4(t)$ w postaci

$$G_4(i\omega) = \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} e^{-i\omega} \quad (12)$$

■

Twierdzenie 7.6.6 (transformata pochodnej funkcji $f(t)$). Jeżeli funkcje $f(t)$ i jej pochodne $f^{(k)}(t)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ spełniają założenia twierdzenia Fouriera, oraz

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

to

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}[f(t)] \quad (7.6.10)$$

W szczególności, dla $n = 1$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \cdot \mathcal{F}[f(t)] \quad (7.6.11)$$

Twierdzenie 7.6.7 (o \mathcal{F} -transformacie całki). Jeśli funkcja $f(t)$ oraz jej całka

$\varphi(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$, $-\infty \leq t_0 \leq +\infty$ są bezwzględnie całkowne w przedziale $(-\infty, +\infty)$ oraz $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$, to

$$\mathcal{F}\left[\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{i\omega} F(i\omega) \quad (7.6.12)$$

gdzie $F(i\omega)$ jest \mathcal{F} -transformatą funkcji $f(t)$.

U w a g a . Z własności (7.6.11) i (7.6.12) wynika, że widmo pochodnej otrzymujemy mnożąc widmo funkcji $f(t)$ przez $i\omega$, a widmo całki funkcji $f(t)$ otrzymujemy dzieląc widmo funkcji $f(t)$ przez $i\omega$. Tak więc różniczkowaniu i całkowaniu danej funkcji $f(t)$ odpowiadają proste działania algebraiczne: mnożenie i dzielenie, wykonane na funkcji przekształconej $F(i\omega)$, co wskazuje na to, że przekształcenie Fouriera ma podstawową cechę metody operatorowej.

Twierdzenie 7.6.6. podobnie jak twierdzenia 2.2.1 i 2.2.2 w przypadku przekształcenia Laplace'a pozwalają na algebraizację równania różniczkowego. Jednakże możliwość zastosowania wzoru (7.6.10) jest uwarunkowana spełnieniem wymienionych w twierdzeniu założeń, które ograniczają zakres jego stosowalności. Z zależności (7.6.10) oraz (2.2.4) i (2.2.5) wynika, że główną różnicą między przekształceniem Fouriera i Laplace'a jest to, że przekształcenie Laplace'a uwzględnia warunki początkowe. Mimo to, rola przekształcenia Fouriera w rachunku operatorowym jest bardzo duża, głównie wskutek nierozrwalnego związku przekształcenia Laplace'a z przekształceniem Fouriera oraz prostej i poglądowej interpretacji fizycznej \mathcal{F} -transformaty w dziedzinie częstości.

Przykład 7.12. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji

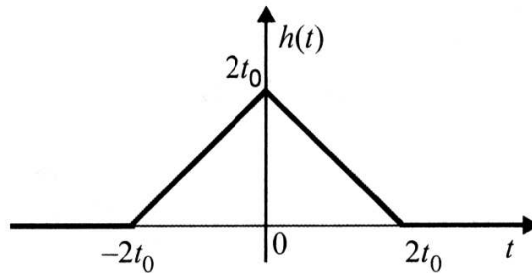
$$h(t) = \begin{cases} t + 2t_0 & \text{dla } -2t_0 \leq t < 0 \\ 2t_0 - t & \text{dla } 0 \leq t \leq 2t_0 \\ 0 & \text{dla } |t| > 2t_0 \end{cases} .$$

R o z w i ą z a n i e . Wykres funkcji $h(t)$ przedstawiono na rys 7.11. Zauważmy, że funkcję $h(t)$ można przedstawić w postaci całki $h(t) = \int_{-2t_0}^{2t_0} g_2(\tau) d\tau$, gdzie $g_2(t)$ oznacza funkcję z przykładu 7.11b, której transformata dana jest wzorem (5), tj.

$$\mathcal{F}[g_2(t)] = 4i \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega} \quad (1)$$

Ponieważ funkcja $h(t)$ spełnia założenia twierdzenia 7.6.7, więc do obliczenia \mathcal{F} -transformaty tej funkcji wykorzystamy wzór (7.6.12). Mamy zatem, po uwzględnieniu (1)

$$H(i\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[g_2(t)] = \frac{1}{i\omega} \cdot 4i \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega} = 4 \frac{\sin^2 \omega t_0}{\omega^2} .$$



Rys. 7.11. Wykres do przykładu 7.12

■

Twierdzenie 7.6.8 (o podobieństwie lub zmianie skali). Jeżeli $\mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$ i $a \neq 0$, to funkcja $f\left(\frac{t}{a}\right)$ ma transformatę Fouriera daną wzorem

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = |a| F(a\omega i) \quad (7.6.13)$$

U w a g a . Jeżeli $a = -1$ to uzyskamy wzór

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-i\omega).$$

Jeżeli $a > 1$, to funkcja $f\left(\frac{t}{a}\right)$ jest „rozciągnięta” w porównaniu z funkcją $f(t)$,

a z zależności (7.6.13) wynika, że widmo $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$ funkcji $f\left(\frac{t}{a}\right)$ jest natomiast w tym samym stosunku „zwężone” i pomnożone przez liczbę a .

U w a g a . Twierdzenie 7.6.8 można spotkać w postaci

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{i\omega}{a}\right) \quad (7.6.14)$$

Twierdzenie to w odniesieniu do przebiegów chwilowych i widm orzeka, że „zwężeniu czasu odpowiada rozszerzenie skali częstotliwości” [2, 13].

Uwzględniając zależności dane wzorami (7.4.6) i (7.4.7) mamy

$$||a| F(ia\omega)| = |a| A(a\omega) \quad \text{i} \quad \arg[|a| F(ia\omega)] = \theta(a\omega).$$

Dla $0 < a < 1$ „zwężenie” funkcji powoduje „rozciągnięcie” jej widma na osi ω .

I n t e r p r e t a c j a f i z y c z n a wzoru (7.6.11) – o transformacji pochodnej oraz wzoru (7.6.12) – o transformacji całki.

Niech $A(\omega) = |F(i\omega)|$, $\theta(\omega) = \arg[F(i\omega)]$.

Jeżeli oznaczymy

$$G(i\omega) = \mathcal{F}[f'(t)] = A_1(\omega) e^{i\theta_1(\omega)},$$

to możemy wykazać, że

$$A_1(\omega) = |\omega| A(\omega), \quad \theta_1(\omega) = \theta(\omega) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \quad (7.6.15)$$

Zależność (7.6.15) interpretujemy: „różniczkowanie funkcji $f(t)$ powoduje dla $\omega > 0$ pomnożenie jej widma amplitudowego przez ω i zwiększenie widma fazowego o $\frac{\pi}{2}$ ”.

$$\text{Jeżeli oznaczymy } H(i\omega) = \mathcal{F}\left[\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right] = A_2(\omega) e^{i\theta_2(\omega)},$$

to możemy wykazać, że

$$A_2(\omega) = \frac{1}{|\omega|} A(\omega), \quad \theta_2(\omega) = \theta(\omega) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \quad (7.6.16)$$

Zależność (7.6.16) interpretujemy: całkowanie funkcji $f(t)$ powoduje dla $\omega > 0$ podzielenie jego widma amplitudowego przez ω i zmniejszenie widma fazowego o $\frac{\pi}{2}$ [2, 13, 14].

Uwaga 7.6.1. W literaturze można spotkać inne postacie prostego i odwrotnego zespolonego przekształcenia Fouriera, niż te które określiliśmy równościami (7.3.1) i (7.3.2), np.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7.6.17)$$

$$\text{lub} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega \quad (7.6.18)$$

Przy tych określeniach własności przekształcenia pozostają bez zmian jednak we wzorach na \mathcal{F} -transformaty podstawowych funkcji (w tablicach transformat) mogą pojawić się odmienne współczynniki.

Przedstawimy zastosowanie przekształcenia Fouriera jako metody operatorowej w analizie układów [4].

Rozpatrzmy równanie różniczkowe n -tego rzędu o stałych współczynnikach

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) = \\ = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_n u^{(n)}(t) \end{aligned} \quad (7.6.19)$$

opisujące stacjonarny układ liniowy, który ma asymptotycznie ustalony stan równowagi. Zakładamy, że wymuszenie $u(t)$ jest zerowe dla $t > 0$ oraz, że układ jest przyczynowy, tzn., że $x(t) = 0$ dla $t < 0$. Zakładamy ponadto, że w chwili $t = 0$ układ jest w stanie zerowym, tzn. warunki początkowe są równe zeru.

W celu znalezienia rozwiązania postawionego zadania metodą operatorową zakładamy, że istnieją \mathcal{F} -transformaty (obrazy) funkcji $x(t)$ i $u(t)$, tj. $X(i\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $U(i\omega) = \mathcal{F}[u(t)]$ i do obu stron równania (7.6.19) stosujemy przekształcenie Fouriera

$$\mathcal{F}[a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t)] = \mathcal{F}[b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_n u^{(n)}(t)].$$

Następnie korzystamy z liniowości \mathcal{F} -przekształcenia – wzór (7.6.2) oraz z tw. 7.6.6 o transformacie pochodnej – wzór (7.6.10) i sprowadzamy w ten sposób

równanie różniczkowe (7.6.19) do równania algebraicznego (tzw. równanie operatorowe lub równanie transformat) postaci

$$\begin{aligned} \left[a_n \cdot (i\omega)^n + a_{n-1} \cdot (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (i\omega) + a_0 \right] X(i\omega) = \\ = \left[b_0 + b_1 \cdot (i\omega) + \dots + b_n \cdot (i\omega)^n \right] U(i\omega) \end{aligned} \quad (7.6.20)$$

względem jednej niewiadomej funkcji – obrazu $X(i\omega)$.

Stąd wyznaczamy rozwiązanie operatorowe

$$X(i\omega) = H(i\omega) \cdot U(i\omega) \quad (7.6.21)$$

gdzie

$$H(i\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (i\omega) + \dots + b_n \cdot (i\omega)^n}{a_0 + a_1 \cdot (i\omega) + \dots + a_n \cdot (i\omega)^n} \quad (7.6.22)$$

Równanie operatorowe (7.6.21) jest z reguły łatwiejsze do rozwiązania. Wyrażenie $H(i\omega)$ jest tzw. *przepustowością* układu i jest ściśle związane z odpowiedzią impulsową. Po wyznaczeniu obrazu $X(i\omega)$ konieczny jest powrót do dziedziny oryginału. Stosujemy więc odwrotne przekształcenie Fouriera \mathcal{F}^{-1} do obu stron (7.6.21) i znajdziemy szukaną funkcję

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(i\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[H(i\omega)U(i\omega)] \quad (7.6.23)$$

która jest rozwiązaniem równania różniczkowego (7.6.19) [4].

U w a g a . Rozwiązując równanie metodą operatorową przy pomocy przekształcenia Fouriera automatycznie ograniczamy się do poszukiwania rozwiązania tylko w takiej klasie funkcji, w której stosowane przekształcenia i wzory mają sens.

7.7. Splot funkcji w przedziale $(-\infty, +\infty)$

Analogicznie jak w rozdziale 3 definiujemy splot funkcji w przedziale $(-\infty, +\infty)$, który jest ważnym pojęciem fizycznym i punktem wyjścia do wielu rozważań teoretycznych.

Definicja 7.7.1. Splotem funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$ lub *splotem dwustronnym* nazywamy funkcję $\varphi(t)$ określoną całką

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (7.7.1)$$

i oznaczamy symbolem $f_1(t) * f_2(t)$ lub $(f_1 * f_2)(t)$.

Zatem

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (7.7.2)$$

Przy przyjętych założeniach splot (7.7.2) istnieje prawie dla wszystkich t , może jednak nie istnieć dla poszczególnych wartości t wskutek rozbieżności całki (7.7.1). W szczególności, splot (7.7.2) istnieje i jest funkcją ciągłą dla każdego t , jeżeli przynajmniej jedna z funkcji splotu jest ograniczona w przedziale $(-\infty, +\infty)$ lub istnieją całki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2 dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(t)|^2 dt < +\infty \quad (7.7.3)$$

Definicja 7.7.2. O funkcjach $f_1(t)$, $f_2(t)$ bezwzględnie całkownych w przedziale $(-\infty, +\infty)$, dla których istnieją całki postaci (7.7.3) mówimy, że są *funkcjami całkownymi z kwadratem* w przedziale $(-\infty, +\infty)$ lub że są *funkcjami klasy L^2* i oznaczamy symbolem $L^2(-\infty, +\infty)$ [11, 13].

Dla splotu dwustronnego obowiązują wszystkie własności podane dla splotu jednostronnego w rozdziale 3 [2, 13, 25].

Twierdzenie 7.7.1 (o \mathcal{F} -transformacie splotu). *Jeżeli funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ spełniają założenia tw. 7.1.1 Fouriera, a ponadto istnieją całki (7.7.3), to \mathcal{F} -transformata splotu (7.7.2) wyraża się wzorem*

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(i\omega) \cdot F_2(i\omega) \quad (7.7.4)$$

gdzie $F_1(i\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$, $F_2(i\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$.

Wzór (7.7.4) jest odpowiednikiem wzoru (3.2.1) dla transformaty Laplace'a splotu jednostronnego (3.1.1), tzn. transformata splotu jest iloczynem transformat.

Twierdzenie 7.7.2 (o \mathcal{F} -transformacie iloczynu). *Przy założeniach tw. 7.7.1 prawdziwy jest wzór*

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(iu) F_2[i(\omega - u)] du \quad (7.7.5)$$

Wzór (7.7.5) czytamy: transformata iloczynu dwóch funkcji jest splotem ich transformat, tj.

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = F_1(i\omega) * F_2(i\omega) \quad (7.7.6)$$

Uwaga 7.7.2. Twierdzenie 7.7.2 jest także prawdziwe, gdy funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mają wartości zespolone, przy czym części rzeczywiste i części urojone tych funkcji spełniają założenia tw. Fouriera.

Odpowiednikiem równości Parsevala dla szeregu Fouriera jest *wzór Parsevala* dla przekształcenia Fouriera następującej postaci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega \quad (7.7.7)$$

gdzie funkcja $f(t)$ jest całkowalna z kwadratem w przedziale $(-\infty, +\infty)$, a $F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$.

Wzór (7.7.7) czytamy: całka kwadratu modułu funkcji $f(t)$ jest równa całce kwadratu jej widma $F(i\omega)$ z mnożnikiem $1/2\pi$. Jest to tzw. *twierdzenie Rayleigha* lub często nazywane przez matematyków, *twierdzeniem Plancherela*.

L. Rayleigh użył po raz pierwszy to twierdzenie w swojej pracy o promieniowaniu ciał czarnych. W zależności (7.7.7) każda z całek przedstawia sobą wartość energii, przy czym jedna z nich liczona jest względem wszystkich wartości zmiennej t , a druga dla wszystkich składowych widma względem zmiennej ω . Jest to tzw. twierdzenie o energii [2, 14].

Przykład 7.13. Zastosujemy wzór Parsevala (7.7.7) dla funkcji $f(t)$ z przykładu 7.4a, dla której transformata określona jest wzorem $F(i\omega) = 2 \frac{\sin \omega t_0}{\omega}$.

Mamy więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{2 \sin \omega t_0}{\omega} \right|^2 d\omega.$$

Ponieważ lewa strona wzoru $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-t_0}^{t_0} dt = 2t_0$, to ostatecznie po prze-

kształceniu otrzymamy

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2} t_0 \quad (7.7.8)$$

■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Napisać wzór całkowy Fouriera dla funkcji:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < t_0 \\ 0,5 & \text{dla } |t| = t_0 \\ 0 & \text{dla } |t| > t_0 \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 1-t & \text{dla } t \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty) \\ -1 & \text{dla } t \in (-\pi, 0) \\ 3 & \text{dla } t \in (0, \pi) \end{cases} \quad \text{d) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ e^{-at} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| \geq \pi \\ \pi - |t| & \text{dla } |t| < \pi \end{cases} \quad \text{f) } g(t) = \begin{cases} \pi t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } h(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } |t| < \pi \\ 0 & \text{dla } |t| \geq \pi \end{cases} \quad \text{h) } f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{dla } 0 < t < 1 \end{cases}$$

2. Napisać wzór całkowy Fouriera dla funkcji:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > \pi \end{cases}$$

i na tej podstawie obliczyć całki:

$$\text{a) } J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x^2} dx, \quad \text{b) } J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} x}{1-x^2} dx, \quad \text{c) } J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \cos 2x}{\pi^2 - 4x^2} dx.$$

3. Przedstawić za pomocą cosinusowego oraz sinusowego wzoru całkowego Fouriera następujące funkcje:

$$\text{a) } f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad a > 0 \quad \text{b) } h(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 < t < 3 \\ 1 & \text{dla } t = 3 \\ 0 & \text{dla } t > 3 \end{cases}$$

$$c) g(t) = \begin{cases} 1-t & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t > 1 \end{cases} \quad d) p(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t > \pi \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t > \pi \end{cases}$$

4. Dana jest funkcja

$$f(t) = \left[I\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - I\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cos t, \quad t \in R$$

a) narysować jej wykres i przedstawić funkcję f za pomocą całki Fouriera, a następnie na tej podstawie obliczyć całkę niewłaściwą

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1-x^2} dx;$$

a) wyznaczyć i narysować widmo amplitudowe $A(\omega)$ funkcji f . Obliczyć granice $\lim_{\omega \rightarrow \pm 1} A(\omega)$;

b) wyznaczyć i narysować widmo fazowe $\theta(\omega)$ funkcji f .

5. Dana jest funkcja

$$f(t) = [I(t+1) - I(t-1)]t, \quad t \in R$$

a) narysować jej wykres i przedstawić funkcję f za pomocą całki Fouriera, a następnie na tej podstawie obliczyć całkę niewłaściwą

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$$

b) wyznaczyć widmo amplitudowe $A(\omega)$ funkcji f oraz wykazać, że jest ono funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej;

c) wyznaczyć i narysować widmo fazowe $\theta(\omega)$ funkcji f .

6. Napisać zespolony wzór całkowy Fouriera dla funkcji:

$$a) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \vee t = 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > 1 \end{cases} \quad b) f(t) = I(t) \cdot e^{-at}, \quad a > 0$$

$$c) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \vee t \geq \pi \end{cases} \quad d) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -a \vee t \geq a \\ t+a & \text{dla } -a \leq t < 0 \\ -t+a & \text{dla } 0 \leq t < a \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } |t| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

7. Podać przykład funkcji $f(t)$, dla której \mathcal{F} -transformata $\mathcal{F}[f(t)]$ istnieje i takiej, dla której $\mathcal{F}[f(t)]$ nie istnieje. Uzasadnić.
8. Wykazać, że funkcje okresowe nie spełniają warunków istnienia transformaty Fouriera.
9. Wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji:

$$a) f(t) = e^{-a|t|}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{dla } t < 0, a > 0 \\ 0 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -4 < t < 0 \\ -1 & \text{dla } 0 < t < 4 \\ 0 & \text{dla } |t| > 4 \end{cases}$$

$$d) f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } |t| < 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| > 1 \\ -t^2 & \text{dla } |t| \leq 1 \end{cases}$$

$$f) f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 1 & \text{dla } t \in \langle -2, 0 \rangle \\ -t + 1 & \text{dla } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } t \in (-\infty, -2) \cup \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

$$g) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ e^{-t} \sin t & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

$$h) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > \pi \end{cases}$$

$$i) f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{dla } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t^2 & \text{dla } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |t| > 1 \end{cases}$$

$$j) f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \\ 1-t & \text{dla } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{dla } t < -\frac{\pi}{2} \vee t \geq 1 \end{cases}$$

$$k) f(t) = \begin{cases} (t+\pi)^2 & \text{dla } -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi^2 - t^2 & \text{dla } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi \end{cases} \quad l) f(t) = \begin{cases} a, & -1 < t < 0 \\ b, & 0 < t < 1 \\ c, & |t| > 1 \end{cases}.$$

10. Wyznaczyć dowolną metodą cosinusową i sinusową transformatę Fouriera podanych funkcji:

$$a) f(t) = I(t) - I(t - 2t_0), \quad t_0 > 0 \quad b) f(t) = I(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$c) f(t) = I(t) \cdot e^{-3t} \quad d) f(t) = \begin{cases} \sin at & \text{dla } 0 \leq t < \frac{\pi}{a}, \quad a > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > \frac{\pi}{a} \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad t < 0 \vee t > 1 \end{cases} \quad f) f(t) = t^2 \cdot I(t).$$

11. Dana jest funkcja $f(t) = I(t) - I(t-4)$, $t \in R$

- narysować wykres tej funkcji i przedstawić funkcję $f(t)$ za pomocą wzoru całkowego Fouriera w postaci rzeczywistej oraz w postaci zespolonej;
- wyznaczyć transformatę Fouriera;
- wyznaczyć widmo amplitudowe $A(\omega)$ oraz wykazać, że jest ono funkcją ciągłą na całej osi rzeczywistej i sporządzić wykres funkcji $A(\omega)$;
- wyznaczyć widmo fazowe $\theta(\omega)$ (podać dziedzinę) i sporządzić wykres $\theta(\omega)$.

12. Wyznaczyć widmo (\mathcal{F} -transformatę), widmo amplitudowe oraz widmo fazowe dla następujących funkcji:

$$a) f(t) = I(t) - I(t-2) \quad b) f(t) = I(t+2) - I(t)$$

$$c) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < t_0 \\ 0 & \text{dla } |t| > t_0, \quad t_0 > 0 \end{cases} \quad d) f(t) = I(t+3) - I(t)$$

$$e) f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cdot I(t) \quad f) f(t) = e^{-3t} \cdot I(t)$$

g) $f(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \cdot I(t)$

h) $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}, a > 0.$

Narysować wykresy funkcji oraz wykresy widma amplitudy i widma fazy.

13. Wyznaczyć widmo, widmo amplitudowe i widmo fazowe dla danych funkcji ($a > 0$):

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 1, t > 1 \\ t & \text{dla } 0 < t \leq 1 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > \pi \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} \sin at & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{a} \\ 0 & \text{dla } t < 0 \vee t > \frac{\pi}{a} \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -a \vee t \geq a \\ t+a & \text{dla } -a \leq t < 0 \\ -t+a & \text{dla } 0 \leq t < a \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} e^t & \text{dla } t < 0 \\ 0 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$

14. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = e^{-ct^2}$, $c > 0$, a następnie sporządzić jej wykres dla kilku wartości parametru c .

15. Udowodnić:

- twierdzenie 7.6.4 o przesunięciu zespolonym,
- twierdzenie 7.6.5 o przesunięciu rzeczywistym.

16. Udowodnić:

- twierdzenie 7.6.7 o \mathcal{F} -transformacji całki,
- twierdzenie 7.6.8 o zmianie skali.

17. Zbadać, jaki wpływ na widmo: a) amplitudowe, b) fazowe, ma przesunięcie w argumencie funkcji $f(t)$. Rozpatrzyć w tym celu funkcję $f(t) = I(t - t_0) - I(t - t_0 - 2)$.

18. Przez bezpośrednie obliczenie porównać wartości transformaty $F_1(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, którą otrzymujemy przez zastosowanie \mathcal{F} -przekształcenia do funkcji

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{dla } t < 0 \\ e^{-at} & \text{dla } t \geq 0, a > 0 \end{cases}$$

z wartościami transformaty $F_2(i\omega)$ otrzymanej przez \mathcal{F} -przekształcenie jej pochodnej, tj. $F_2(i\omega) = \mathcal{F}[f'(t)]$. Wyciągnąć odpowiedni wniosek i określić zależność między tymi transformatami.

19. Korzystając z odpowiednich własności przekształcenia Fouriera (tw. o przesunięciu rzeczywistym, o \mathcal{F} -transformacie całki, o pochodnej transformaty itd.) oraz z wyników zadania 9 i 11, obliczyć \mathcal{F} -transformaty funkcji

a) $g(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \cdot I(t-1)$

b) $g(t) = e^{-3\left(t-\frac{3}{2}\right)} \cdot I\left(t-\frac{3}{2}\right)$

c) $g(t) = [I(t) - I(t-4)] \cdot t$

d) $g(t) = [I(t+3) - I(t)] \cdot t$

e) $g(t) = I(t+3) - 2 \cdot I(t) - I(t-3)$

f) $g(t) = -t^2 [I(t+1) - I(t-1)]$

g) $g(t) = t^2 e^{-\frac{3}{2}t} \cdot I(t)$

h) $g(t) = t^n e^{-at} \cdot I(t), \quad a > 0, n \in N$

i) $g(t) = \begin{cases} 3 - |t| & \text{dla } |t| \leq 3 \\ 0 & \text{dla } |t| > 3 \end{cases}$

j) $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \left|t - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{dla } \left|t - \frac{3}{2}\right| > \frac{3}{2} \end{cases}$

20. Jedną z metod graficznego przedstawienia transformaty Fouriera $F(i\omega)$ polega na wykreśleniu krzywej o równaniu stanowiącym związek między częścią rzeczywistą $X = \operatorname{Re}[F(i\omega)]$ i częścią urojoną $Y = \operatorname{Im}[F(i\omega)]$ tej transformaty. Dla funkcji $f(t) = e^{-at} \cdot I(t), a > 0$ znaleźć równanie takiej krzywej i wykonać jej rysunek. Zbadać jak porusza się punkt na tej krzywej, gdy parametr ω rośnie od $-\infty$ do $+\infty$.

21. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$f(t) = \frac{1}{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}, \quad a, b > 0, a \neq b$$

- a) rozkładając funkcję $f(t)$ na sumę ułamków prostych i skorzystać z wyników zadania 12h;
 b) korzystając z wyników zadania 12h oraz ze wzoru (7.7.5).

22. Wiadomo, że $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(i\omega) = 0$ [wzór (7.6.1)]. Sprawdzić ten warunek na wybranych przykładach.

23. Obliczyć transformaty Fouriera funkcji

$$\text{a) } g(t) = \frac{t}{(t^2 + a^2)^2} \qquad \text{b) } h(t) = \frac{1}{(t^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$$

korzystając z wyniku zadania 12h oraz z odpowiednich własności \mathcal{F} -przekształcenia.

24. Obliczyć splot $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$ funkcji:

$$\text{a) } f_1(t) = f_2(t) = \mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t - 2)$$

$$\text{b) } f_1(t) = f_2(t) = \mathbf{I}(t + 1) - \mathbf{I}(t - 2)$$

$$\text{c) } f_1(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad f_2(t) = \mathbf{I}(t)$$

$$\text{d) } f_1(t) = e^{-at} \cdot \mathbf{I}(t), \quad f_2(t) = e^{-bt} \cdot \mathbf{I}(t), \quad a > 0, b > 0,$$

a następnie wyznaczyć transformatę splotu $\mathcal{F}[h(t)] = H(i\omega)$ i sprawdzić równość (7.7.4) (tw. o \mathcal{F} -transformacie splotu).

25. Korzystając ze wzoru $F(i\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}$ obliczyć:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} e^{-ct^2} \sin \omega t \, dt, \quad c > 0 \qquad \text{b) } \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-ct^2} \sin \omega t \, dt, \quad c > 0$$

$$\text{c) } \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-ct^2} \cos \omega t \, dt, \quad c > 0 \qquad \text{d) } \mathcal{F}[t \cdot e^{-ct^2}].$$

26. Wyznaczyć funkcję $f(t)$, jeżeli znamy jej transformatę

$$F(i\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad a > 0.$$

Odpowiedzi:

$$1. \text{ a) } \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \cos \omega t \, d\omega, \quad \text{b) } \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^2} \sin \omega t \right] d\omega,$$

$$\text{c) } \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi \omega}{\omega} \cos \omega t + \frac{4}{\omega} \sin^2 \frac{\pi \omega}{2} \sin \omega t \right) d\omega,$$

$$d) \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{a}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t \right) d\omega,$$

$$e) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \pi \omega) \cos \omega t \, d\omega,$$

$$f) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2} [(\omega \sin \omega + \cos \omega - 1) \cos \omega t + (\sin \omega - \omega \cos \omega) \sin \omega t] d\omega,$$

$$g) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} \sin \omega t \, d\omega, \quad h) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega t \, d\omega.$$

$$2. \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\omega \pi}{2} \cos \omega \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}{1 - \omega^2} d\omega, \quad J_1 = \frac{\pi}{2}, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

$$3. a) e^{-at} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega, \quad e^{-at} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t \, d\omega,$$

$$b) h(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega, \quad h(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 3\omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega,$$

$$c) g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega t \, d\omega, \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^2} \sin \omega t \, d\omega,$$

$$d) p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \pi \omega}{1 - \omega^2} \cos \omega t \, d\omega, \quad p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega(1 + \cos \pi \omega) \sin \omega t}{\omega^2 - 1} d\omega,$$

$$e) f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \sin \omega t \, d\omega, \quad f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 \frac{\omega \pi}{2}}{1 - \omega^2} \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0.$$

$$4. a) f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi \omega}{2}}{1 - \omega^2} \cos \omega t \, d\omega, \quad t \in R. \quad \text{Dla } t = 0 \quad f(0) = 1 \quad \text{więc } J = \frac{\pi}{2};$$

$$b) A(\omega) = 2 \left| \frac{\cos \frac{\pi \omega}{2}}{1 - \omega^2} \right|, \quad \omega \neq \pm 1, \quad A(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = \pm 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm 1} A(\omega) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{c) } D_{\theta(\omega)} = \{\omega \in \mathbb{R} : |\omega| \neq 3 + 2k, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |\omega| < 3, \quad 3 + 2k < |\omega| < 5 + 2k, \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ \pi \operatorname{sgn} \omega & \text{dla } 3 + 2k < |\omega| < 5 + 2k, \quad k = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2} \sin \omega t \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}; \quad f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{więc } J = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{b) } A(\omega) = \frac{2}{\omega^2} |\sin \omega - \omega \cos \omega|, \quad \omega \neq 0, \quad A(0) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 0;$$

$$\text{c) } D_{\theta(\omega)} = \{\omega \in \mathbb{R} : \sin \omega \neq \omega \cos \omega\}, \quad \cos \theta(\omega) = 0, \\ \sin \theta(\omega) = \operatorname{sgn}(\omega \cos \omega - \sin \omega).$$

Różnica $\omega \cos \omega - \sin \omega$ zmienia znak w punktach ω_k , będących pierwiastkami równania $\operatorname{tg} \omega = \omega$, które nie należą do dziedziny. Z ilustracji

graficznej odczytujemy, że $\omega_k \in \left(\pi k, \pi k + \frac{\pi}{2} \right)$, $k = 1, 2, \dots$. Zatem

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{dla } \omega \in (\omega_k, \omega_{k+1}), \quad k = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } \omega \in (\omega_k, \omega_{k+1}), \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\omega} e^{i\omega \left(t - \frac{1}{2}\right)} \, d\omega, \quad \text{b) } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a - i\omega}{\omega^2 + a^2} e^{-i\omega t} \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i\pi\omega} + 1)e^{-i\omega t}}{1 + \omega^2} \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{d) } \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega a}{2}}{\omega^2} e^{-i\omega t} \, d\omega,$$

$$\text{e) } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} \omega}{1 - \omega^2} e^{-i\omega t} \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$9. \text{ a) } \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \text{b) } \frac{1}{a - i\omega} = \frac{a + i\omega}{a^2 + \omega^2}, \quad \text{c) } 4i \frac{\sin^2 4\omega}{\omega},$$

$$\text{d) } \frac{2i}{\omega^2} (\omega \cos \omega - \sin \omega), \quad \text{e) } \frac{-2\omega^2 \sin \omega - 4\omega \cos \omega + 4 \sin \omega}{\omega^3},$$

$$\begin{aligned} \text{f)} & \frac{3 - e^{2\omega i} (2e^{-3\omega i} + 1)}{2\omega^2}, \quad \text{g)} \frac{\sin \omega - \cos \omega + e + i(\cos \omega + \sin \omega - e\omega)}{e(1 + \omega^2)}, \\ \text{i)} & \frac{1}{\omega^2} (1 - e^{i\omega} - 2e^{-i\omega}) - \frac{2i}{\omega^3} (1 - e^{-i\omega}), \quad \text{j)} \frac{i\omega - e^{\pi\omega}}{1 - \omega^2} - \frac{e^{-i\omega} + i\omega - 1}{\omega^2}, \\ \text{k)} & \frac{4\pi\omega - 8i}{\omega^3} \sin^2 \frac{\pi\omega}{2} - \frac{2\pi}{\omega^2} (2\cos \pi\omega + i\sin \pi\omega), \quad \text{l)} \frac{b(1 - e^{-i\omega}) - a(1 - e^{i\omega})}{i\omega}. \end{aligned}$$

$$10. \text{ a)} F_c(\omega) = \sin \frac{2\omega t_0}{\omega}, \quad F_s(\omega) = \frac{1 - \cos 2\omega t_0}{\omega}; \quad \text{b)} F_c(\omega) = \frac{2}{1 + 4\omega^2},$$

$$F_s(\omega) = \frac{4\omega}{1 + 4\omega^2}; \quad \text{c)} F_c(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2}, \quad F_s(\omega) = \frac{\omega}{9 + \omega^2};$$

$$\text{d)} F_c(\omega) = \begin{cases} \frac{2\omega}{\omega^2 - a^2} \cos \frac{\pi\omega}{a}, & \omega \neq a \\ \frac{1}{4\omega}, & \omega = a \end{cases}, \quad F_s(\omega) = \begin{cases} \frac{a}{a^2 - \omega^2} \sin \frac{\pi\omega}{a}, & \omega \neq a \\ \frac{\pi}{2\omega}, & \omega = a \end{cases},$$

$$\text{e)} F_s(\omega) = \frac{2\sin \omega}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} - \left(\frac{1}{\omega} - \frac{2}{\omega^3} \right) \cos \omega, \quad \text{f)} F_s(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega}.$$

$$11. \text{ a)} f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin 4\omega}{\omega} \cos \omega t + \frac{2}{\omega} \sin^2 2\omega \sin \omega t \right) d\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} e^{i(t-2)\omega} d\omega;$$

$$\text{b)} F(i\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-2i\omega} \sin 2\omega = \frac{\sin 4\omega}{\omega} + i \frac{\cos(4\omega - 1)}{\omega}, \quad \omega \neq 0;$$

$$\text{c)} A(\omega) = 2 \left| \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right|, \quad \omega \neq 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 4;$$

$$\text{d)} D_{\theta(\omega)} = \left\{ \omega : \omega \neq \frac{1}{2} k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -2\omega + 2k\pi & \text{dla } k\pi < \omega < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ -2\omega + (2k+1)\pi & \text{dla } \pi(k+1) < \omega < \frac{3}{2}\pi + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$12. a) F(i\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega} \sin \omega, \quad A(\omega) = 2 \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|; \quad b) F(i\omega) = \frac{2}{\omega} e^{i\omega} \sin \omega,$$

$$A(\omega) = 2 \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|; \quad c) F(i\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega t_0, \quad A(\omega) = 2 \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right|,$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 2n \frac{\pi}{t_0} < \omega < (2n+1) \frac{\pi}{t_0} \\ \pi & \text{dla } (2n+1) \frac{\pi}{t_0} < \omega < 2(n+1) \frac{\pi}{t_0} \end{cases};$$

$$d) F(i\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-\frac{3}{2}i\omega} \sin \frac{3}{2}\omega = \frac{\sin 3\omega}{\omega} + i \frac{1 - \cos 3\omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0,$$

$$A(\omega) = 2 \left| \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\omega} \right|, \quad \omega \neq 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 3, \quad \operatorname{tg} \theta(\omega) = \operatorname{tg} \frac{3}{2}\omega \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\omega} \right);$$

$$e) F(i\omega) = \frac{2}{1+2\omega i} = \frac{2}{1+4\omega^2} - i \frac{4\omega}{1+4\omega^2}, \quad A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{1+4\omega^2}}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = 0, \quad A_{\max} = A(0) = 2;$$

$$\text{punkty przegięcia: } P_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right), \quad P_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} 2\omega \quad \text{lub} \quad \theta(\omega) = -\operatorname{arcsin} \frac{2\omega}{\sqrt{1+4\omega^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta(\omega) < \frac{\pi}{2}.$$

$$f) F(i\omega) = \frac{1}{3+\omega i} = \frac{3}{9+\omega^2} - i \frac{\omega}{9+\omega^2}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = 0, \quad A_{\max} = A(0) = \frac{1}{3}; \quad \text{punkty przegięcia: } P_{1,2} \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{9} \right);$$

$$\theta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{3}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta(\omega) < \frac{\pi}{2}.$$

$$g) F(i\omega) = \frac{2}{3+2i\omega} = \frac{6}{9+4\omega^2} - i \frac{4\omega}{9+4\omega^2}, \quad A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{9+4\omega^2}},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = 0, \quad A_{\max} = A(0) = \frac{2}{3}; \quad \text{punkty przegięcia: } P_{1,2} \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{2\sqrt{6}}{9} \right);$$

$$\theta(\omega) = -\arcsin \frac{2\omega}{\sqrt{9+4\omega^2}}.$$

$$\text{h) } F(i\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad A(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad \theta(\omega) \equiv 0.$$

$$13. \text{ a) } F(i\omega) = \frac{\cos \omega - 1}{\omega^2} + \frac{\sin \omega}{\omega} + i \left(\frac{\cos \omega}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega^2} \right),$$

$$A(\omega) = |F(i\omega)| = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{2 + \omega^2 - 2\cos \omega - 2\omega \sin \omega},$$

$$\operatorname{tg} \theta(\omega) = \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\cos \omega - 1 - \sin \omega};$$

$$\text{b) } F(i\omega) = -\frac{1}{1-\omega^2} (e^{i\pi\omega} + 1); \quad A(\omega) = |F(i\omega)| = 2 \left| \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2} \right|, \quad \operatorname{tg} \theta(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2};$$

$$\text{c) } F(i\omega) = -\frac{a}{a^2 - \omega^2} \left(e^{\frac{i\pi\omega}{a}} + 1 \right), \quad \omega \neq a; \quad F(i\omega) = \frac{2\pi}{a} i, \quad \omega = a;$$

$$A(\omega) = |F(i\omega)| = \frac{2a}{|a^2 - \omega^2|} \left| \cos \frac{\pi\omega}{a} \right|, \quad \omega \neq a; \quad \operatorname{tg} \theta(\omega) = \frac{\sin \frac{\pi\omega}{a}}{\cos \frac{\pi\omega}{a} - 1}, \quad \omega \neq a;$$

$$\theta(\omega) = 0 \quad \text{dla } \omega = a.$$

$$\text{d) } F(i\omega) = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{a\omega}{2}, \quad A(\omega) = |F(i\omega)| = F(i\omega), \quad \theta(\omega) = 0$$

$$\text{e) } F(i\omega) = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \cos \theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\sin \theta(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

$$14. F(i\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}. \quad 17. F(i\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-i(t_0+1)}.$$

$$19. \text{ a) } G(i\omega) = \frac{2e^{-\omega i}}{1+2\omega i}, \quad \text{b) } G(i\omega) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\omega i}}{3+\omega i},$$

$$\text{c) } \frac{1}{\omega^2} [4\omega \sin 4\omega + \cos 4\omega - 1 + i(4\omega \cos 4\omega - \sin 4\omega)],$$

$$\text{d) } \frac{1}{\omega^2} [1 - \cos 3\omega - 3\omega \sin 3\omega + i(3\omega \cos 3\omega - \sin 3\omega)], \quad \text{e) } 4i \frac{\sin^2 \frac{3}{2}\omega}{\omega},$$

$$\text{f) } \frac{2}{\omega^3} (2\sin \omega - \omega^2 \sin \omega - 2\omega \cos \omega), \quad \text{g) } \frac{8\omega}{(3+2i\omega)^3}, \quad \text{h) } \frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}},$$

$$\text{i) } \frac{\sin^2 \frac{3}{2}\omega}{\omega^2}.$$

$$20. \left(X - \frac{1}{2a}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4a^2} - \text{okrag.} \quad 21. \frac{\pi}{ab(b^2 - a^2)} (be^{-a|\omega|} - ae^{-b|\omega|}).$$

$$23. \text{a) } G(i\omega) = \frac{\pi}{2c^3} (1 + c|\omega|) e^{-|\omega|c}, \quad \text{b) } H(i\omega) = \frac{-i\pi\omega}{2c} e^{-|\omega|c}.$$

$$24. \text{a) } h(t) = \begin{cases} 2 - |t-2| & \text{dla } |t-2| \leq 2 \\ 0 & \text{dla } |t-2| > 2 \end{cases}, \quad H(i\omega) = \frac{4}{\omega^2} e^{-2i\omega} \sin^2 \omega;$$

$$\text{b) } h(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{dla } |t| \leq 2 \\ 0 & \text{dla } |t| > 2 \end{cases}, \quad H(i\omega) = \frac{4 \sin^2 \omega}{\omega^2}; \quad \text{c) } h(t) = \frac{\pi}{2} + \arctg t;$$

$$\text{d) } h(t) = \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \cdot \mathbf{1}(t), \quad H(i\omega) = \frac{1}{(a+i\omega)(b+i\omega)}.$$

$$25. \text{b) } \frac{\omega}{4c} \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}, \quad \text{d) } \frac{-i\omega}{2c} \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}. \quad 26. f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Dodatek

Tablica 1. Własności przekształcenia Laplace'a

Tablica 2. Transformaty Laplace'a

Tablica 3. Własności przekształcenia Fouriera

Tablica 4. Transformaty Fouriera

Tablica 1. Własności przekształcenia Laplace'a

Lp.	Oznaczenia: $\mathcal{L}: f(t) \rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}: F(s) \rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
1	Linijowość: $\mathcal{L}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + A_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$
2	Różniczkowanie w dziedzinie czasu (transformata pochodnej): $\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+)$; $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)$
3	Transformata całki (całkowanie w czasie): $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$
4	Różniczkowanie transformaty (mnożenie przez czas): $\mathcal{L}[-t \cdot f(t)] = \frac{d}{ds}[F(s)]$; $\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
5	Całkowanie transformaty (dzielenie przez czas): $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(p) dp$
6	Zmiana skali (podobieństwo): $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(sa)$; $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
7	Przesunięcie zespolone (mnożenie przez funkcję wykładniczą): $\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a)$
8	Przesunięcie rzeczywiste (przesunięcie w czasie): $\mathcal{L}[f(t-t_0)I(t-t_0)] = e^{-st_0} \cdot F(s)$; $\mathcal{L}[f(t+t_0)I(t)] = e^{t_0s} \left[F(s) - \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt \right]$
9	Transformata splotu: $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$
10	Twierdzenie graniczne: a) granica transformaty w nieskończoności: $\lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ b) warunki początkowe: $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$, pod warunkiem, że granica $f(0^+)$ istnieje c) warunki graniczne: $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, pod warunkiem, że $sF(s)$ jest na osi urojonej $i\omega$ i po prawej stronie płaszczyzny zespolonej s i granica $f(\infty)$ istnieje

Tablica 2. Transformaty Laplace'a

Lp.	Oryginał $f(t)$	Transformata $F(s)$
1.	$I(t)$	$\frac{1}{s}$
2.	$I(t-t_0)$	$\frac{1}{s}e^{-st_0}, t_0 > 0$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7.	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
8.	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
9.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
10.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
11.	$\sin(at-b)$	$\frac{a}{s^2+a^2}e^{-\frac{b}{a}s}$
12.	$\cos(at-b)$	$\frac{s}{s^2+a^2}e^{-\frac{b}{a}s}$
13.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
14.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15.	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$

16.	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$
17.	$e^{-bt} \sinh at$	$\frac{a}{(s+b)^2 - a^2}$
18.	$e^{-bt} \cosh at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2 - a^2}$
19.	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
20.	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
21.	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
22.	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
23.	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
24.	$t \sinh at$	$\frac{2as}{(s^2 - a^2)^2}$
25.	$t \cosh at$	$\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$
26.	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{(s^2 + 4a^2)s}$
27.	$\cos^2 at$	$\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$
28.	$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$
29.	$\sin at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$
30.	$\cos at - \frac{1}{2}at \sin at$	$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}$

31.	$at \cosh at - \sinh at$	$\frac{2a^3}{(s^2 - a^2)^2}$
32.	$e^{-bt} (\sin at - at \cos at)$	$\frac{2a^3}{[(s+b)^2 + a^2]^2}$
33.	$\sinh at - \sin at$	$\frac{2a^3}{s^4 - a^4}$
34.	$\cosh at - \cos at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$
35.	$\sinh at \cdot \sin at$	$\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$
36.	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{s^2 (s^2 + a^2)}$
37.	$\sinh at - at$	$\frac{a^3}{s^2 (s^2 - a^2)}$
38.	$\sin at + at \cos at$	$\frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}$
39.	$\sinh at + \sin at$	$\frac{2as^2}{s^4 - a^4}$
40.	$\cosh at + \cos at$	$\frac{2s^3}{s^4 - a^4}$
41.	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \alpha > -1$
42.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
43.	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+a}}$
44.	$\delta(t)$	1
45.	$\delta(t-t_0)$	$e^{-st_0}, t_0 > 0$
46.	$\delta^n(t)$	s^n
47.	$\delta^n(t-t_0)$	$s^n \cdot e^{-st_0}$

Tablica 3. Własności przekształcenia Fouriera

Lp.	Oznaczenia: $\mathcal{F} : f(t) \rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = F(i\omega)$ $\mathcal{F}^{-1} : F(i\omega) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(i\omega)] = f(t)$
1	Liniowość: $\mathcal{F}[A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] = A_1 \cdot \mathcal{F}[f_1(t)] + A_2 \cdot \mathcal{F}[f_2(t)]$
2	Różniczkowanie transformaty (mnożenie przez czas): $\mathcal{F}[t \cdot f(t)] = -i \cdot F'(i\omega)$; $\mathcal{F}[t^k \cdot f(t)] = \frac{1}{(-i)^k} \cdot \frac{d^k F(i\omega)}{d\omega^k}, k = 1, 2, \dots, n$
3	Przesunięcie zespolone (mnożenie przez funkcję wykładniczą): $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} \cdot f(t)] = F(i(\omega - \omega_0))$; $\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 t} \cdot f(t)] = F(i(\omega + \omega_0))$
4	Przesunięcie rzeczywiste: $\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \cdot F(i\omega)$
5	Transformata pochodnej (różniczkowanie w dziedzinie czasu): $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \cdot F(i\omega)$; $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \cdot F(i\omega)$
6	Transformata całki: $\mathcal{F}\left[\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{i\omega} F(i\omega)$
7	Zmiana skali: $a = \text{const} \neq 0$ $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{ a } F\left(\frac{i\omega}{a}\right)$; $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a F(ai\omega)$
8	Transformata splotu w przedziale $(-\infty, +\infty)$: $\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau\right] = F(i\omega) \cdot G(i\omega)$
9	Transformata iloczynu: $\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = F(i\omega) * G(i\omega)$
10	Wzór Parsevalla: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) ^2 d\omega$
11	Transformata $F(i\omega)$ jest funkcją ciągłą i ma granicę $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(i\omega) = 0$

Tablica 4. Transformaty Fouriera

Lp.	Funkcja $f(t)$	\mathcal{F} -transformata – $F(i\omega)$
1	$I(t) \cdot e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{a+i\omega} = \frac{1}{a^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{a+i\omega}$
2	$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{dla } t < 0 \\ 0 & \text{dla } t > 0 \end{cases}, a > 0$	$\frac{1}{a-i\omega}$
3	$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
4	$\text{sgn } t \cdot e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2\omega i}{a^2 + \omega^2}$
5	$f_T(t) = I(t) - I(t-T), T > 0$	$2 \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-\frac{i\omega T}{2}}$
6	$I(t+T) - I(t-T)$	$2 \frac{\sin T\omega}{\omega}$
7	$I(t+T) - 2 \cdot I(t) + I(t-T), T > 0$	$4i \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega}$
8	$I(t+T) - I(t), T > 0$	$\frac{2}{\omega} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \sin \frac{\omega T}{2}$
9	$e^{-ct^2}, c > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\omega^2}{4c}}$
10	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
11	$\frac{1}{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}, a > 0, b > 0, a \neq b$	$\frac{\pi}{ab(b^2 - a^2)} (be^{-a \omega } - ae^{-b \omega })$
12	$\frac{\sin at}{t}, a > 0$	$\begin{cases} \pi & \text{dla } \omega < a \\ 0 & \text{dla } \omega > a \end{cases}$
13	$t^n e^{-at} \cdot I(t), n \in N, a > 0$	$\frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}$

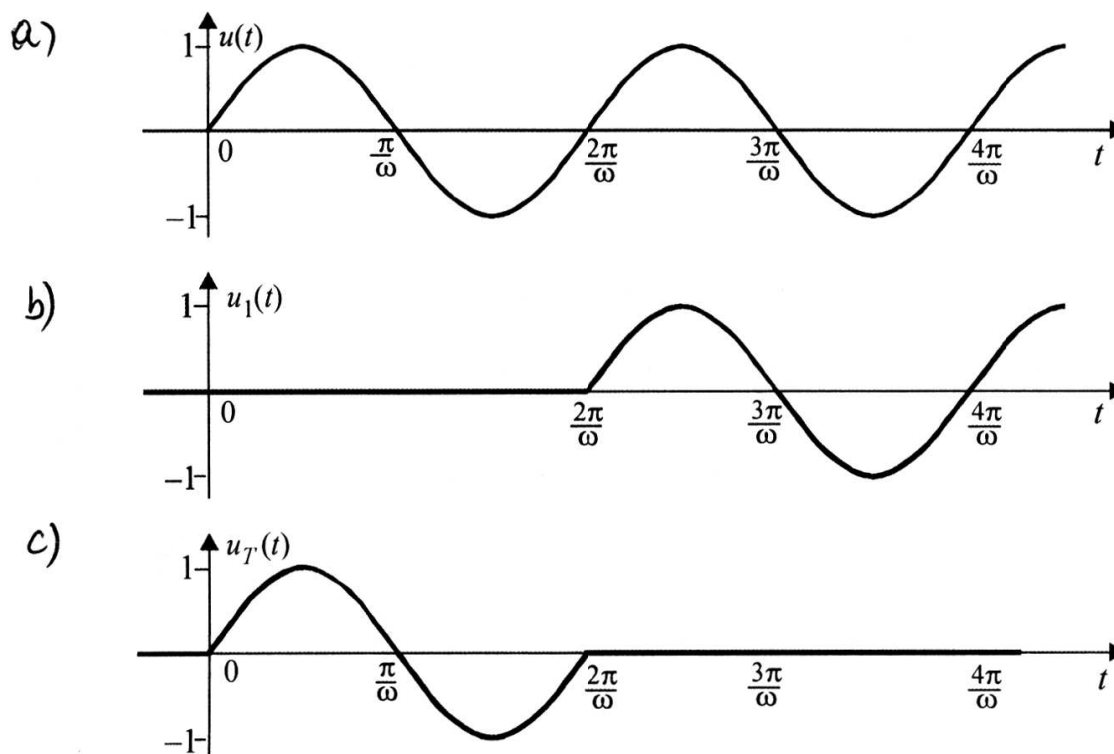
14	$\frac{\sin at}{t} \cdot I(t), a > 0$	$-\operatorname{arctg} \frac{ai}{\omega}$
15	$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
16	$\delta(t)$	1
17	1, $t \in R$	$2\pi\delta(\omega)$
18	$I(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
19	$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
20	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
21	$\sin \omega_0 t$	$i\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
22	$\delta(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
23	$\delta^{(k)}(t)$	$(i\omega)^k$
24	$\delta^{(k)}(t - t_0)$	$(i\omega)^k e^{-i\omega t_0}$

$$e^{-\frac{i\omega T}{2}} \leftrightarrow \exp\left(-\frac{i\omega T}{2}\right)$$

Literatura

1. Bierski F.: Funkcje zespolone. Szeregi i przekształcenia Fouriera. Przekształcenia całkowite Laplace'a. Wyd. AGH, Kraków 1976.
2. Bracewell R.: Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania. WNT, Warszawa 1968.
3. Brown M.: Differential Equations and Their Applications. Springer-Verlag 1983.
4. Director S.W., Rohrer R.A.: Podstawy teorii układów elektrycznych. PWN, Warszawa 1976.
5. Doetsch G.: Praktyka przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1964.
6. Hryniewicz Z.: On the range of applicability of Bourret approximation. Applied Mathematical Modelling (Elsevier Science Inc.), 21, 247-253, 1997.
7. Hryniewicz Z.: Dynamic response of a bar embedded in semi-infinite medium: stochastic approach. Acta Mechanica (Springer Verlag), 143, 141-153, 2000.
8. Kaćki E., Siewierski L.: Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami. PWN, Warszawa 1985.
9. Kontorowicz M.I.: Rachunek operatorowy. PWN, Warszawa 1976.
10. Kuratowski K.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1973.
11. Leitner R., Zacharski J.: Zarys matematyki wyższej dla studentów, cz. III. WNT, Warszawa 1998.
12. Leja F., Funkcje zespolone. PWN, Warszawa 1967.
13. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1981.
14. Osowski J., Szabatin J.: Podstawy teorii obwodów, t. III. WNT, Warszawa 1998.
15. Otto E.: Matematyka. t. III, PWN, Warszawa 1974.

16. Piskórz K.: Przekształcenia całkowe. Wydawnictwo Uczelniane WSM, Gdynia 1984.
17. Pogorzelski W.: Analiza matematyczna, t. IV. PWN, Warszawa 1962.
18. Szmydt Z.: Transformacja Fouriera i równania różniczkowe. PWN, Warszawa 1972.
19. Tarnawski E.: Matematyka, cz. 2. PWN, Warszawa 1967.
20. Wagner K.W.: Rachunek operatorowy i przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1960.
21. Węgrzyn S.: Rachunek operatorowy. PWN, Warszawa 1960.
22. Wolfram S.: The Mathematica Book. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
23. Zemanian A.H.: Teoria dystrybucji i analiza transformat. PWN, Warszawa 1969.
24. Żakowski W.: Matematyka, ćwiczenia problemowe dla politechnik. WNT, Warszawa 1987.
25. Żakowski W., Leksiński W.: Matematyka, cz. IV. WNT, Warszawa 1984.



Rys. 2.22. Ilustracja uzyskania funkcji $u_T(t)$ jako różnicy sinusoidy pierwotnej $u(t) = I(t) \cdot \sin \omega t$ i sinusoidy $u_1(t) = I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \cdot \sin \omega\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)$ przesuniętej równoległe wzdłuż osi Ot o $\frac{2\pi}{\omega}$ jednostek w prawo

D r u g i s p o s ó b . Stosując obustronnie przekształcenie Laplace'a do równości (2.6.27), a następnie korzystając kolejno z twierdzenia 2.1.1 o liniowości, twierdzenia 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym, ze wzoru (2.6.3) oraz z faktu, że

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ otrzymamy}$$

$$\mathcal{L}[u_T(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] - \mathcal{L}\left[\sin \omega\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-\frac{2\pi}{\omega}s}.$$

Stąd szukana transformata $U_T(s)$ napięcia $u_T(t)$ wyraża się wzorem

$$U_T(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}s}\right) \quad (2.6.29)$$

T r z e c i s p o s ó b . W oparciu o wzór (2.6.15) funkcję $u_T(t)$ przedstawimy w postaci

$$u_T(t) = u(t) \cdot f_w(t),$$

gdzie sinusoida pierwotna $u(t)$ określona jest wzorem (2.6.25), zaś funkcja wydzielażąca $f_w(t)$ określona jest zgodnie ze wzorem (2.6.14)

$$f_w(t) = I(t) - I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (2.6.30)$$

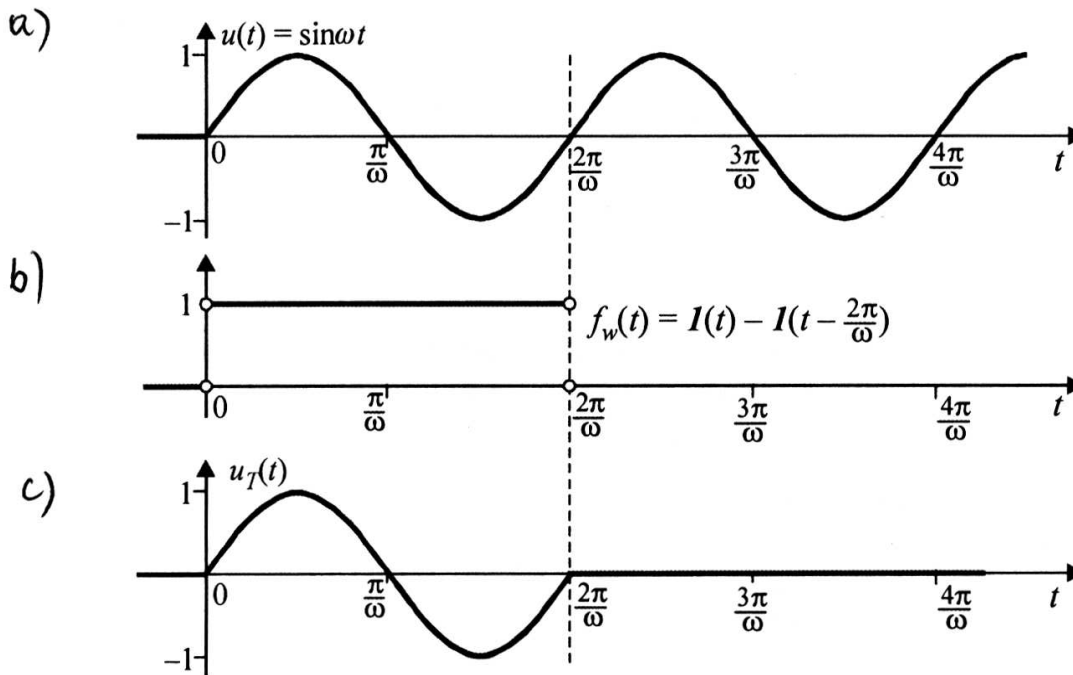
która „wygasi” przebieg (2.6.25) po okresie czasu $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

A więc funkcję (2.6.26) można przedstawić wzorem

$$u_T(t) = \left(I(t) - I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \right) \cdot \sin \omega t \quad (2.6.31)$$

lub w postaci

$$u_T(t) = I(t) \cdot \sin \omega t - I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \sin \omega t \quad (2.6.32)$$



Rys. 2.23. Ilustracja uzyskania żadanego przebiegu napięcia $u_T(t)$ danego wzorem (2.6.32) w oparciu o wykorzystanie funkcji wydzielażącej $f_w(t)$ danej wzorem (2.6.30)

Transformatę funkcji $u_T(t)$ wyznaczmy stosując obustronnie przekształcenie Laplace'a do równości (2.6.32). Zauważmy jednak, że funkcja

$g(t) = I\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \cdot \sin \omega t$ nie jest funkcją przesuniętą w myśl wzoru (2.6.2)

i dlatego nie można do niej stosować wzoru (2.6.3) twierdzenia o przesunięciu rzeczywistym. Jeśli jednak skorzystamy ze wzorów redukcyjnych i z nieparzystości funkcji sinus, to łatwo uzyskać zależność

$$\sin \omega t = -\sin(2\pi - \omega t) = \sin(\omega t - 2\pi) = \sin \omega \left(t - \frac{2\pi}{\omega} \right).$$

Uwzględniając tę zależność we wzorze (2.6.32) uzyskamy tę samą postać jak w (2.6.27) i dalej postępujemy tak jak w sposobie drugim.

U w a g a . Wyznaczenie transformaty funkcji $u_T(t)$ określonej zależnością (2.6.31) bezpośrednio z definicji \mathcal{L} -transformaty sprowadza się do pierwszego sposobu, tj. do obliczenia całki danej wzorem (2.6.28). ■

Niekiedy występuje potrzeba wykonania \mathcal{L} -przekształcenia funkcji f zadanej w postaci szeregu. Może mieć to miejsce zarówno w tych przypadkach, kiedy celowo rozwijamy daną funkcję w szereg, aby ułatwić wykonanie przekształcenia, jak również wtedy, gdy postać szeregu jest narzucona. Podstawowe znaczenie w takich przypadkach ma zagadnienie możliwości wykonywania \mathcal{L} -przekształcenia danego szeregu wyraz po wyrazie.

Założmy, że oryginał $f(t)$ określony jest w postaci szeregu

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \quad (2.6.33)$$

zbieżnego dla $t \geq 0$, gdzie $f_k(t)$ są oryginałami o wskaźniku wzrostu λ_0 .

Uwaga 2.6.7. Warunki wystarczające do wykonania \mathcal{L} -przekształcenia szeregu (2.6.33) ograniczymy jedynie do następującego przypadku:

jeżeli szereg (2.6.33) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0, +\infty \rangle$, to \mathcal{L} -przekształcenie szeregu (2.6.33) można wykonać wyraz po wyrazie, tzn.

$$\mathcal{L} \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}[f_k(t)] \quad (2.6.34)$$

a więc

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(s) \quad (2.6.35)$$

dla $\operatorname{Re} s > \lambda_0$.

Pełną wypowiedź twierdzenia o \mathcal{L} -transformacie szeregu i jego dowód można znaleźć w literaturze, np. [13, 19, 20].

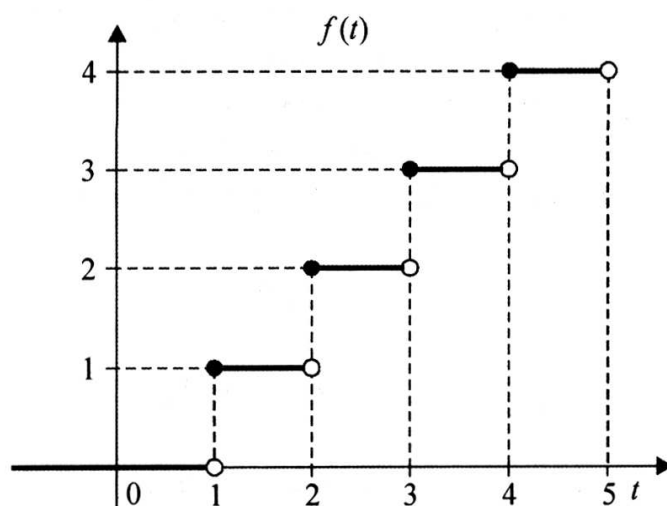
Przykład 2.35. Wyznaczyć transformatę funkcji $f(t) = I(t) \cdot E(t)$ – entier, tzw. funkcja „schodkowa”.

R o z w i ą z a n i e . Funkcję tę, o wykresie podanym na rysunku 2.24, można określić wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ k & \text{dla } k \leq t < (k+1) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Korzystając z funkcji skoku jednostkowego $I(t)$ i jej odpowiednich przesunięć rzeczywistych (2.6.1) funkcję (1) można przedstawić w postaci sumy nieskończonej

$$f(t) = I(t-1) + I(t-2) + I(t-3) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} I(t-k) \quad (2)$$



Rys. 2.24. Wykres funkcji $f(t) = I(t) \cdot E(t)$ nieciągłej w punktach $t = 1, 2, 3, \dots$

Funkcja $E(t)$ jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych R . W każdym przedziale ograniczonym ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości

pierwszego rodzaju i całka $\int_0^t |f(\tau)| d\tau$ ma wartość skończoną dla każdego

$t > 0$, a więc jest to funkcja \mathcal{L} -transformowalna. Dla funkcji (2) spełnione jest założenie, o którym mowa w uwadze 2.6.7. Zatem do obu stron wzoru (2) stosujemy przekształcenie Laplace'a i korzystając ze wzoru (2.6.34) otrzymamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[I(t-1)] + \mathcal{L}[I(t-2)] + \dots + \mathcal{L}[I(t-n)] + \dots \quad (3)$$

Następnie do każdego wyrazu szeregu (3) stosujemy twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym i na podstawie wzoru (2.6.3) otrzymamy transformatę w postaci następującego szeregu nieskończonego (por. wzór 2.6.35)

$$F(s) = \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-2s} + \frac{1}{s} e^{-3s} + \dots + \frac{1}{s} e^{-ns} + \dots = \frac{1}{s} (e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots) \quad (4)$$

Prawa strona (4) jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = e^{-s}$ i wyrazie $a_1 = \frac{e^{-s}}{s}$. Przy założeniu, że $\operatorname{Re} s > 0$ mamy $|e^{-s}| < 1$ i tym samym, stosując wzór na sumę szeregu geometrycznego nieskończonego zbieżnego otrzymamy transformatę danej funkcji w postaci wzoru

$$F(s) = \mathcal{L}[E(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} = \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})} \quad (5)$$

■

2.7. Transformata funkcji okresowej

Twierdzenie 2.7.1. *Jeżeli funkcja $f(t)$ jest oryginałem i na przedziale $(0, +\infty)$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T > 0$, to jej transformata $F(s)$ wyraża się wzorem*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot F_T(s) \quad (2.7.1)$$

gdzie

$$F_T(s) = \mathcal{L}[f_T(t)] = \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (2.7.2)$$

jest transformatą funkcji

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dla } t \in (0, T) \\ 0 & \text{dla } t \notin (0, T) \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Funkcję $f_T(t)$ spełniającą założenia tego twierdzenia nazywamy *oryginałem okresowym*, zaś liczbę T – jego *okresem podstawowym*.

Dowód. Z definicji \mathcal{L} -transformaty na podstawie wzoru (1.2.3) mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

W drugiej całce podstawiamy za $t = T + \tau$, następnie zmieniamy granice całkowania $\frac{t}{\tau} \left| \begin{matrix} T \\ 0 \end{matrix} \right| \frac{\infty}{\infty}$ oraz uwzględniamy, że f jest funkcją okresową, tzn. $f(T + \tau) = f(\tau)$ i otrzymujemy

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = F_T(s) + e^{-sT} F(s).$$

Rozwiązując powyższe równanie względem transformaty $F(s)$ otrzymamy

$$F(s) \cdot (1 - e^{-sT}) = F_T(s),$$

a stąd już wynika wzór (2.7.1). ■

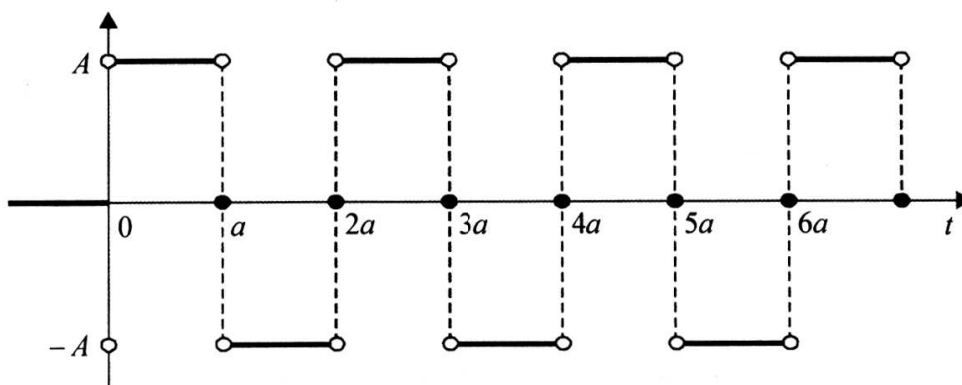
Uwaga 2.7.1. Funkcję $f_T(t)$ daną wzorem (2.7.3) można utożsamić z funkcją $f_T(t) = f(t) \cdot f_w(t)$ określoną wzorem (2.6.15), gdzie funkcja wydzielająca $f_w(t)$ jest postaci (2.6.14).

Wniosek 2.7.1.

Jeżeli funkcja $f(t)$ spełnia założenia twierdzenia 2.7.1, to

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}} \right] = f(t) \cdot I(t) \quad (2.7.4)$$

Przykład 2.36. Wyznaczyć transformatę funkcji okresowej podanej na rysunku 2.25.



Rys. 2.25. Ilustracja funkcji z przykładu 2.36

R o z w i ą z a n i e . Jest to oryginał okresowy o okresie $T = 2a$, określony na zbiorze R , ciągły na zbiorze $R \setminus \{ka\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Punkty $t = 0, a, 2a, \dots$ są punktami nieciągłości funkcji $f(t)$ (por. uwaga 2.6.6, wzór 2.6.23, rys. 2.21).

Na każdym ograniczonym przedziale funkcja $f(t)$ ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. Zatem na podstawie twierdzenia 2.7.1 istnieje transformata tej funkcji i zgodnie ze wzorem (2.7.1) dla okresu $T = 2a$ przyjmie postać

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-2as}} F_T(s) \quad (2.7.5)$$

gdzie $F_T(s) = \mathcal{L}[f_T(t)]$, a $f_T(t)$ jest oryginałem okresowym określonym wzorem

$$f_T(t) = \begin{cases} A & \text{dla } t \in (0, a) \\ -A & \text{dla } t \in (a, 2a) \\ 0 & \text{dla } t = 0, t = a, t = 2a \end{cases} \quad (2.7.6)$$

Transformatę $F_T(s) = \mathcal{L}[f_T(t)]$ funkcji $f_T(t)$ wyznaczamy bezpośrednio z definicji przekształcenia Laplace'a na podstawie wzoru (1.2.3) i uwzględniając określenie (2.7.6) funkcji $f_T(t)$ mamy

$$\mathcal{L}[f_T(t)] = \int_0^{\infty} f_T(t) e^{-st} dt = \int_0^a A e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-A) e^{-st} dt = \frac{A}{s} (1 - e^{-as})^2.$$

Zatem

$$F_T(s) = \frac{A}{s} (1 - e^{-as})^2 \quad (2.7.7)$$

Następnie uwzględniamy ten wynik w (2.7.5) i otrzymamy odpowiedź

$$F(s) = \frac{A}{s} \cdot \frac{(1 - e^{-as})^2}{1 - e^{-2as}} \quad (2.7.8)$$

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $f_T(t)$ dana wzorem (2.7.6) oraz funkcja $u_5(t)$ dana wzorem (2.6.23) – rys. 2.21 – omawiana w uwadze 2.6.6 różnią się tylko okresami i amplitudą. Jeśli skorzystamy z wyniku przykładu 2.33 i przyjmiemy we wzorze (2.6.24) $E/T = A$ i $T = a$, to uzyskamy dokładnie transformatę $F_T(s)$ wyrażoną wzorem (2.7.7). ■

Uwaga 2.7.2. Funkcję $f_T(t)$ określoną wzorem (2.7.6) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej funkcji jednostkowej $I(t)$ oraz jej przesunięć rzeczywistych postaci (2.6.1). Wtedy

$$f_T(t) = A \cdot I(t) - 2A \cdot I(t - a) + A \cdot I(t - 2a) \quad (2.7.9)$$

a stąd w łatwy sposób, korzystając z liniowości \mathcal{L} -przekształcenia oraz z tw. 2.6.1 o przesunięciu rzeczywistym, uzyskamy transformatę (2.7.7).

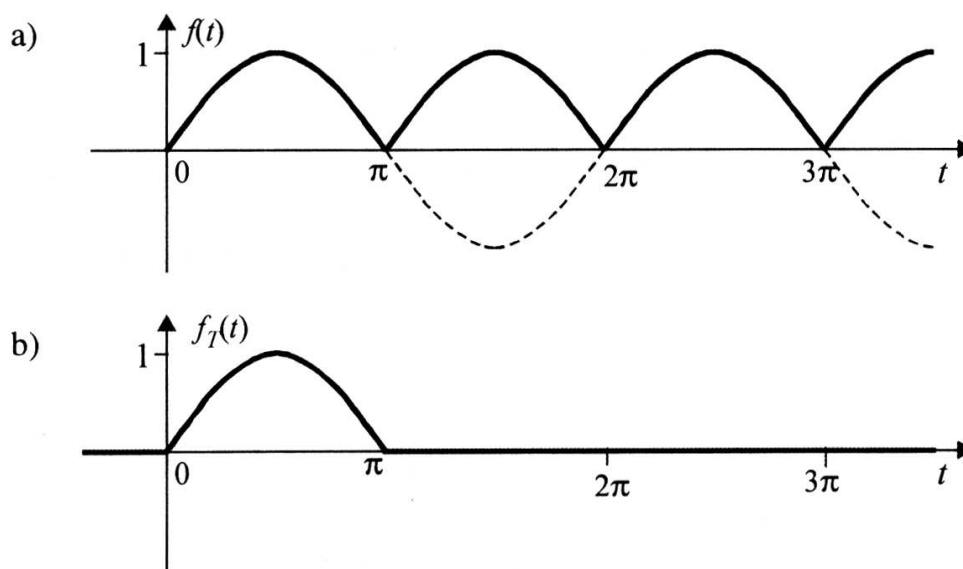
Przykład 2.37. Wyznaczyć transformatę funkcji $f(t) = |\sin t| \cdot \mathbf{I}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (rys. 2.26).

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $f(t) = |\sin t| \cdot \mathbf{I}(t)$ jest funkcją okresową o okresie $T = \pi$, a więc jej transformatę wyznaczymy stosując twierdzenie 2.7.1 o transformacie oryginału okresowego. Na podstawie wzoru (2.7.1) mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_T(t)] \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \quad (2.7.10)$$

gdzie za T podstawiliśmy π , a $f_T(t)$ oznacza funkcję na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ daną wzorem

$$f_T(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0 & \text{dla } t < 0, t > \pi \end{cases} \quad (2.7.11)$$



Rys. 2.26. Wykres oryginału okresowego $f(t) = |\sin t|$ oraz funkcji $f_T(t)$ danej wzorem (2.7.11)

Zauważmy, że funkcja $f_T(t)$ jest funkcją $f_4(t)$ z przykładu 2.26 d, dla której transformata $F_4(s)$ dana jest wzorem (11) i z wyników tam uzyskanych mamy

$$F_T(s) = \mathcal{L}[f_T(t)] = \frac{1}{s^2 + 1} (1 + e^{-\pi s}) \quad (2.7.12)$$

Uwzględniając ten wynik we wzorze (2.7.10) otrzymamy ostatecznie

$$F(s) = \mathcal{L}[|\sin t|] = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-\pi s}} \quad (2.7.13)$$

Wniosek. Korzystając z wyniku przykładu 2.37, tj. znając transformatę $F(s)$ funkcji okresowej $f(t) = |\sin t| \cdot I(t)$ można wyznaczyć transformatę oryginału okresowego postaci

$$g(t) = |\sin \omega t| \cdot I(t) = f(\omega t),$$

stosując twierdzenie 2.4.1 o podobieństwie. Na podstawie tego twierdzenia zgodnie ze wzorem (2.4.1) oraz korzystając ze wzoru (2.7.13) otrzymamy

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[|\sin \omega t|] = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}},$$

(dla $a = \omega$)

Po odpowiednich przekształceniach transformata danego oryginału okresowego przedstawia się wzorem:

$$G(s) = \mathcal{L}[|\sin \omega t|] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi s}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi s}{\omega}}} \quad (2.7.14)$$

■

2.8. Twierdzenia o wartościach granicznych

Podamy teraz pewne związki między oryginałami i transformatami, które można wykorzystać do obliczania wartości granicznych transformat i oryginałów. Wprowadzamy określenie tzw. *sektora kąтового* $\Delta(s_0; \gamma)$ o *wierzchołku*

$s_0 = \lambda_0 + i\omega_0$ i *rozwartości* 2γ , $\left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ (rys. 2.27) [13, 25].

Definicja 2.8.1.

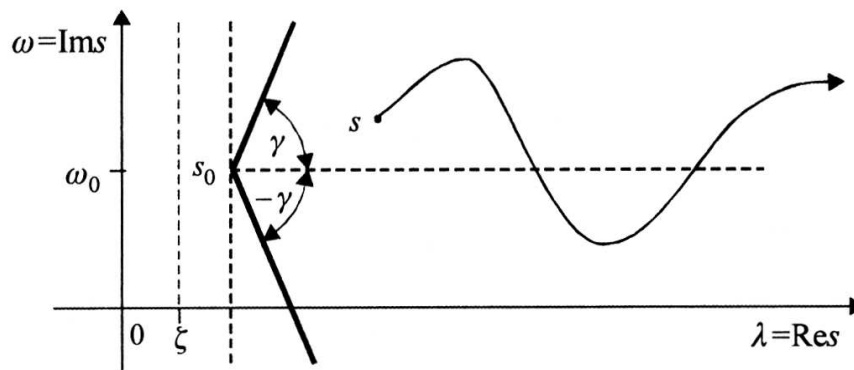
$$s \in \Delta(s_0; \gamma) \Leftrightarrow -\gamma < \arg(s - s_0) < \gamma \quad (2.8.1)$$

Twierdzenie 2.8.1 (o granicy obrazu w nieskończoności). *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, to dla każdego sektora $\Delta(s_0; \gamma)$ takiego, że $\operatorname{Re} s_0 > \zeta$ jest spełniony warunek*

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty \\ s \in \Delta(s_0; \gamma)}} F(s) = 0 \quad (2.8.2)$$

gdzie transformata $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ jest funkcją zmiennej zespolonej a ζ jest wskaźnikiem wzrostu funkcji f [13, 25].

Uwaga 2.8.1. Twierdzenie to precyzuje warunek konieczny na to, żeby funkcja zmiennej zespolonej s holomorphyzna w pewnej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s = \lambda > \zeta$ była \mathcal{L} -transformatą pewnego oryginału $f(t)$, gdzie ζ jest wskaźnikiem wzrostu funkcji $f(t)$ (porównaj twierdzenie 1.4.3).



Rys. 2.27. Ilustracja definicji 2.8.1 oraz granicy występującej po lewej stronie wzoru (2.8.2)

Przykład 2.38. Ponieważ funkcja $F(s) = \frac{2s-1}{s+3}$ jest holomorphyzna w całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktu $s = -3$, w którym ma biegun pojedynczy, to również jest holomorphyzna w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 0$. Jednakże funkcja ta nie jest \mathcal{L} -transformatą żadnego oryginału $f(t)$, ponieważ dla sektora $\Delta(s_0; \gamma)$ położonego w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 0$ mamy

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ s \in \Delta(s_0; \gamma)}} F(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{2s-1}{s+3} = 2,$$

a to znaczy, że warunek (2.8.2) nie jest spełniony (por. wzór 1.2.4). ■

Podamy teraz związki między wartościami funkcji dla $t = 0$ i $t = +\infty$, a wartościami transformaty dla $s = +\infty$ i $s = 0$.

Twierdzenie 2.8.2. *Jeżeli funkcje $f(t)$ i $f'(t)$ są oryginałami oraz $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i istnieje granica $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$, to*

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) \quad (2.8.3)$$

Twierdzenie 2.8.3. *Jeżeli funkcje $f(t)$ i $f'(t)$ są oryginałami, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ oraz istnieje granica w nieskończoności $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, to*

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (2.8.4)$$

Uwaga 2.8.2. Granice występujące w (2.8.3) i (2.8.4) są granicami w płaszczyźnie zmiennej zespolonej ($s = \lambda + i\omega$) i dążenie zmiennej s do zera lub do nieskończoności może odbywać się na nieskończenie wiele różnych sposobów. Wzory te są w szczególności słuszne, jeśli założymy, że $s \rightarrow 0$ lub $s \rightarrow +\infty$ wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej (tzn. s jest rzeczywiste) [13, 25].

Uwaga 2.8.3. Twierdzenia odwrotne do twierdzeń 2.8.2 i 2.8.3 nie są prawdziwe. Równość (2.8.4) jest prawdziwa tylko wtedy, gdy $f(t)$ ma granicę przy t zmierzającym do nieskończoności, co nie zawsze zachodzi, tzn. z istnienia granicy $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$ nie wynika istnienie granicy $f(\infty)$. Na przykład: dla funkcji

$f(t) = \sin at$ i $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ granica $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sa}{s^2 + a^2} = 0$, natomiast granica $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin at$ nie istnieje. Podobną uwagę można uczynić odnośnie do równości (2.8.3).

Na podstawie twierdzenia 2.8.2 możemy wyznaczać wartości początkowe oryginału $f(t)$ i jego pochodnych $f'(t)$, $f''(t)$, itd. (nie znając oryginału) w oparciu tylko o znajomość jego \mathcal{L} -transformaty $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Przykład 2.39. Zilustrować twierdzenie 2.8.2 na przykładzie funkcji $f(t) = \cos t$.

R o z w i ą z a n i e . Funkcja $f(t) = \cos t$ jest oryginałem i jej pochodna $f'(t) = -\sin t$ również jest oryginałem, oraz istnieje granica

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos t = 1 \quad (1)$$

Z drugiej strony wiemy, że transformata funkcji $\cos t$ dana jest wzorem

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1},$$

a więc

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + 1} = 1 \quad (2)$$

Porównując stronami zależności (1) i (2) otrzymaliśmy

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+),$$

co jest zgodne ze wzorem (2.8.3) dla danej funkcji. ■

Przykład 2.40. Zilustrujemy twierdzenie 2.8.3 na przykładzie funkcji $f(t) = t^2 e^{-3t}$.

R o z w i ą z a n i e . Sprawdzamy założenia twierdzenia 2.8.3. Ponieważ funkcja e^{-3t} jest oryginałem, to na podstawie lematu 1.1.3 funkcja $t^2 e^{-3t}$ jest także oryginałem. Sprawdzamy następnie, czy istnieje granica w nieskończoności oryginału $f(t)$. Obliczamy granicę stosując dwukrotnie regułę de L'Hospitala

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-3t} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^{3t}} \stackrel{[H]}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{3e^{3t}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{9e^{3t}} = 0 \quad (1)$$

Zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Obliczamy następnie transformatę $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Z twierdzenia 2.3.1 o różniczkowaniu transformaty na podstawie wzoru (2.3.2) dla $n = 2$ mamy

$$F(s) = \mathcal{L}[t^2 e^{-3t}] = \frac{d^2}{ds^2} (\mathcal{L}[e^{-3t}]) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+3} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{(s+3)^2} \right) = \frac{2}{(s+3)^3}.$$

Następnie, zgodnie z lewą stroną wzoru (2.8.4) obliczamy

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{(s+3)^3} = 0 \quad (2)$$

Porównując stronami zależności (1) i (2) wnioskujemy: ponieważ prawe strony są sobie równe to i lewe strony muszą być sobie równe. Zatem mamy

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t),$$

co potwierdza prawdziwość wzoru (2.8.4) dla danej funkcji. ■

Przykład 2.41. Dana jest transformata $F(s) = \frac{s+2}{s(s^2+5s+4)}$ pewnego oryginału $f(t)$. Nie znajdując oryginału $f(t)$, za pomocą twierdzenia 2.8.2 o granicy oryginału w zerze obliczyć wartości początkowe $f(0^+)$, $f'(0^+)$ oraz $f''(0^+)$ przy założeniu, że $f'(t)$ i $f''(t)$ są także oryginałami.

R o z w i ą z a n i e . Z przyjętych założeń funkcje $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ są oryginałami, a więc istnieją też wartości początkowe $f(0^+)$, $f'(0^+)$, $f''(0^+)$. Najpierw wyznaczmy $f(0^+)$.

Z twierdzenia 2.8.2 o granicy oryginału w zerze, na podstawie wzoru (2.8.3), mamy

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s+2}{s^2+5s+4} = 0.$$

Zatem

$$f(0^+) = 0 \quad (1)$$

Uwzględniając otrzymany wynik we wzorze (2.2.1) (patrz twierdzenie 2.2.1 o transformacie pochodnej) mamy

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+) = s \cdot F(s) - 0 = \frac{s+2}{s^2+5s+4}.$$

Przyjmujemy chwilowo nowe oznaczenia dla oryginału $f'(t) = g(t)$ i dla jego transformaty $\mathcal{L}[f'(t)] = G(s)$. Korzystamy ponownie z twierdzenia o granicy oryginału w zerze i na podstawie wzoru (2.8.3) wyznaczamy

$$g(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \frac{s+2}{s^2+5s+4} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^2+2s}{s^2+5s+4} = 1.$$

Wracając do poprzednich oznaczeń mamy w ten sposób wyznaczoną wartość początkową $f'(t)$, tj.

$$f'(0^+) = 1 \quad (2)$$

Uwzględniając wartości początkowe (1) i (2) we wzorze (2.2.6) (patrz twierdzenie 2.2.2 o transformacie pochodnej rzędu n) mamy

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0^+) - f'(0^+) = s^2 \cdot \frac{s+2}{s(s^2+5s+4)} - 1 = \frac{-3s-4}{s^2+5s+4}.$$

Analogicznie jak poprzednio, jeśli przyjmiemy chwilowo oznaczenia dla oryginału $f''(t) = h(t)$, a dla jego transformaty $\mathcal{L}[f''(t)] = H(s)$, to korzystając ponownie z twierdzenia 2.8.2, na podstawie wzoru (2.8.3) wyznaczamy wartość początkową

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot H(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot \frac{-3s-4}{s^2+5s+4} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{-3s^2-4s}{s^2+5s+4} = -3.$$

Wracając do poprzednich oznaczeń, otrzymaliśmy w ten sposób wartość początkową drugiej pochodnej $f''(t)$, tj.

$$f''(0^+) = -3 \quad (3)$$

Szukane wartości początkowe to:

$$f(0^+) = 0, \quad f'(0^+) = 1, \quad f''(0^+) = -3 \quad (4)$$

U w a g a . Zadanie to można rozwiązać w ten sposób, że najpierw wyznaczamy oryginał $f(t)$, który w przypadku naszego zadania dla danej transformaty

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s^2+5s+4)}$$

wyraża się wzorem

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t}, \quad \text{dla } t > 0 \quad (5)$$

(Zachęcam Czytelnika do samodzielnego wyznaczenia tego oryginału dowolną metodą) i stąd wyznaczamy wartość początkową

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} \right) = 0 \quad (6)$$

Następnie obliczamy pochodne oryginału $f(t)$. Z zależności (5) mamy kolejno

$$f'(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \quad \text{i} \quad f''(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{8}{3}e^{-4t} \quad (7)$$